3 Lois de probabilités

3.1 Variables aléatoires discrètes

Q.3.1

Dans l'expérience consistant à lancer deux dés, on s'intéresse au total et à la différence des résultats des deux dés. Décrire l'ensemble des réalisations de ces deux variables aléatoires.

Q.3.2

Dans l'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés, on considère la variable aléatoire X : la somme des résultats des deux dés. Construire un tableau de distribution de probabilités.

Q.3.3

Pour la variable aléatoire X de l'exercice 2, trouver les probabilités suivantes : $P(4 < X \leq 8)$, $P(2 \leq X < 5)$ et $P(X \geq 9)$

Q.3.4

On choisit 2 boules au hasard d'une urne en contenant 8 blanches, 4 noires et 2 oranges. Supposons que l'on reçoive 2$ pour chaque boule noire tirée et que l'on perde 1$ pour chaque boule blanche tirée. Soit X : « les gains nets ». Trouver la distribution de probabilités de X.

Q.3.5

On classe 5 hommes et 5 femmes selon leurs résultats lors d'un examen. On fait l'hypothèse que tous les scores sont différents et que les 10! classements sont équiprobables. On désigne par X le classement de la meilleure femme (par exemple, X vaudra 2 si le meilleur résultat a été obtenu pas un homme et le suivant par une femme). Trouver la distribution de probabilités de X.

Q.3.6

On lance un sou 3 fois et Y désigne le nombre de faces obtenues. Trouver la fonction de répartition de Y et représenter graphiquement.

Q.3.7

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est donnée par

$$F(b) = \begin{cases} 0 & \text{si } b > 0 \\ 1/2 & \text{si } 0 \leq b < 1 \\ 3/5 & \text{si } 1 \leq b < 2 \\ 4/5 & \text{si } 2 \leq b < 3 \\ 9/10 & \text{si } 3 \leq b < 3.5 \\ 1 & \text{si } b \geq 3.5 \end{cases}$$

Représenter graphiquement et trouver la loi de probabilité de X.

3.2 Caractéristiques de tendance centrale et de dispersion

Q.3.8

Trouver l'espérance d'une variable aléatoire X définie par la fonction de probabilités suivante :

x_i	$f(x_i)$
18	0,04
19	0,14
20	0,14
21	0,24
22	0,16
23	0,12
24	0,07
25	0,05
26	0,04
Total	1,00

Q.3.9

Soit X une variable aléatoire qui prend une des 3 valeurs -1, 0 et 1 avec les probabilités suivantes :
$P(X = -1) = 0.2$; $P(X = 0) = 0.5$; $P(X = 1) = 0.3$
Calculer $[E(X)]^2$ et $E\left(X^2\right)$.

Q.3.10

Soit un sac contenant 5 boules, trois rayées notées R1, R2 et R3 et 2 boules unies notées U1 et U2. On pige 3 boules au hasard, sans remise. Posons X : « Le nombre de boules rayées pigées ».

a) Donner l'ensemble des réalisations de X.
b) Calculer la distribution de probabilités de X.
c) Calculer le mode, la médiane et l'espérance de X.
d) Calculer l'étendue, l'écart-moyen, la variance et l'écart type de X.

Q.3.11

Quatre bus transportant 148 élèves de la même école arrivent à un stade de football. Les bus transportent respectivement 40, 33, 25 et 50 élèves. Un des étudiants est choisi au hasard. Soit X le nombre d'étudiants qui était dans le bus de cet élève choisi aléatoirement. Un des 4 chauffeurs de bus est également choisi au hasard. Soit Y le nombre d'élèves dans son bus.

a) Entre $E(X)$ et $E(Y)$, laquelle pensez-vous qui est la plus grande ?
b) Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.

Q.3.12

Vous achetez un billet de loterie où vous avez une probabilité de 1/20 de gagner 10$, 1/5 de gagner 5$ et 1/4 de gagner 1$. Quel montant accepteriez-vous de payer pour un tel billet de loterie ?

Q.3.13

Si $E(X) = 1$ et $Var(X) = 5$, trouver

a) $E\left[(2+X)^2\right]$

b) $Var(4+3X)$

3.3 Lois discrètes

3.3.1 Loi binomiale

Q.3.14

Une urne contient quatre boules blanches et six boules noires. L'expérience aléatoire consiste à tirer successivement et avec remise cinq boules de cette urne. Si X représente le nombre de boules blanches tirées, trouver la fonction de probabilités de X, puis calculer la probabilité de piger...

a) au moins deux boules blanches.

b) seulement des boules noires.

Q.3.15

Marco est un joueur de basketball qui réussit 90% de ses lancers francs. Quelle est la probabilité qu'il réussisse au moins 7 de ses 10 prochains lancers francs ?

Q.3.16

Un étudiant doit subir un examen objectif comportant 25 questions. Pour chacune des questions une seule réponse est bonne parmi les 4 réponses suggérées. Si cet étudiant, n'ayant aucunement travaillé, répond aux questions d'une manière tout à fait aléatoire :

a) Combien de bonnes réponses peut-il espérer ?

b) Quelle est la probabilité qu'il réussisse son examen, c'est-à-dire qu'il ait au moins 15 bonnes réponses ? *(donner la réponse avec 4 décimales)*

Q.3.17

Dans une classe de 30 élèves, 6 portent des lunettes. Si on choisit au hasard et avec remise un échantillon de 5 élèves dans cette classe, quelle est la probabilité qu'aucun d'entre eux ne porte des lunettes ?

Q.3.18

Si $X \sim B\,(12; 0{,}10)$, trouver :

a) $P\,(X = 1)$

b) $P\,(X = 6)$

c) $E\,(X)$

d) $\mathrm{Var}\,(X)$

Q.3.19

Un chasseur d'oies blanches abat 60% des oies sur lesquelles il tire. Calculer la probabilité qu'avec ses 10 prochains tirs il abatte au moins 7 oies. Trouver l'espérance et la variance du nombre d'oies abattues dans ces 10 tirs.

Q.3.20

À la mini-loto, un billet sur cent est un billet gagnant. À chaque semaine vous achetez un billet.

a) Quelle est la probabilité que vous gagniez au moins une fois au cours du prochain mois (4 semaines) ?

b) Quelle est la probabilité que vous gagniez quatre fois au cours de la prochaine année ?

c) Combien de fois pouvez-vous espérer gagner au cours de la prochaine année ?

d) Combien de billets doit-on acheter pour que la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant dépasse 90 % ?

3.3.2 Lois géométrique et binomiale négative

Q.3.21

Une roulette comporte 12 cases rouges, 12 cases noires et 8 cases blanches. Soit X le nombre d'essais nécessaire pour obtenir la première case rouge. Trouver :

a) $P(X = 1)$ b) $P(X = 2)$ c) $E(X)$

Q.3.22

Un archer peut atteindre une cible à 100 m avec une probabilité de 0,6. Si l'on considère ses tirs comme des épreuves de Bernouilli indépendantes,

a) quelle est la probabilité qu'il ait besoin de moins de 4 tirs pour toucher la cible une première fois.

b) quelle est la probabilité qu'il ait besoin de moins de 4 tirs pour toucher la cible une seconde fois.

Q.3.23

Un joueur décide de lancer simultanément 3 pièces de monnaie jusqu'à ce qu'il obtienne simultanément 3 faces d'un seul lancer. Quelle est la probabilité qu'il y arrive en moins de 5 lancers.

Q.3.24

Pour réaliser une émission de télévision, un journaliste doit interroger 4 personnes sur la rue. Il sait qu'une personne accepte d'être interrogée avec une probabilité de 0,6. Quelle est la probabilité qu'il obtienne ses 4 entrevues en demandant à moins de 7 personnes.

3.3.3 Loi de Poisson

Q.3.25

Au Canada, au cours des fins de semaine, on a observé qu'il y a 3,2 accidents de la circulation à l'heure. En admettant que ces accidents sont indépendants, quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucun accident de la circulation dans un intervalle d'une heure de fin de semaine ?

Q.3.26

On sait que certaines bactéries sont présentes dans l'eau dans une proportion de 3 bactéries par cm^3. Quelle est la probabilité qu'un échantillon de 10 cm^3 contienne 10 bactéries ?

Q.3.27

Dans la ville MACABRE, il y a en moyenne 1,2 décès par jour. Si on admet que le nombre de décès suit une loi de Poisson, trouver la probabilité pour que la semaine prochaine il y ait exactement 10 décès.

Q.3.28

Au département d'obstétrique d'un hôpital, on reçoit en moyenne 5 patientes par jour. On estime qu'on manquerait de personnel si le nombre d'admissions dépassait 9 pour une journée. Cette éventualité est-elle à craindre ?

Q.3.29

Un policier décerne en moyenne 4 contraventions par jour. Quelle est la probabilité qu'une journée donnée...

a) il en décerne trois ?

b) il en décerne plus de trois ?

Q.3.30

Dans une paroisse, le curé célèbre en moyenne 1,347 messe de funérailles par semaine.

a) Quelle est la probabilité qu'il ait à célébrer 3 messes de funérailles la semaine prochaine ?

b) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas de funérailles au cours de la semaine ?

c) Quelle est la probabilité qu'il y ait 14 semaines sans funérailles au cours d'une année dans cette paroisse ?

Q.3.31

Vous pigez 78 fois de suite une carte dans un jeu normal en prenant soin de remettre cette carte après chaque pige.

a) Quelle est la probabilité de piger l'AS de COEUR exactement 3 fois en 78 essais ?

b) Approximer cette probabilité en utilisant la loi de poisson.

Q.3.32

Environ 2% des ampoules électriques produites par la compagnie Chandelle sont défectueuses. Un marchand reçoit une commande de 500 ampoules de cette compagne.
Calculez la probabilité que...

a) il y ait une ampoule défectueuse.

b) il y en ait 5 défectueuses.

c) il y en ait 8 défectueuses.

Utilisez l'approximation de Poisson pour trouver la probabilité que...

d) il y en ait une défectueuse.

d) il y en ait 5 défectueuses.

d) il y en ait 8 défectueuses.

3.3.4 Loi hypergéométrique

Q.3.33

Dans un groupe de 25 personnes, 10 sont des fumeurs. On choisit, au hasard et simultanément, 4 de ces 25 personnes pour former un comité.

a) À combien de fumeurs doit-on s'attendre dans le comité ?

b) Quelle est la probabilité que le comité ait moins de fumeurs que de non-fumeurs ?

Q.3.34

Dans un jeu de 52 cartes, on tire 2 cartes au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une carte de trèfle si :

a) le tirage se fait avec remise ?

b) le tirage se fait sans remise ?

3.4 Variables aéatoires continues

Q.3.35

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Quelle est la valeur de c ?

b) Quelle est la fonction de répartition de X ?

Q.3.36

Si un système a une durée de vie aléatoire dont la fonction de densité (en mois) est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} cxe^{-x/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

quelle est la probabilité que le système fonctionne pendant au moins 5 mois ?

Q.3.37

Les fonctions suivantes peuvent-elles être des fonctions de densité ? Si oui, déterminer c.

a) $f(x) = \begin{cases} c(2x - x^3) & \text{si } 0 < x < 5/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} c(2x - x^2) & \text{si } 0 < x < 5/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Q.3.38

La variable aléatoire X représente la durée de vie en heures d'un certain composant électrique. Sa fonction de densité est donnée par Si un système a une durée de vie aléatoire dont la fonction de densité (en mois) est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{10}{x^2} & \text{si } x > 10 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Trouver $P(X > 20)$.

b) Quelle est la fonction de répartition de X ?

c) Quelle est la probabilité que parmi 6 composants, au moins 3 d'entre eux fonctionnent durant au moins 15 heures ?

Q.3.39

Calculer $E(X)$ si la fonction de densité de X est :

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} x e^{-x/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} c(1 - x^2) & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{x^2} & \text{si } x > 5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

3.5 Lois continues

3.5.1 Loi uniforme

Q.3.40

Si X est uniformément distribuée sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$, c'est-à-dire $X \sim U(\alpha, \beta)$, montrer que $E(X) = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ et que $Var(X) = \dfrac{(\beta - \alpha)^2}{12}$.

Q.3.41

Soit X une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[10; 40]$. Trouver :

a) La fonction de densité de X

b) $P(15 < X < 20)$

Q.3.42

Soit Y une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[5; 25]$. Calculer...

a) $P(Y > 25)$

b) $P(0 < Y < 15)$

c) $P(5 < Y < 5{,}1)$

Q.3.43

Un autobus circule entre 2 villes A et B distantes de 100 km. On admet que lorsque l'autobus tombe en panne, la distance entre l'endroit de la panne et la ville A est uniformément distribuée sur l'intervalle $(0, 100)$. Il y a une station de réparation en A, une autre en B et une autre à mi-chemin entre A et B. On suggère qu'il serait plus efficace d'avoir les 3 stations localisées respectivement à 25, 50 et 75 km de A. Êtes-vous de cet avis ? Pourquoi ?

Q.3.44

Un point est choisi au hasard sur un segment de longueur 1 m. Déterminer la probabilité que le rapport entre le plus petit et le plus grand segment soit inférieur à 1/4.

3.5.2 Loi exponentielle

Q.3.45

Si X obéit à une loi exponentielle de paramètre λ, c'est-à-dire $X \sim Exp(\lambda)$, montrer que $Var(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Q.3.46

Le nombre d'heures nécessaires pour effectuer une tâche est une variable exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}4$. Quelle est la probabilité qu'il faille plus de trois heures pour effectuer cette tâche ?

Q.3.47

À une clinique médicale sans rendez-vous, il arrive, en moyenne, 12 patients à l'heure. Si on suppose que le nombre d'arrivées suit une loi de Poisson et qu'on désigne par X le temps d'attente entre 2 arrivées, trouver

a) $E(X)$

b) $P(X > 1/4)$

Q.3.48

Le nombre d'années de fonctionnement d'une calculatrice est distribué exponentiellement et $\lambda = 1/4$. Si j'achète une calculatrice, quelle est la probabilité qu'elle fonctionne encore après 5 ans ?

3.5.3 Loi normale

Q.3.49

Si $Z \sim N(0;1)$, trouver :

a) $P(0{,}80 < Z < 2{,}35)$

b) $P(-2{,}11 < Z < 0)$

c) $P(-0{,}35 < Z < 3{,}42)$

Q.3.50

Si $X \sim N\left(20;10^2\right)$, trouver :

a) $P(X > 25)$

b) $P(15 < X < 18)$

Q.3.51

Si $X \sim N(40;25)$, trouver :

a) $P(36 < X < 44)$

b) $P(X > 50)$

Q.3.52

Si $Z \sim N(0;1)$, trouver z_i tel que :

a) $P(0 < Z < z_i) = 0{,}4901$

b) $P(0 < Z < z_i) = 0{,}4280$

c) $P(Z > z_i) = 0{,}1660$

d) $P(-1{,}00 < Z < z_i) = 0{,}6380$

Q.3.53

On considère que la taille des enfants de 12 ans est une variable aléatoire continue qui obéit à une loi normale de moyenne 125 cm et d'écart type 15 cm. Si on choisit un enfant de 12 ans au hasard, quelle est la probabilité qu'il ait une taille de plus de 140 cm ?

Q.3.54

La quantité annuelle de précipitation (en cm) dans une certaine région est distribuée normalement avec une moyenne de 140 et un écart-type de 4. Quelle est la probabilité qu'à partir de cette année, il faille plus de 10 ans avant d'obtenir une année avec une quantité annuelle de pluie supérieure à 150 cm ?

Q.3.55

On suppose que la taille, en cm, d'un homme de 25 ans est une variable aléatoire normale de moyenne 175 et de variance 36.

a) Quel est le pourcentage d'hommes de 25 ans mesurant plus de 185 cm ?

b) Parmi les hommes mesurant plus de 180 cm, quel pourcentage d'entre eux dépassent 192 cm ?

Q.3.56

Les scores d'une population dans un test d'aptitudes sont distribués normalement avec une moyenne de 500 et d'écart-type 100. Votre score est de 527. Quelle est votre cote z ? Quel pourcentage de la population a un score supérieur au vôtre ?

Q.3.57

Un fabricant d'ordinateurs affirme que la durée de vie (i.e. la durée de fonctionnement sans nécessiter de réparations) de ses appareils est une variable normale de moyenne 4,2 ans et d'écart-type 1,3 ans.

a) Ce manufacturier offre une garantie de deux ans, quelle est la proportion des ordinateurs qui feront défaut pendant la période de garantie ?

b) Quelle devrait être la durée « x » de la garantie pour que ce fabricant n'ait à réparer que 3% de ses ordinateurs pendant la période de garantie ?

Q.3.58

Une compagnie mettant de l'eau en bouteilles sait que le volume d'eau que contient une bouteille suit une loi normale dont la variance est de 3,5 ml^2. Sachant que 5,05% des bouteilles contiennent moins de 323 ml, quel est le volume moyen des bouteilles d'eau embouteillées par cette compagnie ?

Q.3.59

À son dernier examen de mathématiques, Louis-Charles a obtenu 55. La moyenne de l'examen était de 55,6 avec un écart type de 10,66. Comme les résultats étaient plutôt faibles, le professeur décide de les normaliser avec une moyenne de 70 et un écart type de 5. Quelle sera la note normalisée de Louis-Charles ?

Q.3.60

On envoie 200 questionnaires par la poste pour effectuer un sondage. On sait que la probabilité qu'une personne retourne le questionnaire est de 32%. Quelle est la probabilité qu'au moins 60 questionnaires soient retournés remplis ?

Q.3.61

Deux types de pièces de monnaie sont produites dans une fabrique : des pièces équilibrées et des pièces biaisées, lesquelles montrent pile dans 55% des cas. Supposons que nous possédions une pièce de cette fabrique et que nous ignorions si elle est équilibrée ou biaisée. Pour pouvoir déterminer de quelle pièce il s'agit, nous effectuons le test statistique suivant : la pièce est lancée 1000 fois ; si on obtient pile 525 fois ou plus, alors on conclut que c'est une pièce biaisée, tandis que si on obtient pile moins de 525 fois, alors on conclut que c'est la pièce équilibrée.

a) Si la pièce est réellement équilibrée, quelle est la probabilité que l'on aboutisse à une conclusion fausse ?

b) Qu'en est-il si la pièce est biaisée ?

3.6 Exercices récapitulatifs

Q.3.62

Soit X, une variable aléatoire dont la distribution de probabilités est donnée par :

x_i	$f(x_i)$
-2	0,1
0	0,2
1	0,3
3	0,3
5	0,1
Total	1,0

a) Trouver $E(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

b) Si $Y = 6x - 1$, trouver $E(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

Q.3.63

Une urne contient 10 boules. Sur chaque boule un chiffre est noté ; on a $\{0, 1, 1, 1, 3, 4, 5, 5, 7, 8\}$. On tire une boule au hasard. Si X est la variable aléatoire représentant le chiffre obtenu, trouver $E(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Q.3.64

Un contremaître achète des transistors par lot de 20. Sa stratégie consiste à tester seulement 4 transistors par lot, choisis aléatoirement, et à accepter le lot seulement si tous les transistors sont en bon état. Si la probabilité qu'un transistor soit défectueux est 0,1, quelle proportion des lots sera refusée par le contremaître.

Q.3.65

On sait qu'une boîte de 5 composants électriques en comporte 2 défectueux. Les composants sont choisis au hasard et testés l'un après l'autre (sans remettre le précédent). Trouver l'espérance du nombre de test qu'il faudra effectuer pour trouver les 2 éléments défectueux.

Q.3.66

Une urne contient cinq boules blanches et quinze boules noires. On y pige cinq boules au hasard et avec remise. Quelle est la probabilité de piger…

a) au moins deux boules blanches ?

b) quatre boules blanches ?

c) des boules d'une même couleur ?

Q.3.67

Une machine fabrique des objets dont 4% sont défectueux. On choisit au hasard et avec remise un échantillon de taille n. Quelle doit être la valeur de n pour que la probabilité que l'échantillon compte au moins un objet défectueux dépasse 95% ?

Q.3.68

Au moins 9 des 12 jurés doivent estimer l'accusé coupable pour rendre le jugement exécutoire. Supposons que la probabilité pour un juré d'estimer un coupable innocent est de 0,2 tandis qu'elle est de 0,1 de commettre l'erreur contraire. Les jurés rendent leur décision indépendamment des autres et 65% des accusés sont coupables.

a) Trouver la probabilité que le jury rende une sentence correcte.

b) Quel pourcentage des accusés sera condamné ?

Q.3.69

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ x/4 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1/4 + x/4 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 11/12 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Calculer $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3)$ et $P(1/2 < X < 3/2)$

Q.3.70

Dans une usine, il y a en moyenne 0,3285 accident par semaine. Quelle est la probabilité

a) qu'il y ait 2 accidents au cours d'une semaine ?

b) qu'il y ait 40 semaines sans accident au cours de la prochaine année ?

c) qu'il y ait au moins 3 accidents pendant les 4 prochaines semaines ?

Q.3.71

Un individu attrape, en moyenne, 5 rhumes par année. Une compagnie pharmaceutique lance un nouveau médicament sur le marché et prétend que celui-ci abaisse le nombre moyen de rhumes à 3 par année. Par contre, le médicament a un effet sur seulement 75% de la population. Un individu essaie ce médicament pendant un an et il attrape 2 rhumes. Quelle est la probabilité que le médicament ait effet sur lui ?

Q.3.72

Au niveau collégial, 3% des professeurs ont un diplôme de doctorat. Quelle est la probabilité que dans un cégep comptant 125 professeurs, on retrouve 3 professeurs détenant un doctorat ?

Q.3.73

Au niveau collégial, 60% des professeurs ont un diplôme de maîtrise. Quelle est la probabilité que dans un cégep comptant 216 professeurs, on retrouve plus de 120 professeurs détenant un diplôme de maîtrise ?

Q.3.74

Dans un examen imposé par une corporation à un très grand nombre de personnes, on considère que la note obtenue est une variable aléatoire obéissant à une loi normale. La note moyenne est de 65 et la variance est de 15^2. La corporation décide que seulement 25% des participants seront accrédités par cet examen. Quelle note faut-il obtenir pour être accrédité ?

Q.3.75

La durée de vie en heures d'un tube électronique est une variable aléatoire ayant pour densité :

$$f(x) = xe^x \qquad x \geq 0.$$

Calculer l'espérance de la durée de vie d'un tel tube.

Q.3.76

Quelle est la probabilité qu'une personne lançant une pièce de monnaie équilibrée obtienne face pour la 2ème fois au 5ème lancer.

Q.3.77

On jette un sou jusqu'à ce que l'on obtienne pile pour la deuxième fois. La variable aléatoire T compte le nombre d'apparitions du côté face. Trouver la distribution de probabilité de T.

Q.3.78

Une urne contient 4 boules blanches et 4 noires. On tire 4 boules au hasard. Si 2 sont blanches et 2 sont noires on s'arrête. Sinon, on remet les boules dans l'urne et on recommence le tirage jusqu'à ce que l'on obtienne 2 blanches et 2 noires. Quelle est la probabilité qu'il faille exactement n tirages avant de s'arrêter ?

Q.3.79

Le nombre d'années de fonctionnement d'une machine à café suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/8$. Quelle est la probabilité qu'une machine choisie au hasard fonctionne plus de 8 ans ?

Q.3.80

Vous arrivez à un arrêt d'autobus à 10 h sachant que l'autobus arrivera à un certain instant qui est uniformément distribué entre 10 h et 10 h 30.

a) Quelle est la probabilité que vous deviez attendre plus de 10 minutes ?

b) Si à 10 h 15 le bus n'est pas encore arrivé, quelle est la probabilité que vous deviez attendre au moins 10 minutes supplémentaires ?

Q.3.81

Si 15% des pièces produites par une machine sont défectueuses, quelle est la probabilité qu'il faille en fabriquer 3 en vue d'obtenir une bonne pièce.

Q.3.82

Le temps nécessaire (en jours) pour construireune maison unifamiliale est une variable aléatoire qui obéit à la loi normale dont la moyenne est 45 jours et l'écart type 4 jours.

a) Quelle est la probabilité qu'il faille entre 40 et 52 jours pour construire une maison unifamiliale ?

b) Si le constructeur accorde une réduction de 2000$ sur toute maison qui n'est pas livrée en moins de 51 jours, quel pourcentage des acheteurs y auront droit ?

c) Si le constructeur ne veut accorder cette réduction que pour 0,5% des maisons qu'il construit, quel délai de livraison doit-il garantir ?

Q.3.83

Dans un atelier de confection de vêtements pour femmes, le temps requis pour confectionner une robe est normalement distribué avec une moyenne de 82,2 minutes et un écart-type de 10 minutes.

a) Quel est le pourcentage des robes qui sont confectionnées dans un temps compris entre une heure et une heure et quinze minutes ?

b) Quel est le temps « x » requis pour produire 10% des robes qui nécessitent le plus de temps de confection ?

c) Si vous fabriquez 8 robes, quelle est la probabilité que ça vous prenne moins de 10 heures ?

Q.3.84

Un homme tirant sur une cible reçoit 10 points si son coup est à moins de 1 cm du centre de la cible, 5 points s'il s'en éloigne de 1 à 3 cm et 3 points s'il s'en éloigne de 3 à 5 cm. Trouver l'espérance du nombre de points si la distance du tir au centre de la cible est uniformément distribuée entre 0 et 10.

Q.3.85

Si $X \sim Exp(\lambda)$, montrer que pour tous $s > 0$ et $t > 0$, on a

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s)$$

et interpréter cette règle. C'est ce qu'on appelle la propriété d'*absence de mémoire.*

Réponses aux exercices

R.3.1
$\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ et $\{0,1,2,3,4,5\}$

R.3.2

x_i	$f(x_i) = P(X = x_i)$
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
8	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36
Total	1

R.3.3 $P(4 < X \leq 8) = \dfrac{5}{9}$

$P(2 \leq X < 5) = \dfrac{1}{6}$ et $P(X \geq 9) = \dfrac{5}{18}$

R.3.4

$f(4) = \dfrac{6}{91}$ $f(1) = \dfrac{32}{91}$ $f(-1) = \dfrac{16}{91}$

$f(2) = \dfrac{8}{91}$ $f(0) = \dfrac{1}{91}$ $f(-2) = \dfrac{28}{91}$

R.3.5

$f(1) = \dfrac{1}{2}$ $f(4) = \dfrac{5}{84}$ $f(7) = 0$

$f(2) = \dfrac{5}{18}$ $f(5) = \dfrac{5}{252}$ $f(8) = 0$

$f(3) = \dfrac{5}{36}$ $f(6) = \dfrac{1}{252}$ $f(9) = 0$

$f(10) = 0$

R.3.6

$F(0) = \dfrac{1}{8}$ $F(1) = \dfrac{1}{2}$ $F(2) = \dfrac{7}{8}$ $F(3) = 1$

R.3.7

$f(0) = \dfrac{1}{2}$ $f(2) = \dfrac{1}{5}$ $f(3.5) = \dfrac{1}{10}$

$f(1) = \dfrac{1}{10}$ $f(3) = \dfrac{1}{10}$

R.3.8 21,47

R.3.9 $[E(X)]^2 = 0.01$; $E\left(X^2\right) = 0.5$

R.3.10

a) $\{0,1,2,3\}$

b) $f(0) = 0$; $f(1) = \dfrac{3}{10}$; $f(2) = \dfrac{3}{5}$; $f(3) = \dfrac{1}{10}$

c) $\text{Mo}(X) = 2$ $\text{Md}(X) = 2$ $E(X) = 1{,}8$

d) Étendu $= 3$ $\text{EM}(X) = 0{,}48$ $Var(X) = 0{,}36$ $\sigma = 0{,}6$

R.3.11

b) $E(X) = 39{,}284$ élèves ; $E(Y) = 37$ élèves

R.3.12 1.75$ et moins

R.3.13

a) 14 b) 45

R.3.14

x_i	$f(x_i)$
0	$C_0^5\,(0{,}4)^0\,(0{,}6)^5 = 0{,}0778$
1	0,2592
2	0,3456
3	0,2304
4	0,0768
5	0,0102
Total	1,0000

a) 0,663 b) 0,0778

R.3.15 0,9872

R.3.16

a) 6,25 b) 0,0002

R.3.17 0,3277

R.3.18

a) 0,3766 b) 0,0005 c) 1,2 d) 1,08

R.3.19 $P(X \geq 7) = 0{,}3822$, $E(X) = 6$ et $\text{Var}(X) = 2{,}4$

R.3.20

a) 0,0394 b) 0,0017 c) 0,52 fois d) 230 billets

R.3.21

a) 0,3750 b) 0,2344 c) 2,6667

R.3.22

a) 0,9360 b) 0,6480

R.3.23 $X \sim G(1/8)$; $P(X < 5) = 0{,}4138$

R.3.24 $X \sim BN(4, 0.6)$; $P(X < 7) = 0{,}5443$

R.3.25 0,0408

R.3.26 0,000015

R.3.27 0,1084

R.3.28 Sa probabilité est de 0,0318.

R.3.29

a) 0,1954 b) 0,5665

R.3.30

a) 0,1059 b) 0,2600 c) 0,1225

R.3.31

a) 0,1261 b) 0,1255

R.3.32

a) 0,0004
b) 0,0371
c) 0,1130
d) 0,0005
e) 0,0378
f) 0,1126

R.3.33

a) 1,6 b) 0,4676

R.3.34

a) 0,3750 b) 0,3824

R.3.35

a) $\frac{3}{4}$

b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{-x^3 + 3x + 2}{4} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

R.3.36 $\frac{7}{2} \cdot e^{-5/2} = \frac{7}{2\sqrt{e^5}} \approx 0{,}2873$

R.3.37

a) non b) non

R.3.38

a) $\frac{1}{2}$

b) $F(x) = 1 - \frac{10}{x}$ si $x > 10$

c) 0,8999

R.3.39

a) 4 b) 0 c) ∞

R.3.40 Laissé à l'étudiant.

R.3.41

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{30} & \text{si } 10 < x < 40 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

b) $\frac{1}{6}$

R.3.42

a) 0 b) 50% c) 0,5%

R.3.43 Oui

R.3.44 0,40

R.3.45 Laissé à l'étudiant.

R.3.46 0,3012

R.3.47

a) 5 minutes b) 0,0498

R.3.48 0,2865

R.3.49

a) 0,2025 b) 0,4826 c) 0,6365

R.3.50

a) 0,3085 b) 0,1122

R.3.51

a) 0,5762 b) 0,0228

R.3.52

a) 2,33 b) 1,46 c) 0,97 d) 0,83

R.3.53 0,1587

R.3.54 $(0{,}9938)^{10}$

R.3.55 a) 4,75% b) 1,13% (prob. conditionnelle)

R.3.56 cote z = 0,27 ; pourcentage = 39,36%

R.3.57

a) 4,55% b) 1,756 ans

R.3.58 326,07 ml

R.3.59 69,7

R.3.60 75,17%

R.3.61

a) 0,0606 b) 0,0526

R.3.62

a) $E(X) = 1{,}5$ et $\mathrm{Var}(X) = 3{,}65$

b) $E(Y) = 8$ et $\mathrm{Var}(X) = 131{,}4$

R.3.63 $E(X) = 3{,}5$ et $\mathrm{Var}(X) = 6{,}85$

R.3.64 0,3439

R.3.65 3,5 tests

R.3.66

a) 0,3672 b) 0,0146 c) 0,2383

R.3.67 74 objets

R.3.68

a) 0,8665 b) 51,65%

R.3.69

$P(X = 1) = \dfrac{1}{4}$ $P(X = 3) = \dfrac{1}{12}$

$P(X = 2) = \dfrac{1}{6}$ $P\left(\dfrac{1}{2} < X < \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$

R.3.70

a) 0,0388 b) 0,0942 c) 0,1462

R.3.71 0,8886

R.3.72 0,0908

R.3.73 0,8962

R.3.74 75,05%

R.3.75 2

R.3.76 0,1250

R.3.77 $P(T = i) = \dfrac{(i+1)}{2^{i+2}}$

R.3.78 $\dfrac{18 \cdot (17)^{n-1}}{(35)^n}$

R.3.79 $\dfrac{1}{e} \approx 0{,}3679$

R.3.80

a) 2/3 b) 1/3

R.3.81 0,0191

R.3.82

a) 0,8543 b) 6,68% c) 55,3 jours

R.3.83

a) 22,26% b) 95 minutes c) 0,0207

R.3.84 13/5

R.3.85

Indice : Montrer que

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s)$$

est équivalent (vérifiez-le !) à montrer que

$$P(X > s + t) = P(X > s) \cdot P(X > t)$$