Introduction à la probabilité

Ensemble fondamental

Definition

L'**ensemble fondamental** $\Omega = \{\omega_i : i \in \mathcal{I}\}$ est l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire. $\mathcal{I}$ représente un ensemble d'indices. Par exemple, $\mathcal{I} = \{0, 1, 2, \ldots, T\}$, $\mathcal{I} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathcal{I} = [0, \infty)$, etc.

Exemple. Si l'expérience aléatoire consiste à lancer un dé, alors

$$\Omega = \left\{\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{6}\right\}.$$

Événement

Definition

Un **événement** est un sous-ensemble de Ω.

Exemple (suite).

$$A = \text{le résultat est pair} = \left\{ \boxed{2}, \boxed{4}, \boxed{6} \right\}.$$

Variable aléatoire I

Definition

Définition incomplète. Une **variable aléatoire** $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction à valeurs réelles ayant comme domaine l'ensemble fondamental Ω.

Par convention, les variables aléatoires sont généralement représentées par des lettres majuscules choisies à la fin de l'alphabet. Attention! Il ne faut pas confondre les concepts "d'ensemble fondamental" et de "variable aléatoire".

- **Exemple.** Si l'expérience aléatoire consiste à choisir une carte au hasard parmi un jeu de 52 cartes, alors l'événement "tirer un roi de coeur" n'est pas une variable aléatoire car, entre autres, "roi de coeur" n'est pas un nombre réel. Cependant, si l'on associe 10 points au fait de tirer une figure et la "valeur" de la carte autrement, alors cette relation est une variable aléatoire.

Variable aléatoire II

- C'est pour cette raison que nous avons choisi de dénoter les résultats possibles du lancer d'un dé par des nombres encadrés afin de différencier l'événement $\left\{\boxed{4}\right\} =$ "la face contenant quatre points" et la variable aléatoire associant à chacune des faces le nombre de points s'y trouvant.

Variable aléatoire III

- **Exemple**. X, Y, Z et W sont des variables aléatoires :

ω	$X(\omega)$	$Y(\omega)$	$Z(\omega)$	$W(\omega)$
$\boxed{1}$	0	0	0	5
$\boxed{2}$	0	5	0	5
$\boxed{3}$	5	5	0	5
$\boxed{4}$	5	5	5	5
$\boxed{5}$	10	5	10	0
$\boxed{6}$	10	10	10	10

Variable aléatoire IV

- Si X et Y sont des variables aléatoires et a une constante réelle, alors aX, $X + Y$, XY sont aussi des variables aléatoires.
- De plus, si 0 n'est pas une valeur possible pour Y ($\nexists \omega \in \Omega$ tel que $Y(\omega) = 0$), alors $\frac{X}{Y}$ est aussi une variable aléatoire.

Processus stochastique I

Definition

Un **processus stochastique** $X = \{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ est une famille de variables aléatoires, toutes construites sur le même espace Ω où $\mathcal{T}$ représente un ensemble d'indices.

Processus stochastique II

Exemple. Supposons que l'ensemble fondamental est $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ et que $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, 3\}$. Le processus stochastique $X = \{X_t : t \in \{0, 1, 2, 3\}\}$ représente l'évolution du prix d'une action, $X_t =$ le prix de l'action à la fermeture de la Bourse au t ième jour, l'instant $t = 0$ représentant aujourd'hui.

ω	$X_0(\omega)$	$X_1(\omega)$	$X_2(\omega)$	$X_3(\omega)$
ω_1	1	$1/2$	1	$1/2$
ω_2	1	$1/2$	1	$1/2$
ω_3	1	2	1	1
ω_4	1	2	2	2

Cet exemple est tiré de Stochastic Calculus, A Tool for Finance, de Daniel Dufresne.

Mesure de probabilité I

Definition

Définition incomplète. P est une **mesure de probabilité** sur l'ensemble Ω si

(P1) $P(\Omega) = 1$.

(P2) Pour tout événement A de Ω, $0 \leq P(A) \leq 1$.

(P3) Pour tous événements A_1, A_2, ... mutuellement disjoints, $P\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) = \sum_{i \geq 1} P(A_i)$ où deux événements A_i et A_j sont disjoints si $A_i \cap A_j = \varnothing$.

Mesure de probabilité II

Exemple (suite). La mesure de probabilité P représente la situation où le dé est bien balancé, tandis que Q modélise un cas où le dé est pipé.

ω	$P(\omega)$	$Q(\omega)$	ω	$P(\omega)$	$Q(\omega)$
$\boxed{1}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{12}$	$\boxed{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$\boxed{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\boxed{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$\boxed{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\boxed{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{12}$

Propriétés

Mesure de probabilité

(P4) Pour tout événement A de Ω, $P\left(A^c\right) = 1 - P\left(A\right)$.

(P5) $P\left(\varnothing\right) = 0$.

(P6) Pour tous deux événements A et B de Ω (pas nécessairement disjoints),
$P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right)$.

(P7) Si $A \subseteq B \subseteq \Omega$ alors $P\left(A\right) \leq P\left(B\right)$.

Preuve de (P4)

Mesure de probabilité

- **À montrer**. *Pour tout événement A de Ω,* $P\left(A^c\right) = 1 - P\left(A\right).$
- **Preuve**.

$$\begin{aligned} 1 &= P\left(\Omega\right) \text{ par } \left(P1\right) \\ &= P\left(A \cup A^c\right) \\ &= P\left(A\right) + P\left(A^c\right) \text{ par } \left(P3\right) \blacksquare \end{aligned}$$

Preuve de (P5)

Mesure de probabilité

- **À montrer**. À montrer : $P(\varnothing) = 0$.
- **Rappel**. *Pour tout événement A de Ω,* $P(A^c) = 1 - P(A)$.
- **Preuve.** La propriété (P5) n'est qu'un cas particulier de (P4) : remplaçons A par Ω. ■

Preuve de (P6) I

Mesure de probabilité

- **À montrer**. *pour tous deux événements A et B de Ω (pas nécessairement disjoints),*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

- **Preuve**. Comme

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \text{ et } B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$$

alors en utilisant (P3), nous obtenons

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\ \text{et } P(B) &= P(B \cap A) + P(B \cap A^c). \end{aligned}$$

Preuve de (P6) II

Mesure de probabilité

D'autre part,

$$A \cup B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \cup (A \cap B),$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} & P(A \cup B) \\ = \; & P(A \cap B^c) + P(B \cap A^c) + P(A \cap B) \\ = \; & [P(A \cap B^c) + P(A \cap B)] \\ & + [P(B \cap A^c) + P(A \cap B)] - P(A \cap B) \\ = \; & P(A) + P(B) - P(A \cap B). \blacksquare \end{aligned}$$

Preuve de (P7)

Mesure de probabilité

- **À montrer**. *Si* $A \subseteq B \subseteq \Omega$, *alors* $P(A) \leq P(B)$.
- **Preuve.** Comme $A \subseteq B$, alors $A \cap B = A$. En utilisant (P3),

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + \underbrace{P(A^c \cap B)}_{\geq 0 \text{ par (P2)}} \\ &\geq P(A \cap B) \\ &= P(A). \blacksquare \end{aligned}$$

Probabilité conditionnelle I

Definition

Pour tout événement A ayant une probabilité positive de se réaliser, $P(A) > 0$, la *probabilité conditionnelle* étant donnée A, notée $P(\bullet\,|A)$, est définie pour tout événement B par

$$P(B\,|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

Interprétation I

Probabilité conditionnelle

- Considérons, par exemple, l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé.
- Si le dé est bien balancé, quelle est la probabilité d'obtenir plus de trois points?
  - La réponse est $\frac{1}{2}$.
- Maintenant, si, après le lancer du dé, je vous informe que le nombre de points obtenus est pair, quelle est la probabilité que la face du dé ait plus de trois points?
  - Il faut modifier la réponse donnée précédemment pour profiter de l'information fournie.
  - Comme sur les trois situations où le nombre de points est pair, il y en a deux pour lesquelles le nombre de points est aussi supérieur à trois, la réponse est $\frac{2}{3}$.

Interprétation II

Probabilité conditionnelle

$$\begin{aligned}
P\left(\left\{\boxed{4},\boxed{5},\boxed{6}\right\},\Big|\left\{\boxed{2},\boxed{4},\boxed{6}\right\}\right) &= \frac{P\left(\left\{\boxed{4},\boxed{5},\boxed{6}\right\}\cap\left\{\boxed{2},\boxed{4},\boxed{6}\right\}\right)}{P\left(\left\{\boxed{2},\boxed{4},\boxed{6}\right\}\right)}\\
&= \frac{P\left(\left\{\boxed{4},\boxed{6}\right\}\right)}{P\left(\left\{\boxed{2},\boxed{4},\boxed{6}\right\}\right)}\\
&= \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}}\\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Exemple I

Probabilité conditionnelle

Soit le processus stochastique $X = \{X_t : t = 0, 1, 2, 3\}$ représentant l'évolution du prix d'une part d'un titre.

ω	$X_0(\omega)$	$X_1(\omega)$	$X_2(\omega)$	$X_3(\omega)$	$P(\omega)$
ω_1	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	?
ω_2	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	?
ω_3	1	2	1	1	$\frac{3}{8}$
ω_4	1	2	2	2	$\frac{2}{8}$

Exemple II

Probabilité conditionnelle

Question. Sachant que le prix du titre vaut un dollar au temps $t = 2$, est-ce que les probabilités associées aux prix possibles du titre au temps $t = 3$ sont modifiées?

Réponse. Oui. Soit
$A = \{\omega \in \Omega : X_2(\omega) = 1\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Comme

$$\begin{aligned} P(A) &= P\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \\ &= P\{\omega_1, \omega_2\} + P\{\omega_3\} \\ &= \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

Exemple III

Probabilité conditionnelle

alors

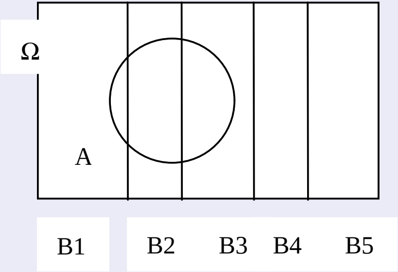
$$\begin{aligned}
P\left(\left\{X_3 = \frac{1}{2}\right\} | \{X_2 = 1\}\right) &= \frac{P\left(\{\omega_1, \omega_2\} \cap \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}\right)}{P\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}} \\
&= \frac{P\{\omega_1, \omega_2\}}{P(A)} \\
&= \frac{3}{8}\frac{4}{3} \\
&= \frac{1}{2} \\
&\neq \frac{3}{8} \\
&= P\left\{X_3 = \frac{1}{2}\right\};
\end{aligned}$$

Partition I

Probabilité conditionnelle

Theorem

Soit A un événement et $\{B_i : i \in \{1, 2, ..., n\}\}$ une partition de Ω (c'est-à-dire que $B_i \cap B_j = \varnothing$ lorsque $i \neq j$ et $\cup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$) telle que $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, $P(B_i) > 0$. Alors
$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A | B_i) P(B_i)$.



Partition II

Probabilité conditionnelle

Preuve.

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap \Omega) \\
&= P\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) \text{ car } A \cap B_1, \ldots, A \cap B_n \text{ sont disjoints} \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)\, P(B_i)
\end{aligned}
$$

car

$$
P(A \mid B_i) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(B_i)} \Rightarrow P(A \cap B_i) = P(A \mid B_i)\, P(B_i)\,. \blacksquare
$$

Exemple

Probabilité conditionnelle

- Deux familles ont respectivement 3 et 5 enfants.
- Il y a deux garçons dans chacune des familles.
- Nous choisissons un enfant au hasard de la façon suivante: un dé est lancé et l'enfant est sélectionné dans la première famille si le résultat est inférieur ou égal à quatre et dans la deuxième sinon.
- Une fois la famille déterminée, les enfants de cette famille ont tous la même chance d'être sélectionné. Quel est la probabilité que l'enfant choisi soit un garçon?

Solution

Probabilité conditionnelle

- A =l'enfant choisi est un garçon
- B_1 =l'enfant provient de la première famille
- B_2 =l'enfant provient de la deuxième famille

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{4}{6} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{6} \\ &= \frac{26}{45} \\ &= 0,57778. \end{aligned}$$

Indépendance I

Definition

Deux événements A et B sont dits **indépendants** si

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B).$$

- À partir de cette définition, il est possible de montrer que si $P(A) > 0$, alors les événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(B|A) = P(B),$$

c'est-à-dire que le fait de savoir que l'événement A s'est réalisé nous est d'aucune utilité pour prédire la réalisation ou la non-réalisation de l'événement B.

Démonstration I

Indépendance

- (⇒) Supposons que les événements A et B sont indépendants. Partant de la définition de probabilité conditionnelle,

$$
\begin{aligned}
P(B|A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \\
&= \frac{P(A)\,P(B)}{P(A)} \quad \text{car } A \text{ et } B \text{ sont indépendants.} \\
&= P(B).
\end{aligned}
$$

Démonstration II

- $(\Leftarrow)$ Supposons maintenant que $P(B|A) = P(B)$. Nous voulons montrer que les événements A et B sont indépendants, c'est-à-dire que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\begin{aligned} P(A)P(B) &= P(A)P(B|A) \text{ par hypothèse.} \\ &= P(A)\frac{P(B \cap A)}{P(A)} \\ &= P(B \cap A). \blacksquare \end{aligned}$$

De façon symétrique, si $P(B) > 0$, alors les événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A|B) = P(A).$$

Distribution de variable aléatoire

- Les mesures de probabilité construites sur Ω existent indépendamment des variables aléatoires et vice versa.
- Quel est le lien qui les unit?
- C'est le sujet traité à la prochaine section.

Définition

Distribution de variable aléatoire

Definition

La **distribution** ou **la loi** d'une variable aléatoire X est caractérisée par sa **fonction de répartition**

$$F_X \quad : \quad \mathbb{R} \to [0,1]$$
$$x \to \text{probabilité que la v.a. } X \text{ soit inférieure ou égale à } x.$$

Par conséquent, si P est la mesure de probabilité qui prévaut sur Ω, alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P\{\omega \in \Omega \,|X(\omega) \leq x\}.$$

- **Remarque**. Afin d'alléger la notation, il est courant d'écrire $\{X \leq x\}$ au lieu de $\{\omega \in \Omega \,|X(\omega) \leq x\}$ et $P\{X = x\}$ au lieu de $P\{\omega \in \Omega \,|X(\omega) = x\}$.

Propriétés de la fonction de répartition

Distribution de variable aléatoire

(R1) F est une fonction non décroissante, c'est-à-dire que $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$.

(R2) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

(R3) F est continue à droite, c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} F(x+\varepsilon) = F(x)$.

Preuve de $(R1)$. Puisque les événements

$$\{\omega \in \Omega \,|X(\omega) \leq x_1\} \text{ et } \{\omega \in \Omega \,|X(\omega) \leq x_2\}$$

sont tels que le premier est inclus dans le second, alors en utilisant (P7),

$$F(x_1) = P\{X \leq x_1\} \leq P\{X \leq x_2\} = F(x_2). \blacksquare$$

Type de variables aléatoires I

Distribution de variable aléatoire

- Des exemples suivront lorsque nous étudierons les différents types de variables aléatoires.
- Il y a trois types de variables aléatoires :
  - les variables aléatoires discrètes,
  - les variables aléatoires continues et
  - les variables aléatoires mixtes.