Exercices : Espaces probabilisés

Exercice 1:

On considère des événements A, B, C d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.
Écrire à l'aide des opérations d'ensembles les événements suivants :

1. Les événements A et B sont réalisés mais pas C.
2. L'un au moins des événements A, B, C est réalisé.
3. Un et un seul des événements A, B, C est réalisé.
4. L'un au plus des événements A, B, C est réalisé.

Exercice 2:

On compose un numéro de téléphone à 10 chiffres.

1. Quelle est la probabilité que tous les chiffres soient distincts ?
2. Quelle est la probabilité qu'il commence par 01 ?
3. Quelle est la probabilité que ses chiffres forment une suite strictement croissante ?

Exercice 3:

On tire 8 cartes simultanément et au hasard dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité pour que figurent (exactement) 2 as parmi ces 8 cartes ? 3 piques ? 2 as et 3 piques ? 2 as ou 3 piques ?

Exercice 4:

$2n$ garçons et $2n$ filles se sont inscrits en prépa ECE dans un lycée comptant deux classes ECE. On les répartit au hasard dans les deux classes. Quelle est la probabilité que chaque classe comporte autant de filles que de garçons si l'on suppose que les deux classes ont le même effectif ?

Exercice 5:

$\frac{1}{4}$ d'une population a été vacciné. Parmi les vaccinés, on compte $\frac{1}{12}$ de malades. Parmi les malades, il y 4 non vaccinés pour un vacciné. Quelle est la probabilité pour un non vacciné de tomber malade ?
(On notera V l'événement « être vacciné » et M l'événement « être malade ».)

Exercice 6:

Quatre urnes contiennent des boules :
• l'urne 1 contient 3 boules rouges, 2 boules blanches, 3 boules noires ;
• l'urne 2 contient 4 boules rouges, 3 boules blanches, 1 boule noire ;
• l'urne 3 contient 2 boules rouges, 1 boule blanche, 1 boule noire ;
• l'urne 4 contient 1 boule rouge, 6 boules blanches, 2 boules noires.
On choisit au hasard une urne et de celle-ci l'on tire une boule au hasard.

1. A l'aide de la formule des probabilités totales, calculer la probabilité que cette boule ne soit pas blanche.
2. Si la boule est rouge, quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée de l'urne 3 ?

Exercice 7:

Pour se rendre au lycée, un élève a le choix entre 4 itinéraires A, B, C et D. La probabilité qu'il a de choisir A (resp. B, C) est $\frac{1}{3}$ (resp. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$). La probabilité d'arriver en retard en empruntant A (resp. B, C) est $\frac{1}{20}$ (resp. $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$). En empruntant l'itinéraire D, l'élève n'arrive jamais en retard.

1. Quelle est la probabilité que l'élève choisisse le chemin D ?
2. L'élève arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait emprunté l'itinéraire C ?

Exercice 8:

On étudie au cours du temps le fonctionnement d'un appareil obéissant aux règles suivantes :

— si l'appareil fonctionne à l'instant $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité $\frac{1}{6}$ d'être en panne à l'instant n.

— si l'appareil est en panne à l'instant $n-1$, il a la probabilité $\frac{2}{3}$ d'être en panne à l'instant n.

On note p_n la probabilité que l'appareil soit en état de marche à l'instant n.

1. Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une relation entre p_n et p_{n-1}.
2. Exprimer p_n en fonction de p_0.
3. Étudier la convergence de la suite (p_n).

Exercice 9:

Une boîte contient deux boules : une noire et une rouge.

On tire n fois une boule dans cette boîte en la remettant après avoir noté sa couleur. On note A_n l'événement « on obtient des boules des deux couleurs au cours des n tirages » et B_n l'événement « on obtient au plus une boule noire ».

1. Calculer $P(A_n)$ et $P(B_n)$.
2. A_n et B_n sont-ils indépendants si $n = 2$?
3. Même question si $n = 3$.

Exercice 10:

Une étude statistique sur le sexe des bébés a montré que sur 100 naissances, 52 bébés sont des filles et 48 sont des garçons. On suppose que les événements « accoucher d'un garçon » et « accoucher d'une fille » sont indépendants. Sophie a eu 4 bébés.

1. Calculer la probabilité que Sophie ait eu
   a) autant de garçons que de filles
   b) un seul garçon sachant que sont premier bébé est une fille.
2. On suppose que Sophie a eu 2 garçons et 2 filles et que son premier bébé est une fille.
   a) Calculer la probabilité que le deuxième bébé soit une fille.
   b) Calculer la probabilité que le dernier bébé soit une fille.
3. L'événement « le premier bébé de Sophie est une fille » est-il indépendant de l'événement « Sophie a exactement deux garçons ?

Exercice 11:

On dispose d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir « face » est $p \in]0;1[$. On pose $q = 1 - p$.

1. Soit n un entier naturel non nul. On effectue n lancers indépendants de la pièce décrite ci dessus.

   On note F_k l'événement « on obtient face au k-ième lancer » et P_k l'événement « on obtient pile au k-ième lancer ».

   On cherche à calculer la probabilité qu'au cours de ces n lancers « face » ne soit jamais suivi de « pile ». On note A_n cet événement.

   a) Exprimer A_n en fonction des événements F_k et P_k, $k \in \{1, \dots, n\}$.

   b) En déduire $P(A_n)$. (Au cours du calcul on sera amené à distinguer le cas $p = \dfrac{1}{2}$ et $p \neq \dfrac{1}{2}$.)

2. Si l'on admet que l'on peut lancer indéfiniment la pièce, est-il possible que « face » ne soit jamais suivi de « pile ».

   (<u>Indication :</u> on notera A l'événement « face n'est jamais suivit de pile » et on exprimera A à l'aide des A_n, $n \in \mathbb{N}^*$.)

Exercice 12:

Deux joueurs A et B lancent deux dés parfaits.
A commence. Si la somme des points qu'il obtient est 6, il a gagné.
Sinon B lance les dés et si la somme des points qu'il obtient est 7, il a gagné.
Sinon A rejoue et ainsi de suite.

1. Calculer la probabilité des événements $S6$ « obtenir un total de 6 » et $S7$ « obtenir un total de 7 ».
2. On introduit les événements A_n : « le joueur A gagne à son n-ième lancer », B_n : « le joueur B gagne à son n-ième lancer », F : « A gagne le jeu » et G : « B gagne le jeu ».

   Exprimer les événements F et G à l'aide des événements A_n et B_n
3. En déduire si vous préférez être le joueur A ou B.

Exercice 13:

Un distributeur de jouets distingue trois catégories de jouets :
- catégorie T : les jouets traditionnels tels que poupées, peluches, ...
- catégorie M : les jouets liés à la mode inspirés directement d'un livre, d'un film, d'une émission, ...
- catégorie S : les jouets scientifiques vulgarisant une technique récente.

Le distributeur de jouets a fait les estimations suivantes :
- Un client qui a acheté un jouet traditionnel une année pour noël choisira, l'année suivante, un jouet de l'une des trois catégories avec une équiprobabilité.
- Un client qui a acheté un jouet inspiré par la mode optera l'année suivante pour un jouet de la catégorie T avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$, pour un jouet de la catégorie M avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$, et pour un jouet de la catégorie S avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$.
- Un client qui a acheté un jouet scientifique optera l'année suivante pour un jouet de la catégorie T avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$, pour un jouet de la catégorie M avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$, et pour un jouet de la catégorie S avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$.

Une année, que l'on appellera l'année 0, 45% des jouets vendus étaient de la catégorie T, 25% étaient de la catégorie M et 30% étaient de la catégorie S.

On note T_n l'événement « le client achète un jouet de la catégorie T pour le noël de l'année n », M_n l'événement « le client achète un jouet de la catégorie M pour le noël de l'année n », et S_n l'événement « le client achète un jouet de la catégorie S pour le noël de l'année n ». Enfin on pose $p_n = P(T_n)$, $q_n = P(M_n)$ et $r_n = P(S_n)$.

1. Donner les valeurs de p_0, q_0, et r_0.
2. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que $p_{n+1} = \dfrac{1}{3}p_n + \dfrac{1}{4}q_n + \dfrac{1}{4}r_n$.
3. De la même façon exprimer q_{n+1} et r_{n+1} en fonction de p_n, q_n et r_n.
4. On pose alors $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n, à l'aide d'une matrice A que l'on formera.
5. Soit P la matrice définie par $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
   a) Vérifier que $P^{-1} = \dfrac{1}{22}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 8 & -3 & -3 \\ 0 & 11 & -11 \end{pmatrix}$
   b) Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$
   c) Montrer que pour tout $A^n = PD^nP^{-1}$ puis expliciter A^n.
6. Montrer que pour tout entier n, $X_n = A^nX_0$.
7. Exprimer p_n, q_n, et r_n en fonction de n.
8. Déterminer les limites de p_n, q_n et r_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction

Exercice 1:

1. $A \cap B \cap \overline{C}$
2. $A \cup B \cup C$
3. $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$
4. $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$

Exercice 2:

Nombre de cas possibles : 10^{10}

1. Nombre de cas favorables : 10!. Donc $P = \dfrac{10!}{10^{10}}$
2. Nombre de cas favorables : 10^8. Donc $P = \dfrac{10^8}{10^{10}} = \dfrac{1}{100}$
3. Nombre de cas favorables : 1. Donc $P = \dfrac{1}{10^{10}}$

Exercice 3:

Nombre de cas possibles : $\binom{32}{8}$

1. 2 as : nombre de cas favorables $= \binom{4}{2} \times \binom{28}{6}$. Donc $P_1 = \dfrac{\binom{4}{2} \times \binom{28}{6}}{\binom{32}{8}}$
2. 3 piques : nombre de cas favorables $= \binom{8}{3} \times \binom{24}{5}$. Donc $P_2 = \dfrac{\binom{8}{3} \times \binom{24}{5}}{\binom{32}{8}}$
3. 2 as et 3 piques : nombre de cas favorables : $3 \times \binom{7}{2} \times \binom{21}{4} + \binom{3}{2} \times \binom{7}{3} \times \binom{21}{3}$.
   Donc $P_3 = \dfrac{3 \times \binom{7}{2} \times \binom{21}{4} + \binom{3}{2} \times \binom{7}{3} \times \binom{21}{3}}{\binom{32}{8}}$
4. 2 as ou 3 piques : $P_4 = P_1 + P_2 - P_3$.

Exercice 4:

Il suffit de construire une classe pour que la deuxième classe soit automatiquement construite.
Nombre de cas possibles : $\binom{4n}{2n}$
Nombre de cas favorables : $\binom{2n}{n} \times \binom{2n}{n}$
Donc $P = \dfrac{\binom{2n}{n}^2}{\binom{4n}{2n}}$

Exercice 5:

On cherche ici à calculer $P_{\overline{V}}(M)$.

L'énoncé nous donne : $P(V) = \dfrac{1}{4}$, $P_V(M) = \dfrac{1}{12}$ et $P_M(\overline{V}) = \dfrac{4}{5}$.

Or on a :

$$\begin{aligned}
P_{\overline{V}}(M) &= \frac{P(M \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} = \frac{P_M(\overline{V}) \times P(M)}{P(\overline{V})} \\
&= \frac{4/5}{3/4}\left(P(M \cap V) + P(M \cap \overline{V})\right) \\
&= \frac{16}{15}\left(P(V) \times P_V(M) + P(\overline{V}) \times P_{\overline{V}}(M)\right) \\
&= \frac{16}{15}\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{12} + \frac{3}{4} \times P_{\overline{V}}(M)\right) \\
&= \frac{1}{45} + \frac{4}{5} P_{\overline{V}}(M) \\
\Rightarrow \frac{1}{5} P_{\overline{V}}(M) &= \frac{1}{45} \\
\Rightarrow P_{\overline{V}}(M) &= \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

Exercice 6:

On note :

— U_i l'événement « choisir l'urne i »
— B l'événement « tirer une boule blanche »
— R l'événement « tirer une boule rouge »
— N l'événement « tirer une boule noire »

1. On souhaite ici calculer $P(\overline{B})$. Nous allons pour cela utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (U_1, U_2, U_3, U_4). On a donc :

$$\begin{aligned}
P(\overline{B}) &= P(U_1)P_{U_1}(\overline{B}) + P(U_2)P_{U_2}(\overline{B}) + P(U_3)P_{U_3}(\overline{B}) + P(U_4)P_{U_4}(\overline{B}) \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{6}{8} + \frac{1}{4} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{9} \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{177}{72} = \frac{59}{96}
\end{aligned}$$

2. On veut ici calculer $P_R(U_3) = \dfrac{P(R \cap U_3)}{P(R)}$

   On calcule $P(R)$ avec la formule des probabilités totales de la même façon que dans la question précédente : $P(R) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{107}{72}$

   De plus $P(R \cap U_3) = P(U_3) \times P_{U_3}(R) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2}$

   On a donc :

$$P_R(U_3) = \frac{1/4 \times 1/2}{1/4 \times 107/72} = \frac{36}{107}$$

Exercice 7:

1. $P(D) = 1 - P(A) - P(B) - P(C) = \dfrac{1}{3}$
2. On note R l'événement « l'élève est en retard ». On souhaite calculer $P_R(C) = \dfrac{P(C \cap R)}{P(R)}$

   On calcule $P(R)$ avec la formule des probabilités totales utilisée avec le système complet d'événement (A, B, C, D) :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(A) \times P_A(R) + P(B) \times P_B(R) + P(C) \times P_C(R) + P(D) \times P_D(R) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{20} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{12} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times 0 \\ &= \frac{7}{60} \end{aligned}$$

   Et $P(C \cap R) = P(C) \times P_C(R) = \dfrac{1}{12} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{60}$.

   Donc $P_R(C) = \dfrac{2}{7}$

Exercice 8:

1. On note F_n l'événement « l'appareil fonctionne à l'instant n ».

   On applique alors la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(F_{n-1}, \overline{F_{n-1}})$.

   On a donc :

$$\begin{aligned} P(F_n) &= P(F_{n-1})P_{F_{n-1}}(F_n) + P(\overline{F_{n-1}})P_{\overline{F_{n-1}}}(F_n) \\ \Leftrightarrow p_n &= \frac{5}{6}p_{n-1} + \frac{1}{3}(1 - p_{n-1}) \\ \Leftrightarrow p_n &= \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2. (p_n) est une suite arithmético-géométrique.

   On résout alors $x = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$

   On pose $q_n = p_n - \dfrac{2}{3}$. q_n est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ c'est-à-dire $q_n = \dfrac{1}{2^n}q_0 = \dfrac{1}{2^n}\left(p_0 - \dfrac{2}{3}\right)$.

   On a donc $p_n = \dfrac{1}{2^n}\left(p_0 - \dfrac{2}{3}\right) + \dfrac{2}{3}$.

3. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{2}{3}$.

Exercice 9:

1. • Le calcul direct de $P(A_n)$ est assez compliqué et on se rend compte qu'il est plus facile de calculer $P(\overline{A_n})$ car $\overline{A_n}$ est l'événement « on obtient des boules d'une seule couleur ».

   On a donc $P(\overline{A_n}) = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

   On en déduit que $P(A_n) = 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

   • Notons R_n l'événement « on obtient aucune boule noir au cours des n tirages » et Q_n l'événement « on obtient une seule boule noire au cours des n tirages ».

   On a $B_n = R_n \cup Q_n$ et comme les événement R_n et Q_n sont incompatibles on a $P(B_n) = P(R_n) + P(Q_n)$.

   Or $P(R_n) = \dfrac{1}{2^n}$ et $P(Q_n) = \dfrac{n}{2^n}$ car il existe n tirages possible ne contenant qu'une seule boule noire.

   Donc $P(B_n) = \dfrac{n+1}{2^n}$.

2. On a $P(A_2) = \dfrac{1}{2}$ et $P(B_2) = \dfrac{3}{4}$.
   De plus l'événement $A_2 \cap B_2$ est l'événement « au cours des 2 tirages on obtient des boules des deux couleurs et on obtient au plus une boule noire ». Il y a deux tirages possible qui répondent à ces exigences (RN et NR) donc $P(A_2 \cap B_2) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.
   On a donc $P(A_2 \cap B_2) \neq P(A_2) \times P(B_2)$ et donc les événements A_2 et B_2 ne sont pas indépendants.
3. On a $P(A_3) = \dfrac{3}{4}$ et $P(B_3) = \dfrac{1}{2}$.
   De plus l'événement $A_3 \cap B_3$ est l'événement « au cours des 3 tirages on obtient des boules des deux couleurs et on obtient au plus une boule noire ». Il y a trois tirages possible qui répondent à ces exigences (RRN, RNR et NRR) donc $P(A_3 \cap B_3) = \dfrac{3}{8} = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{2}$.
   On a donc $P(A_3 \cap B_3) = P(A_3) \times P(B_3)$ ce qui signifie que les événements A_3 et B_3 sont indépendants.

Exercice 10: Correction partielle

On note G_i l'événement « le $i$ème bébé est un garçon » et F_i l'événement « le $i$ème bébé est une fille ».

1. a) A_1 : « autant de garçon que de filles »

$$P(A_1) = P(G_1 \cap G_2 \cap F_3 \cap F_4) + P(G_1 \cap F_2 \cap G_3 \cap F_4) + ... = 6 \times \left(\frac{48}{100}\right)^2 \times \left(\frac{52}{100}\right)^2$$

   b) A_2 : « un seul garçon ».

$$P_{F_1}(A_2) = P(F_1 \cap G_2 \cap F_3 \cap F_4) + P(F_1 \cap F_2 \cap G_3 \cap F_4) + P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap G_4) = 3 \times \left(\frac{48}{100}\right) \times \left(\frac{52}{100}\right)^3$$

2. a) $P_{A_1 \cap F_1}(F_2) = \dfrac{P(F_2 \cap F_1 \cap A_1)}{P(A_1 \cap F_1)} = \dfrac{(0,48)^2 \times (0,52)^2}{3 \times (0,48)^2 \times (0,52)^2} = \dfrac{1}{3}$
   b) $P_{A_1 \cap F_1}(F_4) = \dfrac{1}{3}$
3. $P(A_1 \cap F_1) = 3 \times (0,48)^2 \times (0,52)^2$, $P(F_1) = 0,52$ et $P(A_1) = 6 \times (0,48)^2 \times (0,52)^2$
   Donc $P(A_1 \cap F_1) \neq P(A_1) \times P(F_1)$.
   Les événements A_1 et F_1 ne sont pas indépendants.

Exercice 11:

1. a) $A_n = (F_1 \cap \cdots \cap F_n) \cup (P_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n) \cup \cdots \cup (P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_{n-1} \cap F_n) \cup (P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_{n-1} \cap P_n)$
   (Une fois que l'on a 1 face, il n'y a que des faces ensuite. Le rang du premier face détermine tout...)
   b) A_n est formé d'une union d'événements incompatibles et les lancers sont indépendants donc :

$$P(A_n) = \sum_{k=0}^{n} p^k q^{n-k} = q^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{p}{q}\right)^k$$

   - Si $\dfrac{p}{q} \neq 1$, c'est-à-dire $p \neq \dfrac{1}{2}$ on a

$$P(A_n) = q^n \frac{1 - (p/q)^{n+1}}{1 - p/q} = \frac{q^{n+1} - p^{n+1}}{q - p}$$

   - Si $p = q = \dfrac{1}{2}$ alors $P(A_n) = \dfrac{1}{2^n}(n+1)$.

2. Soit A l'événement « face n'est jamais suivi de pile ».
   On peut écrire $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$
   Or $A_{n+1} \subset A_n$ donc (A_n) est une suite décroissante d'événements.
   D'après la propriété de la limite monotone, on a donc $P(A) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.
   - Si $p \neq \dfrac{1}{2}$, alors $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$ car $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = \lim_{n\to+\infty} p^{n+1} = 0$ car $0 < p, q < 1$. Donc $P(A) = 0$.
   - Si $p = \dfrac{1}{2}$, comme $n+1 = o(2^n)$, $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$ et donc $P(A) = 0$.

   Il est donc presque sûrement impossible que pile ne soit jamais suivi de face.

Exercice 12:

1. $P(S_6) = \dfrac{5}{6^2} = \dfrac{5}{36}$ (nombre de cas favorables / nombre de cas possibles)
   et $P(S_7) = \dfrac{6}{6^2} = \dfrac{1}{6}$.
2.
$$\begin{aligned}
F &= A_1 \cup (\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap A_2) \cup \cdots \cup (\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{k-1}} \cap A_k) \cup \cdots \\
&= A_1 \cup \left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} (\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{k-1}} \cap A_k) \right) \\
G &= \bigcup_{k=1}^{+\infty} (\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{A_k} \cap B_k)
\end{aligned}$$

3. On pose $A'_k = \overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{k-1}} \cap A_k$.
   Comme les lancers sont indépendants, on a

$$P(A'_k) = \left(1 - \frac{5}{36}\right)^{k-1} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{k-1} \times \frac{5}{36} = \left(\frac{5 \times 31}{6 \times 36}\right)^{k-1} \times \frac{5}{36}$$

   Donc, comme les A'_k sont incompatibles,

$$P(A) = \lim_{n\to+\infty} P(A_1) + \sum_{k=2}^{n} P(A'_k) = \frac{5}{36} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{5 \times 31}{6 \times 36}\right)^{k} = \frac{5}{36} \times \frac{1}{1 - (5 \times 31)/(6 \times 36)} = \frac{30}{61}$$

   De même $P(B) = \dfrac{1}{6} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{31}{36}\right)^{k+1} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k} = \frac{31}{61}$
   Il vaut don mieux être B que A.

Exercice 13: ECRICOME 1992

1. $p_0 = 0,45$, $q_0 = 0,25$ et $r_0 = 0,3$.
2. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement (T_n, M_n, S_n) :

$$P(T_{n+1}) = P(T_n)P_{T_n}(T_{n+1}) + P(M_n)P_{M_n}(T_{n+1}) + P(S_n)P_{S_n}(T_{n+1}) = p_n \times \frac{1}{3} + q_n \times \frac{1}{4} + r_n \times \frac{1}{4}$$

On a donc $p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n$.

3. Avec la même méthode que dans la question précédente on obtient :

$$q_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n \quad \text{et} \quad r_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{4}r_n$$

4. On a $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$.

5. a) On a $P \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 8 & -3 & -3 \\ 0 & 11 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 0 & 0 \\ 0 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 22 \end{pmatrix}$

Donc $P^{-1} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 8 & -3 & -3 \\ 0 & 11 & -11 \end{pmatrix}$

b) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}$

c) Raisonnement par récurrence. *(cf. cours d'algèbre ou des corrections de DM et DS précédents....)*

$$A^n = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 6 + 16/12^n & 6 - 6/12^n & 6 - 6/12^n \\ 8 - 8/12^n & 8 + 3/12^n + 11(-1/4)^n & 8 + 3/12^n - 11(-1/4)^n \\ 8 - 8/12^n & 8 + 3/12^n - 11(-1/4)^n & 8 + 3/12^n + 11(-1/4)^n \end{pmatrix}$$

6. Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: $X_n = A^n X_0$ est vraie pour tout entier n.
   - Pour $n = 0$, on a $A^0 X_0 = I X_0 = X_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Soit n un entier fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   On a d'après la question 4. $X_{n+1} = AX_n$ donc à l'aide de $\mathcal{P}(n)$ on a $X_{n+1} = A \times A^n X_0 = A^{n+1}X_0$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - Grâce au principe de récurrence on a montré que pour tout entier n, on a $X_n = A^n X_0$.
7.

$$\begin{cases} p_n = \frac{1}{22}\left((6 + 16/12^n) \times 0,45 + (6 - 6/12^n) \times 0,25 + (6 - 6/12^n) \times 0,3\right) \\ q_n = \frac{1}{22}\left((8 - 8/12^n) \times 0,45 + (8 + 3/12^n + 11(-1/4)^n) \times 0,25 + (8 + 3/12^n - 11(-1/4)^n) \times 0,3\right) \\ r_n = \frac{1}{22}\left((8 - 8/12^n) \times 0,45 + (8 + 3/12^n - 11(-1/4)^n) \times 0,25 + (8 + 3/12^n + 11(-1/4)^n) \times 0,3\right) \end{cases}$$

8. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{12^n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{3}{11} \qquad \lim_{n\to+\infty} q_n = \frac{4}{11} \qquad \lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{4}{11}$$