Les variables aléatoires de lois discrètes

Définitions

Variables aléatoires discrètes

Definition

Une variable aléatoire X est dite **discrète** si elle peut prendre au plus qu'un nombre dénombrable de valeurs, disons x_1, x_2, ..., x_n, ... $\in \mathbb{R}$. De façon équivalente, nous pouvons affirmer qu'une variable est discrète si

$$\sum_{\{x \in \mathbb{R} \mid P\{X = x\} > 0\}} P\{X = x\} = 1.$$

Definition

Le **support** d'une variable aléatoire discrète est l'ensemble des valeurs possibles de X :

$$\mathcal{S}_X = \{x \in \mathbb{R} \mid P\{X = x\} > 0\}.$$

Fonction de masse

Definition

La distribution d'une variable aléatoire discrète X est commodément décrite par sa **fonction de masse** :

$$\begin{aligned} f_X \quad : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \\ & x \longrightarrow \text{probabilité que la v.a. } X \text{ soit égale à } x, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = P\{X = x\}.$$

- **Remarque.** La distribution d'une variable aléatoire dépend de la mesure de probabilité qui prévaut sur l'ensemble fondamental, comme l'indique l'expression ci-dessus. Nous illustrerons ce commentaire à l'aide d'un exemple.

Exemple I

Distribution d'une variable aléatoire discrète

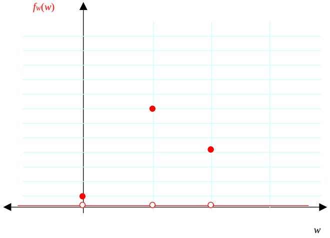
ω	$W(\omega)$	$Q(\omega)$	ω	$W(\omega)$	$Q(\omega)$
$\boxed{1}$	5	$\frac{4}{12}$	$\boxed{4}$	5	$\frac{1}{12}$
$\boxed{2}$	5	$\frac{1}{12}$	$\boxed{5}$	0	$\frac{1}{12}$
$\boxed{3}$	5	$\frac{1}{12}$	$\boxed{6}$	10	$\frac{4}{12}$

Déterminons les fonctions de masse de la variable aléatoire W.

$$
\begin{aligned}
f_W(x) &= Q\{\omega \in \Omega \,|\, W(\omega) = x\} \\
&= \begin{cases}
Q\left\{\boxed{5}\right\} = \frac{1}{12} & \text{si } x = 0 \\
Q\left\{\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}\right\} = \frac{4}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12} & \text{si } x = 5 \\
Q\left\{\boxed{6}\right\} = \frac{4}{12} & \text{si } x = 10 \\
0 & \text{sinon}
\end{cases}.
\end{aligned}
$$

Exemple II

Distribution d'une variable aléatoire discrète



Exemple III

Distribution d'une variable aléatoire discrète

Rappel :

ω	$W(\omega)$	$Q(\omega)$	ω	$W(\omega)$	$Q(\omega)$
$\boxed{1}$	5	$\frac{4}{12}$	$\boxed{4}$	5	$\frac{1}{12}$
$\boxed{2}$	5	$\frac{1}{12}$	$\boxed{5}$	0	$\frac{1}{12}$
$\boxed{3}$	5	$\frac{1}{12}$	$\boxed{6}$	10	$\frac{4}{12}$

Exemple IV

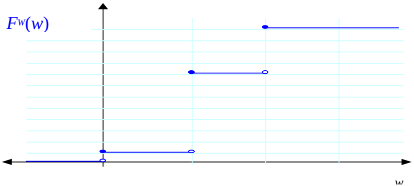
Distribution d'une variable aléatoire discrète

Calculons la fonction de répartition de la variable aléatoire W.

$$\begin{aligned}
\text{si } x &< 0 \text{ alors} \\
F_W(x) &= Q\{\omega \in \Omega \,|\, W(\omega) \leq x\} = Q(\varnothing) = 0; \\
\\
\text{si } 0 &\leq x < 5 \text{ alors} \\
F_W(x) &= Q\{\omega \in \Omega \,|\, W(\omega) \leq x\} = Q\left\{\boxed{5}\right\} = \frac{1}{12}; \\
\\
\text{si } 5 &\leq x < 10 \text{ alors} \\
F_W(x) &= Q\{\omega \in \Omega \,|\, W(\omega) \leq x\} = Q\left\{\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}\right\} = \frac{8}{12}; \\
\\
\text{si } x &\geq 10 \text{ alors} \\
F_W(x) &= Q\{\omega \in \Omega \,|\, W(\omega) \leq x\} = Q(\Omega) = 1.
\end{aligned}$$

Exemple V

Distribution d'une variable aléatoire discrète



- **Remarque.** La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est une fonction en escalier.

Exemple I

Impact d'un changement de mesure sur la distribution

ω	$X(\omega)$	$Y(\omega)$	$Z(\omega)$	$W(\omega)$	$P(\omega)$	$Q(\omega)$
$\boxed{1}$	0	0	0	5	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{12}$
$\boxed{2}$	0	5	0	5	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$\boxed{3}$	5	5	0	5	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$\boxed{4}$	5	5	5	5	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$\boxed{5}$	10	5	10	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$\boxed{6}$	10	10	10	10	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{12}$

Exemple II

Impact d'un changement de mesure sur la distribution

- Distributions des variables aléatoires X, Y, Z et W sous la mesure de probabilité P :

x	$P\{X=x\}$	$P\{Y=x\}$	$P\{Z=x\}$	$P\{W=x\}$
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
10	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

  - La distribution de la variable aléatoire X est dite uniforme puisque $P\{X=0\} = P\{X=5\} = P\{X=10\} = \frac{1}{3}$.
  - Les variables aléatoires Y et W ont la même distribution bien qu'elles ne soient pas égales. En effet,

$$Y\left(\boxed{1}\right) = 0 \neq 5 = W\left(\boxed{1}\right).$$

Exemple III

Impact d'un changement de mesure sur la distribution

- Distributions des variables aléatoires X, Y, Z et W sous la mesure de probabilité Q

x	$Q\{X=x\}$	$Q\{Y=x\}$	$Q\{Z=x\}$	$Q\{W=x\}$
0	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$
5	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{12}$
10	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$

  - Notons que les distributions des variables aléatoires ont changé. De plus, sous la mesure de probabilité Q, les variables aléatoires Y et W n'ont plus la même distribution.

Égalités forte et faible I

Variables aléatoires discrètes

Definition

Deux variables aléatoires X et Y sont dites **égales** (**égalité forte**) si et seulement si $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) = Y(\omega)$. Elles sont dites **égales en distribution** (ou **en loi** ou **égalité faible**) lorsqu'elles ont la même distribution.

- Le concept d'égalité entre deux variables aléatoires est plus fort que celui d'égalité en distribution.
  - En effet, si deux variables aléatoires sont égales, alors elles sont égales en distribution.
  - Par contre, il est possible que deux variables aléatoires soient égales en distribution mais qu'elles ne soient pas égales.

Égalités forte et faible II

Variables aléatoires discrètes

- De plus, deux variables aléatoires peuvent être égales en distribution selon une certaine mesure de probabilité et ne pas l'être selon une autre mesure de probabilité.

- Dans l'exemple précédent, lorsque c'est la mesure P qui prévaut sur Ω, Y et W sont égales en distribution mais elles ne sont pas égales.

Fonction de masse conjointe

Definition

La **fonction de masse conjointe** de deux variables aléatoires discrètes X et Y est définie par

$$\begin{aligned} f_{X,Y} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow [0,1] \\ (x,y) &\rightarrow P\{X = x \text{ et } Y = y\}. \end{aligned}$$

Exemple I

Distribution conjointe

ω	$X(\omega)$	$Y(\omega)$	$P(\omega)$
$\boxed{1}$	0	0	$\frac{1}{6}$
$\boxed{2}$	0	5	$\frac{1}{6}$
$\boxed{3}$	5	5	$\frac{1}{6}$
$\boxed{4}$	5	5	$\frac{1}{6}$
$\boxed{5}$	10	5	$\frac{1}{6}$
$\boxed{6}$	10	10	$\frac{1}{6}$

Exemple II

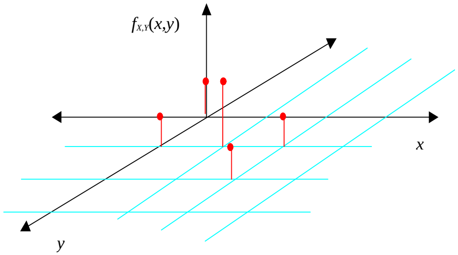
Distribution conjointe

La fonction de masse conjointe de X et Y est

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \begin{array}{c} \text{si } x = 0 \text{ et } y \in \{0,5\} \\ \text{ou si } x = 10 \text{ et } y \in \{5,10\} \end{array} \\ \frac{1}{3} & \text{si } x = 5 \text{ et } y = 5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple III

Distribution conjointe



Fonction de répartition conjointe

Definition

La **fonction de répartion conjointe** de deux variables aléatoires discrètes X et Y est définie par

$$\begin{aligned} f_{X,Y} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to [0, 1] \\ (x, y) &\to P\{X \leq x \text{ et } Y \leq y\}. \end{aligned}$$

Exemple I

Fonction de répartition

ω	$X(\omega)$	$Y(\omega)$	$P(\omega)$
$\boxed{1}$	0	0	$\frac{1}{6}$
$\boxed{2}$	0	5	$\frac{1}{6}$
$\boxed{3}$	5	5	$\frac{1}{6}$
$\boxed{4}$	5	5	$\frac{1}{6}$
$\boxed{5}$	10	5	$\frac{1}{6}$
$\boxed{6}$	10	10	$\frac{1}{6}$

Exemple II

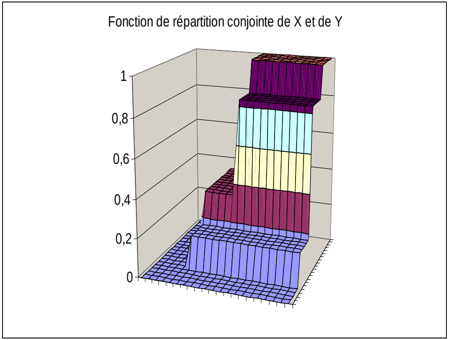
Fonction de répartition

La fonction de répartition conjointe de X et Y est

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } y < 0 \\ \frac{1}{6} & \text{si } 0 \leq x < 5 \text{ et } 0 \leq y < 5 \\ \frac{2}{6} & \text{si } 0 \leq x < 5 \text{ et } y \geq 5 \\ \frac{1}{6} & \text{si } 5 \leq x < 10 \text{ et } 0 \leq y < 5 \\ \frac{4}{6} & \text{si } 5 \leq x < 10 \text{ et } y \geq 5 \\ \frac{1}{6} & \text{si } x \geq 10 \text{ et } 0 \leq y < 5 \\ \frac{5}{6} & \text{si } x \geq 10 \text{ et } 5 \leq y < 10 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple III

Fonction de répartition



Fonctions de masse marginales

Variables aléatoires discrètes

Definition

Nous pouvons retrouver la **fonction de masse (marginale)** de chacune des deux variables aléatoires à partir de la fonction de masse conjointe. En effet,

$$f_X\left(x\right) = \sum_{y \in \mathcal{S}_Y} f_{X,Y}\left(x, y\right) \text{ et } f_Y\left(y\right) = \sum_{x \in \mathcal{S}_X} f_{X,Y}\left(x, y\right).$$

Fonctions de masse marginales

ω	$X(\omega)$	$Y(\omega)$	$P(\omega)$
$\boxed{1}$	0	0	$\frac{1}{6}$
$\boxed{2}$	0	5	$\frac{1}{6}$
$\boxed{3}$	5	5	$\frac{1}{6}$
$\boxed{4}$	5	5	$\frac{1}{6}$
$\boxed{5}$	10	5	$\frac{1}{6}$
$\boxed{6}$	10	10	$\frac{1}{6}$

II
Fonctions de masse marginales

$$
\begin{aligned}
f_X(0) &= \sum_{y \in \mathcal{S}_Y} f_{X,Y}(0,y) = f_{X,Y}(0,0) + f_{X,Y}(0,5) + f_{X,Y}(0,10) \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 0 = \frac{2}{6}, \\
f_X(5) &= \sum_{y \in \mathcal{S}_Y} f_{X,Y}(5,y) = f_{X,Y}(5,0) + f_{X,Y}(5,5) + f_{X,Y}(5,10) \\
&= 0 + \frac{2}{6} + 0 = \frac{2}{6}, \\
f_X(10) &= \sum_{y \in \mathcal{S}_Y} f_{X,Y}(10,y) = f_{X,Y}(10,0) + f_{X,Y}(10,5) + f_{X,Y}(10,10) \\
&= 0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} \\
\text{et pour } x &\notin \{0,5,10\}, \\
f_X(x) &= \sum_{y \in \mathcal{S}_Y} f_{X,Y}(x,y) = f_{X,Y}(x,0) + f_{X,Y}(x,5) + f_{X,Y}(x,10) = 0.
\end{aligned}
$$

III

Fonctions de masse marginales

$$
\begin{aligned}
f_Y(0) &= \sum_{x \in \mathcal{S}_X} f_{X,Y}(x,0) = f_{X,Y}(0,0) + f_{X,Y}(5,0) + f_{X,Y}(10,0) \\
&= \frac{1}{6} + 0 + 0 = \frac{1}{6}, \\
f_Y(5) &= \sum_{x \in \mathcal{S}_X} f_{X,Y}(x,5) = f_{X,Y}(0,5) + f_{X,Y}(5,5) + f_{X,Y}(10,5) \\
&= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}, \\
f_Y(10) &= \sum_{x \in \mathcal{S}_X} f_{X,Y}(x,10) = f_{X,Y}(0,10) + f_{X,Y}(5,10) + f_{X,Y}(10,10) \\
&= 0 + 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \\
\text{et pour } x &\notin \{0,5,10\}, \\
f_Y(y) &= \sum_{x \in \mathcal{S}_X} f_{X,Y}(x,y) = f_{X,Y}(0,y) + f_{X,Y}(5,y) + f_{X,Y}(10,y) = 0
\end{aligned}
$$

Fonction de masse conjointe

Vecteurs aléatoires discrets

Definition

Plus généralement, il est possible de définir la **fonction de masse conjointe** de n variables aléatoires X_1, ..., X_n.

$$\begin{aligned} f_{X_1,\ldots,X_n} : \mathbb{R}^{\times n} &\rightarrow [0,1] \\ (x_1,\ldots,x_n) &\rightarrow P\{X_1 = x_1 \text{ et } X_2 = x_2 \text{ et } \ldots \text{ et } X_n = x_n\}. \end{aligned}$$

Fonction de masse conditionnelle I

Definition

Soit X et Y, deux variables aléatoires discrètes. La **fonction de masse conditionnelle** de X étant donné Y est

$$\begin{aligned} f_{X|Y} : \mathbb{R} \times \mathcal{S}_Y &\rightarrow [0,1] \\ (x,y) &\rightarrow P\left[\{X = x\} \mid \{Y = y\}\right]. \end{aligned}$$

Fonction de masse conditionnelle II

- Ainsi, pour tout $y \in \mathcal{S}_Y$,

$$
\begin{aligned}
& f_{X|Y}(x, y) \\
= \; & P[\{X = x\} | \{Y = y\}] \\
= \; & \frac{P[\{X = x\} \cap \{Y = y\}]}{P[\{Y = y\}]}
\end{aligned}
$$

par la définition de la probabilité conditionnelle.

$$
\begin{aligned}
= \; & \frac{P[\{X = x \text{ et } Y = y\}]}{P[\{Y = y\}]} \\
= \; & \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}
\end{aligned}
$$

Fonction de masse conditionnelle III

$$f_{X|Y}(x, y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

- Nous voyons maintenant pourquoi nous restreignons la variable Y à son support alors que la variable X n'est pas contrainte de cette même façon : nous ne pouvons nous permettre de diviser par zéro!
- De façon symétrique, nous définissons la fonction de masse conditionnelle de Y étant donné X:

$$\forall x \in \mathcal{S}_X \text{ et } \forall y \in \mathbb{R},\ f_{Y|X}(y, x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}.$$

Fonction de masse conditionnelle IV

Definition

Plus généralement, il est possible de définir la **fonction de masse conditionnelle** de n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ étant donné m variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_m$:

$$\begin{aligned} f_{X_1,\ldots,X_n|Y_1,\ldots,Y_m} : \mathbb{R}^{\times n} \times \mathcal{S}_{Y_1} \times \ldots \times \mathcal{S}_{Y_m} &\to [0,1] \\ (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &\to \frac{f_{X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_m}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)}{f_{Y_1,\ldots,Y_m}(y_1, \ldots, y_m)}. \end{aligned}$$

Exemple I

Fonction de masse conditionnelle

Supposons que l'ensemble fondamental est $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ et que $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, 3\}$. Le processus stochastique $X = \{X_t : t \in \{0, 1, 2, 3\}\}$ représente l'évolution du prix d'une action, $X_t =$ le prix de l'action à la fermeture de la Bourse au t ième jour, l'instant $t = 0$ représentant aujourd'hui.

ω	$X_0(\omega)$	$X_1(\omega)$	$X_2(\omega)$	$X_3(\omega)$	$P(\omega)$
ω_1	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{8}$
ω_2	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
ω_3	1	2	1	1	$\frac{3}{8}$
ω_4	1	2	2	2	$\frac{2}{8}$

Exemple II

Fonction de masse conditionnelle

La fonction de masse de X_2 est

$$f_{X_2}(x) = \begin{cases} \frac{6}{8} & \text{si } x = 1 \\ \frac{2}{8} & \text{si } x = 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases},$$

La fonction de masse conjointe de X_2 et X_3 est

$$f_{X_2,X_3}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{8} & \text{si } x = 1 \text{ et } y = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & \text{si } x = 1 \text{ et } y = 1 \\ \frac{2}{8} & \text{si } x = 2 \text{ et } y = 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple III

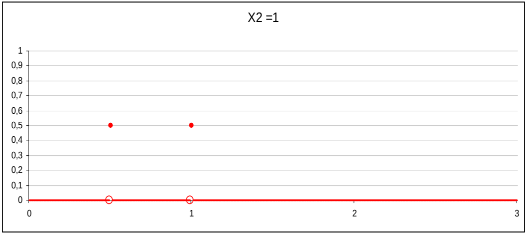
Fonction de masse conditionnelle

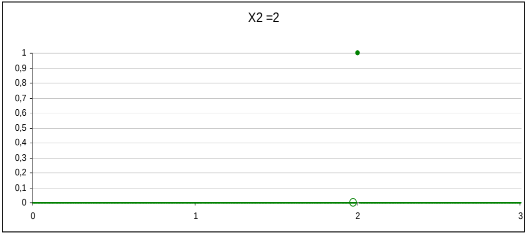
La fonction de masse conditionnelle de X_3 étant donné X_2 est

$$f_{X_3|X_2}(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{8}\left(\frac{6}{8}\right)^{-1} = \frac{1}{2} & \text{si } x = \frac{1}{2} \text{ et } y = 1 \\ \frac{3}{8}\left(\frac{6}{8}\right)^{-1} = \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \text{ et } y = 1 \\ \frac{2}{8}\left(\frac{2}{8}\right)^{-1} = 1 & \text{si } x = 2 \text{ et } y = 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple IV

Fonction de masse conditionnelle





Indépendance

Definition

Les variables aléatoires X et Y sont dites **indépendantes** si

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)\ f_Y(y),$$

c'est-à-dire si $\forall x, y \in \mathbb{R}$, les événements $\{X = x\}$ et $\{Y = y\}$ sont indépendants.

- Intuitivement, X et Y sont indépendantes lorsque le fait de détenir de l'information concernant l'une d'entre elles ne nous en fournit pas à propos de l'autre.

Exemple I

Indépendance

ω	X	Y	$P(\omega)$	$P^*(\omega)$
$\boxed{1}$	1	1	$\frac{1}{6}$	0
$\boxed{2}$	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$
$\boxed{3}$	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$
$\boxed{4}$	0	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$
$\boxed{5}$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$
$\boxed{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$

Exemple II

Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si c'est la mesure de probabilité P qui prévaut sur Ω car

$$
\begin{aligned}
P(X=1)\,P(Y=1) &= \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6} = P\left\{\boxed{1}\right\} = P(X=1 \text{ et } Y=1),\\
P(X=0)\,P(Y=1) &= \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6} = P\left\{\boxed{4}\right\} = P(X=0 \text{ et } Y=1),\\
P(X=1)\,P(Y=0) &= \frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{1}{3} = P\left\{\boxed{2},\boxed{3}\right\} = P(X=1 \text{ et } Y=0),\\
P(X=0)\,P(Y=0) &= \frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{1}{3} = P\left\{\boxed{5},\boxed{6}\right\} = P(X=0 \text{ et } Y=0).
\end{aligned}
$$

- Intuitivement, la réponse à la question "un dé a été lancé; quelle est la probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur 1?" est la même que la réponse à la question "un dé a été lancé et la variable aléatoire Y prend la valeur 1; quelle est la probabilité que la variable aléatoire X prenne aussi la valeur 1?". Cette réponse est une demie. Nous pouvons refaire le même type de raisonnement pour n'importe quelles valeurs de X et de Y.

Exemple III

Indépendance

ω	X	Y	$P(\omega)$	$P^*(\omega)$
$\boxed{1}$	1	1	$\frac{1}{6}$	0
$\boxed{2}$	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$
$\boxed{3}$	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$
$\boxed{4}$	0	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$
$\boxed{5}$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$
$\boxed{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$

Par contre, les mêmes variables aléatoires X et Y sont dépendantes si c'est P^* qui gouverne Ω puisque

$$\begin{aligned} P^*(X=1)\,P^*(Y=1) &= \frac{2}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{25} \\ P^*(X=1 \text{ et } Y=1) &= P^*\left\{\boxed{1}\right\}=0. \end{aligned}$$

Exemple IV

Indépendance

- Intuitivement, la réponse à la question "un dé a été lancé; quelle est la probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur 1?" n'est pas la même que la réponse à la question "un dé a été lancé et la variable aléatoire Y prend la valeur 1; quelle est la probabilité que la variable aléatoire X prenne aussi la valeur 1?". Dans le premier cas, la réponse est $\frac{2}{25}$ tandis que dans le second, la réponse est 0.

Exemple V

Indépendance

- Bien que les variables aléatoires n'aient nul besoin d'une mesure de probabilité pour exister, il est nécessaire de connaître la mesure de probabilité qui prévaut sur l'espace probabilisable pour parler d'indépendance, comme l'illustre l'exemple précédent.

Exemple I

Indépendance

ω	X	Y	Z	$P(\omega)$	ω	X	Y	Z	$P(\omega)$
ω_1	1	1	0	$\frac{1}{8}$	ω_5	0	1	1	$\frac{1}{8}$
ω_2	1	0	0	$\frac{1}{8}$	ω_6	0	0	0	$\frac{1}{8}$
ω_3	1	0	1	$\frac{1}{8}$	ω_7	0	0	0	$\frac{1}{8}$
ω_4	1	0	1	$\frac{1}{8}$	ω_8	0	0	1	$\frac{1}{8}$

Ces variables aléatoires sont deux à deux indépendantes puisque

Exemple II

Indépendance

$$\begin{aligned}
P\{X=0\}P\{Y=0\} &= 0,375 \\
&= P\{\omega_6,\omega_7,\omega_8\} = P(\{X=0\}\cap\{Y=0\}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P\{X=1\}P\{Y=0\} &= 0,375 \\
&= P\{\omega_2,\omega_3,\omega_4\} = P(\{X=1\}\cap\{Y=0\}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P\{X=0\}P\{Y=1\} &= 0,125 \\
&= P\{\omega_5\} = P(\{X=0\}\cap\{Y=1\}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P\{X=1\}P\{Y=1\} &= 0,125 \\
&= P\{\omega_1\} = P(\{X=1\}\cap\{Y=1\}).
\end{aligned}$$

Exemple III

Indépendance

$$
\begin{aligned}
P\{X=0\}\,P\{Z=0\} &= 0,25 \\
&= P\{\omega_6,\omega_7\} = P(\{X=0\}\cap\{Z=0\}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\{X=1\}\,P\{Z=0\} &= 0,25 \\
&= P\{\omega_1,\omega_2\} = P(\{X=1\}\cap\{Z=0\}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\{X=0\}\,P\{Z=1\} &= 0,25 \\
&= P\{\omega_5,\omega_8\} = P(\{X=0\}\cap\{Z=1\}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\{X=1\}\,P\{Z=1\} &= 0,25 \\
&= P\{\omega_3,\omega_4\} = P(\{X=1\}\cap\{Z=1\}).
\end{aligned}
$$

Exemple IV

Indépendance

$$
\begin{aligned}
P\{Z=0\}P\{Y=0\} &= 0,375 \\
&= P\{\omega_2,\omega_6,\omega_7\} = P(\{Z=0\}\cap\{Y=0\}), \\
P\{Z=1\}P\{Y=0\} &= 0,375 \\
&= P\{\omega_3,\omega_4,\omega_8\} = P(\{Z=1\}\cap\{Y=0\}), \\
P\{Z=0\}P\{Y=1\} &= 0,125 \\
&= P\{\omega_1\} = P(\{Z=0\}\cap\{Y=1\}), \\
P\{Z=1\}P\{Y=1\} &= 0,125 \\
&= P\{\omega_5\} = P(\{Z=1\}\cap\{Y=1\}).
\end{aligned}
$$

Exemple V

Indépendance

Mais ces variables ne sont pas mutuellement indépendantes puisque

$$\begin{aligned} & P\{X=1\}\,P\{Y=1\}\,P\{Z=1\} \\ = \;& 0,0625 \\ \neq \;& 0 \\ = \;& P\{\varnothing\} \\ = \;& P(\{X=1\}\cap\{Y=1\}\cap\{Z=1\})\,. \end{aligned}$$

Espérance

Definition

L'**espérance** d'une variable aléatoire discrète X, notée $E[X]$, est

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{x \in \mathcal{S}_X} x \, f_X(x) \, .$$

Exemple I

Espérance

Reprenons la variable aléatoire W ainsi que les deux mesures de probabilité P et Q :

ω	$W(\omega)$	$P(\omega)$	$Q(\omega)$
$\boxed{1}$	5	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{12}$
$\boxed{2}$	5	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$\boxed{3}$	5	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$\boxed{4}$	5	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$\boxed{5}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$\boxed{6}$	10	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{12}$

Exemple II

Espérance

x	$P\{W = x\}$	$Q\{W = x\}$
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
5	$\frac{4}{6}$	$\frac{7}{12}$
10	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{12}$

Exemple III

Espérance

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}^P[W] &= \sum_{i=1}^{n} x_i f_X(x_i) \\
&= 0 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{4}{6} + 10 \times \frac{1}{6} = \frac{30}{6} = 5;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}^Q[W] &= \sum_{i=1}^{n} x_i f_X(x_i) \\
&= 0 \times \frac{1}{12} + 5 \times \frac{7}{12} + 10 \times \frac{4}{12} = \frac{75}{12} = 6,25.
\end{aligned}$$

Exemple IV

Espérance

- L'espérance d'une variable aléatoire est un nombre réel. Ce n'est pas une quantité aléatoire.
- Dans l'exemple précédent, nous pouvons noter que l'espérance d'une variable aléatoire dépend de la mesure de probabilité utilisée.

Moments

Definition

Plus généralement, si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction à valeurs réelles alors l'*espérance* de $g(X)$ où X est une variable aléatoire discrète est

$$E[g(X)] = \sum_{x \in \mathcal{S}_X} g(x)\; f_X(x).$$

Propriétés
Espérance

Soit X et Y, deux variables aléatoires discrètes. Si a et b représentent des nombres réels alors

(E1) $\mathrm{E}[aX + bY] = a\mathrm{E}[X] + b\mathrm{E}[Y]$.

(E2) Si $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq Y(\omega)$ alors $\mathrm{E}[X] \leq \mathrm{E}[Y]$.

(E3) De façon générale, $\mathrm{E}[XY] \neq \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]$.

(E4) Si X et Y sont indépendantes alors $\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]$.

Preuve de (E3)
Espérance

Voici un contre-exemple :

ω	$X(\omega)$	$Y(\omega)$	$P(\omega)$	$X(\omega)\,Y(\omega)$
ω_1	0	1	$\frac{1}{4}$	0
ω_2	0	1	$\frac{1}{4}$	0
ω_3	1	0	$\frac{1}{4}$	0
ω_4	1	0	$\frac{1}{4}$	0

Nous trouvons $\mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq 0 = \mathrm{E}[XY]$.

Preuve de (E4)

Espérance

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[XY] &= \sum_{x\in\mathcal{S}_X}\sum_{y\in\mathcal{S}_Y} xy\ f_{X,Y}(x,y) \\ &= \sum_{x\in\mathcal{S}_X}\sum_{y\in\mathcal{S}_Y} xy\ f_X(x)\,f_Y(y) \\ &\quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.} \\ &= \left(\sum_{x\in\mathcal{S}_X} x\ f_X(x)\right)\left(\sum_{y\in\mathcal{S}_Y} y\ f_Y(y)\right) \\ &= \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]\ \blacksquare \end{aligned}$$

- **Exercice**. Démontrez les propriétés (E1) et (E2).

Variance

Definition

La **variance** d'une variable aléatoire discrète X, notée $\mathrm{Var}[X]$, est définie comme suit :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X] &= \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] \\ &= \sum_{x \in \mathcal{S}_X} (x - \mathrm{E}[X])^2 \ f_X(x).\end{aligned}$$

- La variance est une mesure de la dispersion des valeurs prises par X autour de son espérance $\mathrm{E}[X]$.
- Plus la variance est grande, plus les valeurs sont dispersées.
- Tout comme l'espérance, la variance est un nombre réel.
- De plus, quelle que soit la variable aléatoire, la variance n'est jamais négative.
- L'écart-type, fort utilisé en statistique, est la racine carrée de la variance.

Propriétés

Variance

(V1) $\mathrm{Var}[X] \geq 0$.

(V2) $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2$.

(V3) $\forall a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Var}[aX + b] = a^2 \mathrm{Var}[X]$.

(V4) Si X et Y sont indépendantes alors
$\mathrm{Var}[X + Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]$.

Preuve de (V1)

Variance

$$\mathrm{Var}\left[X\right] = \sum_{x \in \mathcal{S}_X} \underbrace{\left(x - \mathrm{E}\left[X\right]\right)^2}_{\geq 0} \underbrace{f_X\left(x\right)}_{\geq 0} \geq 0. \quad \blacksquare$$

Preuve de (V2)

Variance

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Var}[X] \\
= &\sum_{x \in \mathcal{S}_X} (x - \mathrm{E}[X])^2 \; f_X(x) \\
= &\sum_{x \in \mathcal{S}_X} \left(x^2 - 2x\mathrm{E}[X] + (\mathrm{E}[X])^2\right) \; f_X(x) \\
= &\underbrace{\sum_{x \in \mathcal{S}_X} x^2 \; f_X(x)}_{=\mathrm{E}[X^2]} - 2\mathrm{E}[X] \underbrace{\sum_{x \in \mathcal{S}_X} x \; f_X(x)}_{=\mathrm{E}[X]} + (\mathrm{E}[X])^2 \underbrace{\sum_{x \in \mathcal{S}_X} f_X(x)}_{\substack{=1 \\ \text{par la définition de} \\ \text{fonction de masse}}} \\
= &\mathrm{E}\left[X^2\right] - 2(\mathrm{E}[X])^2 + (\mathrm{E}[X])^2 \\
= &\mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2 . \blacksquare
\end{aligned}
$$

Preuve de (V3)

Variance

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[aX+b\right] &= \sum_{x\in\mathcal{S}_X}\left(ax+b-\mathrm{E}\left[aX+b\right]\right)^2\ f_X\left(x\right)\\
&= \sum_{x\in\mathcal{S}_X}\left(ax+b-a\mathrm{E}\left[X\right]-b\right)^2\ f_X\left(x\right)\ \text{ par (E1).}\\
&= a^2\sum_{x\in\mathcal{S}_X}\left(x-\mathrm{E}\left[X\right]\right)^2\ f_X\left(x\right)\\
&= a^2\,Var\left[X\right].\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Preuve de (V4)

Variance

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Var}\left[X+Y\right] \\
= \; & \mathrm{E}\left[(X+Y)^2\right] - \left(\mathrm{E}\left[X+Y\right]\right)^2 \text{ par (V2)} \\
= \; & \mathrm{E}\left[X^2+2XY+Y^2\right] - \left(\mathrm{E}\left[X\right]+\mathrm{E}\left[Y\right]\right)^2 \text{ par (E1)} \\
= \; & \mathrm{E}\left[X^2\right] + 2\mathrm{E}\left[XY\right] + \mathrm{E}\left[Y^2\right] \\
& - \left(\mathrm{E}\left[X\right]\right)^2 - 2\mathrm{E}\left[X\right]\mathrm{E}\left[Y\right] - \left(\mathrm{E}\left[Y\right]\right)^2 \\
= \; & \mathrm{E}\left[X^2\right] + 2\mathrm{E}\left[X\right]\mathrm{E}\left[Y\right] + \mathrm{E}\left[Y^2\right] \\
& - \left(\mathrm{E}\left[X\right]\right)^2 - 2\mathrm{E}\left[X\right]\mathrm{E}\left[Y\right] - \left(\mathrm{E}\left[Y\right]\right)^2 \text{ par (E4)} \\
= \; & \mathrm{E}\left[X^2\right] - \left(\mathrm{E}\left[X\right]\right)^2 + \mathrm{E}\left[Y^2\right] - \left(\mathrm{E}\left[Y\right]\right)^2 \\
= \; & \mathrm{Var}\left[X\right] + \mathrm{Var}\left[Y\right] \text{ par (V2).} \; \blacksquare
\end{aligned}
$$

Covariance I

Definition

La **covariance** des variables aléatoires discrètes X et Y, notée $\mathrm{Cov}\left[X,Y\right]$ est l'espérance de la variable aléatoire $\left(X-\mathrm{E}\left[X\right]\right)\left(Y-\mathrm{E}\left[Y\right]\right)$:

$$\mathrm{Cov}\left[X,Y\right]=\sum_{x\in\mathcal{S}_X}\sum_{y\in\mathcal{S}_Y}\left(x-\mathrm{E}\left[X\right]\right)\left(y-\mathrm{E}\left[Y\right]\right)\ f_{X,Y}\left(x,y\right)$$

- Si la covariance est positive, c'est que dans la somme

$$\sum_{x\in\mathcal{S}_X}\sum_{y\in\mathcal{S}_Y}\left(x-\mathrm{E}\left[X\right]\right)\left(y-\mathrm{E}\left[Y\right]\right)\ f_{X,Y}\left(x,y\right),$$

ce sont les x et les y rendant le terme $\left(x-\mathrm{E}\left[X\right]\right)\left(y-\mathrm{E}\left[Y\right]\right)$ positif qui dominent, ce qui signifie que les variables aléatoires X et Y ont tendance à

Covariance II

être soit supérieures, soit inférieures à leur espérance pour les mêmes états du monde ω.

- Si la covariance est négative, alors ce sont les ω rendant le terme $(x - \mathrm{E}[X])(y - \mathrm{E}[Y])$ négatif qui dominent, ce qui signifie que lorsqu'une des variables aléatoires X ou Y est supérieure à son espérance, l'autre a tendance à être inférieure à son espérance.

Propriétés I

Covariance

(C1) $\mathrm{Cov}\left[X, Y\right] = \mathrm{E}\left[XY\right] - \mathrm{E}\left[X\right]\mathrm{E}\left[Y\right]$.

(C2) Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}\left[X, Y\right] = 0$.

(C3) $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$,
$\mathrm{Cov}\left[aX_1 + bX_2; Y\right] = a\mathrm{Cov}\left[X_1; Y\right] + b\mathrm{Cov}\left[X_2; Y\right]$.

(C4) $\mathrm{Var}\left[X + Y\right] = \mathrm{Var}\left[X\right] + \mathrm{Var}\left[Y\right] + 2\mathrm{Cov}\left[X, Y\right]$

Principales lois discrètes

- Les cinq premières lois présentées (Bernoulli, binomiale, géométrique, binomiale négative et hypergéométrique) servent à modéliser différentes quantités concernant la situation suivante : une expérience aléatoire est tentée pour laquelle deux résultats seulement sont possibles : un succès, qui peut être obtenu avec une probabilité π, ou un échec, qui survient avec probabilité $1-\pi$, π étant un nombre réel compris entre 0 et 1 inclusivement.

Loi de Bernoulli I

- Une expérience aléatoire est tentée.
- Deux résultats sont possibles : un succès, qui peut être obtenu avec une probabilité π, ou un échec, qui survient avec probabilité $1 - \pi$, π étant un nombre réel compris entre 0 et 1 inclusivement.
- La variable aléatoire X, qui vaut 1 si un succès est observé et 0 sinon, est de loi de Bernoulli de paramètre π.

Loi de Bernoulli II

- Les valeurs prises par cette variable aléatoire sont

$$\mathcal{S}_X = \begin{cases} \{0,1\} & \text{si } 0 < \pi < 1, \\ 0 & \text{si } \pi = 0, \\ 1 & \text{si } \pi = 1. \end{cases}$$

- Sa fonction de masse est

$$f_X(x) = \begin{cases} \pi^x (1-\pi)^{1-x} & \text{si } x \in \mathcal{S}_X \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \pi &= P[\text{obtenir un succès}] = P[X=1] = \pi^1 (1-\pi)^{1-1} \\ \text{et } 1-\pi &= P[\text{obtenir un échec}] = P[X=0] = \pi^0 (1-\pi)^{1-0}. \end{aligned}$$

Loi de Bernoulli III

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= 0 f_X(0) + 1 f_X(1) \\ &= 0\ \pi^0 (1-\pi)^{1-0} + 1\ \pi (1-\pi)^{1-1} \\ &= \pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[X^2\right] &= 0 f_X(0) + 1^2 f_X(1) \\ &= \pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[X] &= \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2 \\ &= \pi - \pi^2 \\ &= \pi(1-\pi). \end{aligned}$$

Binomiale I

- Une expérience aléatoire est tentée.
- Deux résultats sont possibles : un succès, qui peut être obtenu avec une probabilité π, ou un échec, qui survient avec probabilité $1 - \pi$, π étant un nombre réel compris entre 0 et 1 inclusivement.
- Cette expérience est répétée n fois, de façon indépendante.
- La variable aléatoire X, qui représente le nombre de succès obtenus au cours de ces n tentatives, est de loi binomiale de paramètres n et π.

Binomiale II

- Les valeurs prises par cette variable aléatoire sont

$$\mathcal{S}_X = \begin{cases} \{0, 1, \dots, n\} & \text{si } 0 < \pi < 1, \\ 0 & \text{si } \pi = 0, \\ n & \text{si } \pi = 1. \end{cases}$$

- Sa fonction de masse est

$$f_X(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} \pi^x (1-\pi)^{n-x} & \text{si } x \in \mathcal{S}_X \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $\begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$.

- Rappelons que, par définition, $0! = 1$.

Binomiale III

- **Justification de la fonction de masse** :

Il y a 10 façon d'obtenir 3 succès lors de 5 tentatives :

ÉÉSSS, ÉSÉSS, ÉSSÉS, ÉSSSÉ
SÉÉSS, SÉSÉS, SÉSSÉ,
SSÉÉS, SSÉSÉ, SSSÉÉ.

$$
\begin{aligned}
& P\left[X = x\right] \\
= \quad & P\left[\text{obtenir } x \text{ succès et } n - x \text{ échec}\right] \\
= \quad & \underbrace{\frac{n!}{x!\,(n-x)!}}_{\substack{\text{nombre de façons} \\ \text{de disposer les } x \text{ succès} \\ \text{parmi les } n \text{ essais}}} \quad \underbrace{\pi^x}_{\substack{\text{probabilité d'obtenir} \\ x \text{ succès}}} \quad \underbrace{(1-\pi)^{n-x}}_{\substack{\text{probabilité d'obtenir} \\ n-x \text{ échecs}}} \quad .
\end{aligned}
$$

Binomiale IV

- Si

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si nous obtenons un succès au } i \text{ ième essai} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  alors X_1, ..., X_n est un ensemble de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, toutes de loi Bernoulli(π).
- Nous pouvons constater que $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Binomiale V

- Pour cette raison,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i] \text{ par la propriété (E1)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \pi \\
&= n\pi.
\end{aligned}
$$

Binomiale VI

- $$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[X\right] &= \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\left[X_i\right] \text{ par la propriété (V4)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \pi\left(1-\pi\right) \\ &= n\pi\left(1-\pi\right).\end{aligned}$$

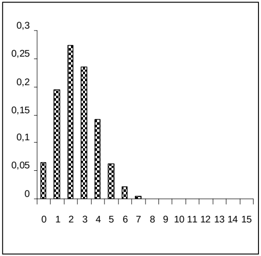
Exemple I

Loi binomiale

- Le nombre X de $\boxed{6}$ obtenus en 15 lancers de dé est de loi binomiale$\left(15, \frac{1}{6}\right)$.

x	$f_X(x)$
0	$6,491 \times 10^{-2}$
1	$1,947 \times 10^{-1}$
2	$2,726 \times 10^{-1}$
3	$2,363 \times 10^{-1}$
4	$1,418 \times 10^{-1}$
5	$6,237 \times 10^{-2}$
	$\cdots$

Fonction de masse de X



$$\mathrm{E}[X] = 2,5 \text{ et } \mathrm{Var}[X] = \frac{25}{12} \cong 2,0833.$$

Exemple II
Loi binomiale

- Le nombre de personnes ayant les yeux bleus dans un échantillon aléatoire simple avec remise de taille 540 tiré dans une population donnée est de loi binomiale$(540, \pi)$ où π est la proportion d'individus ayant les yeux bleus dans la population.

Propriété

Loi binomiale

- Si X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes de loi binomiale(n_1, π) et binomiale(n_2, π) respectivement, alors $X_1 + X_2$ est de loi binomiale$(n_1 + n_2, \pi)$.

Géométrique I

- Une expérience aléatoire est tentée.
- Deux résultats sont possibles : un succès, qui peut être obtenu avec une probabilité π, ou un échec, qui survient avec probabilité $1 - \pi$, π étant un nombre réel compris entre 0 exclusivement et 1 inclusivement.
- Cette expérience est répétée de façon indépendante jusqu'à l'obtention d'un premier succès. Soit X le nombre d'essais requis.

Géométrique II

- Les valeurs prises par cette variable aléatoire sont

$$\mathcal{S}_X = \begin{cases} \{1, 2, 3, \ldots\} & \text{si } 0 < \pi < 1 \\ 1 & \text{si } \pi = 1 \end{cases}$$

- Sa fonction de masse est

$$f_X(x) = \begin{cases} \pi (1-\pi)^{x-1} & \text{si } x \in \mathcal{S}_X \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Justification de la fonction de masse:

$$\begin{aligned} P[X = x] &= P\left[\text{Le résultat des } n \text{ essais est } \underbrace{\acute{E}\acute{E}\acute{E}\ldots\acute{E}}_{x-1 \text{ fois}} S\right] \\ &= (1-\pi)^{x-1}\pi. \end{aligned}$$

Les séries géométriques I

Theorem

Soit $S_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n$. *Si* $|a| < 1$ *alors*

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1-a}.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + a + a^2 + \ldots + a^n \\ \Rightarrow \quad aS_n &= a + a^2 + \ldots + a^{n+1} \\ \Rightarrow \quad S_n - aS_n &= 1 - a^{n+1} \\ \Rightarrow \quad S_n &= \frac{1-a^{n+1}}{1-a}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Les séries géométriques II

Theorem

Posons $T_n = 1 + 2a + 3a^2 + \ldots + na^{n-1}$. *Si* $|a| < 1$ *alors*

$$\lim_{n \to \infty} T_n = \frac{1}{(1-a)^2}.$$

Preuve. Rappelons que $S_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n$.

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{d}{da} S_n \\ &= \frac{d}{da} \frac{1 - a^{n+1}}{1-a} \\ &= \frac{1 - (n+1)a^n + na^{n+1}}{(1-a)^2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Les séries géométriques III

Theorem

Posons $U_n = 1 + 2^2 a + 3^2 a^2 + \ldots + n^2 a^{n-1}$. *Si* $|a| < 1$ *alors*

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \frac{1+a}{(1-a)^3}.$$

Preuve. Rappelons que

$$\begin{aligned} U_n &= 1 + 2^2 a + 3^2 a^2 + \ldots + n^2 a^{n-1} \\ T_n &= 1 + 2a + 3a^2 + \ldots + na^{n-1}. \\ \text{et } aT_n &= a + 2a^2 + 3a^3 + \ldots + na^n \end{aligned}$$

Les séries géométriques IV

$$
\begin{aligned}
& U_n \\
= \quad & \frac{d}{da}\left(a T_n\right) \\
= \quad & T_n + a\frac{d}{da}T_n \\
= \quad & \frac{1-(n+1)\,a^n + na^{n+1}}{(1-a)^2} + a\frac{d}{da}\left(\frac{1-(n+1)\,a^n + na^{n+1}}{(1-a)^2}\right) \\
= \quad & \frac{1+a-\left(n^2+2n+1\right)a^n + \left(2n^2+2n-1\right)a^{n+1} - a^{n+2}n^2}{(1-a)^3}.
\end{aligned}
$$

Les moments I

loi géométrique

Rappel : $T_n = 1 + 2a + \ldots + na^{n-1}$ et $\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{(1-a)^2}$.
Si $0 < \pi < 1$ alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \sum_{x=1}^{\infty} x f_X(x) \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x\pi (1-\pi)^{x-1} \\
&= \pi \sum_{x=1}^{\infty} x (1-\pi)^{x-1} \\
&= \pi \left(1 + 2(1-\pi) + 3(1-\pi)^2 + \ldots\right) \\
&= \pi \frac{1}{(1-(1-\pi))^2} = \frac{1}{\pi}.
\end{aligned}$$

Les moments II

loi géométrique

Rappel : $U_n = 1 + 2^2 a + \ldots + n^2 a^{n-1}$ et $\lim_{n\to\infty} U_n = \frac{1+a}{(1-a)^3}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[X^2\right] &= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 f_X(x) \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \pi (1-\pi)^{x-1} \\
&= \pi \sum_{x=1}^{\infty} x^2 (1-\pi)^{x-1} \\
&= \pi \left(1 + 2^2 (1-\pi) + 3^2 (1-\pi)^2 + \ldots\right) \\
&= \pi \frac{1 + (1-\pi)}{(1-(1-\pi))^3} \\
&= \frac{2-\pi}{\pi^2}.
\end{aligned}$$

Les moments III

loi géométrique

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[X\right] &= \mathrm{E}\left[X^2\right] - \left(\mathrm{E}\left[X\right]\right)^2 \\ &= \frac{2-\pi}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} \\ &= \frac{1-\pi}{\pi^2}.\end{aligned}$$

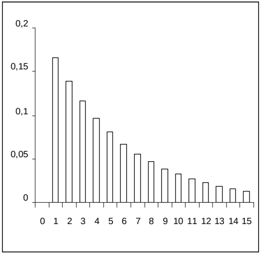
Exemple

Loi géométrique

Le nombre X de lancers de dé nécessaires à l'obtention de la face $\boxed{6}$ suit une loi géométrique de paramètre $\pi = \frac{1}{6}$.

x	$f_X(x)$
1	$1,667 \times 10^{-1}$
2	$1,389 \times 10^{-1}$
3	$1,157 \times 10^{-1}$
4	$9,645 \times 10^{-2}$
5	$8,038 \times 10^{-2}$
	$\dots$

Fonction de masse de X



$$\mathrm{E}[X] = 6 \text{ et } \mathrm{Var}[X] = 30.$$

Binomiale négative I

- Une expérience aléatoire est tentée.
- Deux résultats sont possibles : un succès, qui peut être obtenu avec une probabilité π, ou un échec, qui survient avec probabilité $1 - \pi$, π étant un nombre réel compris entre 0 exclusivement et 1 inclusivement.
- Cette expérience est répétée de façon indépendante jusqu'à l'obtention de n succès. Soit X le nombre d'essais requis.

Binomiale négative II

- Les valeurs prises par cette variable aléatoire sont

$$\mathcal{S}_X = \begin{cases} \{n, n+1, \ldots\} & \text{si } 0 < \pi < 1 \\ n & \text{si } \pi = 1 \end{cases}$$

- Sa fonction de masse est

$$f_X(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} x-1 \\ n-1 \end{pmatrix} \pi^n (1-\pi)^{x-n} & \text{si } x \in \mathcal{S}_X \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Binomiale négative III

- **Justification de la fonction de masse**

$$
\begin{aligned}
& P\left[X = x\right] \\
= \quad & P\left[\begin{array}{c} \text{il y a eu exactement } x \text{ essais,} \\ \text{le résultat du dernier essais est un succès} \\ \text{et parmi les } x-1 \text{ premières tentaitves,} \\ \text{il y a eu } n-1 \text{ succès.} \end{array}\right] \\
= \quad & \underbrace{\frac{(x-1)!}{(n-1)!\,(x-n)!}}_{\substack{\text{Nombre de façons d'obtenir} \\ n-1 \text{ succès en } x-1 \text{ essais}}} \; \underbrace{\pi^n}_{\substack{\text{probabilité d'obtenir} \\ n \text{ succès}}} \; \underbrace{(1-\pi)^{x-n}}_{\substack{\text{probabilité d'ontenir} \\ x-n \text{ échecs}}}.
\end{aligned}
$$

Binomiale négative IV

- Si X_i représente le nombre d'essais effectués après le $i-1$ ième succès afin d'obtenir le i ième succès alors X_1, ..., X_n est un ensemble de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, toutes de loi Géométrique(π).
- Nous pouvons constater que

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Binomiale négative V

- Pour cette raison,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[X\right] &= \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left[X_i\right] \quad \text{par la propriété (E1)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\pi} \\
&= \frac{n}{\pi}
\end{aligned}
$$

Binomiale négative VI

- En utilisant la propriété $(V4)$, nous établissons une expression pour la variance d'une variable aléatoire de loi binomiale négative :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[X] &= \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i] \quad \text{par la propriété (V4)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1-\pi}{\pi^2} \\
&= n\frac{1-\pi}{\pi^2}.
\end{aligned}$$

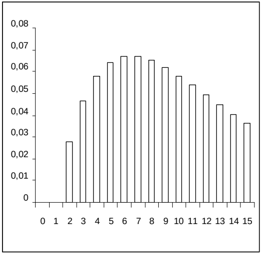
Exemple I

Binomiale négative

Le nombre X de lancers de dé nécessaires à l'obtention de deux fois la face $\boxed{6}$ suit une loi binomiale négative de paramètres $n = 2$ et $\pi = \frac{1}{6}$.

x	$f_X(x)$
2	$2,778 \times 10^{-2}$
3	$4,630 \times 10^{-2}$
4	$5,787 \times 10^{-2}$
5	$6,430 \times 10^{-2}$
6	$6,698 \times 10^{-2}$
	$\ldots$

Fonction de masse de X



$$\mathrm{E}[X] = 12 \text{ et } \mathrm{Var}[X] = 60.$$

Hypergéométrique I

- La population est composée de N_1 éléments de type 1 et de N_2 éléments de type 2.
- Nous prélevons un échantillon aléatoire simple sans remise de taille n de cette population (n étant un entier positif inférieur ou égal à $N_1 + N_2$).
- La variable aléatoire X est le nombre d'éléments de type 1 dans l'échantillon.
- Cette situation ressemble à celle définie lors de la présentation de la loi binomiale. En effet, si nous définissons un succès comme étant le fait de choisir un élément de type 1, alors X serait de loi binomiale$\left(n, \frac{N_1}{N_1+N_2}\right)$ si l'échantillonnage était effectué **avec remise**.

Hypergéométrique II

- Dans le cas d'un échantillonnage **sans remise**, le support de la variable X est

$$\mathcal{S}_X = \{x \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \max\{0, n - N_2\} \leq x \leq \min\{n, N_1\}\}.$$

  - En effet, s'il y a moins d'éléments de type 1 dans la population que d'éléments dans l'échantillon $(n > N_1)$, alors il ne nous est pas possible d'obtenir plus de N_1 succès. C'est pourquoi $x \leq \min\{n, N_1\}$.
  - S'il y a moins d'éléments de type 2 dans la population que d'éléments dans l'échantillon $(n > N_2)$, alors il ne nous est pas possible d'obtenir plus de N_2 échecs. Comme le nombre d'échecs est n moins le nombre de succès, alors

$$\begin{aligned} & n - x \leq \min\{n, N_2\} \\ \Leftrightarrow \quad & -n + x \geq -\min\{n, N_2\} = \max\{-n, -N_2\} \\ \Leftrightarrow \quad & x \geq n + \max\{-n, -N_2\} = \max\{0, n - N_2\}. \end{aligned}$$

Hypergéométrique III

- La fonction de masse est

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \begin{cases} \dfrac{\begin{pmatrix} N_1 \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N_2 \\ n-x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N_1+N_2 \\ n \end{pmatrix}} & \text{si } x \in \mathcal{S}_X \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{N_1!N_2!n!(N_1+N_2-n)!}{x!(N_1-x)!(n-x)!(N_2-n+x)!(N_1+N_2)!} & \text{si } x \in \mathcal{S}_X \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Hypergéométrique IV

- Il est possible de montrer que

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X] &= n\frac{N_1}{N_1+N_2} \text{ et}\\ \mathrm{Var}[X] &= n\frac{N_1}{N_1+N_2}\frac{N_2}{N_1+N_2}\frac{N_1+N_2-n}{N_1+N_2-1}.\end{aligned}$$

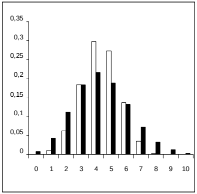
Exemple I

Hypergéométrique

- Un échantillon aléatoire simple sans remise de taille 20 est sélectionné dans une classe composée de 8 filles et 29 garçons.
- Le nombre X de filles présentes dans l'échantillon suit une loi hypergéométrique de paramètres $n = 20$ et $N_1 = 8$ et $N_2 = 29$.
- Pour fins de comparaison, nous avons aussi représenté la distribution d'une variable aléatoire Y de loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $\pi = \frac{8}{37}$.

x	$f_X(x)$ (blanc)	$f_Y(x)$ (noir)
0	$6,2966 \times 10^{-4}$	$7,6547 \times 10^{-3}$
1	$1,0075 \times 10^{-2}$	$4,2233 \times 10^{-2}$
2	$6,0905 \times 10^{-2}$	$1,1068 \times 10^{-1}$
3	$1,8272 \times 10^{-1}$	$1,8319 \times 10^{-1}$
4	$2,9867 \times 10^{-1}$	$2,1478 \times 10^{-1}$
5	$2,7307 \times 10^{-1}$	$1,8960 \times 10^{-1}$
	...	...

Fcts de masse de X et de Y



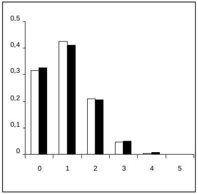
Exemple II

Hypergéométrique

- Le nombre X de cartes en ♠ obtenues dans une main de poker suit une loi Hypergéométrique de paramètres $n = 5$ et $N_1 = 13$ et $N_2 = 39$.
- Par comparaison, le nombre Y de cartes en ♠ obtenues en tirant cinq fois une carte avec remise dans un jeu de 52 cartes est de loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $\pi = \frac{13}{52}$.

x	$f_X(x)$ (blanc)	$f_Y(x)$ (noir)
0	$2,2153 \times 10^{-1}$	$2,373 \times 10^{-1}$
1	$4,1142 \times 10^{-1}$	$3,9551 \times 10^{-1}$
2	$2,7428 \times 10^{-1}$	$2,6367 \times 10^{-1}$
3	$8,1543 \times 10^{-2}$	$8,7891 \times 10^{-2}$
4	$1,0729 \times 10^{-2}$	$1,4648 \times 10^{-2}$
5	$4,952 \times 10^{-4}$	$9,7656 \times 10^{-4}$

Fonctions de masse de X et de Y



Remarque I

Hypergéométrique

- Plus le taux de sondage $\frac{n}{N_1+N_2}$ est petit, plus la loi hypergéométrique de paramètres (n, N_1, N_2) ressemble à la loi binomiale$\left(n, \frac{N_1}{N_1+N_2}\right)$.

Poisson I

- La loi de Poisson s'applique souvent à la description du comportement du nombre X d'événements qui se produisent dans un certain intervalle de temps.
- Le support d'une variable aléatoire de loi de Poisson est l'ensemble des entiers naturels augmenté du zéro.
- Sa fonction de masse est

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} & \text{si } x \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

  où λ est une constante positive.
- Nous verrons lors de l'étude des processus de Poisson comment se justifie cette expression pour la fonction de masse.

Poisson II

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda
\end{aligned}
$$

Poisson III

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[X^2\right] &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{d}{d\lambda} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \left(\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(x-1)\,\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \right) \\
&= \lambda e^{-\lambda} \left(\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} + \lambda \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} \right) \\
&= \lambda e^{-\lambda} \left(e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda} \right) \\
&= \lambda + \lambda^2
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{Var}\left[X\right] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \left(\mathrm{E}\left[X\right]\right)^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.
$$

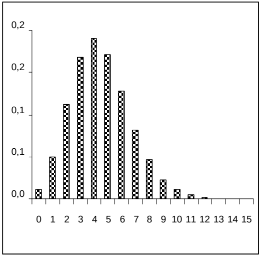
Exemple

Poisson

- S'il y a en moyenne trois naissances par jour dans un certain hôpital, alors le nombre X de naissances qui se produiront pendant les prochaines trente-six heures (1 journée et demie) à cet hôpital suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4,5$.

x	$f_X(x)$
0	$1,111 \times 10^{-2}$
1	$4,999 \times 10^{-2}$
2	$1,125 \times 10^{-1}$
3	$1,687 \times 10^{-1}$
4	$1,898 \times 10^{-1}$
5	$1,708 \times 10^{-1}$
6	$1,281 \times 10^{-1}$
...	...

Fonction de masse de X



Propriété

Poisson

- Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes, la première étant de loi de Poisson(λ_1) et la deuxième étant distribuée selon une loi de Poisson(λ_2) , alors $X_1 + X_2$ est de loi de Poisson$(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Uniforme

- Une variable aléatoire X est dite de loi uniforme discrète de paramètres a et b si a et b sont des entiers tels que $a < b$ et que la fonction de masse de X est

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a+1} & \text{si } x \in \{a, a+1, a+2, ..., b\} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

c'est-à-dire que chacune des modalités de la variable a la même probabilité de survenir.

Série I

La somme des n premiers entiers.

Theorem

$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Preuve par induction. Lorsque $n = 1$, nous avons

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1\,(1+1)}{2}.$$

Série II

La somme des n premiers entiers.

Supposons maintenant qu'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i &= \left(\sum_{i=1}^{k} i\right) + (k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \text{ par hypothèse d'induction} \\
&= \frac{k+1}{2}(k+2) . \blacksquare
\end{aligned}$$

Série I

La somme des n premiers entiers au carré.

Theorem

$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in \mathbb{N}$..

Preuve par induction. Lorsque $n = 1$, nous avons

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1 = \frac{1\,(1+1)\,(2 \times 1 + 1)}{6}.$$

Série II

La somme des n premiers entiers au carré.

Supposons maintenant qu'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \left(\sum_{i=1}^{k} i^2\right) + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \quad \text{par hyp. d'induction} \\
&= \frac{(k+1)}{6}\left(k(2k+1) + 6(k+1)\right) \\
&= \frac{(k+1)}{6}\left(2k^2 + 7k + 6\right) \\
&= \frac{(k+1)}{6}(k+2)(2(k+1)+1). \blacksquare
\end{aligned}$$

Moments I

Loi uniforme

- Si Y est de loi uniforme$(0, c)$, c'est-à-dire que $a = 0$ et $b = c > 0$, alors

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[Y\right] &= \sum_{y=0}^{c} y \frac{1}{c+1} \\
&= \frac{1}{c+1} \sum_{y=0}^{c} y \\
&= \frac{1}{c+1} \frac{c\left(c+1\right)}{2} \\
&= \frac{c}{2}
\end{aligned}
$$

Moments II

Loi uniforme

- $$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[Y^2\right] &= \sum_{y=0}^{c} y^2 \frac{1}{c+1} \\ &= \frac{1}{c+1} \sum_{y=0}^{c} y^2 \\ &= \frac{1}{c+1} \frac{c\,(c+1)\,(2c+1)}{6} \\ &= \frac{c\,(2c+1)}{6} \\ \mathrm{Var}\left[Y\right] &= \frac{c\,(2c+1)}{6} - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{c\,(c+2)}{12} \end{aligned}$$

Moments III

Loi uniforme

- Il suffit de constater que $X = Y + a$, $c = b - a$ pour obtenir les premiers moments d'une variable aléatoire de loi uniforme discrète de paramètres a et b :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[X\right] &= \mathrm{E}\left[Y\right] + a \\
&= \frac{b-a}{2} + a \\
&= \frac{a+b}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[X\right] &= \mathrm{Var}\left[Y + a\right] \\
&= \mathrm{Var}\left[Y\right] \\
&= \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}.
\end{aligned}$$

Exemple

Uniforme

- Le nombre X de points observés sur la face supérieure d'un dé suit une loi uniforme de paramètres $a = 1$ et $b = 6$. $\mathrm{E}[X] = \frac{7}{2} = 3,5$ et $\mathrm{Var}[X] = \frac{35}{12} \cong 2,9167$.