

# Introduction à la probabilité

## Exercices 1

**Exercice 1.1.** Aujourd'hui, lundi, vous avez un dollar dans votre tirelire. À partir de demain matin et ce, tous les matins jusqu'à vendredi inclusivement, vous tirez à pile ou face pour savoir si vous retirez un dollar (si possible) de la tirelire (pile) ou si vous y en ajoutez un (face). Modélisez l'évolution du contenu de votre tirelire en répondant aux questions suivantes :

- a) Quel est l'ensemble fondamental ?
- b) Définissez le processus stochastique que vous utilisez et donnez-en la signification. N'oubliez pas de définir ce que vous signifiez par une période de temps.
- c) Quelle est la mesure de probabilité qui prévaut sur  $\Omega$  si nous supposons que le sou est bien balancé.
- d) Soit  $A_t = \ll \text{la tirelire est vide au temps } t \gg$ ,  $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Déterminez la probabilité associée à chacun de ces événements.
- e) Déterminez, si possible, la probabilité que la tirelire contienne plus de 2 dollars vendredi midi, étant donné qu'elle était vide au temps  $t$ ,  $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .
- f) Est-ce que les événements «la tirelire est vide mercredi» et «la tirelire est vide vendredi» sont indépendants ? Justifiez et commentez.
- g) En supposant que le sou n'est pas nécessairement bien balancé et que la probabilité d'obtenir «pile» est  $p$ ,  $0 < p < 1$ , quelle est la distribution du contenu de la tirelire vendredi midi ?

**Exercice 1.2.** Afin d'occuper vos nombreux temps libres, vous jouez à un palpitant jeu avec votre ami. Le jeu consiste à rouler un dé qui indique le montant que vous gagnez ou perdez.

- Si vous obtenez 1, vous perdez 5\$.
- Si vous obtenez 2 ou 3, vous perdez 2\$.
- Si vous obtenez 4 ou 5, vous gagnez 2\$.
- Si vous obtenez 6, vous gagnez 5\$.

Étant particulièrement fatigué après votre dure journée d'école, vous convenez de ne faire que 2 lancers de dé. Vous êtes intéressé à modéliser l'évolution de votre avoir, en sachant que vous commencez le jeu, à  $t = 0$ , avec 10\$.

- a) Quel est l'ensemble fondamental?
- b) Définissez le processus stochastique qui correspond à cette situation, et donnez-en la signification. Faites attention de bien identifier les variables utilisées.
- c) Quelle est la mesure de probabilité sur  $\Omega$  si nous supposons que le dé est bien équilibré?
- d) Soit  $A_t$  = l'avoir est supérieur à 10\$ au temps  $t$ . Calculez ces probabilités pour  $t \in \{0, 1, 2\}$ .
- e) Sachant que vous avez gagné sur le premier lancer de dé, quelle est la probabilité que vous terminiez le jeu avec moins d'argent qu'au début?
- f) Est-ce que les événements suivants sont indépendants?: "Vous possédez 8\$ après un lancer" et "Vous possédez 10\$ après deux lancers".
- g) À la suite de pertes d'argent considérables, vous commencez à penser que votre ami triche en utilisant un dé truqué. Quel est la probabilité que vous ayez plus de 10\$ après 2 lancers si la probabilité d'obtenir 1 sur le dé est  $p$  ( $0 \leq p \leq \frac{1}{3}$ ), et celle d'obtenir 6 sur le dé est  $(\frac{1}{3} - p)$  (les autres faces restant bien équilibrées)?

**Exercice 1.3.**

a) Voici une application des probabilités et de la combinatoire pour le jeu de poker. Dans cet exercice, cinq cartes sont tirées aléatoirement d'un jeu de cartes standard de 52 cartes, et nous voulons savoir quelle sont les probabilités d'obtenir les mains suivantes. Évidemment, vous devez tenir compte de la force de chaque main. Par exemple, si vous avez un brelan (trois cartes pareilles), cette main ne peut pas être considérée comme une paire et un brelan, mais bien seulement un brelan. *Astuce: La meilleure façon de procéder consiste probablement à calculer combien il y a de façons différentes de réaliser une combinaison, et ensuite de diviser ce nombre par le nombre total de mains différentes possibles.*

Quinte floche royale (As-Roi-Dame-Valet-10 de la même sorte) :

Quinte floche (5 cartes consécutives dans la même sorte) :

Quinte (5 cartes consécutives, peu importe la sorte) :

Floche (5 cartes de la même sorte) :

Main pleine (ou Full house; 3 cartes pareilles et une paire) :

1 paire :

Carré (4 cartes pareilles; ex : 4 As) :

Brelan (3 cartes pareilles) :

2 paires :

Aucune Combinaison:

b). Compte tenu des différentes probabilités d'apparition, trie les mains selon leur force relative, de la plus forte à la plus faible.