Les variables aléatoires de loi continue

3-602-84
Modèles probabilistes et stochastiques de la gestion

Geneviève Gauthier

HEC Montréal

Automne 2007

Variable aléatoire continue I

Definition

Une **variable aléatoire** X est dite **continue** si sa fonction de répartition est continue. De façon équivalente, nous pouvons affirmer qu'une variable est continue si

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, P\{X = x\} > 0\} = \varnothing.$$

Variable aléatoire continue II

- Certaines variables aléatoires continues possèdent une fonction de densité.

Definition

Si X est une variable aléatoire continue alors $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ est une **fonction de densité** si elle satisfait

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\, dy.$$

où F_X est la fonction de répartition de X.

Variable aléatoire continue III

- Cette fonction de densité nous facilite la tâche lorsqu'il est nécessaire de déterminer les moments de X ou encore, lorsque nous cherchons la probabilité associée à certains événements. En effet, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

$$P\left(a < X \leq b\right) = \int_a^b f_X\left(x\right) dx.$$

- Il peut exister plusieurs fonctions satisfaisant l'égalité ci-dessus et c'est pourquoi nous n'utilisons pas la fonction de densité afin de caractériser la distribution d'une variable aléatoire continue mais plutôt sa fonction de répartition qui, elle, est unique.

Variable aléatoire continue IV

- La propriété (R2) des fonctions de répartition fait en sorte que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx &= \lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy \\ &= \lim_{x\to\infty} F_X(x) \\ &= 1.\end{aligned}$$

- Une fonction f, construite sur l'ensemble de nombres réels, est une fonction de densité si

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$$

et si

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1.$$

Fonction de densité conjointe I

Tout comme dans le cas discret, il nous est possible de définir une fonction de densité conjointe pour deux variables aléatoires X et Y continues. Plus exactement,

Definition

$f_{X,Y} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ est une **fonction de densité conjointe** si

$$P(X \leq x \text{ et } Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u, v) \; dv \; du.$$

Definition

Les variables X et Y sont dites **indépendantes** si

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall y \in \mathbb{R},\ f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y).$$

Fonction de densité conjointe II

- Nous pouvons retrouver les **fonctions de densité marginales** à partir de la fonction de densité conjointe. En effet,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\; dy \\ \text{et } f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\; dx. \end{aligned}$$

Exemple I

Fonction de densité conjointe

- Supposons que la fonction de densité conjointe des variables X et Y soit

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\exp(x-y) & \text{si } 0 < x \leq y < 1 \\ c\exp(y-x) & \text{si } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple II

Fonction de densité conjointe

- Déterminons la valeur de la constante c afin que la fonction $f_{X,Y}(x,y)$ soit bien une fonction de densité.
  - Premièrement, puisque cette fonction doit être non-négative, il faut que c soit ≥ 0.
  - Deuxièmement,
    $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\ dx\ dy$
    $= \int_0^1 \left(\int_0^y ce^{x-y}\ dx\right) dy + \int_0^1 \left(\int_0^x ce^{y-x}\ dy\right) dx$
    $= \int_0^1 \left(c - ce^{-y}\right) dy + \int_0^1 \left(c - ce^{-x}\right) dx$
    $= 2e^{-1}c.$
    Alors

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\ dx\ dy = 2e^{-1}c = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad c = \frac{e}{2} = 1.359\,140\,914.$$

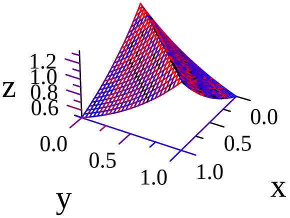
Exemple III

Fonction de densité conjointe

- Rappel :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\exp(x-y) & \text{si } 0 < x \leq y < 1 \\ c\exp(y-x) & \text{si } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x,y)$$



Exemple IV

Fonction de densité conjointe

- La fonction de densité marginale de X est

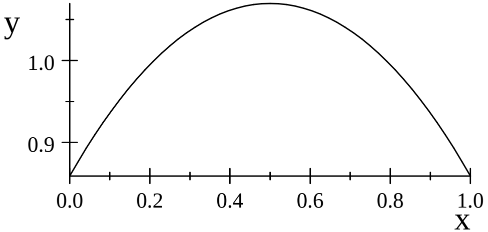
$$
\begin{aligned}
& f_X(x) \\
= \; & \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\; dy \\
= \; & \begin{cases} \int_x^1 c\left(\exp\left(x-y\right)\right)\; dy + \int_0^x c\exp\left(y-x\right)\; dy & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\
= \; & \begin{cases} c\left(1-e^{x-1}\right) + c\left(1-e^{-x}\right) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\
= \; & \begin{cases} c\left(2-e^{-x}-e^{x-1}\right) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Exemple V

Fonction de densité conjointe

- La fonction de densité marginale de X est

$$f_X(x) = \begin{cases} c\left(2 - e^{-x} - e^{x-1}\right) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Vérification : $\int_0^1 c\left(2 - e^{-x} - e^{x-1}\right) dx = 2e^{-1}c = 2e^{-1}\frac{e}{2} = 1.$

Exemple VI

Fonction de densité conjointe

- La fonction de densité marginale de Y est

$$
\begin{aligned}
& f_Y(y) \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\ dx \\
= & \begin{cases} \int_0^y c\left(\exp\left(x-y\right)\right)\ dx + \int_y^1 c\exp\left(y-x\right)\ dx & \text{si } 0<y<1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\
= & \begin{cases} c\left(2-e^{-y}-e^{y-1}\right) & \text{si } 0<y<1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Exemple VII

Fonction de densité conjointe

- Est-ce que ces deux variables sont indépendantes ?
  - Non puisqu'il exite un x et un y tels que

$$f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)\, f_Y(y).$$

En effet, si $0 < x = y < 1$ alors

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,x) &= c\exp(x-x) = c, \\ f_X(x) &= c\left(2 - e^{-x} - e^{x-1}\right) \\ \text{et } f_Y(x) &= c\left(2 - e^{-x} - e^{x-1}\right). \end{aligned}$$

Espérance I

Definition

L'**espérance** d'une variable aléatoire continue X, notée $\mathrm{E}[X]$, est

$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\ dx.$$

- L'espérance d'une variable aléatoire est un nombre réel. Ce n'est pas une quantité aléatoire.
- De plus, les propriétés (E1) à (E4) sont aussi satisfaites dans le cas des variables continues.

Espérance II

Definition

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et X une variable aléatoire continue. L'**espérance** de $g(X)$ est

$$\mathrm{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) \, dx.$$

Exemple I

Espérance

Rappel

$$f_Y(y) = \begin{cases} c\left(2 - e^{-y} - e^{y-1}\right) & \text{si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[Y] &= \int_0^1 y\, c\left(2 - e^{-y} - e^{y-1}\right)\, dy \\ &= e^{-1} c \\ &= e^{-1}\frac{e}{2} \\ &= 0,5 \end{aligned}$$

Variance

Definition

La **variance** d'une variable aléatoire continue X, notée $\mathrm{Var}[X]$, est définie par

$$\mathrm{Var}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathrm{E}[X])^2 f_X(x)\, dx.$$

- Les propriétés (V1) à (V4) sont aussi satisfaites dans le cas des variables aléatoires continues.

Exemple I
Variance

Rappel

$$f_Y(y) = \begin{cases} c\left(2 - e^{-y} - e^{y-1}\right) & \text{si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[Y] &= \int_0^1 \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 c\left(2 - e^{-y} - e^{y-1}\right) dy \\ &= c\left(\frac{13}{2}e^{-1} - \frac{7}{3}\right) \\ &= \frac{e}{2}\left(\frac{13}{2}e^{-1} - \frac{7}{3}\right) \\ &= 7.867\,120\,013 \times 10^{-2}. \end{aligned}$$

Covariance

Definition

La **covariance** des variables aléatoires discrètes X et Y, notée $\mathrm{Cov}\left[X, Y\right]$ est l'espérance de la variable aléatoire $\left(X - \mathrm{E}\left[X\right]\right)\left(Y - \mathrm{E}\left[Y\right]\right)$:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Cov}\left[X, Y\right] \\ = \;& \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \mathrm{E}\left[X\right]\right)\left(y - \mathrm{E}\left[Y\right]\right)\; f_{X,Y}\left(x, y\right)\; dy\; dx. \end{aligned}$$

- Les propriétés (C1) à (C4) sont aussi satisfaites dans la cas des variables aléatoires continues.

Exemple I

Covariance

Rappel

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\exp(x-y) & \text{si } 0 < x \leq y < 1 \\ c\exp(y-x) & \text{si } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple II

Covariance

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_{X,Y}(x,y)\ dx\ dy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^y xyc\left(\exp(x-y)\right)\ dx\right)\ dy \\
&\quad + \int_0^1 \left(\int_0^x xyc\exp(y-x)\ dy\right)\ dx \\
&= c\left(\frac{5}{3} - 4e^{-1}\right) \\
&= \frac{e}{2}\left(\frac{5}{3} - 4e^{-1}\right) \\
&= 0.265\,234\,857
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}[X,Y] &= \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] \\
&= 0.265\,234\,857 - 0.5 \times 0.5
\end{aligned}$$

Loi uniforme I

- La loi uniforme est une nécessité lors de simulations.
- Les techniques de simulations nous permettent, entre autres, d'estimer des fonctions pour lesquels il n'existe pas d'estimateurs analytiques.
- En finance, ces méthodes sont utilisées lors de la tarification de produits dérivés.

Loi uniforme II

- Soit a et b, deux nombres réels tels que $a < b$. La variable aléatoire X est de loi uniforme(a, b) si elle admet la fonction

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

comme fonction de densité.

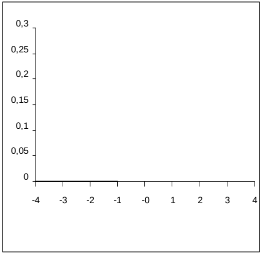
Loi uniforme III

- Ainsi, sa fonction de répartition est

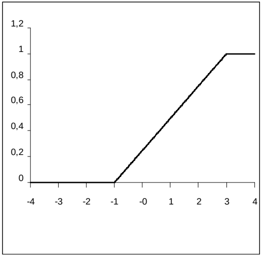
$$
\begin{aligned}
& F_X(x) \\
= & \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\, dy \\
= & \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0 dy = 0 & \text{si } x < a, \\ \int_{-\infty}^{a} 0 dy + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} dy = \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b, \\ \int_{-\infty}^{a} 0 dy + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} dy + \int_{b}^{x} 0 dy = 1 & \text{si } x > b. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Loi uniforme IV

Fonction de densité d'une v.a. de loi uniforme $(-1, 3)$



Fonction de répartition d'une v.a. de loi uniforme $(-1, 3)$



Loi uniforme V

- Nous pouvons aisément déterminer ses premiers moments :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx \\
&= \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx \\
&= \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \bigg|_a^b \\
&= \frac{1}{b-a} \frac{b^2-a^2}{2} \\
&= \frac{1}{b-a} \frac{(b-a)(b+a)}{2} \\
&= \frac{b+a}{2}
\end{aligned}
$$

Loi uniforme VI

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[X^2\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx \\
&= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\,dx \\
&= \frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\bigg|_a^b \\
&= \frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3} \\
&= \frac{1}{b-a}\frac{(b-a)\left(b^2+ab+a^2\right)}{3} \\
&= \frac{b^2+ab+a^2}{3}
\end{aligned}$$

Loi uniforme VII

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X] &= \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2 \\ &= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(b-a)^2}{12}.\end{aligned}$$

Loi exponentielle I

- La loi exponentielle est très utilisée lors de la modélisation de temps d'attente.
- Nous la verrons apparaître lorsque nous étudierons les processus de Poisson ainsi que les phénomènes d'attente.

Loi exponentielle II

- Une variable aléatoire X est de loi exponentielle d'espérance $\theta > 0$ si elle admet comme fonction de densité la fonction

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}\exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Loi exponentielle III

- La fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre θ est

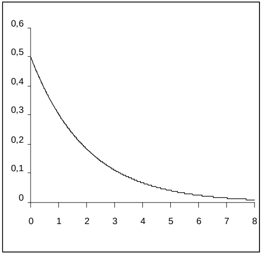
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

puisque

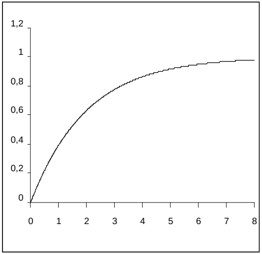
$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{\theta} \exp\left\{-\frac{y}{\theta}\right\} dy &= -\exp\left\{-\frac{y}{\theta}\right\}\Big|_0^x \\ &= -\exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\} + 1. \end{aligned}$$

Loi exponentielle IV

Fonction de densité d'une v.a. de loi exponentielle de paramètre $\theta = 2$



Fonction de répartition d'une v. a. de loi exponentielle de paramètre $\theta = 2$



Loi exponentielle V

De plus, en intégrant par partie, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{E}[X] \\
= \; & \int_{-\infty}^{0} y \; 0 \; dy + \int_{0}^{\infty} \frac{y}{\theta} \exp\left\{-\frac{y}{\theta}\right\} dy \\
= \; & -y \exp\left\{-\frac{y}{\theta}\right\}\Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{y}{\theta}\right\} dy \\
= \; & -y \exp\left\{-\frac{y}{\theta}\right\}\Big|_{0}^{\infty} - \theta \exp\left\{-\frac{y}{\theta}\right\}\Big|_{0}^{\infty} \\
= \; & \left(-\lim_{y\to\infty} y \exp\left\{-\frac{y}{\theta}\right\} + 0\right) + \left(-\lim_{y\to\infty} \theta \exp\left\{-\frac{y}{\theta}\right\} + \theta\right) \\
= \; & \theta
\end{aligned}
$$

Loi exponentielle VI

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[X^2\right] &= \int_{-\infty}^{0} y^2\ 0\ dy + \int_0^{\infty} \frac{y^2}{\theta} \exp\left\{-\frac{y}{\theta}\right\} dy \\
&= -y^2 \exp\left\{-\frac{y}{\theta}\right\}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2y \exp\left\{-\frac{y}{\theta}\right\} dy \\
&= -y^2 \exp\left\{-\frac{y}{\theta}\right\}\Big|_0^{\infty} + 2\theta \int_0^{\infty} \frac{y}{\theta} \exp\left\{-\frac{y}{\theta}\right\} dy \\
&= -y^2 \exp\left\{-\frac{y}{\theta}\right\}\Big|_0^{\infty} + 2\theta E\left[X\right] \\
&= \left(-\lim_{y\to\infty} y^2 \exp\left\{-\frac{y}{\theta}\right\} + 0\right) + 2\theta^2
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}\left[X\right] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \left(\mathrm{E}\left[X\right]\right)^2 = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2.$$

Normale I

- La loi normale peut se passer de présentation tant son omniprésence en modélisation la rend indispensable.

- La variable aléatoire X est de loi normale d'espérance μ et de variance σ^2, notée $N\left(\mu, \sigma^2\right)$, si elle admet la densité

$$f_X\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma}\exp\left\{-\frac{\left(x-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

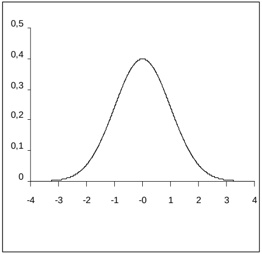
Normale II

- Malheureusement, il n'existe pas de primitive à l'intégrale de la fonction de densité, ce qui implique que nous n'avons pas d'expression analytique pour la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi normale.
- Il est cependant possible d'intégrer numériquement et c'est pourquoi nous utilisons des tables ou des logiciels afin de déterminer les probabilités associées aux événements qui nous intéressent.
- De plus, par la propriété (R2) des fonctions de répartition, nous obtenons que

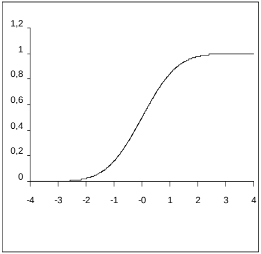
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = 1.$$

Normale III

Fonction de densité d'une v.a. de loi normale centrée et réduite



Fonction de répartition d'une v. a. de loi normale centrée et réduite



Normale IV

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[Z] &= \int_{-\infty}^{\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}\Big|_{-\infty}^{\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\lim_{z\to\infty} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} + \lim_{z\to-\infty} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Normale V

En intégrant par partie,

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{E}\left[Z^2\right] \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz \\
= & \frac{-z}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}}_{\text{fonction de densité d'une } N(0,1)} dz}_{=1} \\
= & -\lim_{z\to\infty} \frac{-z}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} - \lim_{z\to-\infty} \frac{-z}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} + 1 \\
= & 1
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{Var}\left[Z\right] = \mathrm{E}\left[Z^2\right] - \left(\mathrm{E}\left[Z\right]\right)^2 = 1.$$

Normale VI

Si X est de loi $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ alors $X = \sigma Z + \mu$ et

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[X\right] &= \mathrm{E}\left[\sigma Z + \mu\right] = \sigma \mathrm{E}\left[Z\right] + \mu = \sigma\ 0 + \mu = \mu, \\ \mathrm{Var}\left[X\right] &= \mathrm{Var}\left[\sigma Z + \mu\right] = \sigma^2 \mathrm{Var}\left[Z\right] = \sigma^2\ 1 = \sigma^2. \end{aligned}$$

Propriétés I

Loi normale

(N1) Si X est de loi $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ et que a et b sont des nombres réels alors $aX+b$ est de loi $N\left(a\mu+b,a^2\sigma^2\right)$

(N2) Si X est de loi $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ alors $\frac{X-\mu}{\sigma}$ est $N(0,1)$
Si X est de loi $N(0,1)$ alors $\sigma X+\mu$ est $N\left(\mu,\sigma^2\right)$

(N3) Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, de lois $N\left(\mu_X,\sigma_X^2\right)$ et $N\left(\mu_Y,\sigma_Y^2\right)$ respectivement, alors $X+Y$ est de loi $N\left(\mu_X+\mu_Y,\sigma_X^2+\sigma_Y^2\right)$.

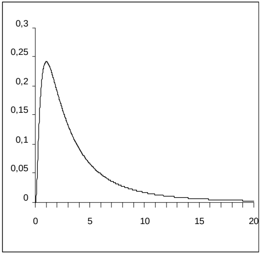
Lognormale I

- La loi lognormale est très populaire en finance puisqu'elle découle du modèle de marché utilisé par Black et Scholes afin de modéliser l'évolution du prix d'un titre boursier. Il est donc nécessaire de l'apprivoiser puisqu'elle fait partie du procédé de tarification des produits dérivés.
- La variable aléatoire X est de loi lognormale s'il existe une variable aléatoire Z, de loi normale centrée et réduite, ainsi que deux constantes a et b telles que

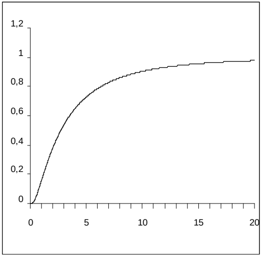
$$X = \exp\{aZ + b\}.$$

Lognormale II

Fonction de densité d'une v.a. de loi lognormale de paramètres $a = 1$ et $b = 1$



Fonction de répartition d'une v. a. de loi lognormale $(1, 1)$



Lognormale III

Notons que

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{E}\left[\exp\left\{aZ\right\}\right] \\
= \;& \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{az\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz \\
= \;& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2 - 2az}{2}\right\} dz \\
= \;& \exp\left\{\frac{a^2}{2}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2 - 2az + a^2}{2}\right\} dz \\
= \;& \exp\left\{\frac{a^2}{2}\right\} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(z-a)^2}{2}\right\}}_{\text{fonction de densité d'une } N(a,1)} dz}_{=1} \\
= \;& \exp\left\{\frac{a^2}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

Lognormale IV

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}[\exp\{aZ+b\}] \\ &= \exp\{b\}\,\mathrm{E}[\exp\{aZ\}] \\ &= \exp\left\{b+\frac{a^2}{2}\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[X^2\right] &= \mathrm{E}[\exp\{2aZ+2b\}] \\ &= \exp\left\{2b+\frac{(2a)^2}{2}\right\} \\ &= \exp\left\{2b+2a^2\right\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[X] &= \exp\left\{2b+2a^2\right\}-\exp\left\{2b+a^2\right\} \\ &= \exp\left\{2b+a^2\right\}\left(\exp\left\{a^2\right\}-1\right) \end{aligned}$$

Loi Gamma I

- Une somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle est de loi gamma.
- Ainsi, cette distribution apparaît de façon naturelle lors de l'étude des processus de Poisson, des processus de renouvellement, des phénomènes d'attente, etc.

Loi Gamma II

- Une variable aléatoire X est de loi gamma de paramètres α et β $(\alpha, \beta > 0)$, notée $\Gamma(\alpha, \beta)$, si elle admet comme fonction de densité la fonction

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp\left\{-\frac{x}{\beta}\right\} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où la fonction $\Gamma : (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, appelée fonction gamma, est définie de la façon suivante :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Loi Gamma III

- Il est possible de montrer que

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 1 \\ \text{et } \Gamma(\alpha) &= (\alpha - 1)\,\Gamma(\alpha - 1). \end{aligned}$$

- Ainsi, lorsque α est un entier positif, nous pouvons montrer par induction que

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$$

- Si X est de loi $\Gamma(\alpha, \beta)$, alors

$$\mathrm{E}[X] = \alpha\beta \text{ et } \mathrm{Var}[X] = \alpha\beta^2.$$

Cas particuliers I
Loi Gamma

1. Remarquons que si $\alpha = 1$, alors

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \exp\left\{-\frac{x}{\beta}\right\} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c'est-à-dire que X est de loi exponentielle d'espérance β.

Cas particuliers II

Loi Gamma

2. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle d'espérance θ, alors

$$\sum_{i=1}^{n} X_i$$

est de loi $\Gamma(n, \theta)$ et sa fonction de densité est

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n-1)!\theta^n} x^{n-1} \exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cas particuliers III

Loi Gamma

3. Si $\alpha = \frac{\nu}{2}$ où ν est un entier positif et que $\beta = 2$, alors

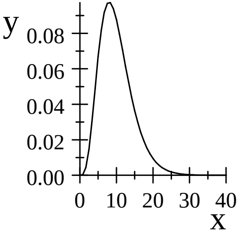
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) 2^{\frac{\nu}{2}}} x^{\frac{\nu}{2}-1} \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

c'est-à-dire la loi de X est un khi-carré à ν degrés de liberté. Cette distribution est très utilisée en statistique (test d'indépendance, test d'ajustement à une loi, test d'homogénéité, intervalle de confiance pour une variance, etc.)

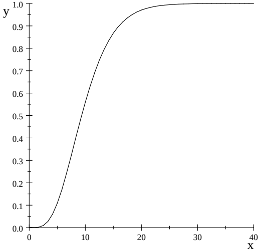
Cas particuliers IV

Loi Gamma

Fonction de densité d'une v.a. de loi $\Gamma(5,2)$



Fonction de répartition d'une v. a. de loi $\Gamma(5,2)$



Transformation de variable aléatoire I

- Soit X, une variable aléatoire continue, F_X sa fonction de répartition et f_X sa fonction de densité. Supposons qu'il existe une variable aléatoire Y telle que

$$X = g(Y)$$

où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante. Quelle est la distribution de Y ?

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P[Y \leq y] \\ &= P\left[g^{-1}(X) \leq y\right] \\ &\quad \text{puisque } X = g(Y) \Rightarrow Y = g^{-1}(X) \\ &= P[X \leq g(y)] \\ &= F_X(g(y)). \end{aligned}$$

Transformation de variable aléatoire II

- La fonction de densité se calcule comme suit:

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) \\
&= \frac{d}{dy} F_X(g(y)) \\
&= f_X(g(y)) \frac{dg}{dy}(y)
\end{aligned}
$$

Exemple I

Transformation de variable aléatoire

- Lors de la fabrication de disques, le rayon peut varier d'un disque à l'autre.
- Dans les faits, le rayon R d'un disque choisit au hasard suit une loi uniforme de paramètres a et b, $0 < a < b$..
- Quelle est la distribution de la surface du disque?
- Soit $S =$ la surface du disque. Comme le rayon est positif, nous savons que la relation entre le rayon et la surface du disque est inversible. En effet, nous avons que

$$S = \pi R^2$$

ce qui implique que

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

Exemple II

Transformation de variable aléatoire

$$\begin{aligned} F_S(s) &= P[S \leq s] \\ &= P\left[\pi R^2 \leq s\right] \text{ puisque } S = \pi R^2 \\ &= P\left[R \leq \sqrt{\frac{s}{\pi}}\right] \\ &= F_R\left(\sqrt{\frac{s}{\pi}}\right). \end{aligned}$$

Exemple III

Transformation de variable aléatoire

Puisque

$$F_R(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} F_S(s) &= F_R\left(\sqrt{\frac{s}{\pi}}\right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \sqrt{\frac{s}{\pi}} \leq a \\ \frac{\sqrt{\frac{s}{\pi}}-a}{b-a} & \text{si } a < \sqrt{\frac{s}{\pi}} < b \\ 1 & \text{si } \sqrt{\frac{s}{\pi}} \geq b \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq a^2\pi \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{s}-a\sqrt{\pi}}{b-a} & \text{si } a^2\pi < s < b^2\pi \\ 1 & \text{si } s \geq b^2\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple IV

Transformation de variable aléatoire

et

$$
\begin{aligned}
f_S(s) &= \frac{d}{ds} F_S(s) \\
&= \frac{d}{ds} F_R\left(\sqrt{\frac{s}{\pi}}\right) \\
&= f_R\left(\sqrt{\frac{s}{\pi}}\right) \left(\frac{d}{dy}\sqrt{\frac{s}{\pi}}\right) \\
&= f_R\left(\sqrt{\frac{s}{\pi}}\right) \frac{1}{2\sqrt{\frac{s}{\pi}}} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{b-a}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{s}} & \text{si } a < \sqrt{\frac{s}{\pi}} < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{b-a}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{s}} & \text{si } a^2\pi < s < b^2\pi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Variables aléatoires mixtes

Certaines variables ne sont ni discrètes ni continues.

Definition

Une variable aléatoire X est dite **mixte** si

$$0 < \sum_{\{x \in \mathbb{R} | P\{X=x\}>0\}} P\{X = x\} < 1.$$

- La fonction de répartition d'une variable aléatoire mixte comporte des discontinuités mais n'est pas une fonction en escalier.
- Nous aurons des exemples de variables aléatoires mixtes lors de l'étude des phénomènes d'attente.