Chapitre 1 : Espaces probabilisés

I Expériences aléatoires

Définition 1 On appelle **expérience aléatoire**, toute expérience dont le résultat ne peut être déterminé a priori, c'est-à-dire qui dépend du hasard.

Exemple 1:
Si on lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et que l'on note le résultat on effectue une expérience aléatoire. Dans la suite nous appellerons cette expérience, **l'expérience ***.

1 Univers

Définition 2 On appelle **univers** de l'expérience aléatoire, l'ensemble Ω des issues ou résultats possibles de
l'expérience. Les éléments de Ω se notent souvent ω.

Exemples 2 :
- Dans l'exemple précédent, l'univers de l'expérience de lancer de dé est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Lorsqu'on lance une pièce et que l'on regarde si elle tombe sur pile ou face l'univers est $\Omega = \{pile, face\}$.
- Si on choisit 5 cartes dans un jeu de 32 cartes, l'univers est l'ensemble de tous les sous-ensembles à 5 éléments des 32 cartes. Attention ici il n'y a pas d'ordre...
- Si on lance trois fois de suite un dé à 6 faces et que l'on note les trois résultats, on réalise une expérience dont l'univers est $\Omega = \{(x, y, z)/x, y, z \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. Attention ici l'ordre est important.
- Si on choisit au hasard un réel compris entre 0 et 1, l'univers de l'expérience est $[0; 1]$.

2 Événement

Lorsqu'on effectue une expérience aléatoire, certains faits liés à cette expérience peuvent se produire ou non : on les appelle des **événements**.

Exemple 3:
Dans l'expérience *, on peut par exemple considérer l'événement, que nous noterons A_1, « *le nombre obtenu est pair* ». L'événement A_1 est réalisé lorsque le résultat est 2, 4 ou 6. On écrit alors $A_1 = \{2, 4, 6\}$.

Définition 3 Un événement est une partie de l'univers Ω de l'expérience aléatoire.

Notation : L'ensemble des parties de Ω, donc l'ensemble des événements, est noté $\mathcal{P}(\Omega)$.

Vocabulaire :
- un événement qui est toujours réalisé est appelé un **événement certain**, il est donc représenté par l'ensemble Ω.
- un événement qui n'est jamais réalisé est appelé un **événement impossible**, il est représenté par l'ensemble vide $\emptyset$.

Comme un événement est une partie de Ω, on peut appliquer aux événements tout le vocabulaire des ensembles.

Propriété 1
Soient A et B deux événements associés à une même expérience aléatoire.

- L'événement contraire de A, c'est-à-dire « non A », est représenté par le complémentaire de A dans Ω que l'on note $\overline{A}$.
- L'événement « A et B sont réalisés » est représenté par $A \cap B$.
- L'événement « A ou B est réalisé » est représenté par $A \cup B$.
- On dit que les événements A et B sont incompatibles s'il ne peuvent pas être réalisés simultanément, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$.
- L'événement « A est réalisé et B n'est pas réalisé » est représenté par $A \setminus B$.
- On dit que A implique B, si la réalisation de A entraîne la réalisation de B, c'est-à-dire si $A \subset B$.

Définition 4 Les événements qui sont représentés par un singleton $\{\omega\}$ sont appelés des **événements élémentaires**.

Exemple 4:
Lorsqu'on lance un dé à 6 face et que l'on note le résultat, l'événement « obtenir 2 » se note $\{2\}$, c'est un événement élémentaire.

3 *Notion de probabilité*

Soit e une expérience aléatoire. Tous les événements liés à e n'ont pas la même « *chance* » de se produire.

Pour essayer de « mesurer » cette chance, il nous faut répéter plusieurs fois l'expérience. Si on répète n fois l'expérience, on compte le nombre r de fois où l'événement A se produit. Le réel $\frac{r}{n}$ est appelé **fréquence d'apparition de** A ou **fréquence de** A, et on note $f(A) = \frac{r}{n}$. Voici les propriétés que vérifie f :

- $f(A) \in [0;1]$
- Si A et B sont deux événements incompatibles alors $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$
- $f(\overline{A}) = 1 - f(A)$
- $f(\Omega) = 1$ et $f(\emptyset) = 0$

Intuitivement, lorsque n tend vers $+\infty$, $f(A)$ admet une limite finie. Cette limite s'appelle la **probabilité de** A et on la note $P(A)$.

II Espaces probabilisés

1 *Espace probabilisé fini*

Définition 5 Soit Ω un ensemble fini et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de ses parties. Le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ s'appelle un **espace probabilisable**.

« probabilisable » signifie qu'on peut le munir d'une probabilité.

Définition 6 Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable. On appelle **probabilité** définie sur cette espace, toute application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0;1]$ qui vérifie :

(i) $P(\Omega) = 1$.

(ii) Si A et B sont deux événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ s'appelle un **espace probabilisé fini** et pour tout événement A, le réel $P(A)$ s'appelle la **probabilité de l'événement** A.

2 *Cas général*

Les univers que vous allez rencontrer ne seront pas tous finis. Lorsque Ω est infini la construction d'une probabilité est un peu plus compliquée.

Exemple 5:

- On considère l'expérience suivante : on lance une pièce jusqu'à obtenir pile et on note le nombre de lancers qui ont été nécessaires pour obtenir le premier pile. On voit ici que l'univers de cette expérience est l'ensemble $\Omega = \mathbb{N}^*$ car le nombre de lancers nécessaires pour obtenir pile peut être n'importe quel nombre.

- On considère l'expérience aléatoire suivante : on tire au hasard sur une cible plane C. On suppose que chaque coup atteint la cible. Le résultat de chaque tir est représenté par le point d'impact M. L'univers de l'expérience est donc Ω, l'ensemble des points de la cible.

Soit A une partie de Ω, on considère l'événement A : « l'impact est dans A ». Intuitivement, on voit que $P(A) = \dfrac{\text{aire}(A)}{\text{aire}(C)}$, mais on voit qu'il faut donc être capable de calculer l'aire de A, donc on ne peut pas prendre n'importe quelle partie de Ω pour calculer $P(A)$.

Contrairement au cas fini, parmi les parties de Ω, il ne faut s'intéresser qu'à celles dont on peut calculer la probabilité.

a Tribu

Définition 7 Soient Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, c'est-à-dire un ensemble de parties de Ω.
On dit que $\mathcal{A}$ est une **tribu** ou une **σ-algèbre** de parties de Ω si :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. Si $A \in \mathcal{A}$ alors $\overline{A} \in \mathcal{A}$
3. Pour tout partie I de $\mathbb{N}$, et toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Les éléments de $\mathcal{A}$ sont des **événements**

Par exemple, $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu de parties de Ω.

Définition 8 Soient Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu de partie de Ω. Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ s'appelle un **espace probabilisable**.

Propriété 2

Soient Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu de partie de Ω.

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. Si A et B sont deux événements de $\mathcal{A}$, alors $A \cup B$, $A \cap B$ et $A \setminus B$ sont dans $\mathcal{A}$.
3. Si I est une partie de $\mathbb{N}$ et si pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathcal{A}$ alors $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.

b Espace probabilisé

Définition 9 Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ tout application P de $\mathcal{A}$ dans $[0; 1]$ vérifiant :

1. $P(\Omega) = 1$
2. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles alors :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est alors appelé **espace probabilisé**.

La principale différence par rapport au cas fini est que dans la deuxième propriété, il a fallu prendre une suite infinie d'événements ce qui n'était pas possible dans le cas fini car il n'existe qu'un nombre fini d'événements.

3 *Propriétés*

Définition 10 Un événement $A \in \mathcal{A}$ est dit **négligeable** si $P(A) = 0$ et **presque sûr** si $P(A) = 1$.

Propriété 3

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soient A et B deux événements.

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, donc $P(\emptyset) = 0$
2. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
3. Si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Théorème 1 Formule du crible (ou de Poincaré)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Pour toute famille $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'événements, on a :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \cdots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$

En particulier :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

La formule est à connaître pour 2, 3 ou 4 événements mais la formule générale sera obligatoirement rappelée dans une épreuve de concours.

4 *Événements élémentaires*

Dans le cas où Ω est fini on a : $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$. Les événements $\{\omega_i\}$ s'appellent les événements élémentaires.

Propriété 4
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Pour tout événement A on a :

$$P(A) = \sum_{i/\omega_i \in A} P(\{\omega_i\})$$

Grâce à cette propriété, on voit que pour déterminer entièrement une probabilité P, c'est-à-dire être capable de calculer $P(A)$ pour n'importe quel A, il suffit de savoir calculer les probabilités des événements élémentaires.

Cas d'événement élémentaires équiprobables :

Définition 11 On dit que deux événements sont **équiprobables** s'ils ont la même probabilité.

Si tout les événements élémentaires sont équiprobables alors nécessairement on a : $P(\{\omega_i\}) = \dfrac{1}{n}$. Grâce à la propriété précédente on en déduit que pour tout événement A :

$$P(A) = \sum_{i/\omega_i \in A} P(\omega_i) = \frac{card(A)}{n}$$

Exemple 6:

Dans l'expérience * l'événement A : « obtenir un nombre pair » est donc de probabilité $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

5 *Système complet d'événements*

Définition 12 Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle **système complet d'événements** de Ω toute famille $(A_i)_{i\in I}$ (I est une partie de $\mathbb{N}$) d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que

1. Les événements A_i sont deux à deux incompatibles
2. $\Omega = \bigcup_{i\in I} A_i$

Exemple 7:
Dans l'expérience *, on avait $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
— La famille d'événements $(\{1\}; \{2\}; \{3\}; \{4\}; \{5\}; \{6\})$ est le système complet d'événement composé des événements élémentaires.
— On note A l'événement « obtenir un nombre pair », et B l'événement « obtenir un nombre impair ». Alors (A, B) est un système complet d'événements. On dit aussi que les événements A et B forment un système complet d'événements.

Propriété 5
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit $(A_i)_{i\in I}$ (I partie de $\mathbb{N}$) un système complet d'événements.
Alors $\displaystyle\sum_{i\in I} P(A_i) = 1$.

6 *Propriété de la limite monotone*

Théorème 2 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé

1. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements de $\mathcal{A}$ ($A_n \subset A_{n+1}$) alors la suite $(P(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et :
$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$
2. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements de $\mathcal{A}$ ($A_{n+1} \subset A_n$) alors la suite $(P(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et :
$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

Corollaire 3 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\mathcal{A}$ alors :
$$P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$$
$$P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$$

III Probabilité conditionnelle

1 *Définition*

Théorème 4 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et A un événement de probabilité non nulle.

Pour tout événement B, on pose $P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

Alors P_A est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ appelée **probabilité conditionnelle relative à** A ou encore **probabilité sachant** A. $P_A(B)$ est parfois noté $P(B/A)$.

Remarques :

— On peut déduire de la définition $P(A\cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

— Si $P(B) \neq 0$, on peut aussi écrire $P_B(A) = \dfrac{P(B\cap A)}{P(B)}$ et donc $P(B\cap A) = P(B) \times P_B(A)$

— Comme $P(A\cap B) = P(B\cap A)$ on a $P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$

— Le but de vos exercices est de vous faire « jouer » avec toutes ces égalités.

— Comme P_A est une probabilité, toutes les propriétés de la propriété 3 et du théorème 2 peuvent lui être appliquées.

2 *Formules*

Dans toute la suite $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé et I une partie de $\mathbb{N}$.

a Formule des probabilités composées

Théorème 5 Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$une famille d'événements tels que $P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1})\neq 0$. Alors on a :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3)\dots P_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

La démonstration se fait par récurrence sur n.

b Formule des probabilités totales

Théorème 6 Soit $(E_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. Alors pour tout événement B on a :

$$P(B)=\sum_{i\in I}P(E_i\cap B)=\sum_{i\in I}P(E_i)P_{A_i}(B)$$

Exemple 8:

Un sachet de 100 bonbons contient 40 bonbons acidulés, les autres bonbons sont à la guimauve. 18 des bonbons à la guimauve sont au parfum orange et 10 bonbons sont acidulés et au parfum orange. Les bonbons qui ne sont pas au parfum orange sont à la fraise.

On choisit un bonbon au hasard dans ce sachet. On note :

— A l'événement « le bonbon est acidulé ».

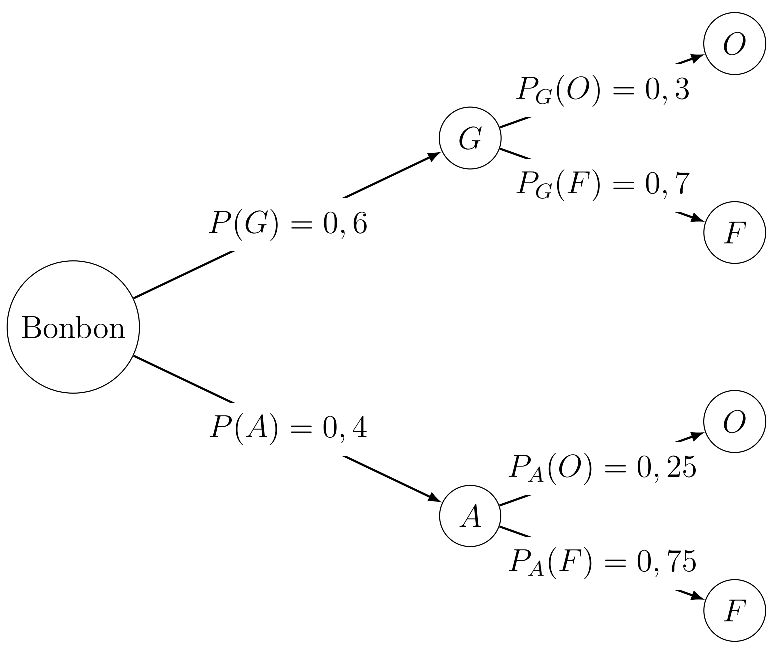
— G l'événement « le bonbon est à la guimauve ».

— F l'événement « le bonbon est à la fraise ».

— O l'événement « le bonbon est à l'orange ».

On choisit un bonbon, quelles est la probabilité que ce bonbon soit à la fraise ?

On peut s'aider à visualiser la situation grâce à un arbre de probabilité : (rarement demandé aux concours mais cela peut vous aider sur votre brouillon)



Les événements (G,A) forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(F)=P(G)\times P_G(F)+P(A)\times P_A(F)=0,6\times 0,7+0,4\times 0,75=0,72$$

c Formule de Bayes

Propriété 6
Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles, on a :

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}$$

Démonstration :

Par définition on a $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

De plus $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, donc $P_B(A) = \dfrac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}$.

□

Propriété 7
Soient $(E_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles et A et B deux événements de probabilités non nulles. On a :

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{\displaystyle\sum_{i \in I} P(E_i)P_{E_i}(B)}$$

Il n'est pas indispensable de retenir par cœur cette formule car elle découle directement de la formule de Bayes et de la formule des probabilités totales.

IV Indépendance d'événements

Définition 13 Ont dit que deux événements A et B sont **indépendants pour la probabilité** P si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

On a donc alors $P_A(B) = P(B)$ et $P_B(A) = P(A)$.

Propriété 8
Si A et B sont deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et B, A et $\overline{B}$ et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.

Définition 14 Soient $A_1, \ldots, A_n$ n événements.

- On dit que les événements sont **deux à deux indépendants pour la probabilité** P si pour tout $i \neq j$ A_i et A_j sont indépendants.

- On dit que les événements sont **mutuellement indépendants pour la probabilité** P ou tout simplement **indépendants pour la probabilité** P si pour tout ensemble d'indices I choisis dans $\{1, \ldots, n\}$, $P\left(\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \displaystyle\prod_{i \in I} P(A_i)$.

Propriété 9
Soient $A_1, \ldots, A_n$ n événements indépendants pour la probabilité P.
Si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$ alors les événements $B_1, \ldots, B_n$ sont indépendants pour la probabilité P.

Définition 15 Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie d'événements.

On dit que les A_n sont **indépendants pour la probabilité** P si pour toute partie I finie de $\mathbb{N}$, on a $P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} P(A_i)$.

Propriété 10

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie d'événements indépendants pour la probabilité P.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = A_n$ ou $\overline{A_n}$ alors $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements indépendants pour la probabilité P.