Les variables aléatoires continues

Dernière mise à jour : 25 août 2000

Exercices 3

Lorsque vous modélisez une situation, assurez-vous que toutes les variables que vous utilisez sont clairement définies.
Afin de vous faciliter la tâche, vous pouvez utiliser un chiffrier électronique (Excel, Lotus,...), des logiciels de calculs symboliques ou de programmation (Maple, Mathematica, MatLab, ...), ou des progiciels statistiques (SAS, SPSS, Minitab, ...) afin de réaliser vos calculs.

Exercice 3.1. Soit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+\alpha x}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où α est un nombre réel compris entre -1 et 1 inclusivement.
Montrez que f est une fonction de densité et déterminez la fonction de répartition lui correspondant.

Exercice 3.2. Il est dit de la loi exponentielle qu'elle n'a pas de mémoire. En effet, le temps X d'attente avant qu'un événement se produise est souvent modélisé à l'aide d'une distribution exponentielle. Nous verrons lors de l'étude du processus de Poisson pourquoi il en est ainsi. Or, pour tous nombres réels positifs s et t,

$$P[X < t + s \,|X > s] = P[X < t], \tag{1}$$

c'est-à-dire que la probabilité d'avoir à attendre moins de t unités de temps supplémentaires, étant donné que nous avons déjà attendu plus de s unités de temps est égale à la probabilité d'avoir à attendre moins de t unités de temps. La variable ne se souvient pas que cela fait déjà un bout de temps que nous attendons!

Démontrez l'égalité (1).

Exercice 3.3. Soit $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$, un échantillon aléatoire simple avec remise, c'est-à-dire que ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes et identiquement distribuées d'espérance μ et de variance σ^2. Dans ce cas, le théorème limite central affirme que, lorsque la taille de l'échantillon n est grande, la moyenne échantillonnale $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est approximativement de distribution normale d'espérance μ et d'écart-type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
Par exemple, si l'âge moyen des Québécois est de 38 ans et que l'écart-type est de 15 ans (ces données sont fictives), alors en choisissant un échantillon aléatoire simple avec remise de taille 300 parmi tous les Québécois, nous avons que l'âge moyen des individus de notre échantillon est approximativement de loi normale d'espérance 38 et d'écart-type $\frac{15}{\sqrt{300}} \cong 0,86603$.
En considérant le cas général, calculez la probabilité que la moyenne échantillonnale soit à plus de deux écarts-types de son espérance, c'est-à-dire, évaluez

$$P\left[\left|\overline{X} - \mu\right| > 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Exercice 3.4. Une tige d'une longueur d'un mètre est sectionnée en deux parties de façon aléatoire. Si le choix de l'endroit de la brisure est choisi uniformément sur la tige, quelle est la probabilité que la partie la plus longue soit au moins deux fois plus grande que la section la plus courte?

Exercice 3.5. Soit X une variable aléatoire de loi normale d'espérance μ et de variance σ^2, et Y une autre variable aléatoire telle que $Y = e^X$.

a) Déterminer la fonction de densité f_Y de Y.

b) Représenter graphiquement la fonction de densité et de distribution de répartition de Y pour $\mu = 5$ et $\sigma = 1$, et en déduire la distribution de Y (loi et premiers moments).