3.2 ESPÉRANCE ET VARIANCE

cours 12

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ Variable aléatoire discrète
- ✓ Variable aléatoire continue
- ✓ Loi de probabilité
- ✓ Fonction de répartition

Aujourd'hui, nous allons voir

- ✓ L'espérance mathématiques
- ✓ La variance
- ✓ L'écart type

Étant donné une variable aléatoire, sa loi de probabilité nous permet d'avoir toute l'information nécessaire.

Or il est souvent pratique de décrire une variable aléatoire à l'aide de quelques caractéristiques.

On va se concentrer sur deux caractéristiques d'une variable aléatoire.

Sa tendance centrale.

Sa mesure de dispersion.

Tendance centrale

Il existe plusieurs façons d'avoir une mesure du centre de la fonction de probabilité d'une variable aléatoire.

- Le mode
- La médiane
- L'espérance

Le mode et la médiane ne sont pas sans intérêts, mais nous les verrons plus tard cette session. Nous allons surtout nous concentrer sur l'espérance.

Définition L'espérance d'une variable aléatoire discrète X est

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = \mu$$

on parle parfois de la valeur moyenne de la variable aléatoire.

Exemple On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

$$f(0)=\frac{1}{8} \qquad f(1)=\frac{3}{8} \qquad f(2)=\frac{3}{8} \qquad f(3)=\frac{1}{8}$$

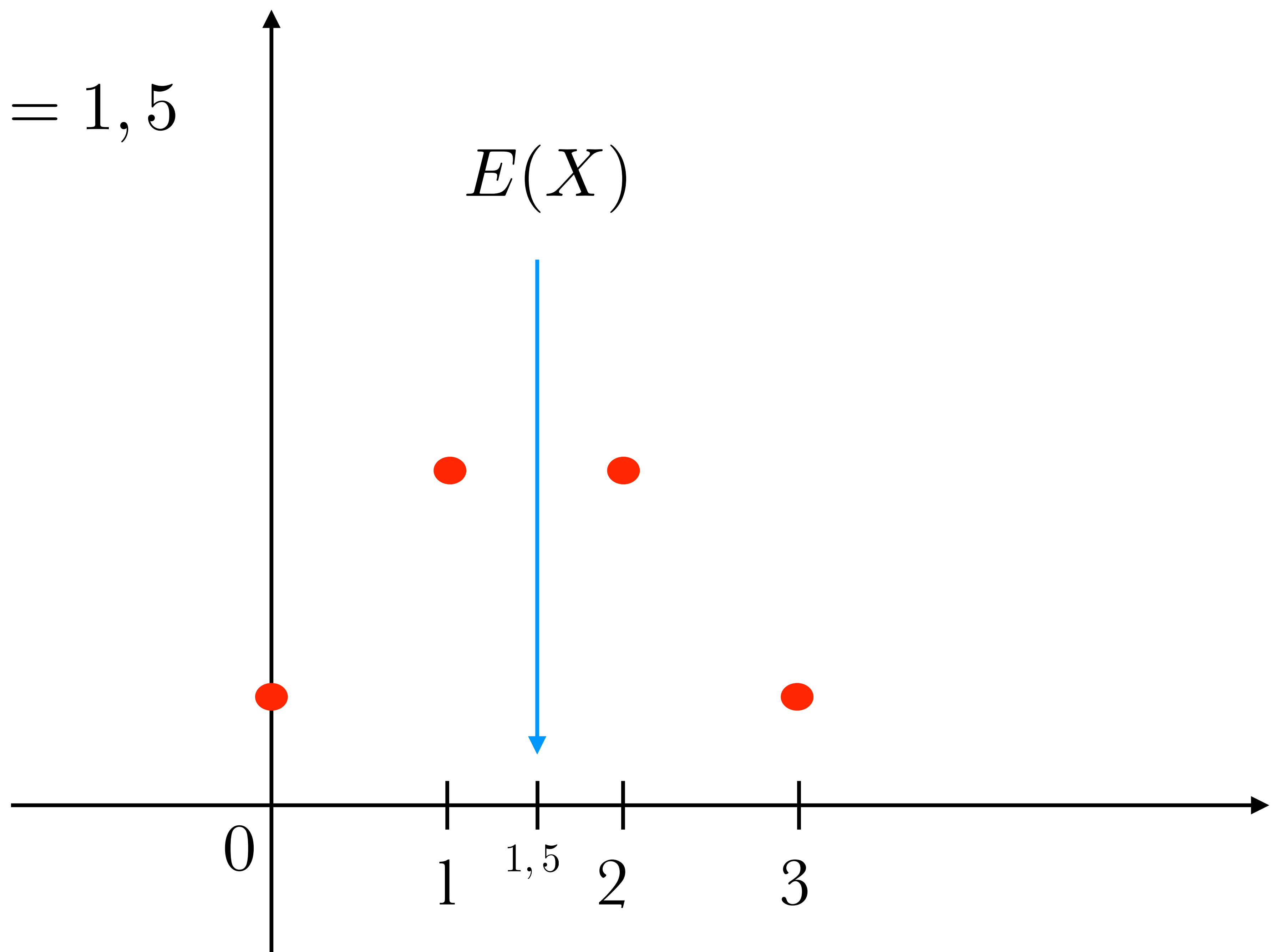
$$\begin{aligned} E(X)=\sum_{k=0}^{3} kf(k) &= 0f(0)+1f(1)+2f(2)+3f(3) \\ &= 0\frac{1}{8}+1\frac{3}{8}+2\frac{3}{8}+3\frac{1}{8} \\ &= \frac{3+6+3}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}=1,5 \end{aligned}$$

Exemple On lance trois pièces de monnaie et on considère le nombre de piles obtenues.

X : le nombre de piles obtenues

$$f(0)=\frac{1}{8} \quad f(1)=\frac{3}{8} \quad f(2)=\frac{3}{8} \quad f(3)=\frac{1}{8}$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{3} kf(k)=1,5$$



Exemple Dans une urne il y a 6 boules numérotées de 1 à 6. On pige 2 boules sans remise et on s'intéresse à la plus grande des deux.

X : Le plus grand nombre des deux boules pigées.

L'ensemble de réalisation est $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ $\qquad |S| = \binom{6}{2}$

$$f(2) = \frac{\binom{1}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{15} \qquad f(3) = \frac{\binom{2}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{2}{15} \qquad f(4) = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{3}{15}$$

$$f(5) = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{4}{15} \qquad f(6) = \frac{\binom{5}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{5}{15}$$

Exemple Dans une urne il y a 6 boules numérotées de 1 à 6. On pige 2 boules sans remise et on s'intéresse à la plus grande des deux.

X : Le plus grand nombre des deux boules pigées.

$$E(X) = \sum_{k=2}^{6} k f(k) = \sum_{k=2}^{6} k \frac{k-1}{15} = \frac{1}{15} \sum_{k=2}^{6} k(k-1)$$

$$= \frac{1}{15}(2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5)$$

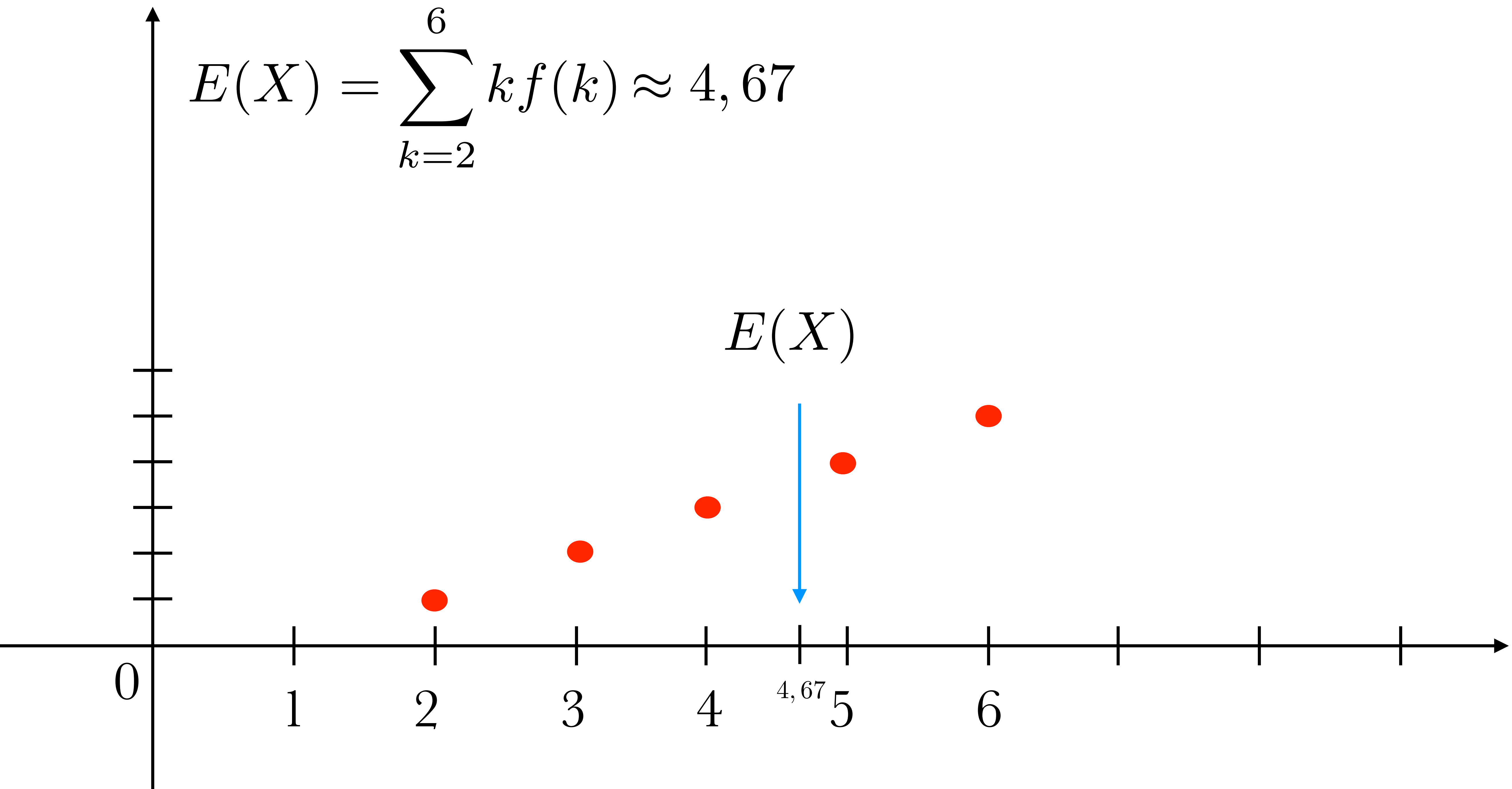
$$= \frac{70}{15} = \frac{14}{3} \approx 4,67$$

Exemple

Dans une urne il y a 6 boules numérotées de 1 à 6. On pige 2 boules sans remise et on s'intéresse à la plus grande des deux.

X : Le plus grand nombre des deux boules pigées.

$$E(X) = \sum_{k=2}^{6} k f(k) \approx 4,67$$



Le concept d'espérance est intimement lié au concept de moyenne pondérée.

Supposons que j'aie 7 résultats d'examens

$$\{60, 75, 80, 62, 67, 84, 79\}$$

leurs moyenne est

$$\frac{1}{7}(60 + 75 + 80 + 62 + 67 + 84 + 79) = \frac{507}{7}$$

$$\approx 72,43$$

Une moyenne pondérée donne un poids aux différentes valeurs

Si un cours comporte 4 évaluations avec les pondérations suivantes

$$\{10\%, 20\%, 30\%, 40\%\}$$

et qu'un étudiant obtient les notes suivantes

$$\{87, 89, 76, 62\}$$

$$87\frac{1}{10} + 89\frac{2}{10} + 76\frac{3}{10} + 62\frac{4}{10} \quad = 74,1$$

qui est différent de la moyenne

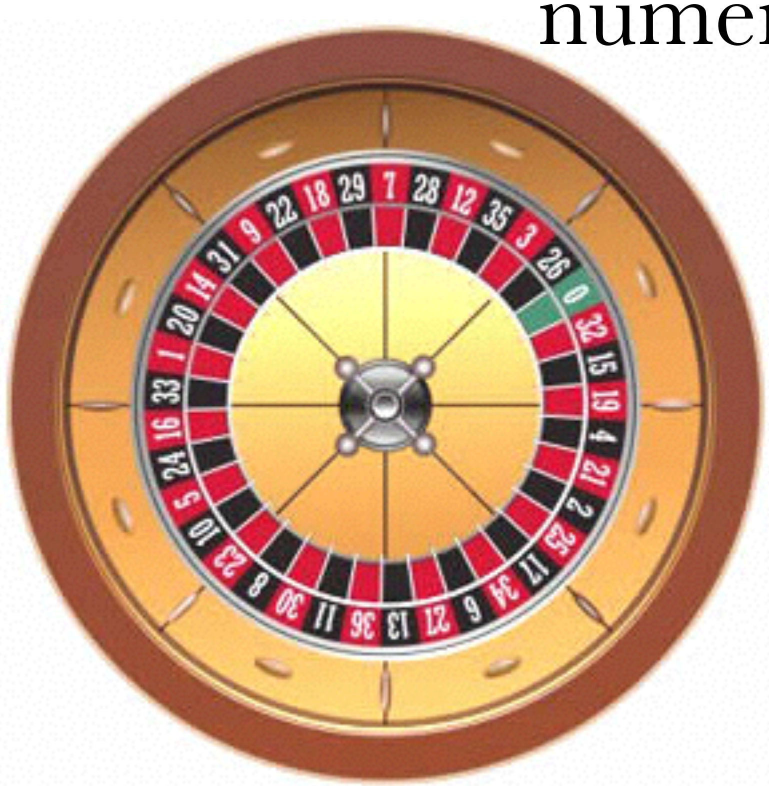
$$87\frac{1}{4} + 89\frac{1}{4} + 76\frac{1}{4} + 62\frac{1}{4} \quad = 78,5$$

En d’autres termes l’espérance mathématique est une moyenne pondérée en utilisant la probabilité comme poids.

L’appellation espérance vient de l’étude des gains possible dans un jeu de hasard.

Exemple

Si la boule tombe sur le numéro choisi, on gagne 35 fois sa mise sinon on perd sa mise. Il y a 37 cases numérotées de 0 à 36.



On mise 10\$ sur le numéro 8.
Quelle est notre espérance de gain?

X : Gain

Il y a deux réalisations possibles $\{-10\$, 350\$\}$

$$P(X = 350\$) = \frac{1}{37} \qquad P(X = -10\$) = \frac{36}{37}$$

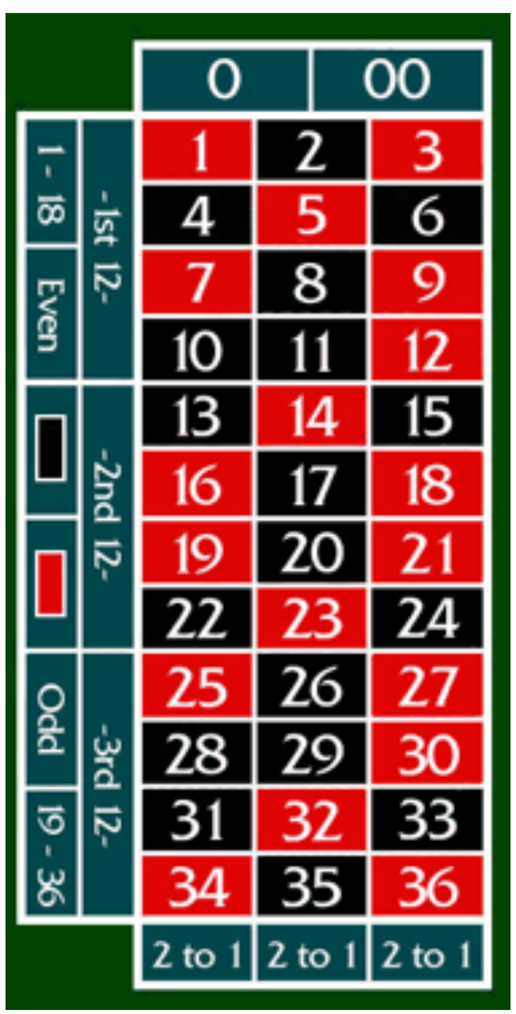
$$E(X) = -10\$ f(-10\$) + 350\$ f(350\$)$$

$$= -10\$ \frac{36}{37} + 350\$ \frac{1}{37} \approx -0,27\$$$

Exemple Jouer un cheval veut dire choisir 2 numéros et donne 17 fois la mise. Quelle est l'espérance de gain?

$$P(X = -10\$) = \frac{35}{37}$$

$$P(X = 170\$) = \frac{2}{37}$$



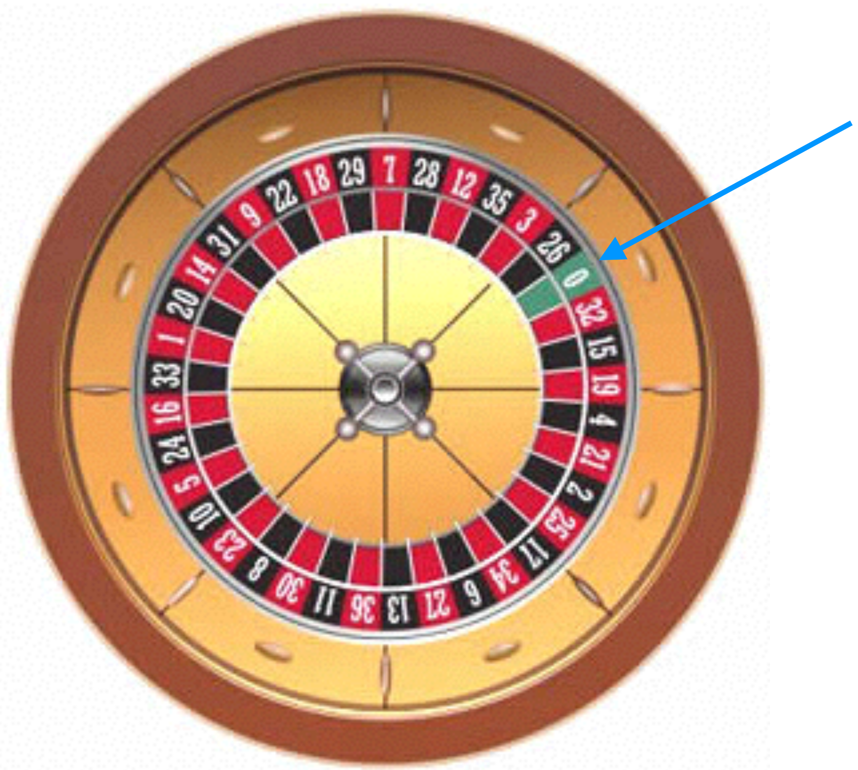
$$E(X) = -10\$ f(-10\$) + 170\$ f(170\$)$$

$$= -10\$ \frac{35}{37} + 170\$ \frac{2}{37}$$

$$\approx -0,27\$$$

Exemple

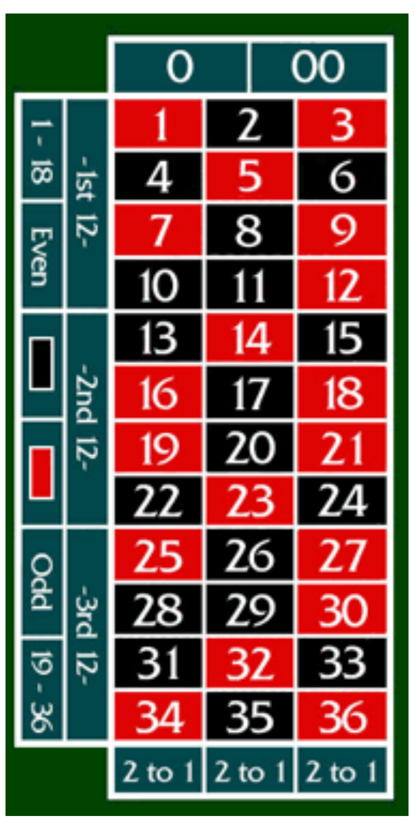
Que devient l'espérance de gain si on enlève la case verte (0)?



$$E(X) = -10\$\frac{35}{36} + 350\$\frac{1}{36}$$

$$= -350\$\frac{1}{36} + 350\$\frac{1}{36}$$

$$= 0$$



Dans les faits, le gain de chaque mise est calculé pour que l'espérance en enlevant la case verte soit nulle.

Théorème

Soit $g(x)$ une fonction inversible et continue.

$$Y = g(X) \qquad\qquad E(Y) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) f(x_i)$$

Preuve:

$$f(y_i) = P(Y = y_i) = P(g(X) = g(x_i))$$

$$= P(g^{-1}(g(X)) = g^{-1}(g(x_i)))$$

$$= P(X = x_i) = f(x_i)$$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_i f(y_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i f(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g(x_i) f(x_i)$$

Exemple

On lance deux pièces de monnaie et on perd 1\$ si les deux sont pile, on gagne 1\$ si les deux sont face et il ne ce passe rien si les deux sont différents.

$$P(X=-1\$)=\frac{1}{4}=P(X=1\$) \qquad P(X=0\$)=\frac{1}{2}$$

$$E(X)=-1\$\frac{1}{4}+0\$\frac{1}{2}+1\$\frac{1}{4} \;=0$$

Si on est plutôt intéressé par l'argent échangé:

$$Y=X^2 \qquad P(Y=1\$^2)=\frac{1}{2} \qquad P(Y=0\$^2)=\frac{1}{2}$$

$$E(Y)=\frac{1}{2}0+\frac{1}{2}1 \;=\frac{1}{2}$$

$$E(Y)=(-1\$)^2\frac{1}{4}+(0\$)^2\frac{1}{2}+(1\$)^2\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

Théorème Si $Y = aX + b$

$$E(Y) = aE(X) + b$$

Preuve:

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_i f(y_i) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b) f(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} ax_i f(x_i) + bf(x_i)$$

$$= a\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) + b\boxed{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}$$

$$= aE(X) + b$$

Définition On dit d'une variable aléatoire X qu'elle est centrée si

$$E(X) = 0$$

Théorème $$E(X - \mu) = 0 \qquad \text{où} \qquad \mu = E(X)$$

Preuve: $$Y = X - \mu$$

$$\begin{aligned} E(Y) = E(X - \mu) &= E(X) - \mu \\ &= E(X) - E(X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Faites les exercices suivants

3.8 et 3.9

Exemple

Regardons les trois fonctions de probabilités suivantes.

x_i	$f_1(x_i)$
1	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{5}$
4	$\frac{1}{5}$
5	$\frac{1}{5}$

x_i	$f_2(x_i)$
1	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{2}{5}$
4	$\frac{1}{5}$
5	$\frac{1}{10}$

x_i	$f_3(x_i)$
1	$\frac{1}{2}$
2	0
3	0
4	0
5	$\frac{1}{2}$

$$E(X_1) = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5} k = \frac{1}{5}\left(\frac{5\cdot 6}{2}\right) = 3$$

Exemple

Regardons les trois fonctions de probabilités suivantes.

x_i	$f_1(x_i)$
1	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{5}$
4	$\frac{1}{5}$
5	$\frac{1}{5}$

x_i	$f_2(x_i)$
1	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{2}{5}$
4	$\frac{1}{5}$
5	$\frac{1}{10}$

x_i	$f_3(x_i)$
1	$\frac{1}{2}$
2	0
3	0
4	0
5	$\frac{1}{2}$

$$E(X_1) = 3$$

$$E(X_2) = \frac{1}{10} + \frac{2}{5} + \frac{6}{5} + \frac{4}{5} + \frac{5}{10} = \frac{2}{5} + \frac{6}{5} + \frac{4}{5} + \frac{6}{10}$$

$$= \frac{2+6+4+3}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

Exemple

Regardons les trois fonctions de probabilités suivantes.

x_i	$f_1(x_i)$
1	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{5}$
4	$\frac{1}{5}$
5	$\frac{1}{5}$

x_i	$f_2(x_i)$
1	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{2}{5}$
4	$\frac{1}{5}$
5	$\frac{1}{10}$

x_i	$f_3(x_i)$
1	$\frac{1}{2}$
2	0
3	0
4	0
5	$\frac{1}{2}$

$$E(X_1) = 3$$

$$E(X_2) = 3$$

$$E(X_3) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Exemple

Regardons les trois fonctions de probabilités suivantes.

x_i	$f_1(x_i)$
1	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{5}$
4	$\frac{1}{5}$
5	$\frac{1}{5}$

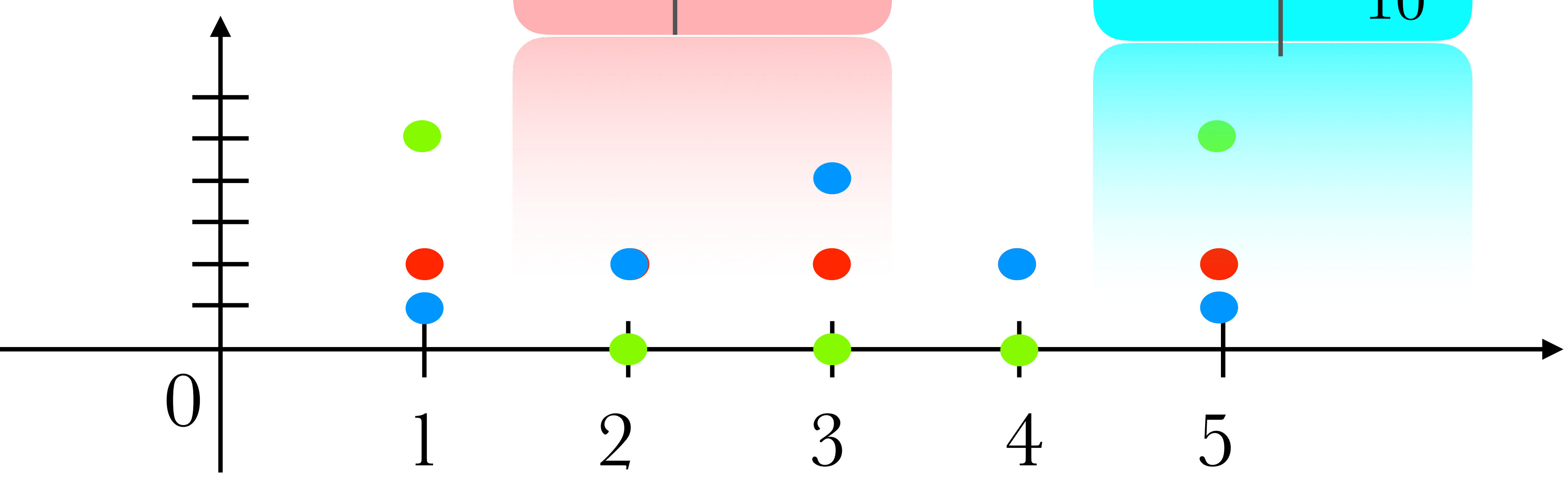
x_i	$f_2(x_i)$
1	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{2}{5}$
4	$\frac{1}{5}$
5	$\frac{1}{10}$

x_i	$f_3(x_i)$
1	$\frac{1}{2}$
2	0
3	0
4	0
5	$\frac{1}{2}$

$E(X_1) = 3$

$E(X_2) = 3$

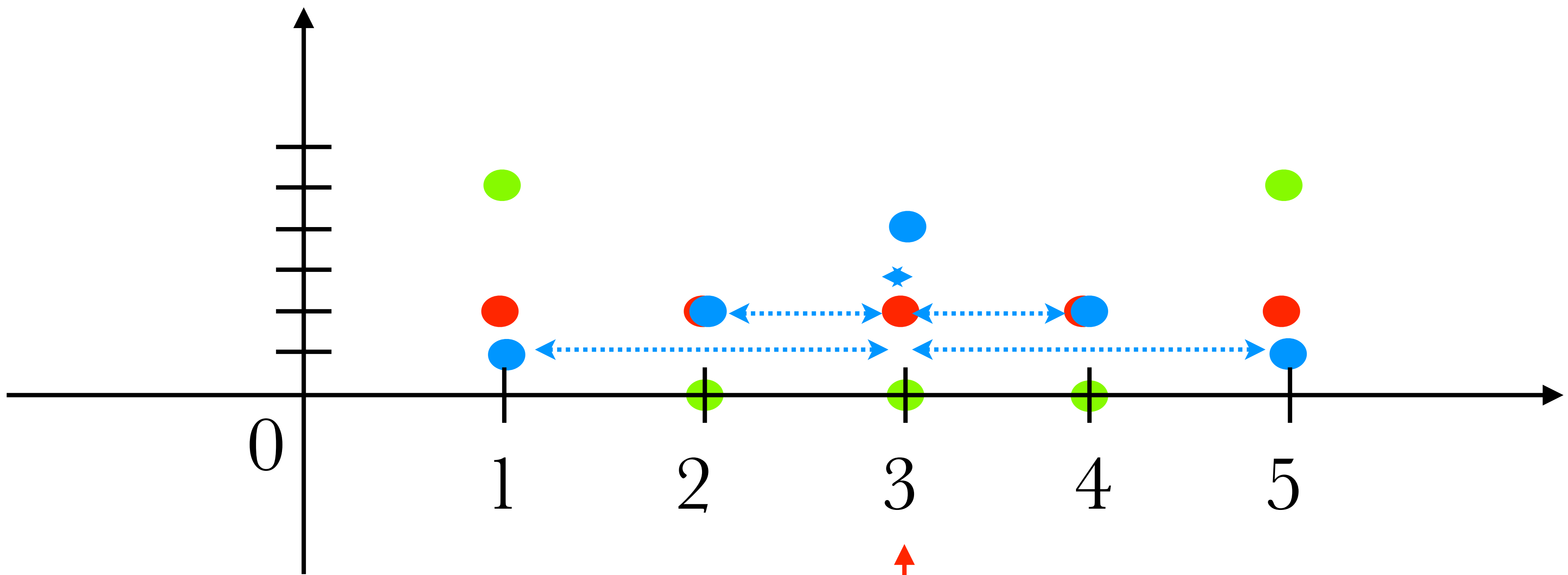
$E(X_3) = 3$



Mesure de dispersion

Bien que l'espérance donne d'une certaine manière le centre de la loi de probabilité, il est parfois souhaitable d'avoir une façon de mesurer la dispersion.

- L'écart moyen
- La variance
- L'écart type



$$E(X) = 3$$

Définition L'écart moyen d'une variable aléatoire est

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - E(X)| f(x_i)$$

Exemple

x_i	$f_1(x_i)$
1	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{5}$
4	$\frac{1}{5}$
5	$\frac{1}{5}$

x_i	$f_2(x_i)$
1	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{2}{5}$
4	$\frac{1}{5}$
5	$\frac{1}{10}$

x_i	$f_3(x_i)$
1	$\frac{1}{2}$
2	0
3	0
4	0
5	$\frac{1}{2}$

$$\sum_{k=1}^{5} |x_k - E(X_1)| f_1(x_k) = 2\frac{1}{5} + 1\frac{1}{5} + 0\frac{1}{5} + 1\frac{1}{5} + 2\frac{1}{5} = \frac{6}{5}$$

$$\sum_{k=1}^{5} |x_k - E(X_2)| f_2(x_k) = 2\frac{1}{10} + 1\frac{1}{5} + 0\frac{2}{5} + 1\frac{1}{5} + 2\frac{1}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\sum_{k=1}^{5} |x_k - E(X_3)| f_3(x_k) = 2\frac{1}{2} + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2\frac{1}{2} = 2$$

L'écart moyen est une bonne mesure, mais la valeur absolue complique souvent les calculs.

C'est pour ça qu'on a plutôt tendance à utiliser:

Définition La variance d'une variable aléatoire est

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 f(x_i)$$

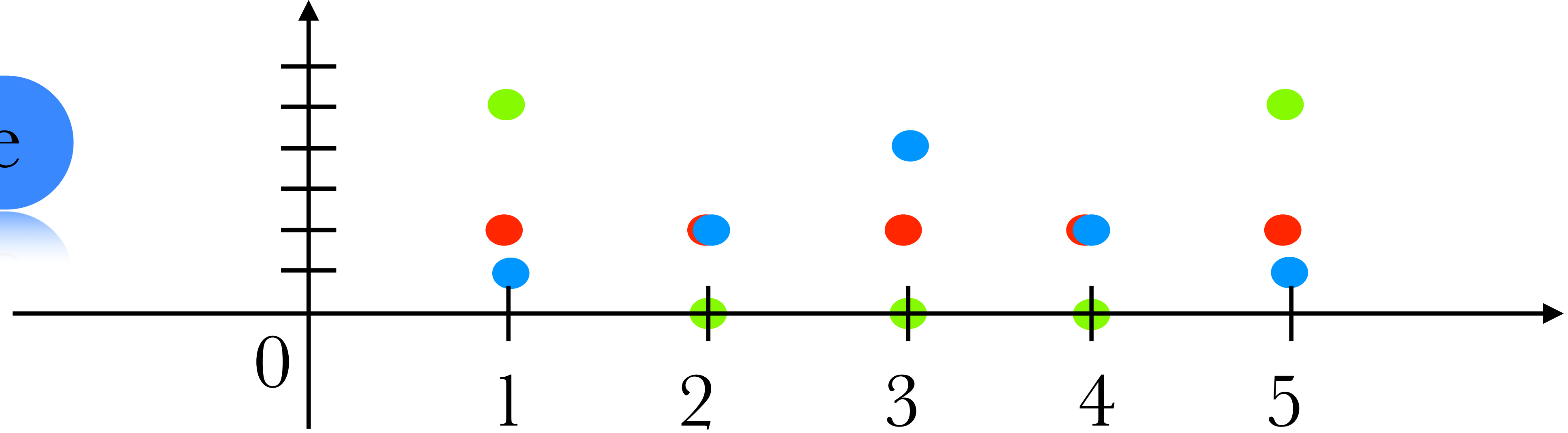
$$E(X) = \mu$$

$$\mathrm{Var}(X) = E((X - \mu)^2)$$

Définition L'écart type est la racine carrée de la variance

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

Exemple



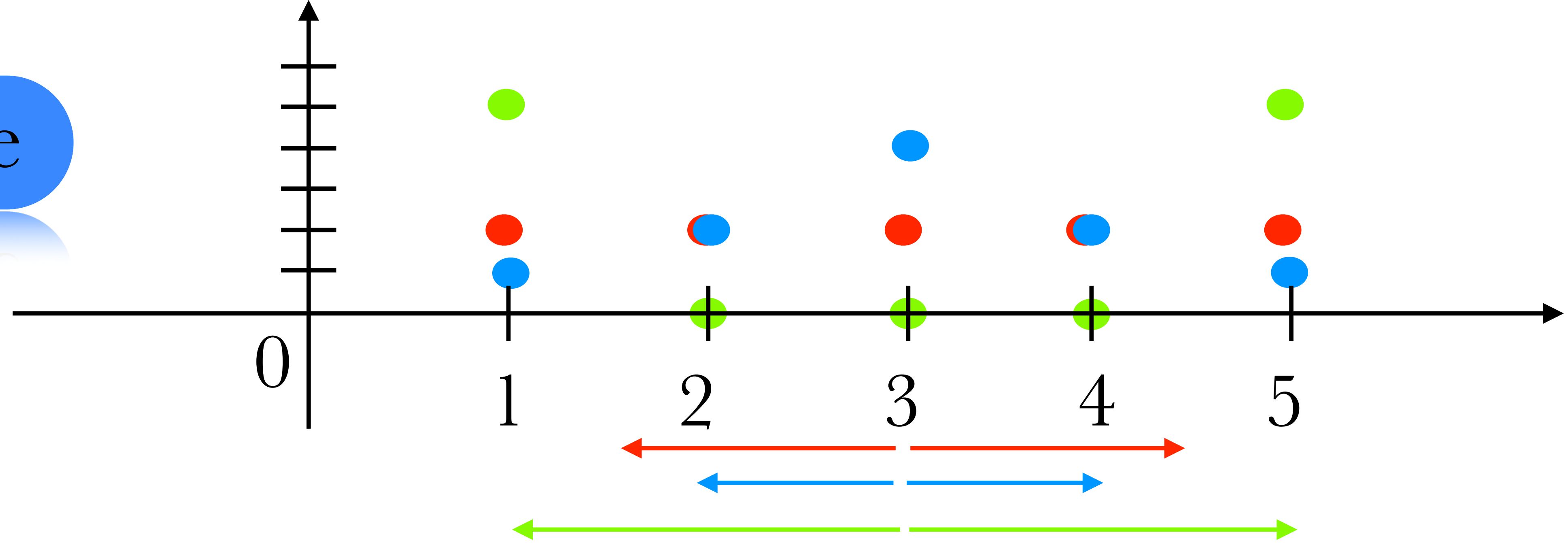
$$\mathrm{Var}(X_i) = \sum_{k=1}^{5} (x_k - E(X_i))^2 f_i(x_k)$$

$$\mathrm{Var}(X_1) = 2^2\frac{1}{5} + 1^2\frac{1}{5} + 0^2\frac{1}{5} + 1^2\frac{1}{5} + 2^2\frac{1}{5} = 2$$

$$\mathrm{Var}(X_2) = 2^2\frac{1}{10} + 1^2\frac{1}{5} + 0^2\frac{2}{5} + 1^2\frac{1}{5} + 2^2\frac{1}{10} = \frac{6}{5}$$

$$\mathrm{Var}(X_3) = 2^2\frac{1}{2} + 1^2\cdot 0 + 0^2\cdot 0 + 1^2\cdot 0 + 2^2\frac{1}{2} = 4$$

Exemple



$$\mathrm{Var}(X_i) = \sum_{k=1}^{5} (x_k - E(X_i))^2 f_i(x_k)$$

$$\mathrm{Var}(X_1) = 2 \qquad \boxed{\sigma_1 = \sqrt{2}} \approx 1,414$$

$$\mathrm{Var}(X_2) = \frac{6}{5} \qquad \boxed{\sigma_2 = \sqrt{\frac{6}{5}}} \approx 1,095$$

$$\mathrm{Var}(X_3) = 4 \qquad \boxed{\sigma_3 = 2}$$

Théorème

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Preuve:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 f(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2x_i E(X) + E(X)^2) f(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i) - 2\sum_{i=1}^{n} x_i E(X) f(x_i) + \sum_{i=1}^{n} E(X)^2 f(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i) - 2E(X)\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) + E(X)^2 \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \;= E(X^2) - E(X)^2$$

Théorème

$$Y = aX + b$$

$$\mathrm{Var}(Y) = a^2\mathrm{Var}(X)$$

Preuve: On a déjà vu que $E(Y) = aE(X) + b$

$$= a\mu_X + b \ = \mu_Y$$

$$\mathrm{Var}(Y) = E((Y - \mu_Y)^2)$$

$$= E((aX + b - a\mu_X - b)^2)$$

$$= E((aX - a\mu_X)^2)$$

$$= E(a^2(X - \mu_X)^2)$$

$$= a^2 E((X - \mu_X)^2) = a^2\mathrm{Var}(X)$$

Définition On dit qu'une variable aléatoire est réduite si

$$\mathrm{Var}(X) = 1$$

Définition On dit qu'une variable aléatoire est centrée réduite si

$$E(X) = \mu = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = 1$$

Théorème Étant donné une variable aléatoire X, alors la variable aléatoire

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \text{ est centrée réduite.}$$

Preuve:

$$E(Z) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = E\left(\frac{X}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X) - \frac{\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = 0$$

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \mathrm{Var}\left(\frac{X}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{Var}(X)$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

Faites les exercices suivants

Faites les exercices suivants

3.10 à 3.13

Aujourd'hui, nous avons vu

- ✓ L'espérance mathématiques
- ✓ La variance
- ✓ L'écart type

Devoir: Section 3.2