

3.3 LOI DISCRÈTE 1

cours 14

Au dernier cours, nous avons vu

- ✓ L'espérance mathématiques
- ✓ La variance
- ✓ L'écart type

Aujourd’hui, nous allons voir

- ✓ Loi de Bernoulli
- ✓ Loi binomiale
- ✓ Loi géométrique

On a vu qu'à une expérience aléatoire, on peut associer une variable aléatoire.

Ces variables aléatoires possèdent une fonction de probabilité nommée loi de probabilité.

Or certains types de loi de probabilité reviennent souvent et portent des noms

Épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux résultats.

Succès et échec.

On note la probabilité de succès par p

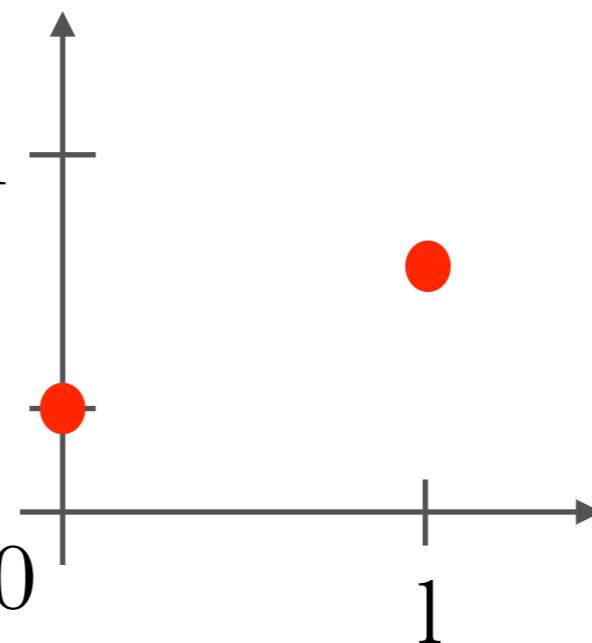
et la probabilité d'échec par $q = 1 - p$

$$p + q = 1$$

X est une variable aléatoire qui donne 0 en cas d'échec et 1 en cas de succès

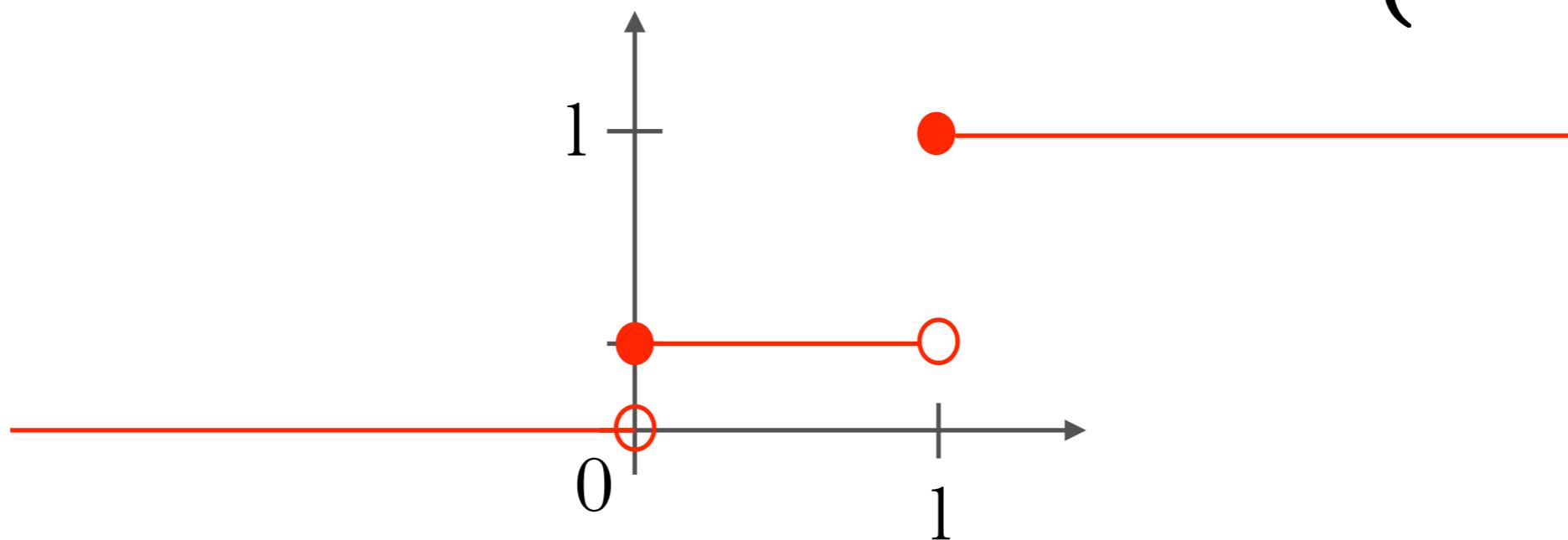
$$P(X = 0) = q$$

$$P(X = 1) = q$$



Sa fonction de répartition est

$$P(X \leq x) = F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ q & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$$



L'espérance d'une épreuve de Bernoulli est

$$E(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

et sa variance est

$$\text{Var}(X) = (0 - p)^2 q + (1 - p)^2 p$$

$$p + q = 1$$

$$= p^2 q + q^2 p = pq(p + q) = pq$$

Une autre façon de trouver la variance est

$$E(X^2) = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2$$

$$= p(1 - p) = pq$$

Loi binomiale

Si notre expérience aléatoire consiste à répéter n fois une épreuve de Bernoulli de probabilité p de succès et qu'on s'intéresse au nombre de succès, la variable aléatoire

X : le nombre de succès

aura comme loi de probabilité la loi binomiale

$$B(n; p)$$

et on dit que la variable aléatoire suit une loi binomiale.

$$X \sim B(n; p)$$

Lorsqu'on est dans la situation où on répète une épreuve, le résultat d'une épreuve n'influence pas le résultat d'une autre.

S_1 : succès lors de la première épreuve.

E_2 : échec lors de la deuxième épreuve.

$$P(S_1 \cap E_2) = P(S_1)P(E_2) = pq$$

En d'autres termes, les évènements sont indépendants.

Supposons que $X \sim B(n; p)$

et qu'on cherche $P(X = k)$

pour obtenir k succès lors de n épreuves,

il a bien fallu obtenir $n - k$ échecs.

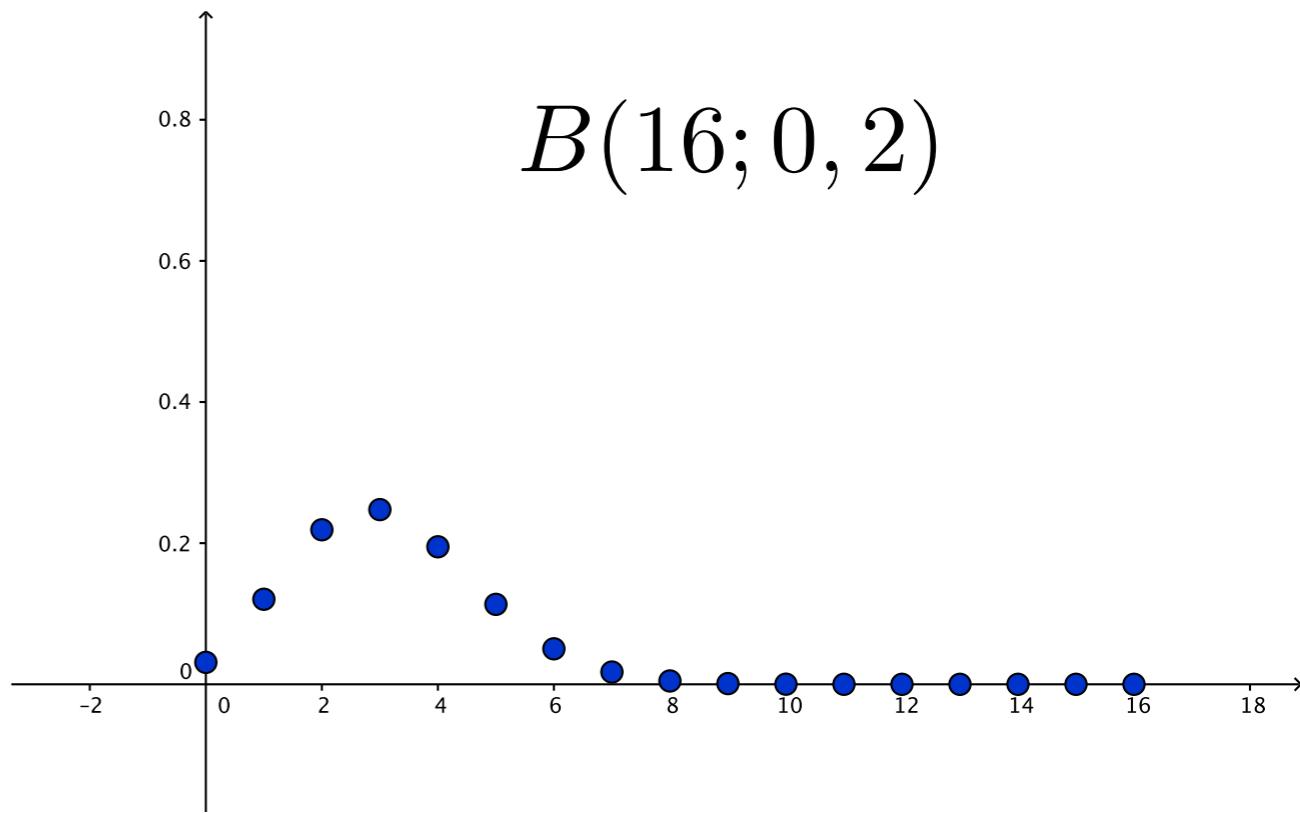
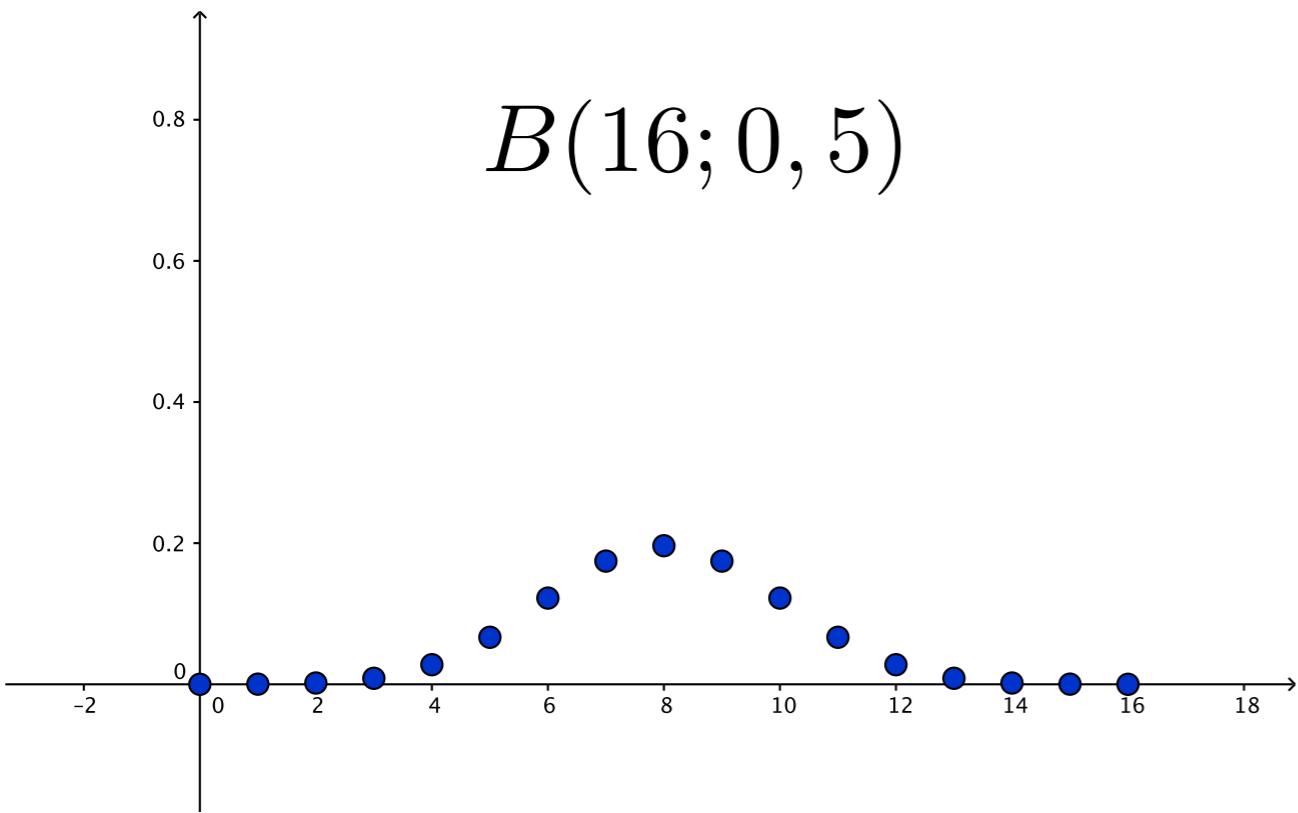
Le nombre de façons d'obtenir k parmi n épreuves est $\binom{n}{k}$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

On peut remarquer que

binôme de Newton

$$\sum_{k=0}^n P(X = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1^n = 1$$



Pour trouver l'espérance et la variance d'une loi binomiale, il suffit de

$$X \sim B(n; p)$$

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

X_i épreuve de Bernoulli

$$E(X_i) = p$$

$$\text{Var}(X_i) = pq$$

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

$$= E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = np$$

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

$$= \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \cdots + \text{Var}(X_n) = npq$$

Exemple

On lance une paire de dés à quatre reprise et on veut savoir le nombre de fois qu'on a eu une somme de 7

La probabilité d'avoir une somme de 7 sur deux dés est $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

X : le nombre de fois qu'on obtient une somme de 7

$$X \sim B\left(4; \frac{1}{6}\right)$$

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{20}{1296} = \frac{5}{324} \approx 0,015$$

$$E(X) = 4 \cdot \frac{1}{6} = 0, \bar{6} \quad \text{Var}(X) = 4 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right) = 0, \bar{5}$$

Faites les exercices suivants

TOUTES LES EXERCICES PORTANT

#3.14 à 3.20

Loi géométrique

Si notre expérience aléatoire consiste à répéter une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès p et ce, jusqu'au premier succès.

On dira alors que la variable aléatoire donnant le nombre d'épreuves nécessaire à l'obtention du premier succès

$$X \sim G(p)$$

qu'elle suit une loi géométrique.

Remarque:

$$p \neq 0$$

car chercher un succès lorsqu'il est impossible est un peu futile.

$$P(X = 1) = p$$

Pour trouver $P(X = k)$

on a dû avoir $k - 1$ échecs suivi d'un succès

$$P(X = k) = q^{k-1}p$$

Ici l'ensemble de réalisation de notre variable aléatoire est

$$\{1, 2, 3, \dots\}$$

puisque à priori on ne sait pas combien d'essais ça peut prendre.

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p$$

$t = k - 1$

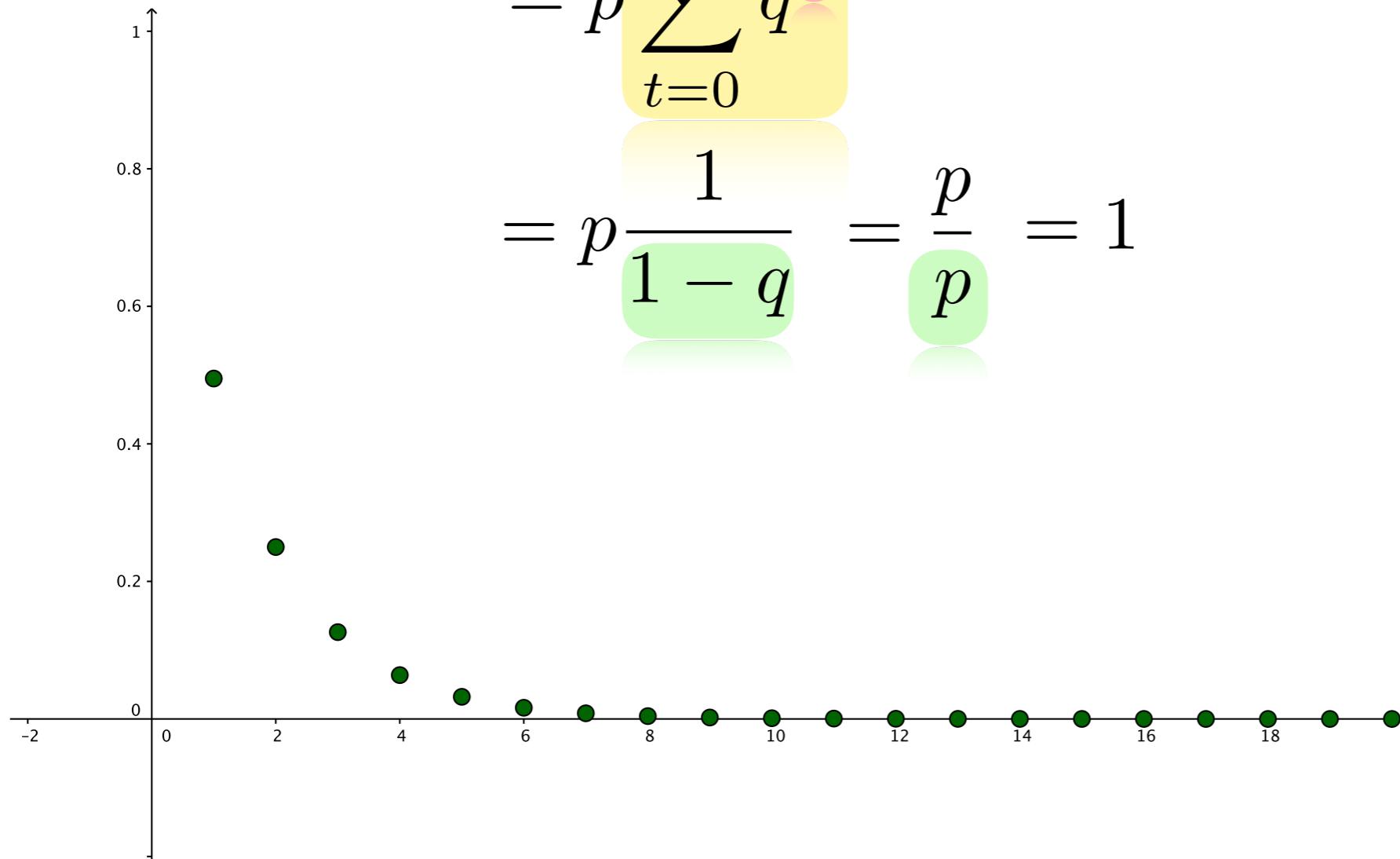
$$= p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$$

on obtient donc une série géométrique convergente car

$$0 < q < 1$$

$$= p \sum_{t=0}^{\infty} q^t$$

$$= p \frac{1}{1 - q} = \frac{p}{p} = 1$$



$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Calculer ça directement est assez compliquer; utilisons une astuce.

on sait que la série de puissance

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

en dérivant de chaque côté la dernière égalité, on obtient

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (x^k)' = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x} \right)'$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - \left(\frac{1}{p}\right)^2$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} p$$

En utilisant la dérivée seconde de la série géométrique

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right)'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3} = \left(\frac{1}{1-x} \right)''$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k^2 x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} kx^{k-2}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^2 x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3} + \sum_{k=2}^{\infty} kx^{k-2}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - \left(\frac{1}{p}\right)^2$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} p$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^2 x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3} + \sum_{k=2}^{\infty} k x^{k-2} \quad \text{en multipliant par } x$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^2 x^{k-1} = \frac{2x}{(1-x)^3} + \sum_{k=2}^{\infty} k x^{k-1}$$

$$1 + \sum_{k=2}^{\infty} k^2 x^{k-1} = \frac{2x}{(1-x)^3} + 1 + \sum_{k=2}^{\infty} k x^{k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1} = \frac{2x}{(1-x)^3} + \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - \left(\frac{1}{p}\right)^2$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = p \left(\frac{2q}{(1-q)^3} + \frac{1}{(1-q)^2} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1} = \frac{2x}{(1-x)^3} + \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}$$

$$= \frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - \left(\frac{1}{p}\right)^2$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = p \left(\frac{2q}{(1-q)^3} + \frac{1}{(1-q)^2} \right)$$

$$= p \left(\frac{2q}{p^3} + \frac{1}{p^2} \right) = \frac{2q}{p^2} + \frac{p}{p^2}$$

$$= \frac{2(1-p) + p}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{2-p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Donc pour $X \sim G(p)$

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Exemple

On lance deux dés et on s'intéresse au nombre nécessaire de lancé avant d'obtenir une somme de 7

X : nombre de lancé avant la première somme de 7

$$P(X = 1) = \frac{1}{6}$$

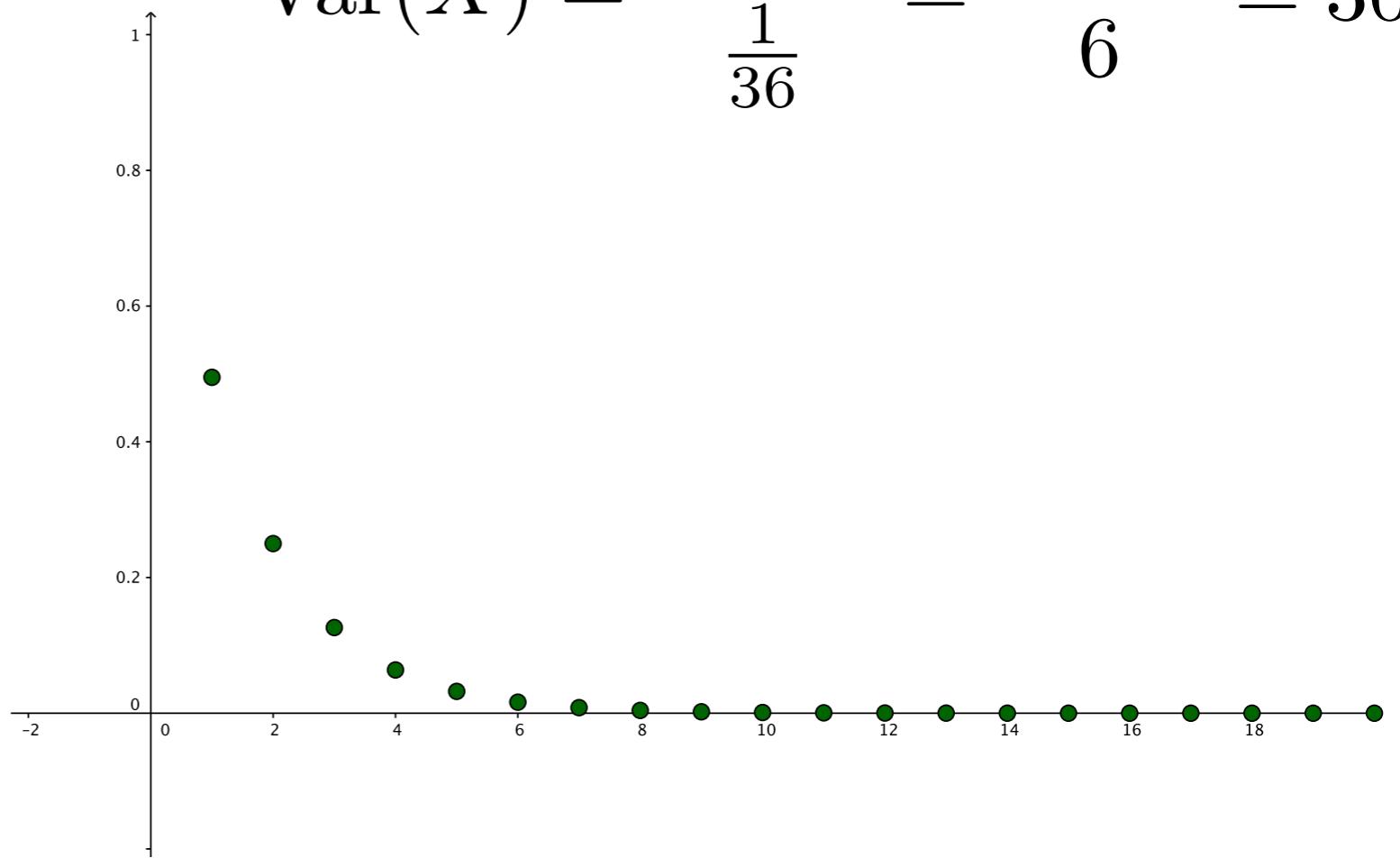
$$E(X) = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$$

$$P(X = 2) = \left(\frac{5}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right)$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1 - \frac{1}{6}}{\frac{1}{36}} = \frac{5 \cdot 36}{6} = 30$$

$$P(X = 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)$$

$$P(X = 4) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right)$$



Loi binomiale négative

La loi binomiale négative est une généralisation de la loi géométrique

La variable aléatoire qui compte le nombre d'épreuves de Bernoulli de probabilité p de succès jusqu'à l'obtention de r succès

$$X \sim BN(r, p)$$

suit une loi binomiale négative.

en particulier

$$BN(1, p) = G(p)$$

$$X \sim BN(r, p)$$

$$P(X = n)$$

Pour avoir r succès après n épreuves il faut avoir eu r-1 succès après n-1 épreuve et en suite 1 succès.

$$P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r}$$

Vérifier que

$$\sum_{k=r}^{\infty} P(X = r) = \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r} = 1$$

Est particulièrement compliqué et nous omettrons cette justification

On peut voir la variable aléatoire comme

$$X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_r$$

Y_1 : le nombre d'épreuves nécessaires à l'obtention du premier succès

Y_2 : le nombre d'épreuves supplémentaires nécessaires à l'obtention du deuxième succès

Y_3 : le nombre d'épreuves supplémentaires nécessaires à l'obtention du troisième succès

et ainsi de suite

De plus on a que les Y_i sont indépendants

De plus $X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_r$

$$\begin{aligned} E(X) &= E(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_r) \\ &= E(Y_1) + E(Y_2) + \cdots + E(Y_r) \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p} = \frac{r}{p} \end{aligned}$$

Avec un argument similaire, on obtient

$$\text{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Faites les exercices suivants

T. MCQON. TOP. EXERCICES. NOTA COTTON

3.21 à 3.24

Aujourd’hui, nous avons vu

• Loi de probabilité • Fonction de répartition • Attente et variance

Loi	$P(X = k)$	$E(X)$	$\text{Var}(X)$
Binomiale $X \sim B(n; p)$	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	np	npq
Géométrique $X \sim G(p)$	$q^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Binomiale négative $X \sim BN(r, p)$	$\binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$

Devoir:

Section 1.1