

GUIDE PRATIQUE DES SERIES TEMPORELLES

TABLE DES MATIERES
CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES SERIES TEMPORELLES

I-1) ANALYSE CLASSIQUE DES SERIES CHRONOLOGIQUES	01
I-1-1 DEFINITION	01
I-1-2) COMMENT DEBUTER L'ANALYSE D'UNE SERIE ?	01
I-1-3) LES DIFFERENTES COMPOSANTES D'UNE SERIE	02
I-1-4) OBJECTIFS DE L'ETUDE D'UNE SERIE	02
I-1-5) MODELISATION D'UNE SERIE TEMPORELLE	02
1) LES MODELES D'AJUSTEMENT	02
2) LES MODELES AUTO PROJECTIFS	03
3) LES MODELES EXPLICATIFS	03
I-1-6) LES MODELES DE DECOMPOSITION DES SERIES CHRONOLOGIQUES	03
I-1-7) RECHERCHE DU MODELE DE DECOMPOSITION	04
I-1-7-1) LA METHODE DE LA BANDE	04
I-1-7-2) LA METHODE DU PROFIL	05
I-1-7-3) LA METHODE DU TABLEAU DE BUYS ET BALLOT	05
I-1-8) ANALYSE DE LA TENDANCE	06
I-1-9) ANALYSE DE LA COMPOSANTE SAISONNIERE	07
I-1-10) ANALYSE DE LA COMPOSANTE ALEATOIRE	07
I-1-11) DESSAISONALISATION	07
I-1-12) SERIE AJUSTEE	07
I-1-13) PREVISION A COURT TERME	07
I-1-14) EXEMPLE DE CALCUL DES COEFFICIENTS SAISONNIERS PAR LA METHODE DES RAPPORTS AU TREND)	07
I-1-15) CALCUL DE LA PREVISION DES VENTES	08
A) LE MODELE ADDITIF	09
✓ LE TREND (LA TENDANCE GENERALE)	09
✓ LE CALCUL DES MOYENNES MOBILES	09
✓ CALCUL DES COEFFICIENTS SAISONNIERS ADDITIFS	09
✓ ÉLIMINATION DES VARIATIONS SAISONNIERES DANS LE MODELE	10
✓ ADDITIF (XCVS)	10
✓ ÉLIMINATION DE LA TENDANCE EXTRA-SAISONNIERE	10
I-1-16) TEST DE FICHER BASE SUR L'ANALYSE DE LA VARIANCE	10
I-1-17) EXERCICES PEDAGOGIQUES SUR LES METHODES CLASSIQUES DES PREVISIONS	11
I-2) CONCEPTS DE BASE DES SERIES TEMPORELLES	15
I-2-1) BRUITS BLANCS. PROCESSUS STATIONNAIRES. COMMENT VERIFIER QUE DES DONNEES CONSTITUENT UN BRUIT BLANC	16
I-2-1-1) TESTS DE BRUIT BLANC	16
I-2-1-2) AUTRES TESTS	16
I-2-1-3) LES TESTS DE BRUIT BLANC AVEC EVIEWS	17
a) TESTS DE CARACTERE GAUSSIEN	17
b) TESTS D'HOMOSCEDASTICITE	18
I-2-2) MODELES ARIMA	18
I-2-2-1) DIFFERENCIATION	18
I-2-2-2) DETERMINATION DE L'ORDRE DE DIFFERENCIATION	19
I-2-2-3) PROCESSUS AUTOREGRESSIFS. AR(P)	19
2-2-2-3-1) EXEMPLE D'UN PROCESSUS AR(1)	19
2-2-2-3-2) IDENTIFICATION DES TERMES AR	19
2-2-2-3-3) EXEMPLE D'ESTIMATION D'UN PROCESSUS AR(1) SUR EVIEWS	19
I-2-2-4) MOYENNE MOBILE MA(Q)	20
I-2-2-4-1) IDENTIFICATION DES TERMES MA	21

I-2-2-4-2) EXEMPLE D'ESTIMATION D'UN MODELE MA(1) SUR EVIEWS	21
I-2-2-5) MODELES ARMA (P,Q)	22
I-2-2-5-1) EXEMPLE D'ESTIMATION D'UN MODELE ARMA (1) SUR EVIEWS	22
I-2-2-6) EVALUATION DES MODELES	22
I-2-2-7) EXERCICE DE PROGRAMMATION SUR EVIEWS	23
I-2-2-8) SIGNIFICATION DES PARAMETRES DES MODELES ARIMA	24
CHAPITRE II : PREVISION ET MODELISATION UNIVARIEE DES SERIES TEMPORELLES	
II-1) ETAPE D'IDENTIFICATION DU MODELE	25
II-2) ETAPE D'ESTIMATION DU MODELE	25
II-3) ETAPE DE VALIDATION DU MODELE	25
II-4) ETAPE DE LA PREVISION	26
II-5) LES MODELES DES SERIES TEMPORELLES NON STATIONNAIRE ET TESTS DE RACINE UNITAIRE	26
II-5-1) PROCESSUS TS (TREND-STATIONNAIRE)	27
II-5-2) PROCESSUS DS (DIFFERENCE STATIONNARY)	27
II-5-3) TEST DE DICKY-FULLER (TEST DE NON STATIONNARITE)	27
II-5-4) TEST DE DICKY-FULLER AUGMENTE (ADF)	28
II-5-5) EXEMPLE D'APPLICATION D'UN MODELE ARIMA POUR UNE SERIE SIMPLE, AVEC COMPOSANTE SAISONNIERE	28
1) ANALYSE DU PROCESSUS DES VENTES	29
2) LA RECHERCHE DES ORDRES P ET Q DE LA REPRESENTATION ARMA.	31
3) VALIDATION DE LA REPRESENTATION	32
a) TEST DE STUDENT SUR LES COEFFICIENTS	32
b) ANALYSE DES RESIDUS	32
4) LA PREVISION A L'AIDE DU MODELE RETENU	33
II-6) LES MODELES ARCH	34
II-6-1) LE CONCEPT DE VOLATILITE	34
II-6-2) AUTOREGRESSIVE DANS LES ERREURS AU CARRE	36
II-6-3) SIMULATION	36
II-6-4) DETECTION	36
II-6-5) ESTIMATION	36
II-6-6) EXEMPLE APPLICATION A LA SERIE TAUX DE CHANGE DA/DUS.	37
III-6-6-1) MODELISATION ARMA	38
a) ETUDE DE LA STATIONNARITE	38
b) IDENTIFICATION DE L'ORDRE P ET Q DE ARMA	39
c) ESTIMATION DE L'EQUATION DE LA MOYENNE	39
d) TEST SUR LES RESIDUS	40
• TEST D'ABSENCE D'AUTOCORRELATION DES RESIDUS	40
• TESTARCH	40
e) CHOIX DU MODELE	41
f) MODELISATION ARCH. ESTIMATION DE L'EQUATION DE LA VARIANCE	41
g) ESTIMATION DE MODELE ARCH(2)	42
CHAPITRE III : PREVISION ET MODELISATION UNIVARIEE	
III-1) MODELES MULTIVARIES DES SERIES TEMPORELLES	43
III-2) EXEMPLE D'APPLICATION DE LA THEORIE DE COINTEGRATION (APPROCHE GRANGER)	44
III-2-1) LA PRESENTATION DU MODELE	45
III-2-2) ESTIMATION ET L'ANALYSE CRITIQUE DES RESULTATS	45

III-2-2-1) LA STATIONNARITE DES SERIES	45
III-2-2-2) ESTIMATION DE LA RELATION DE LONG TERME.	46
III-2-2-3) ESTIMATION DE LA RELATION DE COURT TERME	48
CONCLUSION	48
III-3) LA MISE EN OUVRE DE LA METHODE COINTEGRATION ET MODELE ECM SUR EVIEW 9.5. CAS DE LA FONCTION DE CONSOMMATION KEYNESIENNE	49
III-3-1) STATIONNARITE DES SERIES	49
III-3-2) ESTIMATION DE LA RELATION DE LONG TERME ET TEST DE STATIONNARITE SUR LES RESIDUS ESTIMES	49
• ESTIMATION DE L'EQUATION D'EQUILIBRE/RELATION COINTEGRANTE OU EQUATION STRUCTURELLE/DE LONG TERME	52
• TEST DE STATIONNARITE SUR LES RESIDUS DU MODELE A LT ESTIME	52
III-3-3) ESTIMATION DU MODELE A CORRECTION D'ERREURS	53
III-3-4) INFERENCE ET INTERPRETATION (SPECIFICATION A LA BANERJEE)	54
III-4) COINTEGRATION L'APPROCHE ARDL BOUND TESTING	55
III-4-1) EXEMPLE D'APPLICATION DE LA COINTEGRATION PAR LES MODELES ARDL	55
III-4-1-1) LA SPECIFICATION DU MODELE ARDL	55
III-4-1-2) TEST DE LA RACINE UNITAIRE	57
III-4-1-3) ESTIMATION DU MODELE ARDL (4,2, 0, 4,0)	58
III-4-1-4) TEST DE COINTEGRATION (BOUNDS TEST)	59
III-4-1-5) ESTIMATION DE LA RELATION DE LONG TERME	59
III-4-1-6) ESTIMATION DU MODELE ECM.	60
III-4-1-7) INTERPRETATION DES RESULTATS DES ESTIMATIONS	60
III-4-1-8) DIAGNOSTICS DU MODELE ESTIME	60
• TEST D'AUTOCORRELATION	60
• TEST DE STABILITE DES COEFFICIENTS	61
CHAPITRE V : GUIDE PRATIQUE DU LOGICIEL EVIEW 9.5	
VI-1). PRESENTATION DU LOGICIEL EVIEW	62
VI-2). LES FONCTIONNALITES	62
VI-3). LES AVANTAGES	62
VI-4). DEMONSTRATION	62
VI-5). GENERER UNE SERIE TEMPORELLE ALEATOIRE	64
VI -6). LES STATIQUES DE BASES	65
VI-6-1). L'AUTOCORRELATION	65
VI-6-2). LA STATIONNARITE D'UNE SERIE TEMPORELLE	66
VI -6-3). LISTE LES COEFFICIENTS AR(P) ET MA(q)	67
✓ VI-7). LISTE LES COEFFICIENTS D'UNE SERIE ARMA (p q)	68
VI-8) ESTIMATION DU MODELE LINEAIRE A UNE EQUATION SOUS EVIEW	68
VI-8-1) SPECIFICATION ET HYPOTHESES	68
VI-8-2) ETAPES A SUIVRE POUR ESTIMER LE MODELE AVEC EVIEW	68
✓ IMPORTATION DES DONNEES	69
✓ ESTIMATION SOUS EVIEW 9.5	70
✓ TESTS SUR LE MODELE	71
➤ TESTS DIAGNOSTICS SUR LES TERMES D'ERREURS	71
• TEST D'HETEROSEDASTICITE	72
• TEST D'AUTOCORRELATION	72
• TEST DE BREUSCH-GODFREY	73
VI-8-3) ESTIMATION EN PRESENCE D'AUTOCORRELATION DES ERREURS	74
VI-8-4) TESTS DE RESTRICTIONS SUR LES COEFFICIENTS	74
a) TEST DE SIGNIFICATIVITE GLOBALE (TEST DE FISHER)	75
b) TEST DE SIGNIFICATIVITE DES COEFFICIENTS INDIVIDUELS	75
c) TESTS DE STABILITE	75

✓ TESTS DE CHOW	75
✓ TEST DE CUSUM	76
VI-8-5) SYNTHESE DES DIFFERENTES COMMANDES POUR FAIRE UNE SPECIFICATION DES MODELES ECONOMETRIQUES	77
VI-8-6) ESTIMATION DES SYSTEMES D'EQUATIONS SUR EVIEW 9.5	80
VI-8-7) ESTIMATION DES MODELES VAR SUR EVIEW	81
VI-8-8) TEST DE CAUSALITE DE GRANGER	82
VI-8-9) PAIRWISE GRANGER CAUSALITY TESTS	83
VI-8-10) LA FONCTION IMPULSION REONSE	84
VI-8-11) TEST DE COINTEGRATION DE JOHANSEN	85
VI-8-12) ESTIMATION D'UN VECM	86
REFERENCES BIBLIOGRAPHIES	87
ANNEXES	88

Avant-propos

Il n'existe pas d'ouvrage d'introduction à l'économétrie des séries temporelles qui évite un discours trop technique et qui présente des exemples concrets des procédures d'estimation et de modélisation. Ainsi, ce guide d'applications, résultat d'un effort consistant à présenter dans un langage plus ou moins simplifié et rigoureux les concepts de base appartenant à l'économétrie des séries temporelles macroéconomiques et financières, est rédigé en fonction d'un étudiant attentif. Il a pour objet l'explication de différentes techniques statistiques et économétriques permettant d'estimer et de prévoir les séries macroéconomiques et financières.

Ce polycopié privilégie les développements récents de l'économétrie des séries temporelles. Il met en particulier l'accent sur les thèmes relatifs à la modélisation des séries temporelles univariées et à l'économétrie des modèles multivariés. Le choix de privilégier les développements contemporains a pour conséquence que certains sujets ont été volontairement omis. Tel que les modèles des données de panel, les modèles d'équations simultanées et les modèles des variables qualitatives.

Ce guide est le fruit de divers enseignements de la statistique appliquée, d'économétrie de la finance et des séries temporelles II dispensés par l'auteur en premier et deuxième cycle à l'Université de Bejaia, Faculté des Sciences Economiques, commerciales et Sciences de Gestion. Il s'adresse principalement aux étudiants de licence et de Master en sciences économiques et Gestion, ainsi qu'aux étudiants des Ecoles Supérieures de la Statistiques et d'Economie Appliquée. Il sera également utile aux professionnels qui utilisent les techniques des séries temporelles dans la mesure où chaque chapitre est illustré d'applications empiriques à la macroéconomie et à la finance. De ce point de vue, nous avons réalisé les applications avec logiciel EVIDEWS 9.5. Pour des raisons pédagogiques, afin que le lecteur puisse facilement procéder à ses propres applications et les interpréter, nous avons exposé les résultats tels qu'ils apparaissent sous Eviews 9.5.

I-1) ANALYSE CLASSIQUE DES SERIES CHRONOLOGIQUES

Les séries temporelles constituent une branche de l'économétrie dont l'objet est l'étude des variables au cours de temps. Parmi ses principaux objectifs figurent la détermination des tendances au sein de ces séries ainsi que la stabilité des valeurs (et de leur variation) au cours de temps. On distingue notamment les modèles linéaires univarié (principalement "AR" et "MA" pour Autorégressive et Moving Average), modèles conditionnels notamment "ARCH" pour Autorégressive conditional Heteroskedasticity) et les modèles multivariée (Modèle VAR, VECM).

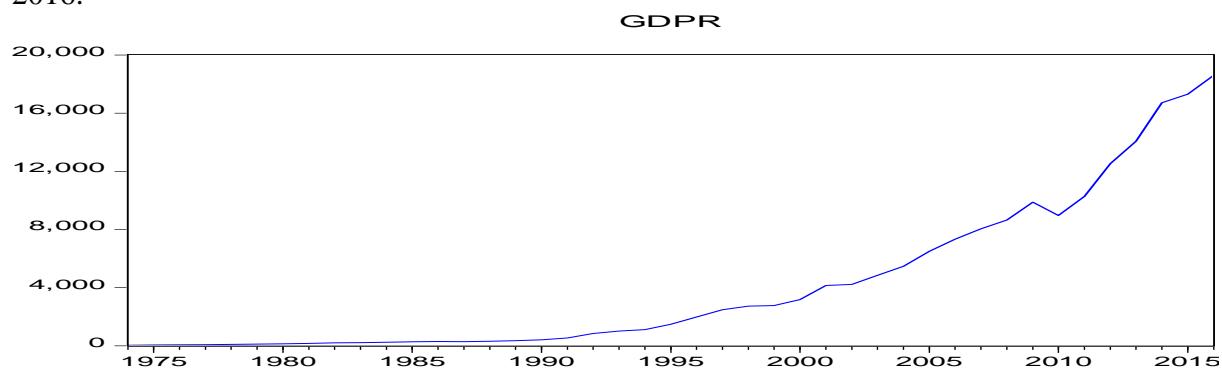
I-1-1) DEFINITION D'UNE SERIE TEMPORELLE

Une série temporelle est une suite d'observations chiffrées ordonnées dans le temps. On utilise aussi les appellations suivantes : chronique et série chronologique.

Les séries temporelles peuvent être de divers types. Si la caractéristique dont on suit l'évolution au cours du temps est observée continuellement, on dit que la série temporelle est continue. Par contre, si la caractéristique est observée uniquement à certain moments, la série temporelle est dite discrète, même si le phénomène sous-jacent est continu. Quant à la caractéristique dont on suit l'évolution, elle peut correspondre à un niveau ou à un flux. Dans le cas d'un niveau, l'observation correspond à la valeur de la caractéristique à l'instant même de l'observation, alors que dans le cas d'un flux, l'observation se rapporte à une période.

Mathématiquement, une série chronologique (processus) est une suite de variables aléatoires (X_t), où t appartient à Z . Pour LE LOGICIEL EVIEWS, une série temporelles est un vecteur de valeurs numériques peut être transformé en série chronologique. On peut alors spécifier la date initiale et la date finale, ainsi que la fréquence (nombre d'observations par unité de temps).

Exemple : la série suivante représente le produit intérieur brut de l'Algérie observé de 1974-2016.



I-1-2) COMMENT DEBUTER L'ANALYSE D'UNE SERIE ?

Toute étude d'une série temporelle commence par l'examen du graphique de la série. Ce graphique s'obtient en portant, dans un système d'axes perpendiculaires, les valeurs des observations en fonction de leur date d'observation.

L'examen du graphique d'une série fait souvent apparaître les caractéristiques les plus importantes de la série :

- Une *tendance*.
- Un *effet saisonnier*.
- Des *modifications dans la structure de la série*
- Des *données aberrantes ou anormales* (il faudra envisager l'élimination de ces données)

Lors de l'établissement du graphique de la série, il faut être attentif au choix des origines et des unités des axes et à la manière dont la série est représentée dans ce graphique.

I-1-3) LES DIFFERENTES COMPOSANTES D'UNE SERIE

La **tendance** représente l'évolution moyenne à long terme de la variable étudiée. La **composante saisonnière** est une composante périodique dont la période est généralement dépendante de notre environnement naturel (les saisons, alternance jour/nuit,...) ou du mode d'organisation de notre société (impact des vacances, des jours fériés, des week-ends,...). La **composante irrégulière** regroupe tout ce qui n'est pas pris en compte par les composantes précédentes. On considère qu'il s'agit d'une composante aléatoire qui correspond à un résidu. On ajoute parfois à cela, une **composante cyclique**, qui présente théoriquement un comportement périodique, dont la période est suffisamment importante pour être qualifiée de mouvement à moyen ou à long terme. Cette composante n'est pas nécessairement de période ni d'amplitude constante. (En pratique, elle est difficile à isoler, car on ne dispose en général pas de séries stables d'une longueur correspondant à plusieurs cycles.)

On notera que l'une ou l'autre des composantes citées ci-dessus peut éventuellement être absente de la série ; à l'inverse, certaines séries peuvent présenter plusieurs composantes du même type (par exemple, plusieurs composantes saisonnières).

I-1-4) OBJECTIFS DE L'ETUDE D'UNE SERIE

Différents objectifs peuvent être poursuivis lorsqu'on étudie une série temporelle :

- On peut, par exemple, se limiter à une simple **description** de la série : on s'efforce alors de mettre en évidence les différentes composantes de la série (tendance, composante saisonnière, etc.).
- Il peut arriver qu'on souhaite **éliminer** d'une série donnée, **une** ou **plusieurs composantes** (pour analyser certains phénomènes).
- Un troisième objectif de l'étude des séries temporelles est la réalisation de **prévisions** : compte tenu de l'évolution de la série dans le passé, on s'efforcera de prévoir les valeurs futures de la série. Le plus souvent on s'intéresse aux prévisions à court terme, situées à quelques intervalles de temps seulement de la dernière observation disponible. Le nombre d'intervalles de temps qui séparent le moment où on effectue la prévision du moment pour lequel on fait la prévision, s'appelle l'**horizon de prévision**. Il n'est en général pas très utile de faire des prévisions à trop long terme car celles-ci risquent fort d'être éloignées des observations que l'on pourra réellement effectuer à ce moment-là.
- L'étude des séries temporelles peut également être entreprise dans le but d'**expliquer** des phénomènes. Dans ce contexte, on ne se limite généralement pas à l'analyse d'une seule caractéristique, mais au contraire, on tente d'expliquer les fluctuations observées dans une série temporelle par les fluctuations observées sur d'autres caractéristiques. Cela se fait le plus souvent par des techniques faisant appel à la régression multiple et aux modèles économétriques.

I-1-5) MODELISATION D'UNE SERIE TEMPORELLE

On peut distinguer trois types de modèle : **les modèles d'ajustement**, **les modèles auto-projectifs**, et **les modèles explicatifs**.

1. **Les modèles d'ajustement** : La série est générée par un modèle du type $X_t = a + S_t + u_t$, où a est une constante inconnue représentant la **tendance** et S_t est une fonction périodique du temps, nulle en moyenne, qu'on appelle **mouvement saisonnier** ; u_t , appelé **partie**

irrégulière, est une variable aléatoire centrée. Cette partie irrégulière est souvent petite par rapport aux deux autres, mais pas pour autant négligeable ; en fait, c'est souvent dans cette partie que l'on trouve les fluctuations les plus intéressantes sur le plan économique par exemple. On ajoute parfois à cette décomposition une quatrième composante, **le cycle**, représentant des mouvements périodiques à moyen terme. De manière plus générale, on peut proposer un modèle du type $X_t = f(t, u_t)$, où f est une fonction indexée par un nombre fini de paramètres inconnus et u_t est une variable aléatoire centrée. Les hypothèses faites sur les variables aléatoires u_t induisent des méthodes d'estimation de la fonction f . Par exemple, dans le cas où les u_t ont mêmes variances et sont non corrélés, on utilise la méthode des moindres carrés ordinaires.

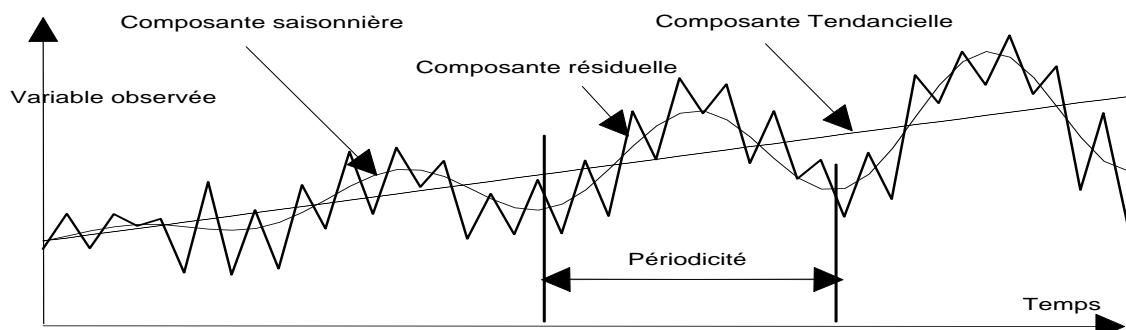
2. **Les modèles auto projectifs** : On suppose ici que X est fonction de ses valeurs passées et d'une perturbation aléatoire u_t : $X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, u_t)$. Une classe de tels modèles, utiles pour la prévision, sont les modèles ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving-Average).
3. **Les modèles explicatifs** : La variable X_t est exprimée en fonction d'un vecteur de variables observables, dites exogènes, X_t^* et d'une perturbation aléatoire u_t : $X_t = f(X_t^*, u_t)$. X_t^* est soit déterministe, soit aléatoire et indépendant de u_t . Il existe deux types de modèles explicatifs, le modèle **statique** et le modèle **dynamique**.
 - Dans le premier, les variables X_t^* ne contiennent pas de valeurs passées de X_t et les u_t sont indépendants entre eux (exemple : $X_t = a + bX_t^* + u_t$, où $t = 1, \dots, T$).
 - Un modèle explicatif peut être dynamique soit parce que les perturbations u_t sont **autocorrélées**, soit parce que X_t^* contient des valeurs passées de X_t , c'est-à-dire des variables dites **endogènes retardées**.

I-1-6) LES MODELES DE DECOMPOSITION DES SERIES CHRONOLOGIQUES

On envisage ici une décomposition entre trois composantes :

- la composante tendancielle ou de long terme, notée T_t
- la composante saisonnière ou de court terme, notée S_t
- la composante résiduelle, notée R_t

Schéma de décomposition d'une série chronologique



Les séries chronologiques sont généralement, représentées dans des tableaux à double entrée, où la ligne i représente l'année et la colonne j représente le mois, ou le trimestre. Par

CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉS SUR LES SÉRIES TEMPORELLES

conséquent, nous désignerons la série chronologique Y en fonction de deux indices qui sont i pour l'année et j pour le mois :

- x_{ij} valeur observée de la série chronologique X, pour l'année i du mois j,
- t_{ij} valeur de la composante tendancielle, pour l'année i du mois j,
- s_{ij} valeur de la composante saisonnière, pour l'année i du mois j,
- r_{ij} valeur de la composante résiduelle, pour l'année i du mois j.

Dans ce type de décomposition sachant que $i \in \{1, \dots, n\}$ et que $j \in \{1, \dots, p\}$ (avec n le nombre d'années et p le nombre de mois ou de trimestres), nous pouvons représenter l'observation de la série chronologique par un seul indice qui est généralement t. En effet, nous avons la relation entre les lignes et les colonnes :

$$t = p(i-1) + j$$

Comme en économie la plupart du temps nous sommes en présence de séries qui sont soit mensuelles ($p = 12$), soit trimestrielles ($p = 4$) nous pouvons écrire la relation pour ces deux cas :

- pour une série mensuelle $t = 12(i-1) + j$
- pour une série trimestrielle $t = 4(i-1) + j$

Ainsi, on peut faire référence indifféremment soit à y_{ij} soit à y_t . Ces notations seront utilisées ultérieurement pour rechercher le modèle de décomposition à appliquer à la série, afin de la corriger des variations saisonnières.

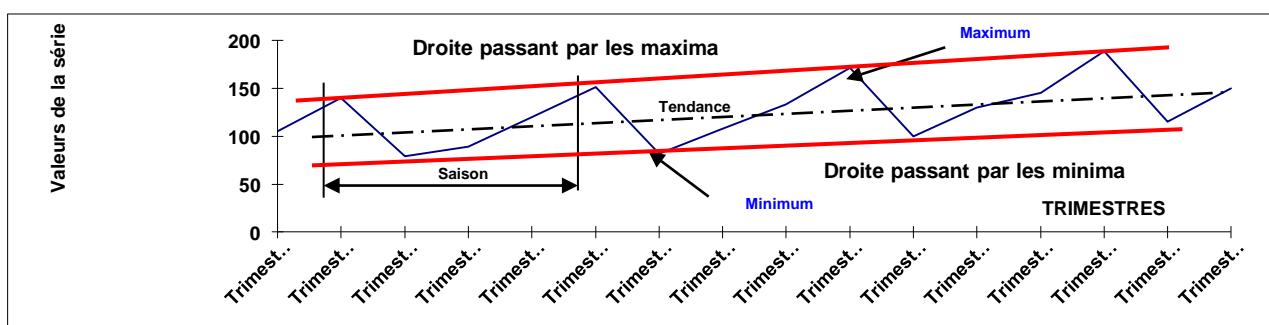
I-1-7) RECHERCHE DU MODELE DE DECOMPOSITION

Il existe trois méthodes simples pour choisir le modèle de décomposition d'une série chronologique. Deux méthodes sont graphiques et donc subjectives, une autre méthode est analytique et donc plus fiable.

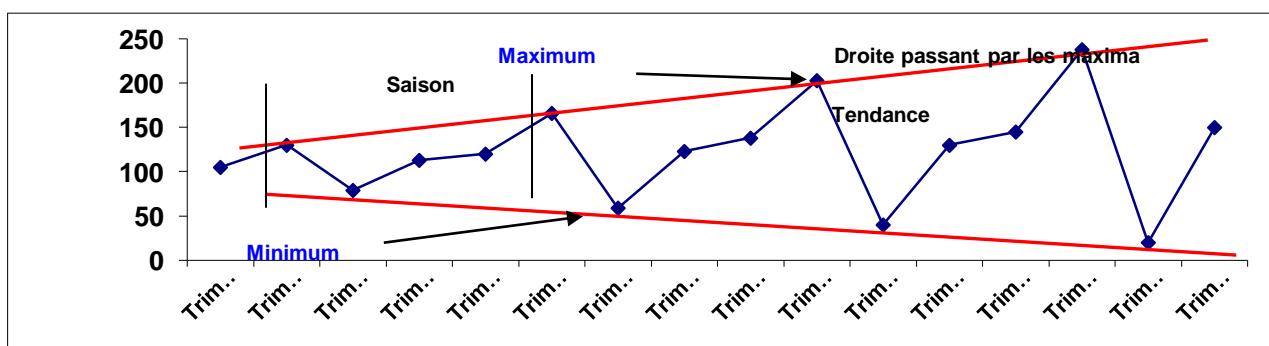
I-1-7-1) LA METHODE DE LA BANDE

La méthode de la bande consiste à tracer la droite qui passe par les minima et la droite qui passe par les maxima. Deux cas peuvent se présenter :

- les droites sont à peu près parallèles entre elles : le modèle est additif.



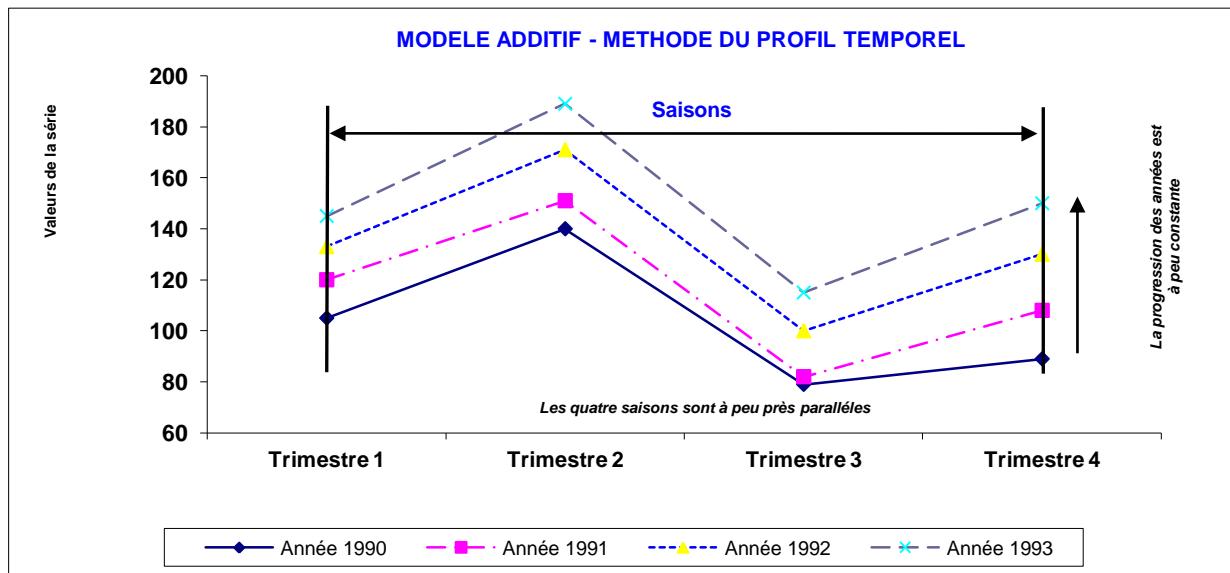
- les droites ne sont pas parallèles entre elles : le modèle est multiplicatif.



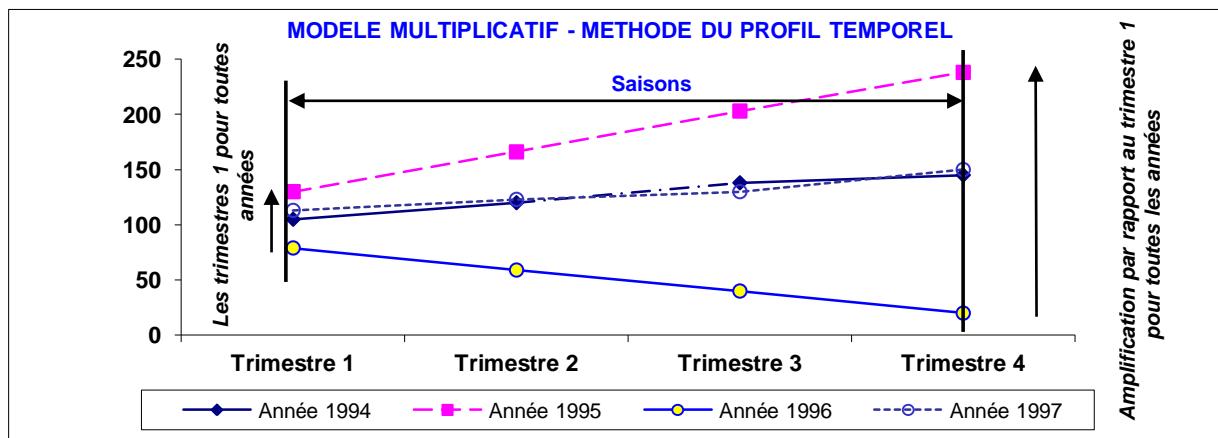
I-1-7-2) LA METHODE DU PROFIL

La méthode du profil temporel consiste à superposer les saisons pour vérifier si elles sont parallèles entre elles ou non. Deux cas peuvent se présenter :

- les droites de profils sur la période sont parallèles entre elles : le modèle est additif.



- les droites de profil sur la période ne sont pas parallèles : le modèle est multiplicatif.



I-1-7-3) LA METHODE DU TABLEAU DE BUYS ET BALLOT

Cette méthode analytique consiste à calculer pour chacune des années la moyenne et l'écart-type puis à vérifier la liaison entre l'écart-type et la moyenne par la méthode des moindres carrés. Nous devons rechercher le modèle :

$$s_X = a \cdot \bar{X} + b$$

Deux cas se présentent :

- L'écart-type n'est pas une fonction de la moyenne, le modèle est additif. La pente de la droite des moindres carrés est proche de zéro.

- L'écart-type est une fonction de la moyenne, le modèle est multiplicatif. La pente de la droite des moindres carrés est différente de zéro.

I-1.8) ANALYSE DE LA TENDANCE

a) ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés

La droite de régression de Y par rapport au temps t donne pour chaque t une valeur T_t . Il s'agit de la méthode la plus utilisée, car elle est la plus rigoureuse.. Une droite d'ajustement y parvient : la droite de régression linéaire. Son équation est de la forme $y = ax + b$. La valeur du coefficient de régression a est :

$$a = [\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}] / [\sum x_i^2 - n \bar{x}^2]$$

- \bar{x} : moyenne de la variable x, exemple : les périodes de ventes.
- \bar{y} : moyenne de la variable y, exemple : les ventes.
- N : nombre de variables observées.

Application sur la série du Chiffres d'affaire d'une entreprise fictive/ :

X_i	Y_i	$X_i \times y_i$	X_i^2
1	500	500	1
2	550	1100	4
3	900	2700	9
4	650	2600	16
5	520	2600	25
6	580	3480	36
7	900	6300	49
8	670	5360	64
9	540	4860	81
10	600	6000	100
11	1000	11000	121
12	700	8400	144
Total		54900	650

$\bar{x} = 6,5$, $\bar{y} = 675,8$ et $n = 12$ observations.

D'où $a = [54900 - 12(6,5)(675,8)] / [650 - 12(6,5)^2] = 15,29$

Si l'on considère $\bar{y} = a \bar{x} + b$ Alors $b = 675,8 - 6,5(15,29) = 576,4$

La droite recherchée est : $Y = 15,29X + 576,4$

Les prévisions pour les trimestres 13 à 16 sont :

Trimestre	13	14	15	16
CA	775,2	790,45	805,7	821

Les moindres carrés donnent sont plus fiables mais st, elles n'intègrent pas les éventuelles saisonnalités de la série. Dans le cas étudié, elles sont importantes :

I-1.9) ANALYSE DE LA COMPOSANTE SAISONNIERE

MODELE ADDITIF	MODELE MULTIPLICATIF
<ul style="list-style-type: none"> calcul des différences $Y_t - T_t = S_t + A_t$ calcul des coefficients saisonniers bruts S'_j : pour chaque saison j, S'_j = moyenne des différences de la saison j calcul des coefficients saisonniers $S_j = S'_j - \bar{S}'$	<ul style="list-style-type: none"> calcul des rapports $Y_t / T_t = S_t \cdot A_t$ calcul des coefficients saisonniers bruts S'_j : pour chaque saison j, S'_j = moyenne des rapports de la saison j calcul des coefficients saisonniers $S_j = S'_j \cdot \bar{S}'$

I-1.10) ANALYSE DE LA COMPOSANTE ALEATOIRE

<u>modèle additif</u>	<u>modèle multiplicatif</u>
$A_t = Y_t - T_t - S_t$	$A_t = Y_t / (T_t \cdot S_t)$

I-1.11) DESAISONNALISATION

Pour exprimer ce qu'aurait été le mouvement brut sans l'influence saisonnière, on utilise la série corrigée des variations saisonnières Y^* (ou Y_{cvs})

<u>modèle additif</u>	<u>modèle multiplicatif</u>
$Y^*_t = Y_t - S_t$	$Y^*_t = Y_t / S_t$

I-1.12) SERIE AJUSTEE

Cette série est utilisée pour représenter ce qu'aurait été le phénomène en l'absence de phénomènes aléatoires

<u>modèle additif</u>	<u>modèle multiplicatif</u>
$Y_{cvs} = X_t - S_t$	$Y_{cvs} = Y_t / S_t$

I-1.13) PREVISION A COURT TERME

Lorsque le trend est obtenu par la méthode des moindres carrés, il est possible d'obtenir une prévision postérieure à l'intervalle d'étude (à condition de rester dans des limites raisonnables), en utilisant le modèle précédent. Pour une date x correspondant à un coefficient saisonnier S_x , la tendance vaut T_x , et la prévision est donc donnée par $T_x + S_x$ en modèle additif ou $T_x \cdot S_x$ en modèle multiplicatif.

I-1.14) EXEMPLE DE CALCUL DES COEFFICIENTS SAISONNIERS PAR LA METHODE DES RAPPORTS AU TREND)

Cette méthode consiste à :

- Déterminer la droite des moindres carrés qui ajuste la série chronologique.
- Calculer les valeurs ajustées y_i grâce à l'équation précédente.
- Faire le rapport entre la valeur y_i réellement observée et la valeur y_i ajustée et ce, pour chaque observation.

CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉS SUR LES SÉRIES TEMPORELLES

- Prendre pour chaque période (mois ou trimestre), le rapport moyen qui sera considéré comme le coefficient saisonnier de la période.

Considérons la série suivante. Calculer la prévision des ventes pour les quatre trimestres de l'année 5.

Trimestre années \	1	2	3	4
1	1000	1200	1400	1150
2	1050	1350	1500	1300
3	1100	1450	1700	1400
4	1250	1650	1850	1550

Le calcul des paramètres de la droite donne :

$$a=35,5882 \quad b=1066,25$$

Les valeurs ajustées par cette équation sont données dans le tableau suivant :

Trimestre années \	1	2	3	4
1	1101,84	1173,43	1173,01	1208,60
2	1244,19	1279,78	1315,37	1350,96
3	1386,54	1422,13	1457,72	1493,31
4	1528,90	1564,49	1600,07	1635,66

Les rapports entre valeur réelle et valeur ajustée sont donnés dans le tableau suivant :

Trimestre années \	1	2	3	4
1	0,9076	1,0550	1,1935	0,9515
2	0,8439	1,0549	1,1404	0,9623
3	0,7933	1,0196	1,1662	0,9375
4	0,8176	1,0547	1,1562	0,9476
Coefficients saisonniers bruts	0,8406	1,0461	1,1641	0,9497
Coefficients saisonniers arrondis	0,84	1,05	1,16	0,95

I-I-15) CALCUL DE LA PRÉVISION DES VENTES

La prévision qui peut être faite d'une part, sur l'hypothèse que les années à venir connaîtront la même tendance générale que les années passées ; et d'autre part, sur un calcul :

- L'équation générale du mouvement extra saisonnier est utilisée pour prévoir la tendance à long terme des quatre prochains trimestres. L'équation est $y' = 35,5882 x + 1066,25$. Dans notre exemple, les valeurs de y' seront calculées pour x égal à 17,18 et 19 et 20.
- Des coefficients saisonniers sont appliqués aux valeurs trouvées pour tenir compte des fluctuations saisonnières :

CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉS SUR LES SÉRIES TEMPORELLES

Trimestre années	1	2	3	4
Prévisions du mouvement extra saisonnier	1671,25	1706,84	1742,43	1778,01
Coefficients saisonniers	0,84	1,05	1,16	0,95
Prévisions de ventes	1403,85	1792,18	2021,22	1689,11

Le calcul des coefficients saisonniers par la méthode de la différence à la tendance

A) LE MODÈLE ADDITIF

Évolution des ventes d'un produit au cours de 4 années :

	Année N				Année N+1				Année N+2				Année N+3			
Trimestres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Ventes	100	130	192	313	298	290	303	347	311	259	237	234	160	99	72	80

✓ LE TREND (LA TENDANCE GENERALE)

Nous allons calculer le trend par la méthode des moyennes mobiles :

	Année N				Année N+1				Année N+2				Année N+3			
Trimestres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Ventes	100	130	192	313	298	290	303	347	311	259	237	234	160	99	72	80

✓ LE CALCUL DES MOYENNES MOBILES

Année N	Trimestre			
	1	2	3	4
Année N			208.5	253.25
Année N+1	287.13	305.25	311.13	308.88
Année N+2	296.75	274.38	241.38	202.5
Année N+3	161.88	122		

✓ CALCUL DES COEFFICIENTS SAISONNIERS ADDITIFS

Différence = Donnée brute - Trend

	Trimestre				Total
	1	2	3	4	
Année N			-16.50	59.75	
Année N+1	10.87	-15.25	-8.13	38.12	
Année N+2	14.25	-15.38	-4.38	31.50	
Année N+3	-1.88	-23.00			
Estimation des coefficients saisonniers	7.75	-17.88	-9.67	43.12	23.32
Coefficients saisonniers	1.92	-23.71	-15.50	37.29	0

(Dernière ligne : -23.32 / 4)

Variations résiduelles (ou accidentelles)

Elles apparaissent après élimination des composantes saisonnières et extra-saisonnière.

CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉS SUR LES SÉRIES TEMPORELLES

✓ ÉLIMINATION DES VARIATIONS SAISONNIERES DANS LE MODELE ADDITIF (XCVS)

Données Corrigées des Variations Saisonnieres = Donnée brute – Coefficient additif

Le calcul de la série corrigée des Variations Saisonnieres :

	Trimestre			
	1	2	3	4
Année N	98	154	208	276
Année N+1	296	314	319	310
Année N+2	309	283	253	197
Année N+3	158	123	88	43

✓ ÉLIMINATION DE LA TENDANCE EXTRA-SAISONNIERE

Variation résiduelle = Données corrigées des Variations Saisonnieres - Trend

Le calcul tableau des variations résiduelles

	Trimestre			
	1	2	3	4
Année N			-1	22
Année N+1	9	8	7	1
Année N+2	12	8	11	-6
Année N+3	-4	1		

I-1-16) TEST DE FICHER BASE SUR L'ANALYSE DE LA VARIANCE

Le test de Ficher : l'analyse de la variance permet de détecter une éventuelle tendance et saisonnalité dans une série chronologique.

Soit N : le nombre d'années

P : la périodicité des données (P=2, P=4, P=12)

$X_{i,j}$: la valeur de la série pour la i^{ème} année et la j^{ème} période

Le déroulement des tests :

Calcul de la variance total :

$$ST = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^P (X_{ij} - X_{..})^2$$

Avec $X_{..} = \frac{1}{N \cdot P} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^P X_{ij}$; $X_{..}$ c'est la moyenne générale de la série

Table d'analyse de la variance :

Somme des carrés	Degré de liberté	Désignation	Variance
$SP = N_j \sum_{j=1}^P (X_{..j} - X_{..})^2$	P-1	Variance période	$V_p = \frac{SP}{P-1}$
$SA = P \sum_{i=1}^N (X_{i..} - X_{..})^2$	N-1	Variance année	$V_A = \frac{SA}{N-1}$
$S_A = ST - SA - SP$	(P-1)(N-1)	Variance résiduelle	$V_R = \frac{SR}{(P-1)(N-1)}$
		Variance totale	$V_T = V_p + V_A + V_R$

CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉS SUR LES SÉRIES TEMPORELLES

Le test se déroule de la manière suivante :

	Test de la tendance	Test de saisonnalité
Les hypothèses	H_0 : la série n'a pas de tendance H_1 : la série possède une tendance	H_0 : la série n'a pas de saisonnalité H_1 : la série possède une saisonnalité
La statistique du test	$F_c = \frac{V_A}{V_R}$	$F_c = \frac{V_P}{V_R}$
La règle de décision	Si $F_c > F_{(V1,V2)}$ on accepte H_1 Si $F_c \leq F_{(V1,V2)}$ on accepte H_0	Si $F_c > F_{(V3,V4)}$ on accepte H_1 Si $F_c \leq F_{(V3,V4)}$ on accepte H_0
Le degré de liberté	$V1=N-1$ et $V2=(P-1)(N-1)$	$V3=P-1$ et $V4=(N-1)(P-1)$

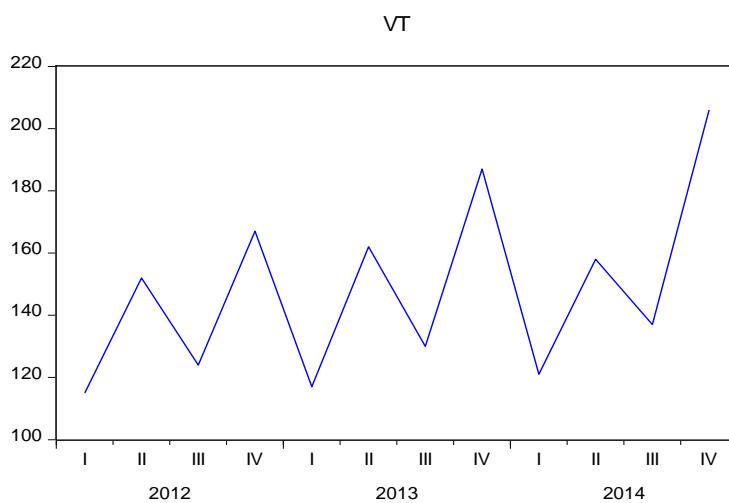
I-1-17) EXERCICES PEDAGOGIQUES SUR LES METHODES CLASSIQUES DES PREVISIONS.

EXERCICE N°1

Soit la séries des ventes observées pendant 3 ans (2012-2014-).

T	X _t
2013	T1 115
	T2 152
	T3 124
	T4 167
2014	T1 117
	T2 162
	T3 130
	T4 187
2015	T1 121
	T2 158
	T3 137
	T4 206

- Représenter graphiquement les données.
- Montrer qu'il existe un mouvement saisonnier.
- Ce mouvement est-il additif ou explicatif.



SOLUTION

La représentation graphique du chiffre d'affaires montre qu'elle est fortement saisonnière, cette saisonnalité est liée aux premier et quatrième trimestres de chaque année. Ce mouvement est multiplicatif. La série des ventes est d'amplitude qui n'est pas constante, donc le modèle générateur des données peut être assimilé un modèle multiplicatif.

Exercice N°2

Soit la série semestrielle X_t observée pendant 3 ans.

	Semestre 1	Semestre 2
2010	10	15
2011	12	20
2012	16	22

$$\begin{aligned}
 P=2, N=3 \\
 X_{..}=15.83 \\
 SP=60.29 \quad SA=42.33, SR=2.21, ST=104.83
 \end{aligned}$$

On demande d'effectuer le test de détection de saisonnalité et de tendance avec un risque α -5%

CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉS SUR LES SÉRIES TEMPORELLES

Solution :

Test de la tendance	Test de saisonnalité
$X_{i.} = \frac{1}{P} \sum_{j=1}^N X_{ij}$: la moyenne de l'année i $X_{.j} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^P X_{ij}$: la moyenne de l'année i	
Test de la tendance : H_0 : la série n'a pas de tendance H_1 : la série possède une tendance $F_c = \frac{V_A}{V_R} - 19.15 < 19.56$. On accepte H_0 Si $F_c > F_{(V1,V2)}$ on accepte H_1 Si $F_c \leq F_{(V1,V2)}$ on accepte H_0 $V1=N-1$ et $V2=(P-1)(N-1)$	Test de saisonnalité : H_0 : la série n'a pas de saisonnalité H_1 : la série possède une saisonnalité $F_c = \frac{V_P}{V_R} - 54.56 > 19.56$. On accepte H_1 Si $F_c > F_{(V3,V4)}$ on accepte H_1 Si $F_c \leq F_{(V3,V4)}$ on accepte H_0 $V3=P-1$ et $V4=(N-1)(P-1)$

Exercice N°3

Soit la série X_i observé pendant 3ans : $P=4$, $N=3$

	1	2	3	4
2011	12	13	10	31
2012	8	10	11	29
2013	11	14	12	30

La régression de l'écart type sur la moyenne donne les résultats suivants :
 $\hat{\sigma}_i = 13,11 - 0,22\bar{X}_i$
 $[12,67][0,73]$

Les valeurs entre deux crochets représentent la statistique de Student associée aux coefficients du modèle [12,67] [0,73].

Déterminer le modèle générateur de données pour la série X_t .

SOLUTION :

$H_0: \beta = 0 \Rightarrow$ Modèle additif

$H_1: \beta \neq 0 \Rightarrow$ Modèle multiplicatif

$$T_c = \left| \frac{\hat{\beta}-0}{\delta_{\hat{\beta}}} \right| \rightsquigarrow \text{Student } (n-2)dL$$

$$\text{Sous } H_0 \quad \alpha_c = \left| \frac{\hat{\beta}-0}{\delta_{\hat{\beta}}} \right| = \left| \frac{0,22}{\delta_{\hat{\beta}}} \right|$$

$$t_{n-2}^{\alpha/2} = t_{3-2}^{0,025} = t_1^{0,025} = 12,706$$

$$t_c = 0,73 < t_1^{0,025} = 12,706 \text{ on accepte } H_0 \text{ (Modèle additif)}$$

EXERCICE N°4

Soit la série X_t observée pendant 18 mois (premier trimestre 2006 au deuxième trimestre 2007).

	T ₁ 2006	T ₂ 2006	T ₃ 2006	T ₄ 2006	T ₁ 2007	T ₂ 2007
X _t	255	330	435	570	740	960

A la lecture de cette statistique l'hypothèse d'une croissance exponentielle des ventes peut être retenue.

— Déterminer les paramètres de la fonction : $\beta\alpha^t(\alpha \text{ et } \beta)$

— Déterminer la prévision pour le troisième et quatrième trimestre de 2007

SOLUTION

$$X_t = \beta\alpha^t \Rightarrow \ln X_t = \ln \beta + \ln \alpha * t$$

$$\ln X_t = \ln \beta + \ln \alpha * t$$

CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉS SUR LES SÉRIES TEMPORELLES

	T	X _t	lnX _t	tlnX _t	t ₂
2006	1		5,54	5,58	1
	2		5,79	11,5	4
	3		6,07	18,21	9
	4		6,34	25,36	16
2007	5		6,60	33	25
	6		6,86	41,16	36
Total	21		37,2	134,89	91

$$\ln \alpha = \frac{\sum \ln y_t * t - n \ln \bar{X}_t * \bar{t}}{\sum t^2 - n \bar{t}^2}$$

$$\ln \alpha = \frac{134,89 - 6(6,2)(3,5)}{91 - 6(12,25)}$$

$$\ln \alpha = \frac{4,69}{17} = 0,268$$

$$\alpha = e^{0,268} = 1,307$$

$$\ln \beta = \bar{\ln X}_t - \ln \alpha \bar{t}$$

$$\ln \beta = 6,2 - 0,26(3,5)$$

$$\ln \beta = 5,29$$

$$\beta = e^{5,29} = 198,343$$

$$\ln X_t = 5,29 + 0,26t$$

$$\ln X_{t+1} = 5,29 + 0,26(7)$$

$$\ln X_{t+1} = 7,11 \Rightarrow X_{t+1} = e^{7,11} = 1224,14$$

$$\ln X_{t+2} = 5,29 + 0,26(8)$$

$$\ln X_{t+2} = 7,37 \Rightarrow X_{t+2} = e^{7,37} = 1587,63$$

EXERCICE N°5

Soit la série N°2. On demande de calculer la prévision pour les années 2015 et 2016

	X _t	t	X _t * t	t ²	\hat{X}	S _j	S _j *	X ^{CVS}
2012	10	1	10	1	10,75	-0,75	-1,48	11,48
	15	2	30	4	12,78	2,22	1,48	13,51
2013	12	3	36	9	14,81	-2,81	-2,98	14,98
	20	4	80	16	16,84	3,16	2,98	17,01
2014	16	5	80	25	18,87	-2,87	-1,98	17,98
	22	6	132	36	20,9	1,1	1,98	20,01

SOLUTION

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i t - n \bar{X} \bar{t}}{\sum t^2 - n \bar{t}^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{368 - 6 * 3,5 * 15,83}{91 - 6 * 12,25} = 2,03$$

$$\hat{X}_i = 8,72 + 2,03t$$

Prévision d'une série saisonnière :

$$X_t \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{cases} \Rightarrow \hat{X}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}t \quad \begin{cases} \text{Additif} \\ \text{Multiplicatif} \end{cases}$$

Additif : $S_j = X_t - \hat{X}_t$ Méthode de la différence à la tendance

Si $\sum_{j=1}^P S_j = 0 \Rightarrow S_j = S_j^*$

Si $\sum_{j=1}^P S_j \neq 0 \Rightarrow S_j^* = S_j - \bar{S}$

CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉS SUR LES SÉRIES TEMPORELLES

S_j : Coefficients saisonniers

S_j^* : Coefficients saisonniers corrigés

Multiplicatif : $S_j = \frac{x_i}{\bar{x}_t}$ Méthode des rapports à la tendance

Si $\sum_{j=1}^P S_j = P \Rightarrow S_j = S_j^*$

Si $\sum_{j=1}^P S_j \neq P \Rightarrow S_j^* = \frac{S_j}{\bar{S}}$ avec $\bar{S} = \sqrt{\prod_{j=1}^P S_j}$

Prévision Cas additif :

$$\hat{x}_{t+n}^P = \hat{x}_{t+n} + CS$$

$$CS_{s1} = \frac{-1,48+2,98-1,98}{3} = -2,14$$

$$CS_{s1} = \frac{1,48+2,98+1,98}{3} = +2,14$$

		t	h	X_{t+n}	CS	X_{t+n}^P
2015	S_1	7	1	22,93	2,14	20,79
	S_2	8	2	29,96	2,14	27,11
2016	S_1	9	3	26,99	-2,14	24,85
	S_2	10	4	29,02	2,14	31,16

Exercice N°6 :

Soit la série trimestrielle X_t observée pendant 4 ans.

	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
2012	2000	1000	700	2600
2013	2020	1100	600	3000
2014	2200	1120	740	3200
2015	2260	1130	800	3300

- Déterminer les composantes de cette série.
- On suppose que la série X_t est générée par un modèle multiplicatif, calculer la prévision pour l'année 2016 sachant que l'équation de la tendance est donnée par : $X_t = c + 24,437t$ et les coefficients saisonniers trimestriels sont donnés dans le tableau suivant :

S ₁	S ₂	S ₃	S ₄
1,254	0,637	?	1,708

SOLUTION

La série X_t est fortement saisonnière, cette saisonnalité est liée aux troisième et quatrième trimestres de chaque année.

$$\hat{\beta}_0 = \bar{X} - \hat{\beta}_1 \bar{t}$$

$$\hat{\beta}_0 = 1735,62 - (24,43)(8,5)$$

$$\hat{\beta}_0 = 1527,96$$

$$X_t = 1527,96 + 24,437t$$

Les prévisions :

$$X_{t+1} = 1943,38$$

$$X_{t+2} = 1967,82$$

$$X_{t+3} = 1992,26$$

$$X_{t+4} = 2016,7$$

X_t Générée par un modèle multiplicatif $\sum_{j=1}^P S_j = P \Rightarrow \sum_{j=1}^P S_j = 4$

$$CsMP_{t3} = 4 - (1,254 + 0,637 + 1,708) = 0,401$$

$$\chi^{\text{CVS}} = \frac{x_t}{s_j}$$

$$\bar{X}^{\text{CVS}} = \frac{\sum x^{\text{CVS}}}{16} = 1734,9$$

	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
2012	1594,89	1569,85	1745,63	1522,24
2013	1610,84	1726,84	1496,25	1756,44
2014	1754,38	1758,24	1845,38	1873,53
2015	1802,23	1773,9	1995,01	1932,88

I-2) CONCEPTS DE BASE DES SERIES TEMPORELLES

On s'intéresse ici à la modélisation ARIMA de séries chronologiques ne comportant pas de composante saisonnière. On s'intéresse essentiellement aux concepts utilisés dans la modélisation des séries temporelles macroéconomiques et financières.

I-2-1) BRUITS BLANCS. PROCESSUS STATIONNAIRES. COMMENT VÉRIFIER QUE DES DONNEES CONSTITUENT UN BRUIT BLANC

- **Définitions théoriques :** On considère la suite des variables aléatoires constituant le processus :
- **Processus (faiblement) stationnaire (ou stationnaire au second ordre)** : moyenne constante et $\text{Cov}(X_s, X_t)$ ne dépend que de $s-t$
- **Processus strictement stationnaire** : invariance par toute translation $t \rightarrow t + h$. Bruit blanc indépendant et identiquement distribuées : suite de variables centrées, variables indépendantes et identiquement distribuées.
- **Bruit blanc faible** : suite de variables centrées, indépendantes, de même variance.
- **Bruit blanc gaussien** : suite de variables normales, centrées, indépendantes, de même variance.
- **La marche au hasard** : est un autre cas particulier de processus stochastique pour lequel la valeur prise par X à la date T est régie par l'équation suivante : $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ où ε_t est une variable aléatoire qui présente les mêmes propriétés

Pour étudier si une série temporelle approche un bruit blanc on utilise :

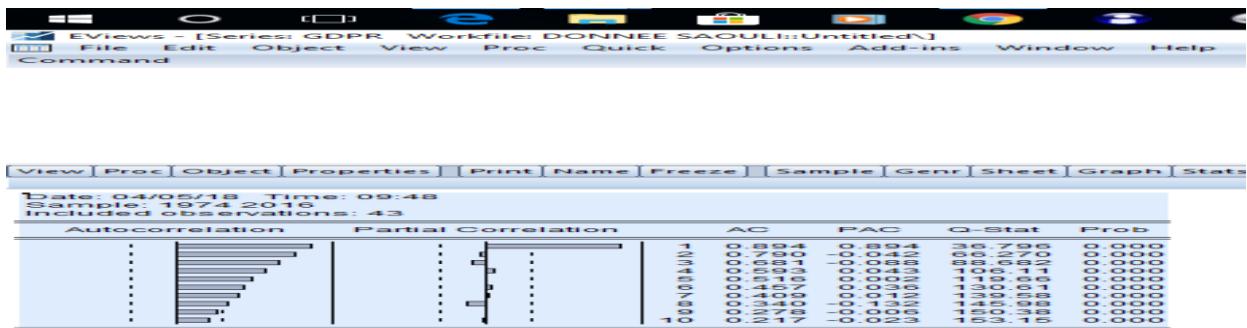
- **ACF : fonction d'autocorrélation** On appelle fonction d'auto corrélation $\rho(h)$ de processus X_t la fonction : $\rho(h) = \frac{\text{cov}(X_t, X_{t+h})}{\sigma X_t \sigma Y_t} = \frac{\gamma(h)}{\sqrt{\gamma(0)} \sqrt{\gamma(0)}}$
- **PACF : fonction d'autocorrélation partielle** : la fonction d'autocorrélation partielle de X à distance h est la corrélation entre X_0 et X_h lorsque les valeurs intermédiaires X_1, X_2, \dots, X_{h-1} sont fixées.

Ces fonctions dépendent d'un paramètre (le décalage ou lag h) et on en fait donc des représentations graphiques.

Exemple : le calcul des fonctions FAC et PAC sous Eviews avoir au moins 40 observations et

se limiter aux $h < \frac{n}{4}$.

CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉS SUR LES SÉRIES TEMPORELLES



Les premières valeurs des autocorrelations sont significativement différentes de 0 : la série proposée n'est pas un bruit blanc.

I-2-1-1) TESTS DE BRUIT BLANC

- **Test de Bruit Blanc (BOX-PIERES et LYUNG BOX) :** le test de BOX-PIERE permet d'identifier les processus de BB. Les hypothèses du test sont données comme suit :

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_n = 0$$

$H_1:$ il existe au moins un coefficient $\neq 0$
avec β_k coefficient d'autocorrélation d'ordre k Et n : le nombre de retard.

Pour effectuer ce test, on calcule la statistique de BOX-PERCE notée Q_{stat} :

$$Q_{stat} = n \sum_{k=1}^n (\hat{\beta}_k)^2 \text{ et } \hat{\beta}_k = \frac{\sum (y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y})}{\sum (y_t - \bar{y})^2}$$

On rejette l'hypothèse d'un bruit blanc au seuil de α si $Q_{stat} > \text{valeur de } \chi^2_{n(d)}.$

- **TEST DU PORTEMANTEAU :** Sous H_0 , $Q = n \sum_{k=1}^K \rho^2(k)$ suit une loi du khi-2 à K degrés de liberté

I-2.1.2) AUTRES TESTS

- **Test de Durbin-Watson:** permet de détecter une autocorrélation des erreurs d'ordre 1 selon la forme : $\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + V_t$ avec $V_t \sim BB(0, \sigma_V^2)$. Le test d'hypothèse est le suivant :

$$H_0: \rho = 0 \text{ vs } H_1: \rho < 0 \text{ ou } \rho > 0$$

Pour tester l'hypothèse nulle H_0 , nous calculons la statistique de Durbin-Watson :

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n (e_t)^2}$$

Où e_t : résidus d'estimation. Cette statistique varie de 1 à 4 et nous avons $DW=2$ lorsque $\rho = 0$. Afin de tester l'hypothèse nulle, Durbin et Watson ont tabulé les valeurs critiques au seuil de 5% en fonction de la taille de l'échantillon n et de nombre de variables explicatives. La lecture de la table permet de déterminer deux valeurs d_1 et d_2 comprise entre 0 et 2 qui délimitent l'espace entre 0 et 4. La règle de décision est prise de la manière suivante :

Si $DW \in [0, d_1]$ on accepte H_1

Si $DW \in [d_2, 4 - d_2]$ on accepte $H_0 : \rho = 0$

Si $DW \in [4 - d_1, 4]$ on accepte H_1

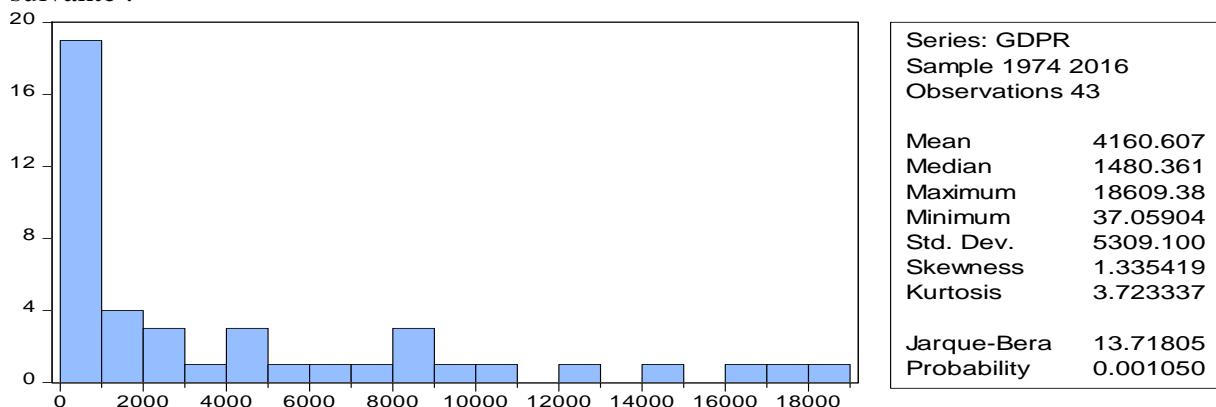
Si $DW \in [d_1, d_2]$ et $[4 - d_2, 4 - d_1] \Rightarrow$ Zone de doute

I-2.1.3) LES TESTS DE BRUIT BLANC AVEC EVIEWS

Eviews fournit les résultats des fonctions d'autocorrélation simple (colonne AC) et partielles (colonne PAC), avec les correlogrammes respectifs. Les bornes de l'intervalle de confiance sont stylisées par des pointillés horizontaux ; chaque terme qui sort de cet intervalle est donc significativement différent de zéro au seuil de 5%. En observant le correlogramme de la série produit intérieur brut de l'Algérie, on peut se permettre de dire que la série n'est pas stationnaire. En effet, on se trouve confronter à un correlogramme typique d'une chronique affectée d'une tendance : une fonction d'autocorrélation simple qui décroît lentement quand le retard augmente et une fonction d'autocorrélation partielle qui fait apparaître un pic significatif, en l'occurrence le premier terme qui est égal à 0.894. De plus la série n'est pas caractéristique d'un bruit blanc (il semble même caractéristique d'un processus non stationnaire), car la valeur de la statistique Q-stat² (153,11) pour un retard h=11 est largement supérieure à la valeur de khi deux au seuil de 5%. Ce qui donne une probabilité critique nulle pour ce test, autrement dit, on a un risque de zéro de rejeter à tort l'hypothèse de nullité des coefficients p_k .

a) TESTS DE CARACTÈRE GAUSSIEN

Lorsqu'une série est un bruit blanc, il est utile d'étudier s'il s'agit d'un bruit blanc gaussien. On peut alors utiliser le test de Jarque-Bera ou le test de d'Agostino (qui s'appuient sur le calcul de l'asymétrie et de l'aplatissement de la série). Sous Eviews le test se déroule de la manière suivante :



$$V1 = \frac{|\beta_1^{1/2} - 0|}{\sqrt{\frac{6}{N}}} = \frac{|1.33 - 0|}{\sqrt{6/43}} = 3.59 > 1.96 \quad V2 = \frac{|\beta_3 - 3|}{\sqrt{\frac{24}{N}}} = \frac{|3.72 - 3|}{\sqrt{24/43}} = 1.28$$

Nous rejetons l'hypothèse de normalité en ce qui concerne la symétrie et l'aplatissement de la distribution, ce qui est confirmé par la statistique de Jarque-Bera : JB=13.718 > à la valeur lue dans la table de Khi-deux à 2 degré de liberté (5.99). L'hypothèse de normalité est rejetée.

normalité en ce qui concerne la symétrie et l'aplatissement de la distribution, ce qui est confirmé par la statistique de Jarque-Bera : JB=13.718 > à la valeur lue dans la table de Khi-deux à 2 degré de liberté (5.99). L'hypothèse de normalité est rejetée.

b) TESTS D'HOMOSCEDASTICITE

Un bruit blanc doit être homoscédastique, les tests de l'hétéroscédasticité sont :

- Le test de Goldfeld-Quant a pour but de comparer la somme des carrés des résidus d'estimation après avoir scindé les résidus en deux sous échantillons.
- Un autre test consiste à étudier la distribution des carrés des résidus. L'analyse des termes du correlogramme des résidus au carré permet de tester l'existence d'une hétéroscédasticité. Si certaines valeurs de la fonction d'autocorrélation (tests de Box Pierce ou Ljung-Box) sont significativement différentes de zéro, nous pouvons conclure à la présence de l'hétéroscédasticité.

I-2-2) MODELES ARIMA

Il existe deux catégories de modèles pour rendre compte d'une série temporelle. Les premiers considèrent que les données sont une fonction du temps ($y = f(t)$). Cette catégorie de modèle peut être ajustée par la méthode des moindres carrés, ou d'autres méthodes itératives. L'analyse des modèles par transformée de Fourier est une version sophistiquée de ce type de modèle. Une seconde catégorie de modèles cherche à déterminer chaque valeur de la série en fonction des valeurs qui la précède. C'est le cas des modèles ARIMA ("Cette catégorie de modèles a été popularisée et formalisée par Box et Jenkins (1976). Un modèle ARIMA est étiqueté comme modèle ARIMA (p,d,q), dans lequel: p est le nombre de termes auto-régressifs d est le nombre de différences q est le nombre de moyennes mobiles.

I-2-2-1) DIFFERENCIATION

L'estimation des modèles ARIMA suppose que l'on travaille sur une série stationnaire. Ceci signifie que la moyenne de la série est constante dans le temps, ainsi que la variance. La meilleure méthode pour éliminer toute tendance est de différencier, c'est-à-dire de remplacer la série originale par la série des différences adjacentes. Une série temporelle qui a besoin d'être différenciée pour atteindre la stationnarité est considérée comme une version intégrée d'une série stationnaire (d'où le terme *Integrated*). La correction d'une non-stationnarité en termes de variance peut être réalisée par des transformations de type logarithmique (si la variance croît avec le temps) ou à l'inverse exponentielles. Ces transformations doivent être réalisées avant la différenciation. Une différenciation d'ordre 1 suppose que la différence entre deux valeurs successives de y est constante. $Y_t - Y_{t-1} = \mu + \epsilon_t$ où μ est la constante du modèle, et représente la différence moyenne en Y . Un tel modèle est un ARIMA (0,1,0). Il peut être représenté comme un accroissement linéaire en fonction du temps.

Si μ est égal à 0, la série est stationnaire

I-2-2-2) DETERMINATION DE L'ORDRE DE DIFFERENCIATION

Une série stationnaire fluctue autour d'une valeur moyenne et sa fonction d'autocorrélation décline rapidement vers zéro. Si une série présente des autocorrelations positives pour un grand nombre de décalages (par exemple 10 ou plus), alors elle nécessite d'être différenciée. La différenciation tend à introduire des autocorrelations négatives. Si l'autocorrélation de décalage 1 est égale à 0 ou négative, la série n'a pas besoin d'être différenciée. Si l'autocorrélation de décalage 1 est inférieure à -0.5, la série est surdifférenciée. L'ordre optimal de différenciation est souvent celui pour lequel l'écart-type est minimal. Un accroissement de l'écart-type doit donc être considéré comme un symptôme de surdifférenciation. Un troisième symptôme de sur-différenciation est un changement systématique de signe d'une observation à l'autre.

I-2-2-3) PROCESSUS AUTOREGRESSIFS. AR(P)

Les modèles autorégressifs supposent que Y_t est une fonction linéaire des valeurs précédentes. $Y_t = \mu + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varphi_3 Y_{t-3} + \dots + \varepsilon_t$

Littérairement, chaque observation est constituée d'une composante aléatoire (choc aléatoire, ε) et d'une combinaison linéaire des observations précédentes. φ_1 , φ_2 et φ_3 dans cette équation sont les coefficients d'auto-régression. Un processus autorégressif ne sera stable que si les paramètres sont compris dans un certain intervalle ; par exemple, s'il n'y a qu'un paramètre autorégressif, il doit se trouver dans l'intervalle $-1 < \varphi_1 < +1$. Dans les autres cas, les effets passés s'accumuleraient et les valeurs successives des Y_t se déplaceraient infiniment vers l'avant, ce qui signifie que la série ne serait pas stationnaire. S'il y a plus d'un paramètre autorégressif, des restrictions similaires (générales) sur les valeurs des paramètres peuvent être posées.

2-2-2-3-1) EXEMPLE D'UN PROCESSUS AR(1)

Chaque valeur de la série est la combinaison linéaire des valeurs précédentes. Si la valeur de la série Y_t à l'instant "t" dépend de la valeur précédente et d'une perturbation aléatoire alors le processus est dit autorégressif d'ordre 1 : AR(1) : $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$

Calculer son espérance et sa variance :

$$E(y_t) = E(\phi_1 y_{t-1}) + E(\varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = \phi_1 E(y_{t-1}) + E(\varepsilon_t)$$

$$E(y_t) - \phi_1 E(y_{t-1}) = E(\varepsilon_t)$$

$$E(y_t)[1 - \phi_1] = E(\varepsilon_t)$$

$$E(y_t) = \frac{E(\varepsilon_t)}{1 - \phi_1} \text{ avec } |\phi_1| < 1$$

$$\begin{aligned} V(y_t) &= E(y_t - E(y_t))^2 = E(\phi_1 y_{t-1} \varepsilon_t)^2 \Rightarrow E(y_t)^2 = E[\phi_1^2 y_{t-1}^2 + 2\phi_1 y_{t-1} \varepsilon_t + \varepsilon_t^2] \\ &\Rightarrow E(y_t)^2 = \phi_1^2 E(y_{t-1}^2) - 2\phi_1 E(y_{t-1}) E(\varepsilon_t) + E(\varepsilon_t)^2 \\ &\Rightarrow E(y_t)^2 = \phi_1^2 E(y_t)^2 + \delta_\varepsilon^2 \\ &\Rightarrow E(y_t)^2 = \frac{\delta_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2} \text{ avec } |\phi| < 1 \end{aligned}$$

Une propriété caractéristique des AR(p) est que la PAC d'un AR(p) est nulle au delà de p (pour $h > p$).

2-2-2-3-2) IDENTIFICATION DES TERMES AR

Après que la série ait été stationnarisée, l'étape suivante consiste à identifier les termes AR et MA nécessaires pour corriger les autocorrélations résiduelles. Cette analyse est basée sur l'examen des fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle. Si le correlogramme partiel n'a que ses q premiers retards différents de zéro et que les termes du correlogramme simple diminuent lentement, cela caractérise un AR(P).

2-2-2-3-3) EXEMPLE D'ESTIMATION D'UN PROCESSUS AR(1) SUR EVIEWS

L'identification de la structure d'une série temporelle débute par l'observation de sa stationnarité: on applique des différenciations jusqu'à ce que la fonction d'autocorrélation de la série différenciée ne présente plus que quelques pics significatifs. Dans le cas de la série produit intérieur brut, une seule différenciation la variable devienne stationnaire. Les résultats d'estimations sont donnés dans le tableau suivant

CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉS SUR LES SÉRIES TEMPORELLES

Dependent Variable: D(GDPR)

Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)

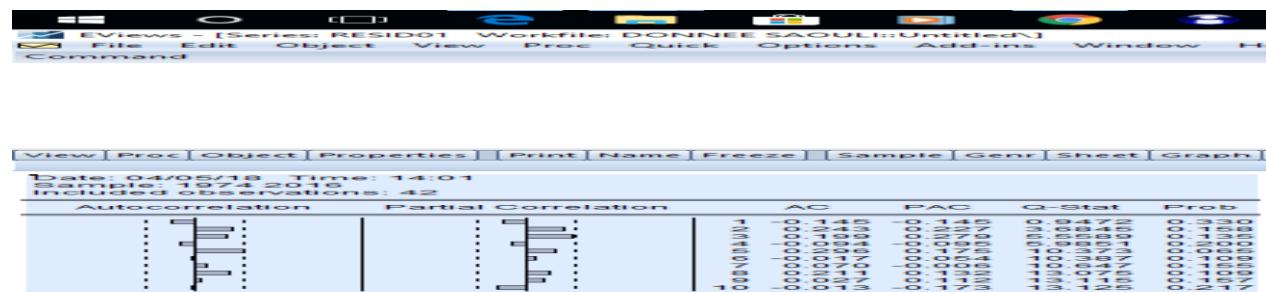
Included observations: 42

Convergence achieved after 24 iterations

Coefficient covariance computed using outer product of gradients

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	450.1410	192.0583	2.343772	0.0243
AR(1)	0.442599	0.100334	4.411246	0.0001
SIGMASQ	339781.2	53183.76	6.388814	0.0000
R-squared	0.395091	Mean dependent var	442.1981	
Adjusted R-squared	0.153813	S.D. dependent var	657.5956	
S.E. of regression	104.9117	Akaike info criterion	15.72198	
Sum squared resid	270808	Schwarz criterion	15.84610	
Log likelihood	-327.1616	Hannan-Quinn criter.	15.76748	
F-statistic	14.726336	Durbin-Watson stat	2.036439	
Prob(F-statistic)	0.014523			

Le coefficient AR(1) est significativement différent de zéro. Les autres statistiques DW, F empirique laissent présager d'un bon ajustement. Il convient maintenant d'analyser les résidus à partir de sa fonction d'autocorrélation.



Aucun terme n'est à l'extérieur aux deux intervalles de confiance et la statistique Qa une probabilité critique supérieure à 0.05. Le résidu peut être assimilé à un processus de bruit blanc. L'estimation du modèle AR(1) est donc validée, la série peut être valablement représentée par un processus de type ARIMA (1, 1, 0) ou AR(1) sur la série différenciée.

I-2-2-4) MOYENNE MOBILE MA(q)

Les modèles à moyenne mobile suggèrent que la série présente des fluctuations autour d'une valeur moyenne. On considère alors que la meilleure estimation est représentée par la moyenne pondérée d'un certain nombre de valeurs antérieures (ce qui est le principe des procédures de moyennes mobiles utilisées pour le lissage des données). Ceci revient en fait à considérer que l'estimation est égale à la moyenne vraie, auquel on ajoute une somme pondérée des erreurs ayant entaché les valeurs précédentes. Un processus MA(1) est défini par l'équation suivante : $X_t = \theta_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + V_t$

D'une manière générale un processus MA d'ordre q s'écrit comme suit :

$$X_t = \theta_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + V_t$$

Littérairement, chaque observation est composée d'une composante d'erreur aléatoire (choc aléatoire, ε) et d'une combinaison linéaire des erreurs aléatoires passées. θ_1, θ_2 et $\theta_3, \dots, \theta_q$ sont les coefficients de moyenne mobile du modèle. Comme précédemment cette équation porte soit sur les données brutes, soit sur les données différencierées si une différenciation a été nécessaire. Pour un modèle ARIMA (0,1,1) on aura : $Y_t - Y_{t-1} = \mu - \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
Ce qui peut également être écrit: $Y_t = \mu + Y_{t-1} - \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉS SUR LES SÉRIES TEMPORELLES

L'autocovariance d'un processus MA(q) est nulle pour $|h| \geq q + 1$ et cette propriété est caractéristique d'un MA(q).

I-2-2-4-1) IDENTIFICATION DES TERMES MA

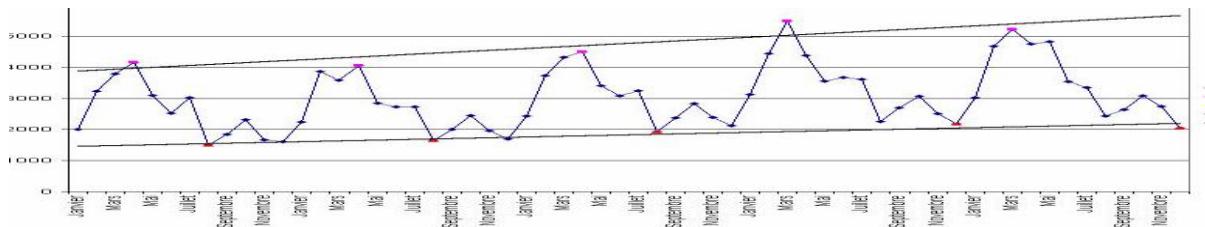
La fonction d'autocorrélation joue pour les processus de moyenne mobile le même rôle que la fonction d'autocorrélation partielle pour les processus autorégressifs. Si l'autocorrélation simple n'a que ses « q » premiers retards différents de 0 et que les termes du correlogramme partiel diminuent lentement, nous pouvons pronostiquer un MA(q).

I-2-2-4-2) EXEMPLE D'ESTIMATION D'UN MODELE MA(1) SUR EVIEW

Soit la série mensuelle du chiffre d'affaires d'une entreprise fictive observée de janvier 2007 jusqu'à décembre 2011 :

Année	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
2007	2006	3224	3789	4153	3100	2527	3015	1504	1847	2314	1673	1602
2007	2247	3862	3586	4047	2838	2727	2730	1648	2007	2450	1966	1695
2008	2433	3723	4325	4493	3399	3083	3247	1928	2377	2831	2388	2126
2009	3127	4437	5478	4384	3552	3678	3611	2260	2699	3071	2510	2182
2011	3016	4671	4218	4746	4814	3545	3341	2439	2637	3085	2737	2055

La représentation graphique de la série du chiffre d'affaires est donnée dans la figure suivante :



La représentation graphique de la série des ventes est fortement saisonnière, cette saisonnalité est liée principalement aux mois d'Avril et Aout de chaque année. Après avoir désaisonnalisé la série à l'aide des coefficients saisonniers calculés (**Instruction Eviews CA.SEAS(M) CACVS CS**). Nous procédons à l'estimation du modèle MA(1) dont les résultats sont donnés dans le tableau suivant

Dependent Variable: CACVS Method: Least Squares				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistique	Prob.
C	3029.379	161.0650	18.80842	0.0000
MA(1)	0.722975	0.091548	7.897191	0.0000
R-squared	0.455822	Mean dependent var	3036.717	
Adjusted R-squared	0.446439	S.D. dependent var	975.7776	
S.E. of regression	725.9947	Akaike info criterion	16.04573	
Sum squared resid	30569961	Schwarz criterion	16.11554	
Log likelihood	-479.3718	Hannan-Quinn criter.	16.07303	
F-statistic	48.58272	Durbin-Watson stat	1.551066	

CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉS SUR LES SÉRIES TEMPORELLES

Le coefficient MA(1) : le coefficient moyenne mobile d'ordre 1 est significativement différent de zéro dans la mesure où le t de Student **7.89** est supérieur à la valeur critique 1.96 au seuil statistique de 5%

I-2-2-5) MODELES ARMA (p,q)

Ces processus constituent une extension des processus AR et MA. Ce sont en fait des processus mixtes dans le sens où ils introduisent simultanément des composantes AR et MA sous la forme fonctionnelle. Le modèle ARMA (p,q) s'écrit de la manière suivante :

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + V_t$$

$$\text{ARMA}(1,1) : X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + V_t$$

$$\text{ARMA}(0,2) : X_t = \theta_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + V_t$$

$$\text{ARMA}(1,0) : X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

Le processus est stationnaire si et seulement si P n'a pas de racine (complexe) de module supérieur à 1

I-2-2-5-1) EXEMPLE D'ESTIMATION D'UN MODELE ARMA (1) SUR EVIEWS

Dependent Variable: Chiffre d'affaires corrigés des variations saisonnières				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistique	Prob.
C	3047.982	244.1212	12.48552	0.0000
AR(1)	0.472687	0.151873	3.112381	0.0029
MA(1)	0.443239	0.155382	2.852582	0.0061
R-squared	0.519738	Mean dependent var	3054.186	
Adjusted R-squared	0.502586	S.D. dependent var	974.6440	
S.E. of regression	687.3929	Akaike info criterion	15.95320	
Sum squared resid	26460503	Schwarz criterion	16.05884	
Log likelihood	-467.6193	Hannan-Quinn criter.	15.99443	
F-statistic	30.30153	Durbin-Watson stat	1.953774	

Les statistiques de Student associées aux coefficients autorégressifs et moyens mobile étant supérieures en valeur absolue. Les coefficients sont d'un point de vue statistique significatif.

I-2-2-6) EVALUATION DES MODELES

L'objectif de la modélisation est de déterminer combien de paramètres autorégressifs (p) et de moyennes mobiles (q) sont nécessaires pour obtenir un modèle effectif et parcimonieux du processus (parcimonieux signifie qu'il s'agit, parmi tous les modèles possibles, du modèle possédant le moins de paramètres et le plus grand nombre de degrés de liberté pour ajuster les données). En pratique, le nombre de paramètres p ou q dépasse très rarement 3.

L'estimation produit les valeurs approchées de t de Student, calculées à partir des erreurs-types des paramètres. Si cette valeur de t n'est pas significative, le paramètre respectif peut être éliminé du modèle, sans affecter dans la plupart des cas l'ajustement global du modèle. Un autre indicateur simple et courant pour mesurer la fiabilité du modèle est de comparer la précision des estimations basées sur des données partielles, afin que les prévisions puissent être comparées avec les dernières observations connues de la série (initiale). Toutefois, un bon modèle ne doit pas seulement produire des prévisions suffisamment précises, il doit également être parcimonieux et produire des résidus

statistiquement indépendants, ne contenant que du bruit, sans aucune composante régulière (par exemple, le correlogramme des résidus ne doit pas révéler d'autocorrélations). Un bon test du modèle consiste (a) à tracer les résidus et à les examiner pour voir s'il existe des tendances systématiques, et (b) à étudier correlogramme des résidus (il ne doit pas y avoir d'autocorrélations entre les résidus). Ce que l'on cherche à savoir ici, c'est si les résidus ne sont pas distribués de façon systématique dans la série (par exemple, systématiquement négatifs dans une première partie de la série puis proches de zéro dans une seconde) ou s'ils ne sont pas autocorrélés ce qui tendrait à montrer que le modèle ARIMA est inadéquat. L'analyse des résidus de l'ARIMA constitue un test important du modèle. La procédure d'estimation postule que les résidus ne sont pas autocorrélés et qu'ils sont distribués normalement. La méthode ARIMA n'est appropriée que lorsque la série chronologique est stationnaire (c'est-à-dire que les moyennes, variances, et autocorrélations doivent être sensiblement constantes au cours du temps). Il est également recommandé d'avoir au moins 50 observations dans le fichier de données. Les paramètres estimés sont considérés constants dans toute la série.

I-2-2-7) EXERCICE DE PROGRAMMATION SUR EVIEWS

Cet exercice a pour objectif de générer des processus et d'en étudier les caractéristiques à travers des différents tests abordés.

On demande : de générer sur 200 observations de des processus et d'en étudier les correlogrammes. Les processus sont les suivants :

- 1) MA(1) : $X_t = 2 + 0.8\epsilon_{t-1}$ et
- 2) ARMA(1,1) : $X_t = 2 + 0.9X_{t-1} + 0.8\epsilon_{t-1}$

SOLUTION

Le programme Eviews permettant de générer les processus suivant

CREATE U 200

GENR EPS= NRND

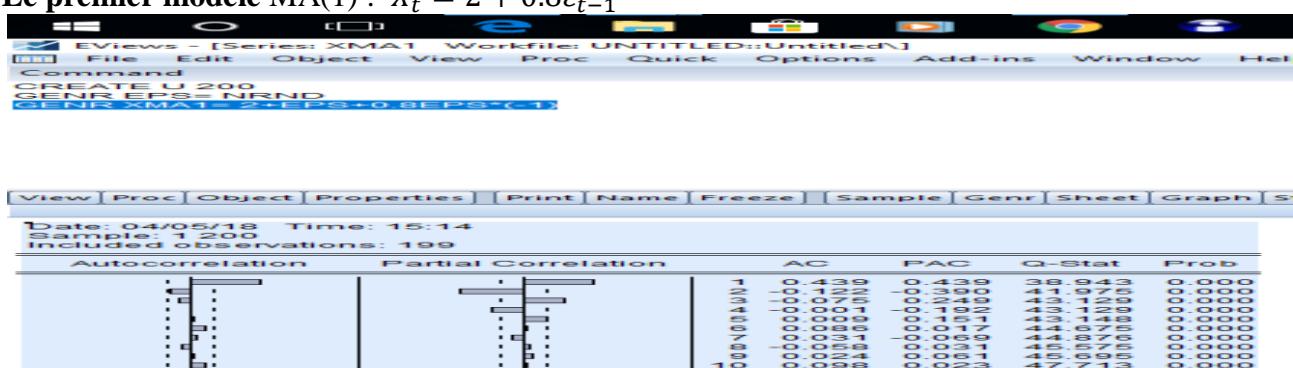
GENR XMA1= 2+EPS+0.8EPS*(-1)

GENR XARMA=0

XARMA=2+0.9*XARMA (-1)+EPS+ 0.8*EPS(-1)

✓ ANALYSE DES CORRELOGRAMMES

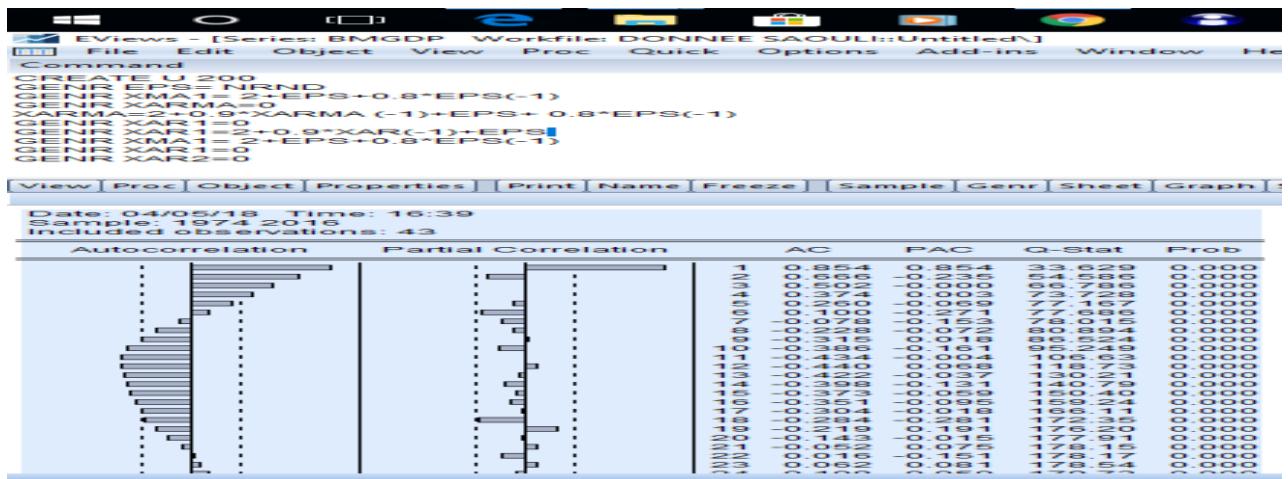
Le premier modèle MA(1) : $X_t = 2 + 0.8\epsilon_{t-1}$



Seul le premier terme du correlogramme simple est significativement différent de zéro, alors que les termes du correlogramme partiel connaissent une décroissance de manière alternée. Nous retrouvons bien un processus MA(1)

Le deuxième modèle ARMA(1,1) : $X_t = 2 + 0.9X_{t-1} + 0.8\epsilon_{t-1}$

CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉS SUR LES SÉRIES TEMPORELLES



I-2-2-8) SIGNIFICATION DES PARAMETRES DES MODELES ARIMA

L'objectif essentiel des modèles ARIMA est de permettre une prédition de l'évolution future d'un phénomène. Son développement dans le domaine de l'économétrie est basé sur ce principe. Un autre intérêt, peut-être plus essentiel en ce qui concerne la recherche scientifique, est de comprendre la signification théorique de ces différents processus. Il est clair cependant que cette interprétation dépend de la nature du phénomène étudié, et des modèles dont le chercheur dispose pour en rendre compte.

- Un processus non différencié à bruit blanc (ARIMA (0,0,0)) suggère des fluctuations aléatoires autour d'une valeur de référence. Cette valeur de référence peut être considérée comme une caractéristique stable du système - Un processus de moyenne mobile suggère que la valeur de référence évolue d'une mesure à l'autre. Plus précisément, la valeur de référence est fonction de la valeur de référence précédente et de l'erreur ayant entaché la mesure précédente.
- Un processus autorégressif suggère que le phénomène étudié n'est pas déterminé par une valeur de référence. C'est la performance précédente (ou les performances précédentes) qui déterminent entièrement la performance présente.

La prévision de séries temporelles consiste à prévoir les valeurs futures d'une série temporelle en utilisant les valeurs passées qu'on a à notre disposition. On parlera de prévision à court terme lorsque l'horizon de prévision H vaut 1. En d'autres termes, on désire prévoir la prochaine observation de la série temporelle. Par contre, si plusieurs observations futures sont requises ($H > 1$), on parlera de prévision à long terme. Contrairement à la prévision à court terme, les problèmes de prévision à long terme doivent faire face à l'accroissement de l'incertitude avec l'horizon de prévision, provenant, par exemple, de l'accumulation des erreurs ainsi que du manque d'information [1].

La méthodologie de Box & Jenkins vise à formuler un modèle permettant de représenter une chronique avec comme finalité de prévoir des valeurs futures. De ce fait, l'objet de cette méthodologie est de modéliser une série temporelle en fonction de ses valeurs passées et présentes afin de déterminer le processus ARIMA adéquat par principe de parcimonie. Cette méthodologie suggère une procédure à quatre étapes : Identification du modèle, Estimation du modèle, Validation du modèle (Test de diagnostique) et prévision

II-1) ETAPE D'IDENTIFICATION DU MODELE

Dans cette première étape, l'objet est de déterminer à partir de l'observation des fonctions d'autocorrélation simple et partielle dans la famille des modèles de types ARIMA (p, d, q) le modèle adéquat. Les tests informels consistent à l'analyse des moments et des plots afin de détecter la stationnarité ; mais ce ne sont que des tests de présomption de stationnarité. Puis une vérification de ces intuitions (tests informels) est faite par l'application des tests formels notamment le test de racine unitaire de Dickey Fuller. A l'issu de cette étape d'identification, on a sélectionné un ou plusieurs modèles. Il convient à présent d'estimer chaque modèle sélectionné, ce qui constitue l'objet de la deuxième étape de la procédure de Box-Jenkins

II-2) ETAPE D'ESTIMATION DU MODELE

Après avoir identifié les valeurs des paramètres "p" et "q" de plusieurs processus, l'étape suivante consiste à estimer les coefficients associés au terme autorégressif et moyenne mobile dans certains cas notamment dans le cas d'un processus AR(P), il est possible d'appliquer les MCO d'une façon générale on utilise la méthode de Max de vraisemblance ou MCO.

II-3) ETAPE DE VALIDATION DU MODELE

La validation du modèle se réfère à divers tests statistiques de spécification pour vérifier si le modèle est adéquat c'est-à-dire qu'il ne peut être mis à défaut. Ces tests statistiques consistent à tester que les résidus du modèle estimé ne sont pas autocorrélés et ne présentent pas d'hétérosécédasticité.

Il existe aussi plusieurs types de critères pouvant être utilisé afin de comparer entre les modèles :

- **Les critères d'informations** : les critères les plus utilisés sont :
 - Critère d'AKAIKE (1969) : $AIC = \log \hat{\sigma}_\varepsilon^2 + \frac{2(p+q)}{T}$
 - Critère d'information de Schwartz : $SC = \log(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + (p + q) * \frac{\log T}{T}$
- Plus la valeur prise par les statistiques de AIC et SC est faible plus le modèle est proche de la réalité.
- **Les critères standards** : Les critères standards sont fondés sur le calcul d'une erreur de prévision que l'on cherche à minimiser. Dans ce cadre les critères les plus utilisés sont :
 - L'erreur absolue moyenne
MEAN ABSOLUTE ERROR : $MAE = \frac{1}{T} \sum e_t$

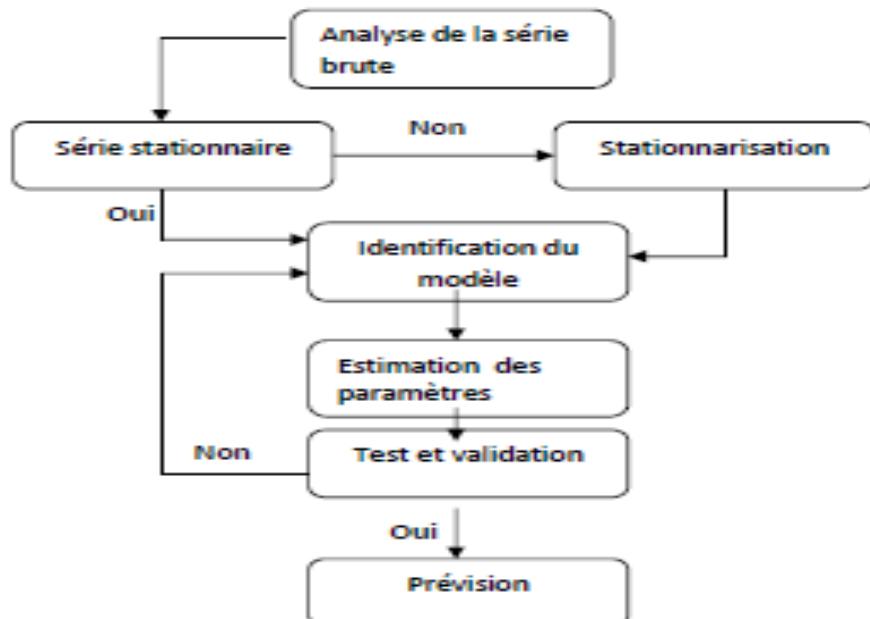
- La racine de l'erreur quadratique moyenne
- * MEAN ABSOLUTE PERCENT ERROR: $MAPE = 100 * \frac{1}{T} \sum \left| \frac{e_t}{X_t} \right|$
- Avec T le nombre d'observations et e_t les résidus de l'estimation.
On retient le modèle qui minimise les différents critères.

II-4) ETAPE DE LA PREVISION

La dernière étape de la méthodologie de Box-Jenkins est celle de la prévision. Considérons un processus ARMA (p,q), on note : \hat{y}_{t+h} la prévision faite en "t" pour la date t+h. Par définition la prévision pour un horizon h est donnée : $\hat{y}_{t+h} = E(y_{t+h}/I_t)$ avec I_t : l'information disponible à la date "t". L'espérance conditionnelle représente la meilleure prévision de la série y conditionnellement à l'information disponible à la date t. Dans le cas linéaire, il s'agit d'une fonction de régression. La prévision dans le cas d'un processus ARMA(1,1) est donnée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + V_t \quad |\phi_1| < 1 \\ \hat{X}_{t+1} &= \phi_0 + \phi_1 \hat{X}_t + \theta_1 \varepsilon_t = \alpha \\ \hat{X}_{t+2} &= \phi_0 + \phi_1 \hat{X}_{t+1} + \theta_1 \varepsilon_{t+1} \\ \hat{X}_{t+h} &= \phi_0 + \phi_1 \hat{X}_{t+h-1} + \theta_1 \varepsilon_{t+h-1} \end{aligned}$$

Nous pouvons résumer les différentes étapes de la méthodologie de Box-Jenkins à partir du schéma suivant :



II-5) LES MODELES DES SERIES TEMPORELLES NON STATIONNAIRE ET TESTS DE RACINE UNITAIRE

Dans la section précédente nous avons vu que la première étape de l'analyse d'une série temporelle consiste à vérifier la stationnarité du processus générateur des données. Dans cette section, nous allons étudier d'une façon plus précise ce qui est un processus non stationnaire, la non stationnarité qui le caractérise et la méthode de stationnarisation pour chaque type de processus.

II-5-1) PROCESSUS TS (TREND-STATIONNAIRE)

Ce type de processus s'écrit comme la somme d'une fonction déterministe de temps et d'une composante stochastique stationnaire d'espérance mathématique nulle. Un processus de ce type devient stationnaire par écart à une composante déterministe qu'est dans ce cas une fonction linéaire de temps. Formellement, un processus stationnaire X_t est dit TS et s'écrit : $X_t \sim ST$ s'il peut s'écrire sous la forme : $X_t = f(t) + \varepsilon_t$

f : est une fonction de temps et ε_t est un processus stochastique stationnaire. Il est évident que ce processus ne satisfait pas la définition de la stationnarité puisque son espérance dépend du temps. L'exemple le plus simple d'un processus TS est celui d'une tendance linéaire perturbée par un BB : $X_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$ où α et β sont deux paramètres fixes et ε_t est un BB. Dans ce cas le processus X_t est non stationnaire puisque son espérance dépend du temps. En revanche, le processus y_t défini par l'écart entre X_t et la composante déterministe et stationnaire : $y_t = (X_t - \alpha - \beta t) \Rightarrow y_t = \varepsilon_t$

Lorsqu'un processus TS est affecté par un choc aléatoire, l'effet de ce choc tend à disparaître lorsque le temps passe, c'est la propriété de la non persistance des chocs. La non stationnarité qui caractérise le processus TS est de nature déterministe ou aléatoire.

II-5-2) PROCESSUS DS (DIFFERENCE STATIONNARY)

C'est un processus dont la non stationnarité est au tour d'une tendance stochastique. Tandis que le processus X_t est caractérisé par une non stationnarité de nature aléatoire, on dit aussi que le processus admet des racines unitaires. Pour le rendre stationnaire on applique l'opération de différentiation à un ordre "d". Formellement, le processus DS s'écrit de la manière suivante :

$$X_t = \beta + X_{t-1} + \varepsilon_t \Rightarrow X_t - X_{t-1} = \beta + \varepsilon_t \Rightarrow \Delta X_t = \beta + \varepsilon_t \quad \text{Il est stationnaire}$$

L'introduction de la constante β permet de définir 2 processus différents :

- $\beta = 0$: le processus DS est sans dérive (marche au hasard). Il s'écrit

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$

Comme ε_t est un BB, ce processus DS porte le nom de marche au hasard (RANDOM-WALK-MODEL). Il est très utilisé dans la modélisation des marchés financiers.

- $\beta \neq 0$: le processus porte le nom de processus DS avec dérive. Il s'écrit :

$$\bullet \quad X_t = \beta + X_{t-1}$$

La variance d'un processus DS dépend du temps. Un processus DS est caractérisé par une non stationnarité de nature aléatoire.

II-5-3) TEST DE DICKY-FULLER (TEST DE NON STATIONNARITE)

Le test de DICKY-FULLER permet de mettre en évidence le caractère stationnaire ou non stationnaire d'une chronique par la détermination d'une tendance déterministe ou stochastique. Les modèles de base de la construction de ces tests sont du nombre de trois. Le principe de ce test est simple :

Si l'hypothèse $H_0: \phi = 1$ est retenue dans l'un des trois modèles le processus est alors non stationnaire.

$$M[1]: X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$M[2]: X_t = C + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$M[3]: X_t = C + \beta t + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$M[1]$: est un modèle autorégressif d'ordre 1.

$M[2]$: est un modèle autorégressif d'ordre 1 avec constante.

$M[3]$: est un modèle autorégressif d'ordre 1 avec constante et trend.

Si H_0 est vérifiée la série X_t n'est pas stationnaire quel que soit le modèle retenu.

Dans le modèle [3] si on accepte l'hypothèse $H_0: \phi < 1$ et le coefficient β est significativement différent de zéro alors le processus est un TS on peut le rendre stationnaire en calculant les résidus par rapport à la tendance estimé par les moindres carrés ordinaires (MCO).

Sous H_0 les règles habituelles de l'inférence statistique ne peuvent être appliquées pour tester cette hypothèse et en particulier la distribution de Student de paramètre ϕ : DECKY et FULLER ont donc étudié la distribution de l'estimateur $\hat{\phi}$ sous l'hypothèse H_0 à l'aide des simulations de Monté Carlo. Ils ont tabulé des valeurs critiques pour des enchantons de tailles différentes. Le principe général du test est le suivant :

On estime par les moindres carrés ordinaires (MCO) le paramètre ϕ , noté $\hat{\phi}$, pour les modèles [1], [2] et [3] ;

L'estimation des coefficients et des écarts types du modèle fourni ;

La statistique de Dicky-Fuller, notée : $t_{\hat{\phi}} = \frac{\hat{\phi}}{\sigma_{\hat{\phi}}}$

Si l'hypothèse H_0 est acceptée. Il existe alors une racine unitaire. Le processus n'est donc pas stationnaire.

II-5-4) Test de DICKY-FULLER AUGMENTE (ADF)

Dans les modèles précédents utilisés pour les tests de DECKY-FULLER simple le processus ε_t est par hypothèse un BB. Or, il n'y a aucune raison pour que l'erreur soit non corrélée. On appelle test ADF la prise en compte de cette hypothèse. Les tests ADF sont fondés par l'estimation par les MCO des trois modèles :

$$M[4]: X_t = \rho X_{t-1} + \sum_{j=2}^P \phi_j \Delta X_{t-j+1} + \varepsilon_t$$

$$M[5]: X_t = \rho X_{t-1} + \sum_{j=2}^P \phi_j \Delta X_{t-j+1} + C + \varepsilon_t$$

$$M[6]: X_t = \rho X_{t-1} + \sum_{j=2}^P \phi_j \Delta X_{t-j+1} + C + \beta t + \varepsilon_t$$

Le test se déroule de manière similaire au test de Dichy-Fuller simple seules les tables statistiques diffèrentes. La valeur de ρ peut être déterminée selon les critères AKAIKE (AIC) et SCHWARTZ.

II-5-5) EXEMPLE D'APPLICATION D'UN MODELE ARIMA POUR UNE SERIE SIMPLE, AVEC COMPOSANTE SAISONNIERE

Société anonyme est spécialisée dans la fabrication et la commercialisation des produits laitiers. Les ventes de ces produits ne sont pas régulières tout au long de l'année et le directeur commercial souhaite étudier la structure des ventes à la lumière des statistiques disponibles (du premier trimestre l'année 2013 au 2^{ième} trimestre de l'année 2017) données dans le tableau ci-après afin d'établir une prévision pour l'exercice 2014 :

	T1	T2	T3	T4
2013	102	100	104	108
2014	110	106	113	115
2015	117	115	120	122
2016	128	123	127	131
2017	134	130		

Les coefficients saisonniers corrigés sont donnés dans le tableau suivant

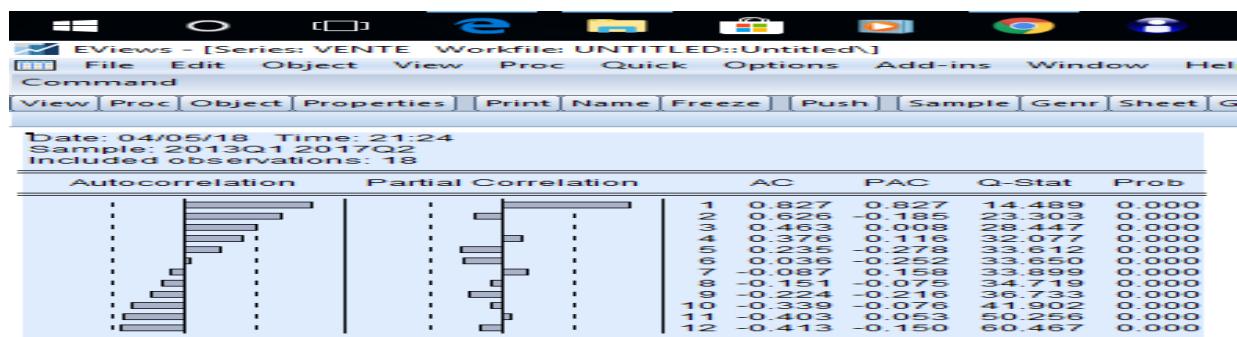
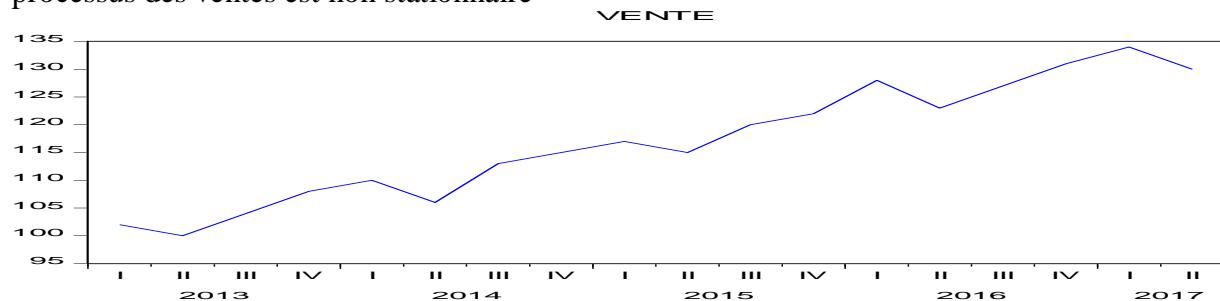
	S1*	S2*	S3*	S4*
Sj	-0.051653	0.970412	2.154816	?

On se propose d'analyser la série des ventes selon l'approche de Box Jenkins.

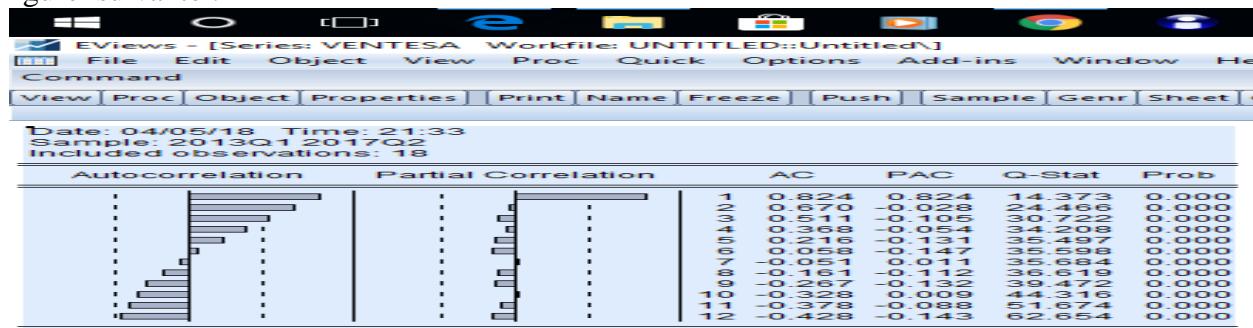
SOLUTION

1) ANALYSE DU PROCESSUS DES VENTES

Le graphe suivant présente l'évolution des ventes et son correlogramme, à leur lecture le processus des ventes est non stationnaire



Après avoir désaisonnalisé la série à l'aide des coefficients saisonniers calculés (**Instruction Eviews VENTE.SEAS(Q) CACVS CS**). Le correlogramme simple de la série corrigée des variations saisonnières est typique d'une série affectée d'une tendance comme le montre la figure suivante :



Nous procédons à l'estimation des trois modèles à l'aide de la procédure des tests de Dickey-Fuller. Nous utilisant les tests de DFA pour un décalage de 1. Les résultats sont donnés comme suit :

Estimation du modèle [3]

Null Hypothesis: VENTESA has a unit root			
Exogenous: Constant, Linear Trend			
Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=3)			
		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-4.708779	0.0093
Test critical values:	1% level	-4.667883	
	5% level	-3.733200	
	10% level	-3.310349	
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic
VENTESA(-1)	-1.895577	0.402562	-4.708779
D(VENTESA(-1))	0.455608	0.243249	1.873010
C	187.5041	39.23245	4.779312
@TREND("2013Q1")	1.722172	0.790525	2.178479
			0.0005

Nous acceptons l'hypothèse de la racine unitaire, nous ne pouvons donc interpréter les probabilités critiques calculées directement selon la loi de Student. Nous devons référer à la table statistique de Dickey-Fuller pour le modèle [3] (2.79) au seuil de 5%. Selon la stratégie séquentielle de test nous estimons le modèle [2].

Estimation du modèle [2]

Null Hypothesis: VENTESA has a unit root			
Exogenous: Constant			
		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-0.148890	0.9264
Test critical values:	1% level	-3.959148	
	5% level	-3.081002	
	10% level	-2.681330	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.			
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic
VENTESA(-1)	-0.004101	0.027543	-0.148890
D(VENTESA(-1))	-0.817953	0.209968	-3.895611
D(VENTESA(-2))	-0.691453	0.197892	-3.494084
C	5.378355	3.252141	1.653789
			0.1264

Nous acceptons l'hypothèse de la racine unitaire, nous ne pouvons pas interpréter les probabilités critiques calculées directement selon la loi de Student : $1.65 < 2.84$ (valeur lue à 5%, modèle [2]). Nous acceptons l'hypothèse que le terme constant est nulle ($c=0$). Selon la procédure nous estimons le modèle [1]. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Null Hypothesis: VENTESA has a unit root	t-Statistic	Prob.*
Exogenous: None		
Augmented Dickey-Fuller test statistic	6.125965	1.0000
Test critical values:		
1% level	-2.728252	
5% level	-1.966270	
10% level	-1.605026	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Warning: Probabilities and critical values calculated for 20 observations
and may not be accurate for a sample size of 15

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

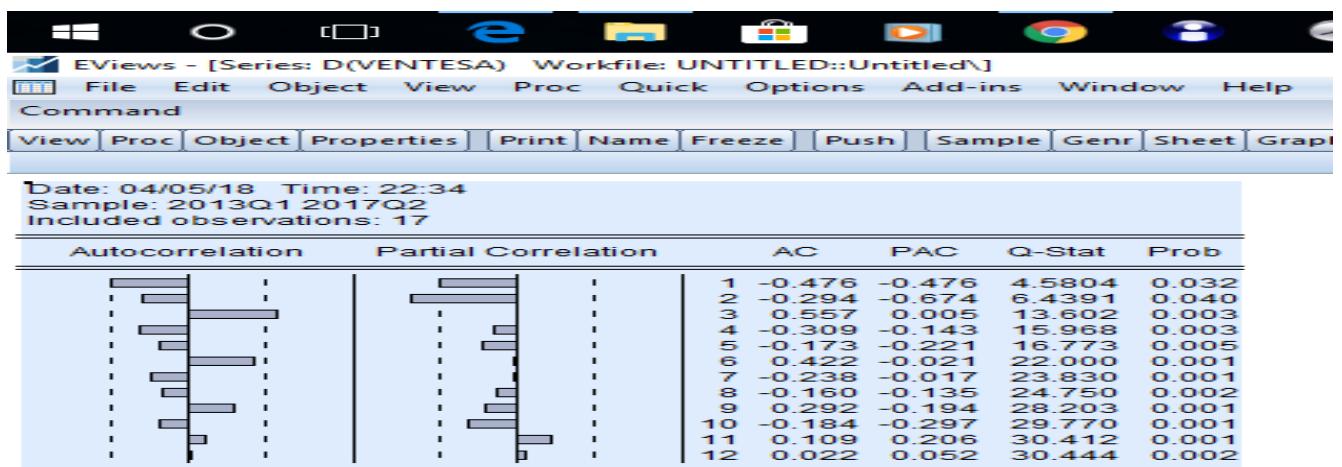
Dependent Variable: D(VENTESA)

Method: Least Squares

Sample (adjusted): 2013Q4 2017Q2

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
VENTESA(-1)	0.040300	0.006578	6.125965	0.0001
D(VENTESA(-1))	-0.807340	0.224530	-3.595691	0.0037
D(VENTESA(-2))	-0.645826	0.209648	-3.080524	0.0095

La probabilité associée à la statistique de DF est supérieure à 0.05. Nous ne rejetons pas l'hypothèse de la racine unitaire. La série des ventes est non stationnaire et le processus générateur des données est un DS sans dérive ou bien une marche au hasard. La meilleure méthode de stationnarisation est le passage aux filtres des différences premières. Nous allons calculer le correlogramme de la série filtrée par les différences premières ceci afin de stationnarisier le processus. La figure suivante représente le correlogramme de la série différenciée.



Les probabilités critiques de Qstat sont largement inférieures à 0.05, le processus est à mémoire, il existe donc une représentation dans la classe des modèles ARMA.

2) LA RECHERCHE DES ORDRES P ET q DE LA REPRESENTATION ARMA

Compte tenu de la forme des correlogrammes simple et partiel nous sélectionnons un modèle ARMA (2, 0) ou AR(2). Nous constatons que le terme constant est significativement différent de 0, et d'autres représentations concurrentes (AR(1)) indiquent des valeurs des critères d'informations (AIC et SC) supérieures au modèle retenu. L'estimation du modèle retenu est donnée dans le tableau suivant :

Dependent Variable: D(VENTESA)

Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)

Date: 04/05/18 Time: 22:43

Sample: 2013Q2 2017Q2

Included observations: 17

Convergence achieved after 30 iterations

Coefficient covariance computed using outer product of gradients

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.953702	0.102254	19.10643	0.0000
AR(1)	-0.835169	0.324519	-2.573560	0.0231
AR(2)	-0.689601	0.196292	-3.513143	0.0038
SIGMASQ	0.595910	0.294936	2.020475	0.0644
R-squared	0.642544	Mean dependent var	1.975490	
Adjusted R-squared	0.560054	S.D. dependent var	1.330894	
S.E. of regression	0.882761	Akaike info criterion	2.883210	
Sum squared resid	10.13047	Schwarz criterion	3.079260	
Log likelihood	-20.50728	Hannan-Quinn criter.	2.902698	
F-statistic	7.789372	Durbin-Watson stat	2.034652	
Prob(F-statistic)	0.003148			

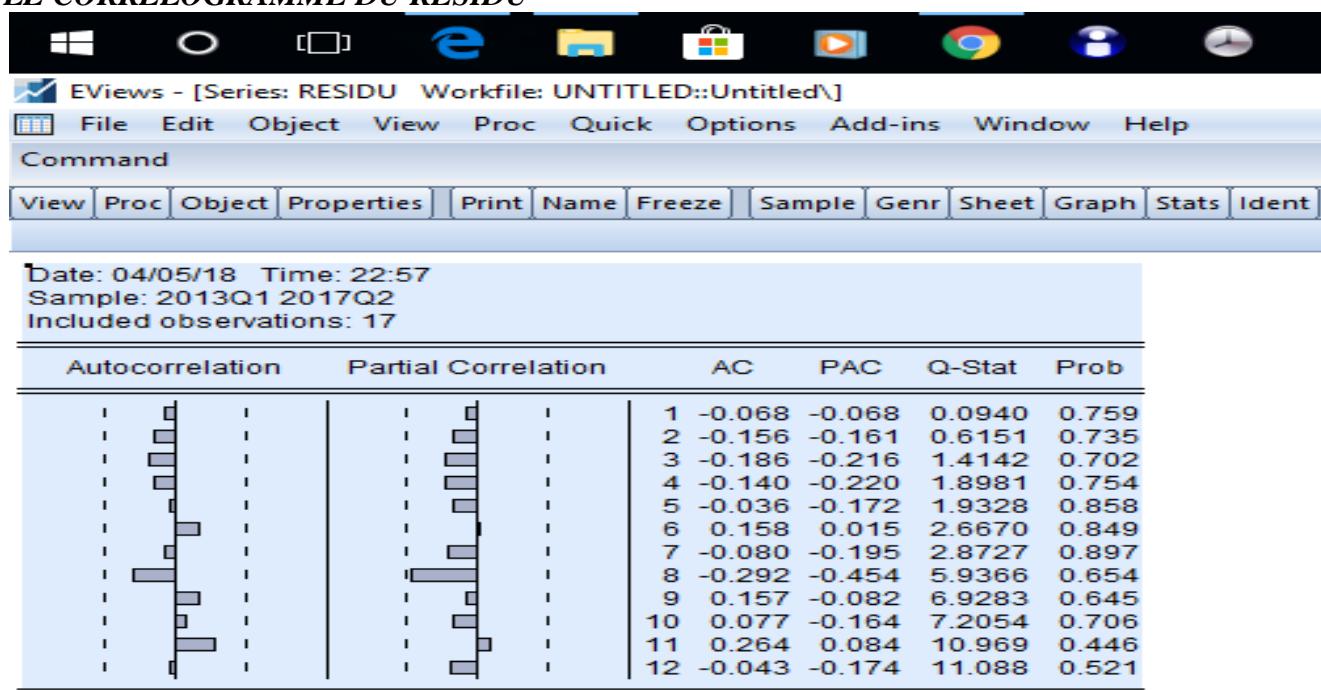
3) VALIDATION DE LA REPRESENTATION

a) TEST DE STUDENT SUR LES COEFFICIENTS

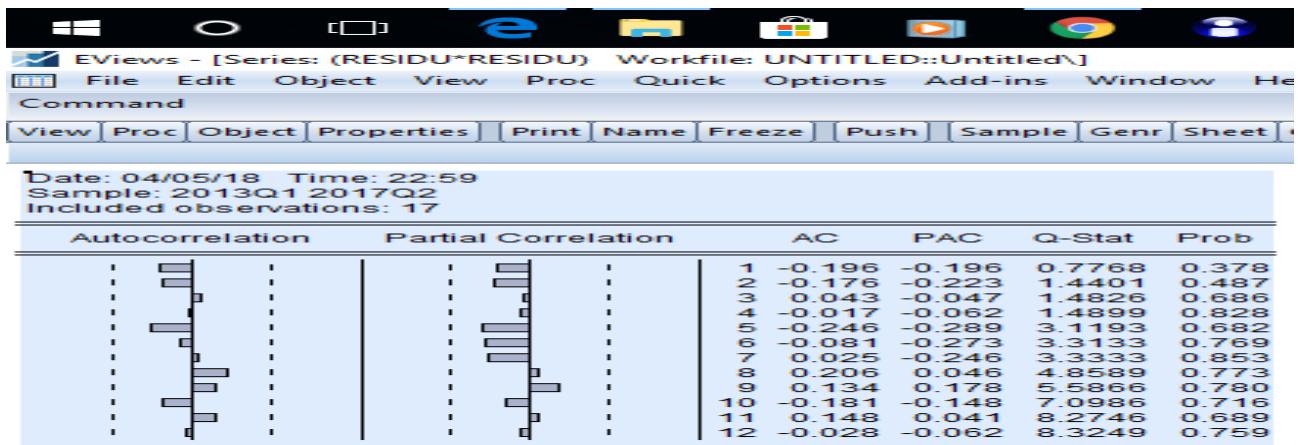
Les coefficients sont tous significativement différents de zéro, les statistiques de Student associées sont largement supérieures aux valeurs critiques au seuil de 5% (1.96)

b) ANALYSE DES RESIDUS

LE CORRELOGRAMME DU RESIDU

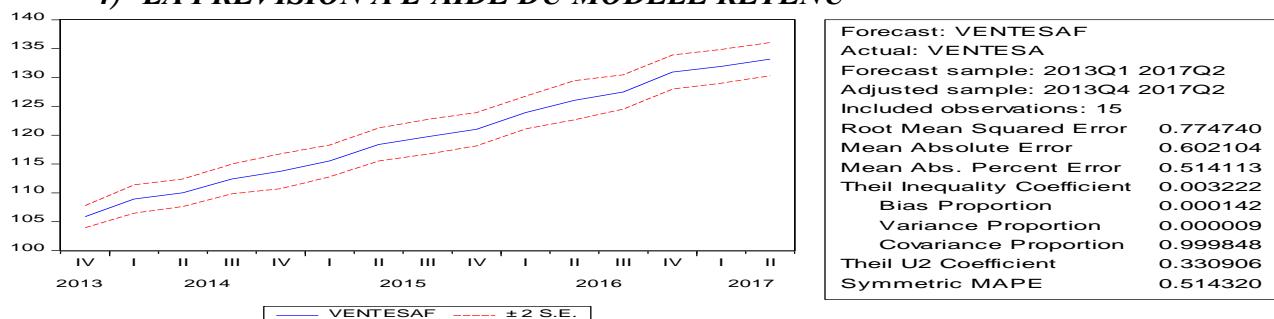


Le correlogramme du résidu au carré

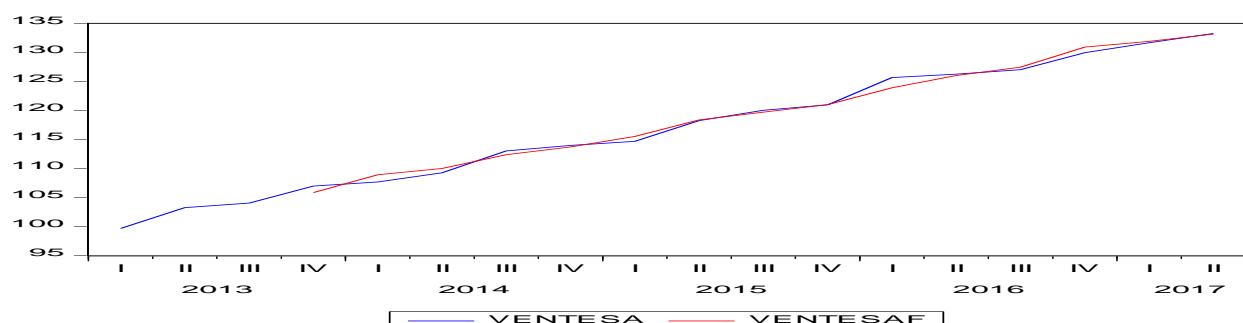


Le correlogramme du résidu indique qu'il s'agit d'un processus sans mémoire, le correlogramme du résidu au carré (test ARCH) n'indique aucun terme significativement différent de zéro ; l'homoscédasticité des résidus est donc vérifiée. Les résidus sont donc un processus de bruit blanc. La représentation est validée, la série des ventes corrigée des variations saisonnières est un processus ARIMA (2, 1, 0).

4) LA PREVISION A L'AIDE DU MODELE RETENU



Après avoir réalisé cette projection dans l'échantillon (variable ventesaf), il nous faut vérifier que le coefficient d'inégalité de Theil tend vers 0 pour avoir une bonne projection. Ce qui est démontré ici parce que le coefficient d'inégalité de Theil donne une valeur de 0.0032. Une faible variance de proportion (dans notre cas 0.000009), présume que la valeur prédite dans l'échantillon ventesaf (fitted value) suivra la variable désaisonnalisée comme le montre le graphe suivant :



II-6) LES MODELES ARCH (AUTO-REGRESSIVE CONDITIONAL HETEROSKEDASTICITY)

Dans le but de palier aux insuffisance des représentations ARMA(p, q) pour les problèmes monétaires et financiers, Engle propose une nouvelle classe de modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscléastiques (ARCH) apte à capter le comportement de la volatilité dans le temps. Le modèle est formé de deux équations. La première met en relation le rendement et certaines variables qui l'expliquent et la seconde modélise la variance conditionnelle des résidus. Le principe proposé par Engle consiste à introduire une dynamique dans la détermination de la volatilité en supposant que la variance est conditionnelle aux informations dont nous disposons. Il avance une spécification ARCH(p) sur le carré des innovations, c'est-à-dire la variance du terme d'erreur au temps t, dépend de l'importance des termes d'erreur au carré des p périodes passées. Le modèle ARCH(p) permet de générer des épisodes de volatilité importante suivis d'épisodes de volatilité plus faibles.

II-6-1) LE CONCEPT DE VOLATILITÉ

Dans le modèle AR(1) de base $Y_t = \delta + \phi Y_{t-1} + e_t$ où $e_t \sim N(0, \sigma^2)$, on a supposé que σ^2 était constant. Il s'agit d'une approche un peu restrictive. En finance et en ingénierie financière, σ (l'écart-type), est une variable centrale qui correspond au concept de volatilité. Règle générale, σ est supposé constant, ce qui n'est pas toujours satisfaisant. L'expérience a montré que la volatilité peut fluctuer de façon importante. Voir graphique joint. En pratique, on estime σ sur des courtes périodes, ce qui permet d'incorporer indirectement une forme de changement. Dans ce qui suit, nous allons voir, suite aux travaux de Engle (1982), comment modifier le modèle AR(1) pour tenir compte d'une volatilité qui change à travers le temps selon une approche bien définie.

Considérons un processus AR(1)

Soit $Y_t = \delta + \phi Y_{t-1} + e_t$ où $e_t \sim N(0, \sigma^2)$

$E(Y_t) = \mu = \delta/(1-\phi)$ et $Var(Y_t) = \sigma^2/(1-\phi^2)$. Si on suppose Y_{t-1} connu :

$$E[Y_t | Y_{t-1}] = \delta + \phi Y_{t-1}$$

La moyenne conditionnelle dépend de l'information disponible au temps t-1 et n'est pas nécessairement constante. Par contre, la variance conditionnelle

$$Var[Y_t | Y_{t-1}] = E[(Y_t - E[Y_t | Y_{t-1}])^2 | Y_{t-1}] = E[(e_t)^2 | Y_{t-1}] = \sigma^2$$

est fixe et ne dépend de l'information disponible au temps t-1. En fait, l'hypothèse $e_t \sim N(0, \sigma^2)$ nous amène à ce résultat, ce qui est manifestement trop restrictif. Il nous faut un modèle beaucoup plus souple et plus réaliste de la variance conditionnelle. Il s'agit d'un modèle ARCH(p)

Regardons le terme d'erreur de plus près :

$$E[e_t | y_{t-1}, \dots] = 0$$

Espérance zéro

$$E[e_t e_{t-j}] = 0$$

Non corrélé

$$E[e_t^2 | e_{t-1}, \dots] = E_{t-1} e_t^2 = h_t = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2$$

Variance conditionnelle

où $\alpha_0 > 0$ et $\alpha_1 > 0$ pour garantir que h_t soit en tout temps positif (il s'agit d'une variance). h_t dépend maintenant de l'information disponible à la période t-1. Quand e_{t-1} est grand (positif ou négatif), h_t est aussi plus élevé et les chances d'obtenir un e_t grand augmentent. Si

effectivement le e_t obtenu est grand, h_{t+1} est aussi plus élevé et les chances d'obtenir un e_t grand demeurent importantes jusqu'à ce que le terme d'erreur généré soit petit, ce qui stabilise les choses pour quelques périodes jusqu'à ce que un nouveau e_t grand soit tiré. Le modèle ARCH(1) permet de générer des épisodes de volatilité importante (des e_t positifs ou négatifs grands) suivis d'épisodes de volatilité plus faible, exactement le phénomène retrouvé dans les données. Plus spécifiquement, on dit AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity. De plus, bien que non corrélés, les termes d'erreurs e_t ne sont plus indépendants entre périodes adjacentes puisque h_t dépend de e_{t-1} , donc des données de la période précédente.

Pour trouver la variance non conditionnelle, j

$$\begin{aligned} E_{t-2}E_{t-1}e_t^2 &= E_{t-2}[\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2] \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 E_{t-2}e_{t-1}^2 \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} \quad \text{car } E_{t-1}e_t^2 = h_t \text{ et } E_{t-2}e_{t-1}^2 = h_{t-1} \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 (\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-2}^2) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \alpha_0 + \alpha_1^2 e_{t-2}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{t-3}E_{t-2}E_{t-1}e_t^2 &= E_{t-3}[\alpha_0 + \alpha_1 \alpha_0 + \alpha_1^2 e_{t-2}^2] \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \alpha_0 + \alpha_1^2 E_{t-3}e_{t-2}^2 \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \alpha_0 + \alpha_1^2 h_{t-2} \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \alpha_0 + \alpha_1^2 (\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-3}^2) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \alpha_0 + \alpha_1^2 \alpha_0 + \alpha_1^2 e_{t-3}^2 \end{aligned}$$

En reculant de plus en plus vers le passé $E_{t-j} \dots E_{t-3}E_{t-2}E_{t-1}e_t^2$, nous aurons une progression géométrique qui convergera vers

$$\frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} = \text{Var}(e_t) = E(e_t^2) = \sigma^2 = \text{Variance non conditionnelle}^1.$$

Il est important de noter que pour que la variance non conditionnelle soit positive, $\alpha_0 > 0$ et $0 < \alpha_1 < 1$.

Deux façons d'écrire un modèle ARCH :

Retour vers la moyenne

$$h_t = \sigma^2 + \alpha_1 (e_{t-1}^2 - \sigma^2)$$

car

$$h_t = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} + \alpha_1 (e_{t-1}^2 - \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1})$$

$$h_t = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} - \frac{\alpha_0 \alpha_1}{1 - \alpha_1} + \alpha_1 e_{t-1}^2$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2$$

¹ Attention, il ne faut pas confondre la variance non conditionnelle σ^2 avec la variance conditionnelle de la section sur le rappel. Même si la notation est la même, nous avons deux concepts très différents. Nous avons gardé la notation σ^2 pour la variance non conditionnelle compte tenu de son utilisation généralisée dans les manuels.

2-6-2) AUTOREGRESSIVE DANS LES ERREURS AU CARRE

Commençons par construire l'évidence suivante :

$$e_t^2 = h_t + v_t \quad \text{où } v_t = e_t^2 - h_t$$

$$e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + v_t$$

$$\text{et } E_{t-1}v_t = E_{t-1}e_t^2 - E_{t-1}h_t = h_t - h_t \quad E_{t-1}h_t = h_t \text{ car } h_t \text{ est fonction de } e_{t-1}^2 \text{ connu en } t-1. = 0$$

Comme v_t est un terme d'erreur tout à fait acceptable, les erreurs au carré suivent un processus AR(1) d'où le nom de modèle ARCH.

II-6-3) SIMULATION

Comment simuler des erreurs de type ARCH. Supposons la formule suivante utilisée dans le programme GARCH

$$e_t = v_t (\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2)^{1/2}$$

où v_t est un bruit blanc, i.e. $E_{t-1}v_t = 0$ et $E_{t-1}v_t^2 = 1$.

$$\begin{aligned} E_{t-1}e_t &= E_{t-1}v_t (\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2)^{1/2} \\ &= 0 (\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2)^{1/2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{t-1}e_t^2 &= E_{t-1}v_t^2 (\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2) \\ &= 1 (\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 \end{aligned}$$

II-6-4) DÉTECTION

Soit : (1) $y_t = \delta + \phi y_{t-1} + e_t \quad \text{où } e_t \sim N(0, h_t)$

1. On estime le modèle (1) à l'aide des OLS. On trouve les résidus estimés \hat{e}_t et donc les \hat{e}_t^2
2. On calcule les coefficients d'auto-corrélation des résidus au carré. Si le processus est ARCH, les résidus au carré seront corrélés
3. On peut construire le test de Mc Leod (semblable au test de Ljung-Box)

$$Q(p) = T(T+2) \sum_{j=1}^p \frac{\hat{\rho}^2_j}{T-j} \text{ suit une } \chi^2 \text{ avec } p \text{ degrés de libertés}$$

4. On peut faire un test de Lagrange formel en effectuant la régression suivante :

5.

$$\hat{e}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{e}_{t-1}^2 + \alpha_2 \hat{e}_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p \hat{e}_{t-p}^2 + v_t$$

TR² de la régression suit une χ^2 avec p degrés de libertés. La méthodologie Lagrange prend ici toute son importance. Il serait très difficile d'utiliser une approche de Wald.

II-6-5) ESTIMATION

On se rappelle que la fonction de vraisemblance conditionnelle d'un AR(1) est donnée par

$$\ln L(\phi, \sigma^2 | y) = -\frac{T-1}{2} \ln(2\pi) - \frac{T-1}{2} \ln \sigma^2 - \sum_{t=2}^T \frac{(y_t - \phi y_{t-1})^2}{2\sigma^2}$$

Dans le cas des erreurs ARCH, nous avons

$e_t \sim N(0, h_t)$ et la fonction de vraisemblance peut facilement être modifiée en remplaçant σ^2 par h_t

$$\ln L(\phi, \alpha_0, \alpha_1 | y) = -\frac{T-2}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=3}^T \ln h_t - \sum_{t=3}^T \frac{(y_t - \phi y_{t-1})^2}{2 h_t}$$

avec $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2$. Notons que le retard d'une période dans le ARCH combiné au retard d'une période dans le AR nous force à débuter l'estimation à la période 3.

L'adaptation à un modèle ARCH(p) est relativement simple. Il faut tout simplement tenir compte dans les formules de la structure suivante :

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \alpha_2 e_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p e_{t-p}^2$$

Avec $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p > 0$ et $\alpha_1 + \dots + \alpha_p < 1$ pour garantir que la variance non conditionnelle

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p}$$

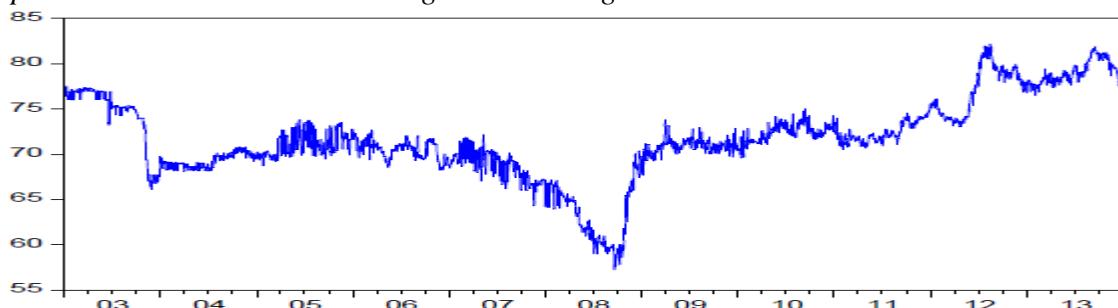
soit positive. Le modèle ARCH(p) permet une persistance beaucoup plus grande dans la volatilité car il incorpore des retards plus éloignés dans les e_t^2 . Cependant, plus les retards sont importants, plus il est difficile d'obtenir la condition $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p > 0$. Plusieurs α sont souvent négatifs ... ce qui nous amène à une classe de modèle encore plus générale qui pourra régler ce problème.

II-6-6) APPLICATION A LA SERIE TAUX DE CHANGE DA/DUS.E XEMPLE TIRE D'UN ARTICLE INTITULE MODELES ARCH : APPLICATION AUX TAUX DE CHANGE ALGERIEN. INTERNATIONAL JOURNAL OF INNOVATION AND APPLIED STUDIES ISSN 2028-9324 VOL. 11 NO. 3 JUN. 2015, PP. 699-715

Le graphe 1 représente l'évolution du taux de change DZA/US Dollar. Il montre la présence d'une tendance peu claire sur l'ensemble de la période, caractérisée, en premier lieu, par une tendance baissière dans la 1ère partie (allant jusqu'au point près de 08) et, ensuite, une tendance haussière. La lecture visuelle de ce graphe indique une non stationnarité en moyenne et en variance (surtout en variance). Ce même graphe montre des regroupements de volatilité, ce qui signifie que cette série est volatile.

Nous remarquons, par ailleurs, que cette volatilité évolue au cours du temps. Cela nous permet de dire qu'un processus de type GARCH pourrait être adapté à la modélisation de la série du taux de change. Afin de réduire la variabilité de la série du taux de change, nous avons transformé cette série en logarithme. Cette nouvelle série est appelée logTCH

Graphe1: Evolution du taux de change du dinar algérien



Le tableau suivant reporte un certain nombre d'indicateurs statistiques, à savoir : le coefficient d'asymétrie (skewness), le coefficient d'aplatissement (kurtosis) et la valeur estimée de la statistique de Jarque-Bera

Les indicateurs statistiques de la série du taux de change

Les indicateurs statistiques	La série du taux de change
Kurtosis	3,65
Skewness	-0,18
Jaque-Bera	94,53

De ce tableau nous constatons que :

- Le coefficient de kurtosis (3,65) est un peu élevé. Il est supérieur à la valeur du kurtosis de la loi normal, qui est égale à 3. La valeur de ce coefficient indique que la courbe de la série de taux de change est plus aplatie que la courbe de loi normale. Cette valeur du coefficient témoigne de la forte probabilité d'occurrence de point extrêmes ;
- Le coefficient de skeweness (- 0,18) est différent de zéro (la valeur théorique du coefficient de skeweness pour une la loi normale). Ce coefficient montre la présence de l'asymétrie de la courbe de la série du taux de change. Le coefficient de cette asymétrie est négatif. Ce qui nous permet de dire que la distribution est étalée vers la gauche. Ce signe négatif nous indique, par ailleurs, que le taux de change de Dinar Algérien réagisse d'avantage à un choc négatif qu'à un choc positif. Cette asymétrie peut être un indicateur de non linéarité ;
- Le test de Jarque - Bera rejette l'hypothèse nulle de normalité de la distribution du taux de change ($JB = 94,53 > Khi-deux à 2dl = 5,99$).

De l'analyse du graphe 1 et du tableau 1 de la série du taux de change, nous déduisons qu'un modèle ARMA non linéaire de type ARCH peut être adéquat à ce cas.

III-6-6-1) MODÉLISATION ARMA

a) ETUDE DE LA STATIONNARITÉ

Pour confirmer où infirmer la non stationnarité de la série étudiée, nous utilisons le test ADF. Les tests de Dickey – Fuller sont des tests paramétriques permettant de mettre en évidence le caractère stationnaire ou non d'une chronique, par la détermination d'une tendance déterministe ou stochastique. Ces tests reposent sur l'estimation d'un processus autorégressif.

L'application de test de ADF nécessite, au préalable, de choisir le nombre de retard p à introduire de sorte à blanchir les résidus. La valeur p de retard est déterminée soit à l'aide de la fonction des autocorrélations partielles, soit à l'aide de la statistique de Box-Pierce, soit, enfin, à l'aide des critères d'Akaike (AIC) ou de Schwartz (SIC). Cette détermination du nombre de retard, à l'aide de la fonction des autocorrélations partielles, est faite par l'étude de la significativité des coefficients des corrélations partielles. En appliquant cette méthode, tout en se basant sur l'étude de corrélogramme de la série, nous obtenons le retard un pour la série logarithme du taux de change. Après avoir déterminé le retard pour notre variable, nous adoptons la stratégie séquentielle du test d'ADF pour examiner la stationnarité de notre variable. Le tableau suivant résume notre application :

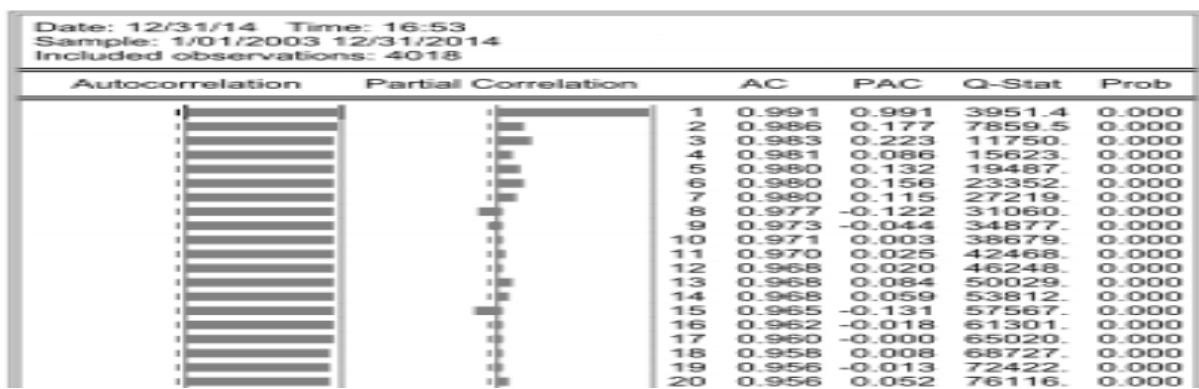
Série	coefficient	Valeur statistique calculé	Valeur critique	P-Value
$\log TCH_t$	C	3,17**	3,92	0,0001
	@trend	1,96**	2,13	0,03
	Φ	-3,19*	-3,94	0,01

* : valeur d' ADF, ** : valeur de Student

Il ressort de ce test que la constance et le trend sont significatifs au seuil de 5%. En effet, leurs P-values qui sont respectivement de 0,0001 et 0,0328 sont inférieures à 0,05. La statistique du test ADF, qui est de -3,94, est inférieure à la valeur critique -3,41, au seuil de 5 %. De ce fait, nous pouvons conclure que la série est stationnaire.

b) IDENTIFICATION DE L'ORDRE P ET Q DE ARMA

Pour identifier l'ordre p et q d'un processus ARMA, nous utilisons le corrélogramme de la fonction d'autocorrélation et la fonction d'autocorrélation partielle de la série stationnaire logarithmique de taux de change (logTCH). Le corrélogramme de la fonction d'autocorrélation permet d'identifier un modèle $MA(q)$, alors que le corrélogramme de la fonction d'autocorrélation partielle nous permet de déterminer un modèle $AR(p)$. D'après ce corrélogramme (annexe 1), nous constatons que la première autocorrélation (simple et partielle) de la série logTCH est significativement différente de zéro. Nous retenons donc les modèles suivants : $AR(1)$, $MA(1)$ et $ARMA(1,1)$.



c) ESTIMATION DE L'EQUATION DE LA MOYENNE

On procède à l'estimation des trois processus précédemment identifiés : processus $AR(1)$, $MA(1)$ et $ARMA(1,1)$ dans le tableau suivant :

Tableau 3 : Estimation du modèle $AR(1)$, $MA(1)$ et $ARMA(1,1)$

	Variable	Coefficient	t-Staistique	P- Value
Modèle AR(1)	C	4,27	178,32	0,00
	AR(1)	0,99	488,23	0,00
Modèle MA(1)	C	4,27	4139,91	0,00
	MA(1)	0,91	147,82	0,00
Modèle ARMA(1,1)	C	4,27	169,26	0,00
	AR(1)	0,99	794,89	0,00
	MA(1)	-0,36	-24,91	0,00

Au regard de ces résultats, on peut remarquer que :

- Les t de Student du coefficient de modèle $AR(1)$ sont significativement différents de 0 (le t de Student est supérieur à 1,96). D'où le modèle $AR(1)$ est retenu ;
- Les t de Student du coefficient de modèle $MA(1)$ sont significativement différents de 0 (le t de Student est supérieur à 1,96). Par conséquent le modèle $MA(1)$ est retenu ;
- Les t de Student du coefficient de modèle $ARMA(1,1)$ sont significativement différents de 0 (le t de Student est supérieur à 1,96). Donc, le modèle $ARMA(1,1)$ est retenu.

d) TEST SUR LES RÉSIDUS

• TEST D'ABSENCE D'AUTOCORRELATION DES RESIDUS

Pour cela, nous appliquons le test de Lejung-Box (LB) d'absence d'autocorrélation des résidus, pour un nombre de retard maximal 36 pour les trois modèles :

- Ainsi pour les résidus du processus AR(1), la statistique du test de LB est de 1354 pour un nombre de retard égal à 36. Cette statistique suit une loi de khi-deux à 35 degrés de liberté. La valeur théorique de Khi-deux à 35 degrés de liberté est égale à 46,03, au seuil statistique de 5%. En conséquence, l'hypothèse nulle d'absence d'autocorrélation des résidus est rejetée ;
- Pour les résidus du processus MA(1), la statistique du test de LB est égale à 111547 pour un nombre de retard égal à 36. tout comme pour le processus précédent, cette statistique suit une loi de khi-deux à 35 degrés de liberté. La valeur théorique de Khi-deux à 35 degrés de liberté est de 46,03, au seuil statistique de 5%. De ce fait, on rejette l'hypothèse nulle d'absence d'autocorrélation des résidus ;
- Enfin pour les résidus du processus ARMA(1,1), la statistique du test de LB vaut 1637,4 pour un nombre de retard égal à 36. Comme pour les deux autres modèles, cette statistique suit une loi de khi-deux à 34 degrés de liberté. La valeur théorique de Khi-deux à 34 degrés de liberté est de 46,03, au seuil statistique de 5%. Donc, l'hypothèse nulle d'absence d'autocorrélation des résidus est rejetée.

Nous constatons, en outre, que la probabilité affectée aux autocorrélations, pour les trois modèles, est inférieure à 0,05. Par voie de conséquence on rejette l'hypothèse nulle d'absence d'autocorrélation des résidus.

- Nous résumons les caractéristiques de la forme des résidus dans le tableau 4 ci-dessous :

Tableau 4 : les mesures des indicateurs de la forme

Les indicateurs de la forme	AR(1)	MA(1)	ARMA(1,1)
Kurtosus	0,12	-0,48	0,005
Skewness	11,81	4,05	10,65
Jaque-Bera	13022,8	343,54	9811,15

Les indicateurs de la forme (tableau 4) et l'analyse du graphe des résidus indiquent la présence de volatilité. D'où, il y a lieu de suspecter la présence d'une série non stationnaire en variance.

• TEST ARCH

Pour réaliser le test ARCH, nous récupérons les résidus issus de l'estimation. Ensuite nous procédons à l'estimation de la régression suivante :

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \hat{\varepsilon}_{t-i}^2$$

Pour se faire, il faut, au préalable, déterminer le nombre de retards q à retenir. Pour cela, le corrélogramme des résidus au carré du modèle AR(1), MA(1) et ARMA(1,1) nous permet, en tenant compte du critère de parcimonie 13, d'opter pour un nombre de retards égal à deux. Le test ARCH pour les trois modèles se résume dans le tableau 5 ci-après, comme suit :

Tableau 5 : Test ARCH de hétéroscédasticité

	AR(1)	MA(1)	ARMA(1,1)
F-statistique	111.7091	22986.64	132.4653
TR ²	211.7912	3693.587	248.7056
Prob(F)	0.0000	0.0000	0.0000
Prob(χ^2)	0.0000	0.0000	0.0000

On peut remarquer du tableau 5 ci-dessus que la probabilité associée à la statistique de test T^*R^2 est nulle et inférieure à 0,05 pour les trois modèles. Ce constat nous permet de rejeter l'hypothèse nulle d'homoscédasticité, mais en retenant l'alternative d'hetéroscédasticité conditionnelle pour les trois modèles AR(1), MA(1) et ARMA(1,1).

e) CHOIX DU MODÈLE

Il ressort de ces résultats que les résidus de trois processus estimés sont autocorrélés et hétéroscédasticité. Afin de départager les trois processus, comparons-les au moyen des critères de choix de modèles. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-contre.

Tableau 6 : Critère du choix du modèle

	AR(1)	MA(1)	ARMA(1,1)
AIC	-6,80	-3,91	-6,86
BIC	6,80	-3,91	-6,86
HQ	6,80	-3,91	-6,86
LR	13667	7876	13800

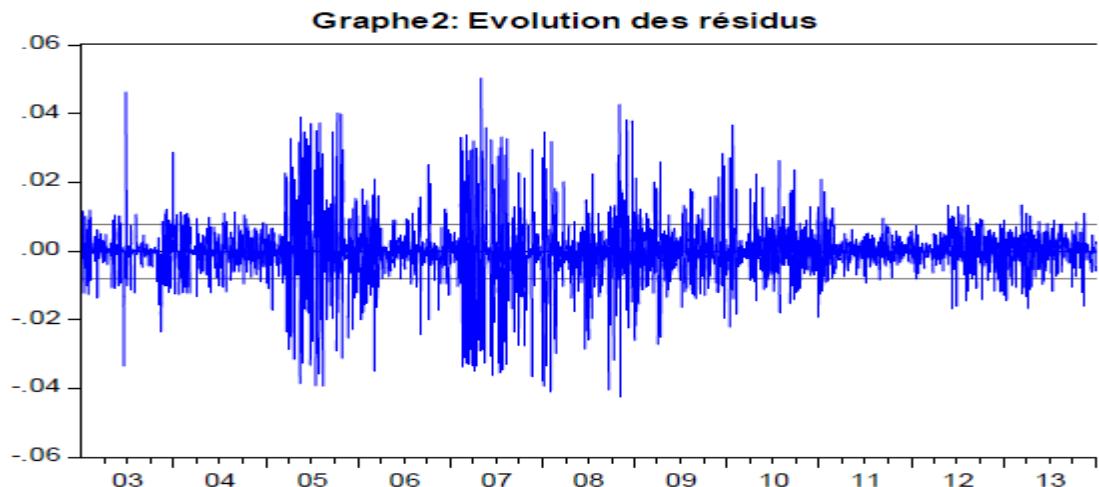
D'après ce tableau 6, tous les critères nous conduisent à choisir le processus ARMA(1,1) pour représenter la dynamique de la série logTCH.

f) MODÉLISATION ARCH. ESTIMATION DE L'EQUATION DE LA VARIANCE

Nous avons trouvé dans la section précédente que le modèle ARMA(1,1) présente une hétéroscédasticité des erreurs. Le graphe des résidus ci-dessous, nous la montre parfaitement. Afin de tenir compte de l'effet ARCH, nous estimons, par la méthode du maximum de vraisemblance, l'équation de la variance conditionnelle conjointement à l'équation de la moyenne.

En se basant sur la taille de l'échantillon et de l'étude de French, Schwert et Stambaugh(1987), nous déterminons l'ordre q et p pour le modèle GARCH (p,q), en se basant sur le corrélogramme des résidus au carré. Ce dernier présente les deux premières autocorrélations (simples et partielles) significativement différentes de zéro. D'où, l'on retient le modèle :

- Un processus AR(2) – ARCH(2)



g) ESTIMATION DE MODELE ARCH(2)

Pour estimer le modèle ARCH (2), nous utilisons le logiciel EVIEWS. Cette estimation est résumée dans le tableau suivant :

Tableau 7 : Estimation du modèle ARCH(2)

Equation de la moyenne			
	Coefficient	Z-Statistique	P-Value
C	-11.32688	-0.006963	0.9944
AR(1)	0.999995	2111.773	0.0000
MA(1)	-0.659392	-109.7907	0.0000
Equation de la variance			
C	3.00 ^{E-05}	73.02909	0.0000
RESID(-1) ²	0.370687	13.95274	0.0000
RESID(-2) ²	0.218434	11.38290	0.0000

$$\bar{R}^2 = 0,98 \quad AIC = -7,07 \quad SIC = -7,06 \quad HQ = -7,06 \quad LL = 14207,91$$

Le tableau de l'estimation d'ARCH(2) montre que les coefficients de paramètre de l'équation de la variance sont significativement différents de zéro et positifs. Par conséquent, les coefficients vérifient les contraintes assurant la positivité de la variance. De ce fait, le modèle ARCH(2) est retenu comme modèle représentant la variance conditionnelle du logarithme de taux de change.

III-1) MODELES MULTIVARIES DES SERIES TEMPORELLES

Proposée dans les années 1980 par Sims, la modélisation VAR a d'abord connu l'opposition des économètres « classiques » (adeptes de la formalisation produite par la Cowles Commission). En effet ces derniers plutôt adeptes de la théorie, basaient leurs modèles sur des fondements théoriques et considéraient qu'il était indispensable de faire des hypothèses de relations entre les variables. Pour les adeptes de l'approche empirique, le modèle devait reposer sur des résultats statistiques solides ce qui permettait de révéler la structure des variables.

Les avantages de la modélisation non structurelle VAR sur la modélisation classique sont d'une part qu'elle autorise une meilleure analyse dynamique des systèmes en tenant compte de la structure intrinsèque¹ de la série et des effets dynamiques entre les variables et d'autre part qu'elle permet d'envisager toutes les relations causales entre deux variables sans *a priori* sur l'exogénéité de l'une d'entre elles. Les modèles VAR prolongent les travaux de Granger (1969) sur la relation causale entre deux variables. Dans cette optique, Sims propose une modélisation étendant l'analyse de la causalité à un système de plusieurs variables. Il propose pour cela de traiter toutes les variables à l'identique, sans condition d'exclusion ou d'exogénéité et en sélectionnant un retard identique pour chacune d'entre elles dans toutes les équations.

Les modèles VAR comportent toutefois des limites. Tout d'abord, se pose le problème du nombre de variables à inclure dans le modèle et du problème d'estimation qui en découle. En effet, les modèles VAR se distinguent des modèles structurels basés sur la théorie par une plus grande part laissée à l'empirisme, mais dans ce cas, combien de variables choisir ? Le nombre de variables à inclure dans le modèle, pose ainsi le « *problème des degrés de liberté qui s'évanouissent* ». En effet, si l'on considère 20 variables et 4 retards, cela nous conduit à estimer 80 coefficients par équation et bien souvent, le nombre de coefficients inconnus est proche de la taille de l'échantillon analysé. Une autre critique souvent adressée aux modèles VAR consiste au peu de théorie auxquels ils font référence qui leur offre ainsi le qualificatif de modèles a-théoriques. Ce débat « *theory versus measurement* » avait déjà opposé les économistes dans les années 1920 et refait surface dans les années 1980 avec les travaux de Sims. Toutefois, le débat « *theory versus measurement* » est loin d'être clos et si l'on reproche aux modèles VAR leur manque de théorie, on reproche aussi aux modèles théoriques des partisans de la Cowles Commission leur manque de souplesse. Dans ces modèles, chaque équation du modèle décrit l'évolution d'une variable en fonction :

- de ses valeurs passées ;
- des valeurs passées des autres variables du système.²

¹ La structure intrinsèque de la série se rapporte à son identification au sein de la classification ARIMA (Box et Jenkins, 1976).

² Soit encore en formalisant :

$$\left[\begin{array}{l} Y_{1,t} = \Phi_{11}^1 Y_{1,t-1} + \dots + \Phi_{11}^p Y_{1,t-p} + \dots + \Phi_{1n}^1 Y_{n,t-1} + \dots + \Phi_{1n}^p Y_{n,t-p} + \varepsilon_{1t} \\ \dots \\ \dots \\ Y_{n,t} = \Phi_{n1}^1 Y_{1,t-1} + \dots + \Phi_{n1}^p Y_{1,t-p} + \dots + \Phi_{nn}^1 Y_{n,t-1} + \dots + \Phi_{nn}^p Y_{n,t-p} + \varepsilon_{nt} \end{array} \right]$$

avec n = nombre de variables ;

p = nombre de retards ;

Φ_{ij}^p = coefficient de la variable j de retard p dans l'équation de la variable i.

Une fois déterminé le retard optimal, l'analyse peut prendre deux orientations non exclusives : l'étude de la dynamique du modèle d'une part et l'étude des relations causales ensuite. Cette dernière peut prendre deux formes : d'une part l'analyse des relations de long terme via la notion de cointégration et d'autre part, l'étude des relations de causalité.

Apparu pour la première fois en 1964 avec les travaux de Sargan, le terme de cointégration ne sera véritablement théorisé qu'en 1986 par Granger. La cointégration capte l'idée que deux ou plusieurs séries évoluent ensemble dans le temps et génèrent un équilibre statistique de long terme alors qu'à court terme, les variables peuvent évoluer dans des directions différentes. Toutefois, si elles continuent d'évoluer les unes loin des autres à long terme, des forces économiques telle qu'un mécanisme de marché ou l'intervention publique permettra de les ramener les unes vers les autres.

Dans le cadre de la modélisation VAR, la présence de cointégration nécessite une correction du modèle (Vector Error Correction Model, VECM) qui tienne compte de cette relation afin d'éviter le risque de régressions fallacieuses (Granger et Newbold, 1974). En effet, lorsque deux séries sont cointégrées, se pose un problème d'estimation et la bonne qualité statistique du modèle est dans ce cas due au fait que les séries sont non stationnaires ; dans ce cas l'utilisation du modèle à des fins prévisionnelles n'est pas fiable.

Outre l'identification du processus générateur de chaque variable du modèle grâce aux tests de racines unitaires, la finalité d'un modèle VAR est l'identification des relations de causalité entre les variables. La mise en évidence de relations causales entre les variables économiques permet une meilleure compréhension des phénomènes économiques et par là une meilleure mise en place de la politique économique. La définition de la causalité est donnée par Granger (1969) : la variable y_{2t} cause la variable y_{1t} si la prédictibilité de cette dernière est améliorée lorsqu'on incorpore l'information relative à y_{2t} dans l'analyse. Il existe deux approches de la causalité : Granger (1969) et Sims (1980)³. Bien que ces deux approches soient généralement équivalentes (Bruneau, 1996)

III-2) EXEMPLE D'APPLICATION DE LA THEORIE DE COITNEGRATION (APPROCHE GRANGER)

Exemple tiré d'un article intitulé « Les déterminants du chômage en Algérie : une analyse économétrique (1980-2009). Lahcene Bouriche, Université Dr Moulay Tahar, Saida, Algérie

Résumé

Cette étude montre l'existence une relation de co-intégration au sens d'Engel et Granger, entre le taux de chômage et certaines variables d'ordre économiques et financières liées aux réformes économiques engagées en Algérie depuis la fin des années 80. Ces variables sont entre autres, la productivité du travail les dépenses nationales brutes et le taux d'escompte. Il ressort de l'étude aussi que le taux de chômage en Algérie n'est pas corrélé avec les importations, le taux d'inflation , le taux de change et les cotisations sociales du fait que ces dernières variables n'ont pas d'influence significative sur le comportement du taux de chômage selon l'étude statistique et économétrique. Néanmoins, l'étude montre que la relation entre le taux de chômage, la productivité du travail et le taux d'escompte n'est pas conforme aux énoncées théoriques bien qu'il existe un mécanisme à correction d'erreur.

³ La causalité au sens de Granger (1969) met l'accent sur l'importance du processus retardé et concerne la propagation d'impulsions déterministes interprétables comme des modifications liées à des changements structurels. Sims (1980), au contraire, considère que si les valeurs futures de y_{1t} permettent d'expliquer les valeurs présentes de y_{2t} , alors y_{2t} est la cause de y_{1t} ; son analyse se fonde sur la propagation d'impulsions stochastiques représentatives de « surprises ». Ces deux approches sont généralement équivalentes (Bruneau, 1996).

La démarche de modélisation se déroule de la manière suivante :

III-2-1) LA PRESENTATION DU MODELE

La spécification retenue dans le cadre de cette étude s'écrit de la manière suivante :

$$U=f(PT, INF, TCH, DNB, ESC, M, D1)$$

U : le taux de chômage annuel ;

PT : la productivité du travail ;

TCH : le taux de change ;

INF : le taux d'inflation ;

DNB : les dépenses nationales brutes par habitant ;

ESC : le taux de d'escompte ;

M : les importations (%PIB).

D1 : représente une variable muette qui indique le changement structurel, elle prend le nombre de 1 dans l'année où il ya une instabilité et le nombre 0 lorsque la situation est et stable.

On écrit notre modèle sous la forme log-linéarisée. Car, l'un des avantages de l'utilisation de la forme logarithmique linéaire est qu'elle permet de : minimiser l'influence des effets du temps sur la série, réduire le nombre d'étapes pour aboutir à une série stationnaire et interpréter les coefficients en élasticité ce qui nous facilite l'analyse économique a savoir l'impact d'un taux de variation de la variable explicative de 1% sur le taux de variation du taux chômage. Le modèle (1) s'écrit de la forme suivante

$$\ln U = \beta_0 + \beta_1 \ln PT_t + \beta_2 \ln TCH_t + \beta_3 \ln INF + \beta_4 \ln DNB_t + \beta_5 \ln ESC_t + \beta_6 \ln M_t + \beta_7 D1 + \varepsilon_t$$

ε : Le terme d'erreur qui tient compte de toutes les variables quantitatives ou qualitatives non intégrées dans le modèle. C'est l'erreur d'estimation. On s'attend à ce que le résidu soit très faible.

III-2-2) ESTIMATION ET L'ANALYSE CRITIQUE DES RESULTATS

Pour estimer ce modèle linéaire, nous appliquerons la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO). Néanmoins, afin de pouvoir tester à l'aide des tests ordinaires (Student et Ficher), les coefficients issus de la méthode des moindre carrés ordinaires, nous allons d'abord étudier la stationnarité des séries. Si les séries sont stationnaires, on pourra directement appliquer la méthode des moindres carrés ordinaires sans aucune contrariété pour l'application des tests classiques de significativité des coefficients. Cependant, si les séries ne sont pas stationnaires en niveau, nous recourrons à la théorie de la co-intégration. Cette théorie permettra en présence du non stationnarité et sous certaines hypothèses de pouvoir appliquer la MCO sans souci pour la validité des tests classiques de significativité. L'étude de la co-intégration part des tests de co-intégration des séries à étudier. Elle nous permettra par la suite de savoir s'il existe une ou plusieurs relations de long terme entre les variables à étudier. Selon le cas, on envisagera un modèle à correction d'erreurs (MCE) ou un modèle vectoriel à correction d'erreur (VEC)

III-2-2-1) LA STATIONNARITE DES SERIES

Après la spécification du modèle et avant les estimations, il convient d'étudier la stationnarité des séries chronologiques du fait que les variables économiques et financières étant rarement des réalisations de processus stationnaire. Il conviendra alors pour nous de procéder aux tests de stationnarité des différentes séries à étudier c'est-à-dire étudier ses caractéristiques stochastique à savoir si son espérance et sa variance se trouvent modifiées dans le temps, la série temporelle est considérée comme non stationnaire ; dans le cas contraire ou le processus stochastique est invariant, la série chronologique est stationnaire (Bourbonnais,

1998). Pour notre étude, nous avons utilisé, le test de Dickey-Fuller Augmenté (ADF) et Phillips-Perron. Les résultats des Tests ADF et PP sont donnés dans le tableau suivant :

	ADF		PP	
	en niveau	en différence première	en niveau	Déférence première
<i>lnU</i>	-0.40	-4.18	-0.30	-4.14
<i>lnPT</i>	-2.73	-6.15	-2.62	-5.35
<i>lnTCH</i>	1.16	-2.78	1.41	-2.85
<i>lnINF</i>	-1.09	-7.69	-0.97	-7.64
<i>lnDNB</i>	2.49	-4.05	1.53	-5.89
<i>lnESC</i>	-0.56	-3.05	-0.19	-4.92
<i>lnM</i>	0.03	-4.84	0.48	-7.35
<i>lnCS</i>	2.05	-6.90	2.44	-6.9
<i>D1</i>	-1.15	-5.19	-1.17	-5.19

Source : élaboré par l'auteur à partir de logiciel Eviews.

Le tableau 1 indique que les tests statistiques ADF et PP calculés en niveau sont supérieurs aux valeurs critiques aux seuils de signification de 1%, 5% et de 10% respectivement, donc on accepte l'hypothèse d'existence de racine unitaire par conséquent les séries ne sont pas stationnaires. Après avoir différencié les séries une fois, les estimations font apparaître que les tests statistiques ADF et PP calculés sont inférieurs aux valeurs critiques au seuil de signification de 1%, 5% et de 10%. Donc les séries sont devenues stationnaires après être différenciées une fois.

III-2-2-2) ESTIMATION DE LA RELATION DE LONG TERME

$$\ln U = \beta_0 + \beta_1 \ln PT_t + \beta_2 \ln TCH_t + \beta_3 \ln INF + \beta_4 \ln DNB_t + \beta_5 \ln ESC_t + \beta_6 \ln M_t + \beta_7 D1 + \varepsilon_t$$

Les résultats de l'estimation du modèle (1) sont dans le tableau suivant ;

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	24.05514	9.333802	2.577207	0.0176
LNPT	0.779466	0.568437	1.371244	0.1848
LNTCH	0.142929	0.141782	1.008085	0.3249
LNINF	-0.040673	0.046500	-0.874699	0.3916
LNDNB	-3.703292	0.829367	-4.465204	0.0002
LNESC	-0.212700	0.145182	-1.465059	0.1577
LNM	0.512400	0.445242	1.150834	0.2627
LNCS	-0.072795	0.066466	-1.095216	0.2858
D1	-0.056005	0.111811	-0.500890	0.6217
R-squared	0.923310	Mean dependent var		2.907975
Adjusted R-squared	0.894094	S.D. dependent var		0.382489
S.E. of regression	0.124474	Akaike info criterion		-1.086112
Sum squared resid	0.325370	Schwarz criterion		-0.665752
Log likelihood	25.29167	F-statistic		31.60353
Durbin-Watson stat	1.915439	Prob(F-statistic)		0.000000

Source : Elaboré par l'auteur à partir de logiciel Eviews

Les valeurs de R^2 (0.92) et R^2 ajusté (0.89) montrent que l'ensemble des variables explicatives choisies du modèle théorique ont bien une influence sur la variable expliquée. Le Durbin-Watson qui est égal à (1.91) montre l'absence d'une éventuelle auto corrélation des erreurs. Le modèle dans sa globalité est valide au seuil de 5%, (Prob F-statistic est inférieur à 0,05). Néanmoins, lorsqu'on prend les variables explicatives séparément, les résultats indiquent qu'un seul coefficient est significatif en plus de la constante. Il s'agit du coefficient de la variable des dépenses nationales brutes (*lnDNB*). Ces résultats indiquent qu'une augmentation de (1 %) des dépenses nationales brutes, provoque une diminution de (3.70 %) du taux de chômage.

Maintenant, on enlève du modèle(1) les variables qui sont moins significatives dans l'estimation du modèle précédent. On obtient, alors, une autre spécification présentée dans le modèle (2) comme suit :

$$\ln U = \beta_0 + \beta_1 \ln PT_t + \beta_2 \ln ESC_t + \beta_3 \ln INF + \varepsilon_t$$

On estime le modèle (2) dont les résultats de l'estimation sont donnés comme suit :

(Dependent Variable: LNU

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	16.25132	1.990631	8.163901	0.0000
LNPT	1.307259	0.273606	4.777883	0.0001
LNDNB	-3.306147	0.351301	-9.411154	0.0000
LNESC	-0.296564	0.088602	-3.347141	0.0025
R-squared	0.903558	Mean dependent var		2.907975
Adjusted R-squared	0.892430	S.D. dependent var		0.382489
S.E. of regression	0.125448	Akaike info criterion		-1.190279
Sum squared resid	0.409170	Schwarz criterion		-1.003452
Log likelihood	21.85418	F-statistic		81.19726
Durbin-Watson stat	1.599428	Prob(F-statistic)		0.000000

Source : Elaboré par l'auteur à partir de logiciel Eviews

Modèle (2) estimés écrit : $\ln U = + 9.28 + 1.38 \ln PT - 2.52 \ln DNB - 0.09 \ln INF$

D'après les résultats de cette estimation présentés ci-dessus, nous pouvons dire que l'influence des variables explicatives sur le comportement du taux de chômage est bien significative du fait que, la probabilité de Fisher ($F\text{-Statistic}=0.0000$) est inférieure à (0.05). Le Durbin-Watson qui est égal à (1.59) montre l'absence d'une éventuelle auto corrélation des erreurs. Les valeurs de R^2 (0.90) et de R^2 ajusté (0.89) montrent que l'ensemble des variables explicatives choisies du modèle théorique ont bien une influence sur la variable expliquée. En conséquence, ces résultats expliquent le fait que le modèle est globalement satisfaisant.

Pris individuellement, les coefficients des variables en plus de la constante sont tous significatifs. En effet, les résultats montrent que, les variables : productivité du travail ($\ln PT$), taux escompte ($\ln ESC$), dépenses nationales brutes ($\ln DNB$) et la constance (c) sont des déterminants effectifs du taux de chômage en Algérie.

Toutefois, le coefficient de la variable $\ln PT$ (+1.30) n'a pas le signe conforme à l'énoncé théorique selon lequel un niveau élevé de la productivité influence négativement le taux de chômage. Ceci explique que l'évolution de la productivité en Algérie est tirée par d'autres facteurs à savoir la production des hydrocarbures. Le coefficient relatif aux taux d'escompte (-0.29) n'a pas le signe attendu non plus.

Par ailleurs, le coefficient des dépenses nationales brutes (-3.30) a le signe prévu. D'après la théorie une augmentation du taux d'inflation influerait à la hausse le taux chômage, de même une augmentation des dépenses nationales brutes diminuerait le taux de chômage.

Ces indicateurs montrent qu'une augmentation de (1%) du taux d'escompte provoquerait une diminution de (0,29 %) du taux de chômage et une augmentation de (1%) des investissements intérieurs et de la consommation de l'état par habitant provoquerait une baisse du taux de chômage de (3,30%).

Après avoir ainsi montré l'influence de chacune des variables sur le comportement du taux de chômage, il convient de déduire de l'estimation de cette relation de long terme définie, la série des résidus et de montrer que ces derniers sont stationnaires. S'ils ne le sont pas, la relation estimée est une régression fallacieuse. Dans le cas contraire, la relation de co-intégration est confirmée.

Les résultats des tests ADF et PP sur les résidus estimés sont donnés dans le tableau suivant :

		ADF en niveau	PP en niveau
RESID		Modèle retenu	sans tendance ni constante
	t*	-5.68	-5.69
	1%	-2.65	-2.64
	5%	-1.95	-1.95
	Valeurs critiques 10%	-1.60	-1.61

Source : élaboré par l'auteur à partir de logiciel Eviews

Les résultats issus de l'application du test ADF et PP sur les résidus de la relation entre lnU et ses déterminants reportés dans le tableau 4 montrent qu'ils sont stationnaires en niveau, car ADF calculé (-5.68) est inférieur aux valeurs critiques au seuil de signification de 1%, 5%, 10% (-2.65, -1.95, -1.60) respectivement, de même PP calculé (-5.69) est inférieur aux valeurs critiques tabulées au seuil de 1%, 5%, 10%. Par conséquent la relation définie est une relation de co-intégration. Il est alors possible d'estimer le modèle à correction d'erreur.

III-2-2-3) ESTIMATION DE LA RELATION DE COURT TERME

Le modèle à correction d'erreur consiste à estimer directement le modèle (3) suivant

$$\Delta \ln U = \beta_0 + \beta_1 \Delta \ln PT_t + \beta_2 \Delta \ln DNB_t + \beta_3 \Delta \ln ESC_t + \delta Resid_{t-1} + U_t$$

Le coefficient (appelé force de rappel vers l'équilibre) doit être à la fois significatif et négatif. Si non, le mécanisme de corrélation de long terme irait en sens contraire (si est positif) et s'éloignerait de la cible de long terme (Bourbonnais, 1998, 274).

Les résultats de l'estimation du modèle (3) sont repris dans le tableau ci-dessous.:

Tableau 5: Les résultats de l'estimation du modèle (3)

Dependent Variable: D(LNU)
Method: Least Squares
Date: 04/26/13 Time: 22:52
Sample (adjusted): 1981 2009
Included observations: 29 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.006859	0.022267	0.308028	0.7607
D(LNPT)	1.348764	0.414978	3.250206	0.0034
D(LNDNB)	-2.639982	0.437908	-6.028629	0.0000
D(LNESC)	-0.225952	0.106248	-2.126647	0.0439
RESID (-1)	-0.815889	0.187287	-4.356354	0.0002
R-squared	0.679821	Mean dependent var		-0.005575
Adjusted R-squared	0.626458	S.D. dependent var		0.191534
S.E. of regression	0.117062	Akaike info criterion		-1.296640
Sum squared resid	0.328885	Schwarz criterion		-1.060899
Log likelihood	23.80127	F-statistic		12.73954
Durbin-Watson stat	1.616312	Prob(F-statistic)		0.000011

Source : Elaboré par l'auteur à partir de logiciel Eviews

Sous la forme fonctionnelle, le modèle estimé s'écrit de la manière suivante :

$$\ln U = -0.006 + 1.34 \ln PT - 2.63 \ln DNB - 0.22 \ln ESC - 0.80 RESID(-1)$$

D'après les résultats de cette estimation, on constate que le coefficient associé à la force de rappel est négatif (-0.80) et significativement différents de zéro au seuil de 5% (probabilité de t-Student est inférieur à 0.05). En d'autres termes, les chocs sur la variable lnU se corrigeant. Cela signifie qu'il existe un mécanisme à correction d'erreur c'est-à-dire qu'à long terme les déséquilibres entre le taux de chômage et ses déterminants cités plus haut se compensent.

CONCLUSION

Il ressort de cette étude qu'il existe une relation de co-intégration au sens d'Engel et Granger, entre le taux de chômage et certaines variables d'ordre économiques et financières liées aux réformes économiques engagées en Algérie depuis la fin des années 80. Ces

variables sont entre autres, la productivité du travail, les dépenses nationales brutes, le taux d'escompte. En effet, les résultats montrent qu'il y a une corrélation négative directe entre l'investissement intérieur, la consommation de l'état et le taux de chômage expliquant le rôle de la politique budgétaire adoptée par l'état dans la relance de la croissance et par conséquent dans la création d'emplois et la baisse du chômage.

Toutefois, il ressort de l'étude aussi que le taux de chômage en Algérie est corrélé positivement avec la productivité du travail. Ceci explique la faiblesse des performances de l'économie algérienne en termes de productivité en dehors des hydrocarbures et d'investissement privé, où prédominent les petites entreprises surtout dans le secteur du BTPH et les services qui, certes, emploient une grande partie de population active mais dont les gains de productivité sont infimes.

D'autre part l'augmentation des importations n'a pas eu d'un impact sur la performance du marché du travail, malgré l'ouverture économique vers l'extérieur entamée depuis le début des années 90 et concrétisée à travers la mise en œuvre de l'accord d'association avec l'union européenne en 2005. Ceci revient au rôle primordial que joue le secteur des hydrocarbures dans la couverture des importations et dans la constitution du système productif tout entier.

Cependant, en Algérie, les institutions ne semblent pas expliquer le déséquilibre du marché du travail comme en témoigne l'inexistence de relation entre les couts salariaux et le taux de chômage, malgré les mesures de flexibilisation mises en oeuvre depuis 1990.

En conséquence, une politique structurelle de croissance axée sur la stimulation de l'investissement privé et l'amélioration de la productivité en dehors du secteur des hydrocarbures semblent contribuer à la performance du marché du travail et la résorption du chômage.

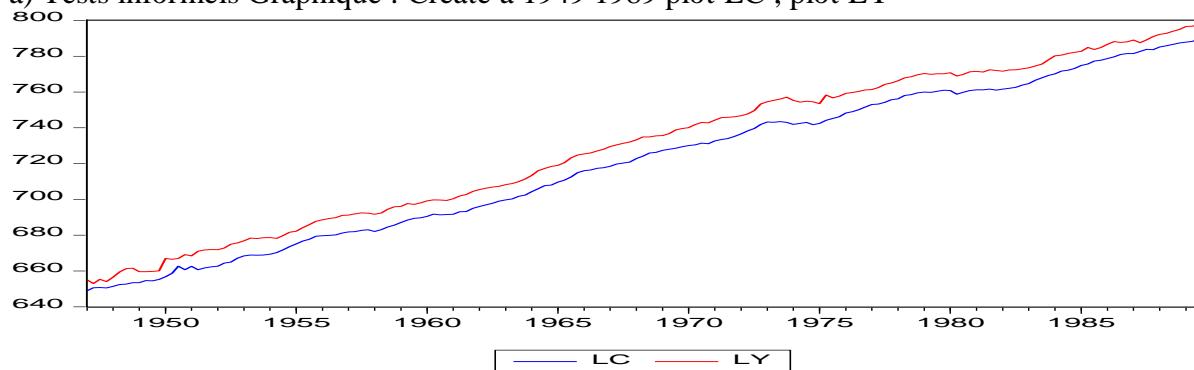
III-3) LA MISE EN OUEVRE DE LA METHODE COINTEGRATION ET MODELE ECM SUR EVIEW 9.5. CAS DE LA FONCTION DE CONSOMMATION KEYNESIENNE

Les étapes à suivre :

- (i) Etude de la stationnarité des séries (Tests formels et informels)
- (ii) Estimation de la relation de long terme et Test de stationnarité sur les résidus qui en découlent
- (iii) Estimation du Modèle à correction d'erreurs
- (iv) Interprétation des résultats

III-3-1) STATIONNARITE DES SERIES (LC LY)

a) Tests informels Graphique : Create a 1949 1989 plot LC ; plot LY



Les séries semblent non stationnaires (en moyenne surtout) et cointégrées (évolutions similaires sur tout l'échantillon).

Corrélogramme (« LC » et « LY »):

Null Hypothesis: RES has a unit root Exogenous: None Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=13)		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-3.793029	0.0002
Test critical values:		-2.578717	
1% level		-1.942722	
5% level		-1.615453	
10% level			
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.			
Augmented Dickey-Fuller Test Equation			
Dependent Variable: D(RES)			
Method: Least Squares			
Date: 04/22/18 Time: 22:20			
Sample (adjusted): 1947Q3 1989Q3			
Included observations: 169 after adjustments			
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic
RES(-1)	-0.179136	0.047228	-3.793029
D(RES(-1))	-0.254860	0.071316	-3.573676
R-squared	0.194625	Mean dependent var	-0.022890
Adjusted R-squared	0.189802	S.D. dependent var	1.140133
S.E. of regression	1.026245	Akaike info criterion	2.901454
Sum squared resid	175.8809	Schwarz criterion	2.938495
Log likelihood	-243.1729	Hannan-Quinn criter.	2.916486
Durbin-Watson stat	2.012006		

Les résidus du modèle à LT estimé étant Stationnaires en niveau sans trend et sans intercept, les résultats d'estimation du Modèle à Correction d'Erreur/MCE.

III-3-3) ESTIMATION DU MODELE A CORRECTION D'ERREURS

✓ SPECIFICATION DU MODELE

La relation entre la consommation et le revenu permanent, suivant le modèle de FRIEDMAN (1997), se présente comme suit :

$$C_t = a_0 + a_1 R_t + a_2 R_{t-1} + a_3 R_{t-2}$$

Avec :

C_t: la consommation au temps t

R_t: Revenu au temps t

R_{t-1}: Revenu décalé d'une période

Pour des raisons pédagogiques, nous estimons un MCE suivant :

- (i) la méthode à une seule étape de BANERJEE et al. (ou MCE à la Handry), spécifié de la manière suivante :

$$DLCONS_t = a_0 + a_1 DLREV_t + a_2 LCONS_{t-1} + a_3 LREV_{t-1} + \varepsilon_t$$

Avec : $a_0 > 0$; $a_1 > 0$; $-1 < a_2 < 0$; $a_3 > 0$.

α_2 est la force de rappel ou coefficient d'équilibre/ajustement ; « α_1 » est l'élasticité à court terme Consommation du Revenu ; et « $-\alpha_3/\alpha_2$ » mesure l'élasticité à long terme. En outre « $[1/\alpha_2]$ » traduit le retard moyen : soit le temps moyen (période) nécessaire pour que 100% des effets de la variable indépendante se fassent ressentir sur la variable dépendante.

- (ii) la méthode à deux étapes de Engle et Granger, spécifié comme suit :

$$DLCONS_t = a_0 + a_1 DLREV_t + \gamma e_{t-1} + \varepsilon_t$$

Avec : $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $-1 < \gamma < 0$.

« γ » est la force de rappel ou coefficient d'équilibre/ajustement ; « α_1 » est l'élasticité à court terme Consommation-Revenu.

✓ **Estimation du MCE**

- A la Banerjee et al. : ls DLC DLy LC(-1) LY(-1)

View Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids				
Dependent Variable: D(LC)				
Method: Least Squares				
Date: 04/22/18 Time: 22:49				
Sample (adjusted): 1947Q2 1989Q3				
Included observations: 170 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(LY)	0.229646	0.054884	4.184232	0.0000
LC(-1)	-0.077517	0.034468	-2.248949	0.0258
LY(-1)	0.077407	0.034015	2.275697	0.0241
R-squared	0.094303	Mean dependent var	0.828222	
Adjusted R-squared	0.083457	S.D. dependent var	0.794673	
S.E. of regression	0.760790	Akaike info criterion	2.308571	
Sum squared resid	96.65989	Schwarz criterion	2.363909	
Log likelihood	-193.2286	Hannan-Quinn criter.	2.331027	
Durbin-Watson stat	2.088358			

- A la Engle et Granger : ls DLC DLY res(-1)

View Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids				
Dependent Variable: D(LC)				
Method: Least Squares				
Date: 04/22/18 Time: 22:54				
Sample (adjusted): 1947Q2 1989Q3				
Included observations: 170 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.637709	0.074417	8.569454	0.0000
D(LY)	0.225616	0.054965	4.104732	0.0001
RES(-1)	-0.077547	0.034406	-2.253882	0.0255
R-squared	0.097485	Mean dependent var	0.828222	
Adjusted R-squared	0.086676	S.D. dependent var	0.794673	
S.E. of regression	0.759453	Akaike info criterion	2.305053	
Sum squared resid	96.32038	Schwarz criterion	2.360390	
Log likelihood	-192.9295	Hannan-Quinn criter.	2.327508	
F-statistic	9.019193	Durbin-Watson stat	2.089976	
Prob(F-statistic)	0.000191			

REMARQUE

- Les deux méthodes fournissent des résultats semblables à quelques différences près ; seulement, l'approche de Banerjee et al. (elle est retenue dans ce cadre) nous aide particulièrement à calculer l'élasticité de long terme.
- Dans tous les cas, la force de rappel est statistiquement significative ; elle est négative et est comprise entre « 0 » et « 1 » en valeur absolue2, ce qui fonde à affirmer que nos séries « LC » et « LY » sont cointégrées

III-3-4) INFERENCE ET INTERPRETATION (SPECIFICATION A LA BANERJEE)

Tous les paramètres sont statistiquement significatifs et le modèle spécifié explique environ 60% des variations des dépenses de consommation (le modèle a passé tous les tests diagnostics, il est globalement bon et l'ajustement aussi :

- *Force de rappel* : Disons que les chocs sur les dépenses de consommation se corrigent à 7.75% par l'effet de « feed back » ; autrement dit, l'on arrive à ajuster 7.75% du déséquilibre entre le niveau désiré et effectif des dépenses de consommation
- *Retard moyen* = $|1/0.077|$: Un choc constaté sur les dépenses de consommation en est entièrement résorbé au bout de 4 ans, 9 mois et 8 jours en moyenne ;
- *Elasticité à court terme* : A court terme, si le revenu augmente de 10%, les dépenses de consommation varie dans le même sens pour 2.29% ;
- *Elasticité à long terme* ($0.077407 / 0.077517 = 0.9998$) : A long terme, si le revenu augmente de 10%, les dépenses de consommation varie dans le même sens pour 9.99 %.

III-4) COINTEGRATION L'APPROCHE ARDL BOUND TESTING (AUTOREGRESSIF DISTRIBUTED LAG)

Dans l'approche ARDL Bound testing, les variables dépendantes retardées et indépendantes retardées peuvent être introduites dans le modèle. Le terme "auto régressive" signifie que la variable dépendante retardée peut déterminer la variable dépendante présente alors que le terme "distributed lag" se réfère au retard des variables indépendantes. Ainsi, cette technique peut être utilisée même si la variable indépendante n'entraîne pas une variation instantanée de la variable dépendante comme envisagé dans le modèle théorique. Cependant pour appliquer la méthode ARDL Bound testing, il faut être sûr qu'il n'y a aucune variables I(2). En effet, d'après Ouattara (2004), les statistiques critiques F ne sont pas valables dans cette approche en présence d'une variable I (2). De même il faut être prudent sur l'utilisation des valeurs critiques lorsque l'échantillon est de taille réduit.

L'approche de "ARDL Bound testing" est préférée à d'autres techniques de cointégration pour plusieurs raisons :

- 1) D'abord, d'après Pesaran et al. (2001), cette approche convient mieux pour des échantillons de tailles réduits. Cependant, la technique de cointégration de Johansen nécessite un grand échantillon pour obtenir un résultat valide.
- 2) Ensuite, cette méthodologie peut être appliquée si les variables utilisées ; sont toutes I (1), sont toutes I (0), ou sont mixtes.
- 3) - Le modèle ARDL concède un estimateur convergent des coefficients de long terme indépendamment du fait que les régresseurs sous-jacents sont purement I (0), I(1) ou mutuellement cointégrés d'après Pesaran et al. (2001).
- 4) - Selon Pesaran et Shin (1995), l'approche ARDL nécessite une forme réduite simple de l'équation par contre dans d'autres techniques, un système d'équations est nécessaire.
- 5) - Le test ARDL Bound permet d'utiliser différents retards pour les régresseurs par opposition aux modèles VAR de cointégration où des retards mixtes pour les variables ne sont pas autorisés (Pesaran et al, 2001).

III-4-1) EXEMPLE D'APPLICATION DE LA COINTEGRATION PAR LES MODELES ARDL) CAS D'EXISTENCE ET STABILITE DE LA FONCTION DE DEMANDE DE MONNAIE EN ALGERIE. ABDERRAHMANI.

Résumé

Cette étude examine la question d'existence et de stabilité de la fonction de demande de monnaie en Algérie en utilisant la cointégration basée sur un modèle autorégressif à retard échelonnés (ARDL).

III-4-1-1) LA SPECIFICATION DU MODELE ARDL

$$\Delta(\log(M_t)) = c_0 + c_1 \log(M)_{t-1} + c_2 \log(PIB)_{t-1} + c_3 \log(TCH)_{t-1} + c_4 \log(TINT)_{t-1} + c_5 (\text{INF})_{t-1} + c_6 * \text{trend} + \sum_{i=1}^P \beta_i \Delta \log(M)_{t-i} + \sum_{i=0}^{p-1} \gamma_i^1 \Delta \log(PIB)_{t-i} + \sum_{i=0}^{p-1} \gamma_i^2 \Delta \log(TCH)_{t-i} + \sum_{i=0}^{p-1} \gamma_i^3 \Delta \log(TINT)_{t-i} + \sum_{i=0}^{p-1} \gamma_i^4 \Delta (\text{INF})_{t-i} + \varepsilon_t \dots \quad (1)$$

Avec

- M : la masse monétaire réelle au sens de M2
- ε_t est un processus stationnaire de moyenne nulle.
- PIB : produit intérieur brut

- INF : le taux d'inflation
- TCH : le taux de change
- TINT : le taux d'intérêt
- p : est le retard optimal du modèle déterminé par minimisation des critères d'Akaike (AIC) et de Schwarz Bayes (SBC).
- Δ : opérateur de différence.

où les c_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$) représentent les coefficients de la relation de long terme entre les variables et les β_i , γ_i sont les coefficients de la dynamique de court terme. L'estimation de la relation (1) requiert le choix d'un nombre optimal de retard, soit p^* . Le retard optimal est choisi à partir des critères d'information bayésienne de Schwarz (SBC) et d'Akaike (AIC) en estimant de manière séquentielle le modèle (1) pour des ordres allant de $p = 0$ à $p = 4$.

Le modèle ARDL se compose de deux parties : la première partie, combinaison linéaire des variables en niveau décalées, montre la dynamique de long terme ; la seconde, combinaison linéaire de variables différencierées retardées, représente la dynamique de court terme.

La stratégie du test de Cointégration selon l'approche de Pesaran et al (2001) comprend deux étapes :

- a) détermination du retard optimal à l'aide des critères d'information Akaike Information Criterion (AIC) et le Schwarz Bayesian Criterion (SBC). Le SBC permet de sélectionner le retard le plus petit possible alors que l'AIC permet de choisir le retard le plus élevé possible. Par ailleurs, chaque variable explicative entrant dans le modèle ARDL doit avoir un retard maximal inférieur à p .
- b) examen de toutes les combinaisons possibles pour les retards de chaque variable afin de déterminer le modèle ARDL optimal pour ensuite tester la cointégration.
- c) En fait, le modèle ARDL effectue $(p+1)^k$ régressions pour obtenir le retard optimal pour chaque variable avec p : le retard maximal, k : le nombre de variables dans l'équation.

Le test de cointégration selon l'approche de Pesaran et al (2001) dans les modèles ARDL consiste à tester la nullité conjointe des coefficients des variables en niveau et retardées du modèle. En fait, l'hypothèse nulle du test de cointégration Wald test s'écrit :

$$H_0 = c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0 \dots \text{(2) Pas de cointégration}$$

Si l'hypothèse nulle est rejetée, alors il y'a une relation de long terme entre les variables, sinon il n'y a aucune relation de long terme entre les variables. La statistique du test **F-stat** ou statistique de Wald suit une distribution non standard qui dépend du caractère non stationnaire des variables régresseurs, du nombre de variables dans le modèle ARDL, de la présence ou non d'une constante et d'une tendance ainsi que de la taille de l'échantillon. Deux valeurs critiques sont générées avec plusieurs cas et différents seuils : la première correspondant au cas où toutes les variables du modèle sont I(1) : CV-I(1) qui représente la borne supérieure ; la seconde correspond au cas où toutes les variables du modèle sont I(0) : CVI(0) qui est la borne inférieure. (D'où le nom de « *bound testing approach cointegration* » ou « *approche de test de cointégration par les bornes* »).

Alors la règle de décision pour le test de cointégration est la suivante :

- Si **F-stat** > **CV-I(1)**, alors l'hypothèse nulle est rejetée et donc il y'a cointégration.
- Si par contre **F-stat** < **CV-I(0)**, alors l'hypothèse nulle de non cointégration est acceptée.

- Si la F-stat est comprise entre les deux (2) valeurs critiques, rien ne peut être conclu.

Dans le cas où il existe une relation de long terme entre les variables (cointégration), le modèle de long terme s'écrit :

$$\bullet \quad \begin{aligned} \log(M)_t = & \alpha_0 + \sum_{i=1}^P \beta_i \log(M)_{t-i} + \sum_{i=0}^P \psi_i \log(PIB)_{t-i} + \sum_{i=0}^P \delta_i \log(TCH)_{t-i} + \sum_{i=0}^P \log((TINT)_{t-1} \\ & + \sum_{i=0}^P (INF)_{t-1} + \varepsilon_t \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

Une fois que la relation de long terme est mise en évidence et validée, il est possible alors d'estimer le modèle à correction d'erreur (ECM), qui indique la vitesse d'ajustement vers l'équilibre de long terme, après une perturbation de court terme.

- L'équation du modèle à correction d'erreur est la suivante :

$$\bullet \quad \Delta \log(M)_t = \gamma_1 + \alpha_1 (ECM)_{t-1} + \sum_{i=1}^P \theta_i \Delta \log(M)_{t-i} + \sum_{i=0}^P \omega_i \Delta \log(PIB)_{t-i} + \sum_{i=0}^P \lambda_i \Delta \log(TCH)_{t-i} + \\ \sum_{i=0}^P \pi_i \Delta \log(TINT)_{t-i} + \sum_{i=0}^P \varphi_i \Delta (INF)_{t-i} + \varepsilon_t \dots \dots \dots (5)$$

III-4-1-2) TEST DE LA RACINE UNITAIRE

Bien que les tests de racine unitaire ne soient pas une exigence du test de cointégration de Pesaran et Al (2001), il convient de vérifier que les séries sont intégrées d'ordre au plus égal à un. En outre, les tests de racine unitaire permettront de déterminer le nombre de retards à ajouter aux modèles vectoriels pour le test de causalité. Les résultats du test de présence de la racine unitaire de Dickey et fuller augmenter mené sur les trois variables, la consommation d'électricité, le produit intérieur brut par habitant et le prix réel de l'électricité, sont résumé dans le tableau. Pour ces cinq variables, ce test est réalisé à partir d'un modèle avec constante et tendance linéaire. En effet, les résultats du test montrent que la plupart des séries étudiées, sont intégrées d'ordre 1. Les résultats du test de DFA sont consignés dans le tableau suivant :

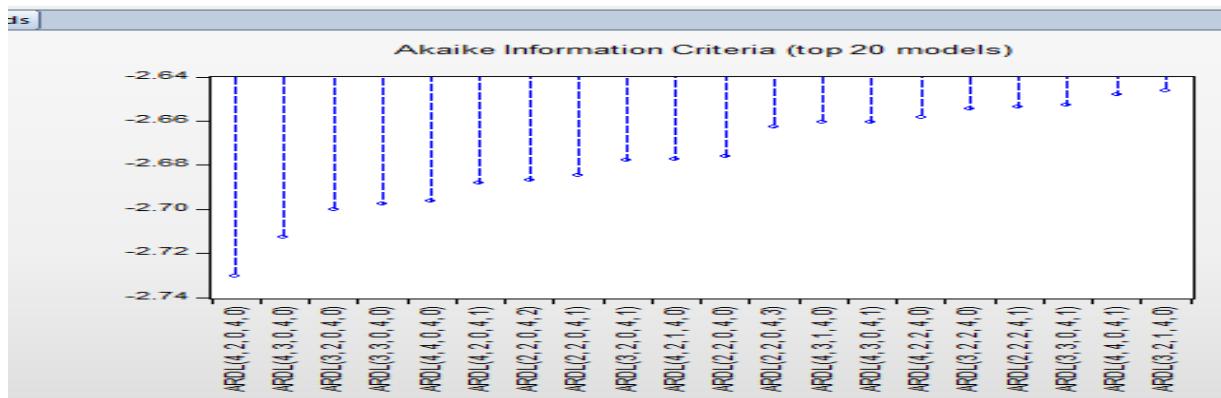
	Modèle [3]			Modèle [2]		Modèle [1]	Ordre I
	constant	trend	ADF test	constant	ADF test	ADF test	
Log(M2R)	1.72	0.6	-0.74	5.09	-1.81	1.5	I(1)
Log(PIBR)	3.40	1.81	-1.90	3.6	1	/	I(1)
Log(TCH)	1.92	2.22	-2.59	1.64	1.36	0.21	I(2)
(Log(TINT))	0.13	0.46	-1	1.48	-1.46	-4.46	I(1)
(INF)	1.47	0.72	-1.95	1.44	-1.91	-1.24	I(1)

Etant données que les résultats de racine d'unité sont en faveur d'un test de cointégration, nous avons utilisé la méthode ARDL en sélectionnant la structure du retard optimal à inclure dans l'estimation du modèle ARDL à l'aide du critère d'information d'Akaike⁴. Sous EVIEWS 9.5 la procédure se déroule de la manière suivante :

⁴ Cependant, si le modèle établi avec le retard optimal comporte une autocorrélation, on ajoute un autre retard sur les variables en différence premières qui donne la plus petite valeur de Schwarz. Si le problème d'autocorrélation persiste toujours, le processus continue jusqu'à ce que ce problème d'autocorrélation soit résolu. Étant donné que les données examinées sont annuelles dans cette étude, une période de quatre est retenue comme retard maximum

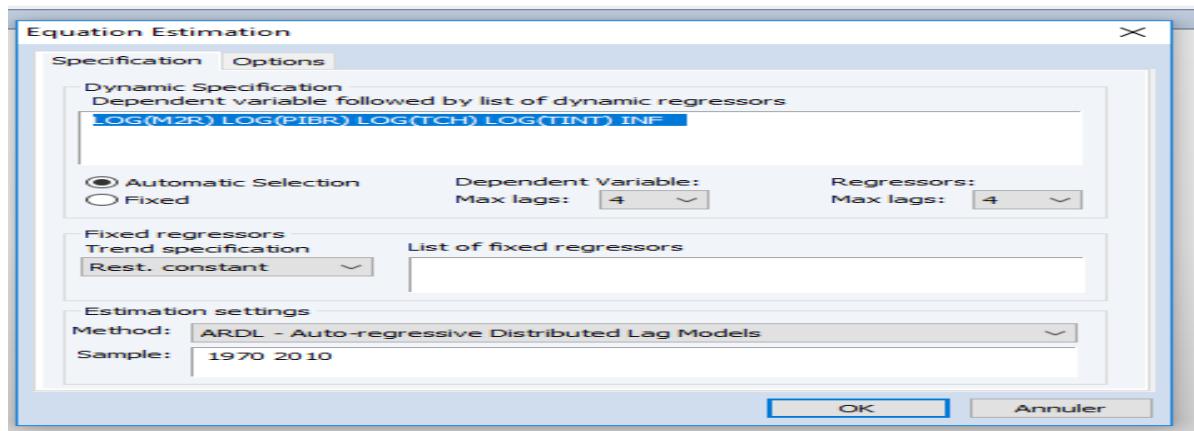
Std. Error	t-Statistic	Prob.*
0.132383	1.943130	0.0649
0.119338	1.831360	0.0806

Détermination du nombre de retard du modèle ARDL



Les statistiques d'Akaike suggèrent un ARDL (4,2,0,4,0).

III-4-1-3) ESTIMATION DU MODELE ARDL (4,2,0,4,0).



View Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids

Dependent Variable: LOG(M2R)
 Method: ARDL
 Date: 04/12/18 Time: 23:03
 Sample (adjusted): 1974 2010
 Included observations: 37 after adjustments
 Maximum dependent lags: 4 (Automatic selection)
 Model selection method: Akaike info criterion (AIC)
 Dynamic regressors (4 lags, automatic): LOG(PIBR) LOG(TCH) LOG(TINT)
 INF

Fixed regressors: C
 Number of models evaluated: 2500
 Selected Model: ARDL(4, 2, 0, 4, 0)

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.*
LOG(M2R(-1))	0.257237	0.132383	1.943130	0.0649
LOG(M2R(-2))	0.210551	0.119338	1.831360	0.0806
LOG(M2R(-3))	-0.000974	0.116376	-0.008369	0.9934
LOG(M2R(-4))	0.122020	0.087771	1.390208	0.1784
LOG(PIBR)	0.026423	0.079431	0.332658	0.7425
LOG(PIBR(-1))	0.109306	0.078813	1.386892	0.1794
LOG(PIBR(-2))	0.242767	0.074311	3.266917	0.0035
LOG(TCH)	-0.124420	0.053503	-2.325456	0.0297
LOG(TINT)	-0.068744	0.078258	-0.878427	0.3892
LOG(TINT(-1))	0.144434	0.095708	1.509110	0.1455
LOG(TINT(-2))	-0.040064	0.089908	-0.445611	0.6602
LOG(TINT(-3))	-0.036611	0.090062	-0.406504	0.6883
LOG(TINT(-4))	0.195213	0.079257	2.463030	0.0221
INF	0.009778	0.002245	4.355307	0.0003
C	-0.662448	0.206428	-3.209101	0.0040

III-4-1-4) TEST DE COINTEGRATION (BOUNDS TEST)

View	Proc	Object	Print	Name	Freeze	Estimate	Forecast	Stats	Resids
Representations Estimation Output Actual,Fitted,Residual ARMA Structure... Gradients and Derivatives Covariance Matrix Model Selection Summary Coefficient Diagnostics Residual Diagnostics Stability Diagnostics Label LOG(M2R(-3)) -0.000974 LOG(M2R(-4)) 0.122020 LOG(PIBR) 0.026423 LOG(PIBR(-1)) 0.105165 LOG(PIBR(-2)) 0.127616 LOG(TCH) -0.124420 LOG(TINT) -0.068744 LOG(TINT(-1)) 0.144434 LOG(TINT(-2)) 0.144434 LOG(TINT(-3)) -0.036611 LOG(TINT(-4)) 0.195213									
Components Selection Criterion (AIC) c: LOG(PIBR) LOG(TCH) LOG(TINT) Scaled Coefficients Confidence Intervals... Confidence Ellipse... Variance Inflation Factors Coefficient Variance Decomposition Cointegration and Long Run Form Cointegration Graph Wald Test- Coefficient Restrictions... Omitted Variables Test - Likelihood Ratio... Redundant Variables Test - Likelihood Ratio... Bounds Test 0.079257 2.463030 0.0221									
View	Proc	Object	Print	Name	Freeze	Estimate	Forecast	Stats	Resids
ARDL Bounds Test Date: 04/12/18 Time: 23:09 Sample: 1974 2010 Included observations: 37 Null Hypothesis: No long-run relationships exist									
Test Statistic Value k F-statistic 15.36274 4									
Critical Value Bounds									
Significance I0 Bound I1 Bound									
10% 2.2 3.09 5% 2.56 3.49 2.5% 2.88 3.87 1% 3.29 4.37									
Test Equation: Dependent Variable: DLOG(M2R) Method: Least Squares Date: 04/12/18 Time: 23:09 Sample: 1974 2010 Included observations: 37									
Variable Coefficient Std. Error t-Statistic Prob. DLOG(M2R(-1)) -0.302225 0.099798 -3.028375 0.0062									

La statistique du test de cointégration est **F-stat = 15.36274** et les valeurs critiques simulées par Narayan et al. (2005) pour $k= 5$, $n= 37$ et modèle avec trend et constante sont : **CV-I(0) = 2.56** et **CV-I(1)=3.49** On a bien : **F-stat > CV-I(1)**. L'hypothèse nulle du test est alors rejetée. Il existe alors une relation de long terme entre les variables.

III-4-1-5) ESTIMATION DE LA RELATION DE LONG TERME

View	Proc	Object	Print	Name	Freeze	Estimate	Forecast	Stats	Resids
Representations Estimation Output Actual,Fitted,Residual ARMA Structure... Gradients and Derivatives Covariance Matrix Model Selection Summary Coefficient Diagnostics Residual Diagnostics Stability Diagnostics Label 2.5% 2.88 1% 3.29									
No long-run relationships exist k 4									
Scaled Coefficients Confidence Intervals... Confidence Ellipse... Variance Inflation Factors Coefficient Variance Decomposition Cointegration and Long Run Form Cointegration Graph Wald Test- Coefficient Restrictions... Omitted Variables Test - Likelihood Ratio... Redundant Variables Test - Likelihood Ratio... Bounds Test									
Test Equation: Dependent Variable: DLOG(M2R) Method: Least Squares Date: 04/12/18 Time: 23:09 Sample: 1974 2010 Included observations: 37									
Variable Coefficient Std. Error t-Statistic Prob. DLOG(M2R(-1)) -0.302225 0.099798 -3.028375 0.0062									

III-4-1-6) ESTIMATION DU MODELE ECM

Cointegrating Form					
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.	
DLOG(M2R(-1))	-0.322447	0.099272	-3.248122	0.0037	
DLOG(M2R(-2))	-0.114909	0.074265	-1.547281	0.1361	
DLOG(M2R(-3))	-0.119877	0.076638	-1.564211	0.1320	
DLOG(PIBR)	0.022122	0.056197	0.393648	0.6976	
DLOG(PIBR(-1))	-0.241104	0.068753	-3.506817	0.0020	
DLOG(TCH)	-0.131949	0.070214	-1.879234	0.0735	
DLOG(TINT)	-0.073912	0.059811	-1.235771	0.2296	
DLOG(TINT(-1))	-0.113024	0.057419	-1.968421	0.0617	
DLOG(TINT(-2))	-0.153406	0.055109	-2.783687	0.0108	
DLOG(TINT(-3))	-0.193278	0.060935	-3.171904	0.0044	
D(INF)	0.010516	0.001938	5.425217	0.0000	
CointEq(-1)	-0.398787	0.041780	-9.544912	0.0000	
Cointeq = LOG(M2R) - (0.9388*LOG(PIBR) - 0.3086*LOG(TCH) + 0.4818 *LOG(TINT) + 0.0243*INF - 1.6431)					
Long Run Coefficients					
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.	
LOG(PIBR)	0.938810	0.038708	24.253798	0.0000	
LOG(TCH)	-0.308607	0.128069	-2.409690	0.0248	
LOG(TINT)	0.481757	0.120168	4.009019	0.0006	
INF	0.024254	0.008652	2.803406	0.0104	
C	-1.643117	0.231664	-7.092675	0.0000	

III-4-1-7) INTERPRETATION DES RESULTATS DES ESTIMATIONS

L'interprétation de ces résultats se base sur l'analyse des signes des coefficients de l'équation d'encaisse réelle. Dans ce sens, le tableau précédent montre que les signes sont conformes à attentes théoriques. En effet l'encaisse réelle est positivement influencé par le volume réel des transactions économiques, l'élasticité de la demande de monnaie par rapport aux volumes de ces transactions est inférieur à l'unité, donc il y a des économies d'échelle dans la demande de monnaie en Algérie. Pour ce qui est du taux de change, les résultats montrent un impact négatif sur la demande de monnaie. Donc, on assiste à une fuite devant la monnaie nationale remplacée par des devises. On note aussi que le résultat du taux d'intérêt est mitigé par le fait qu'elle a un signe positif (non conforme aux attentes théoriques) qui peut être interprété par une faible contribution comme instrument du mécanisme de transmission de la politique monétaire. Les résultats confirment que nous sommes devant une fonction de demande de monnaie de transaction et la théorie quantitative est confirmée. Alors, les autorités monétaires et la banque de l'Algérie doivent prendre en consécration la masse monétaire comme objectif intermédiaire de la conduite de la politique monétaire en Algérie.

Les différents tests effectués sur la relation de long terme montre que le modèle estimé ne comporte pas de problème d'autocorrélation et d'hétéroscédasticité conditionnelle. Il n'existe pas non d'erreur de spécification

III-4-1-8) DIAGNOSTICS DU MODELE ESTIME

- **TEST D'AUTOCORRELATION**

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

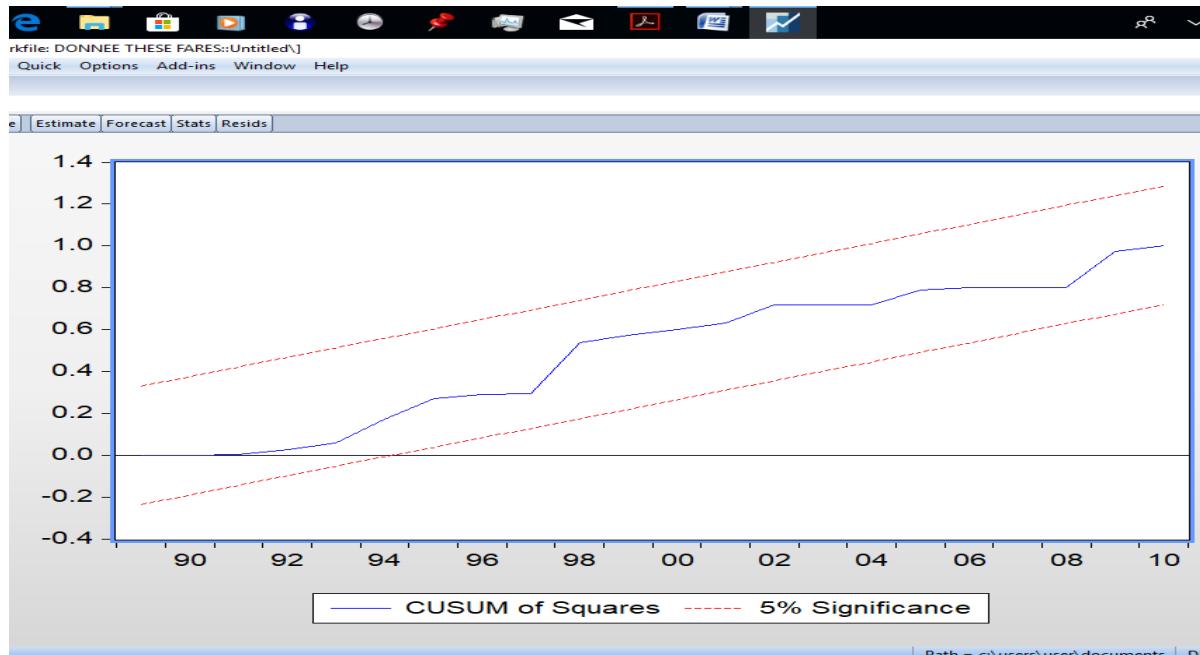
F-statistic	0.601107	Prob. F(2,20)	0.5578
Obs*R-squared	2.097983	Prob. Chi-Square(2)	0.3503

Les résultats du modèle de court terme montrent que le coefficient à correction d'erreur ECM est négatif et significatif à 1%. Le coefficient de -0,39 indique une vitesse très élevée de convergence vers l'équilibre de long terme. Cela traduit que les déviations à court

terme de l'équilibre de la masse monétaire se corrige à 39% par an. Le modèle de court terme donne quasiment des résultats similaires à celui de long terme.

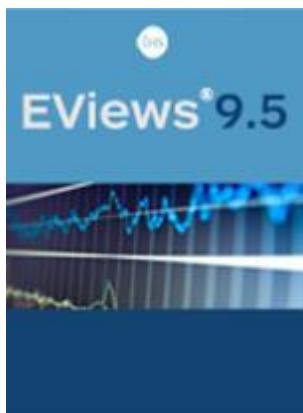
Par la suite, une série de tests économétriques est effectuée sur le résidu afin de valider le modèle. Il s'agit des tests de normalité (Jarque-Bera), d'absence de corrélation sérielle d'ordre 12 (LM-test de Breusch-Godfrey), d'homocédasticité de White (White-test) et enfin de stabilité des coefficients (CUSUM test)

- **TEST DE STABILITE DES COEFFICIENTS**



CHAPITRE VI : PRESENTATION DU LOGICIEL EVIDEWS 9.5

VI-1). PRESENTATION DU LOGICIEL EVIDEWS



Une combinaison de puissance et de facilité d'utilisation font d'Eviews l'outil idéal pour tous ceux qui travaillent avec des séries chronologiques, des coupes transversales ou des données longitudinales. Avec Eviews, vous pouvez gérer rapidement et efficacement vos données, effectuer des analyses économétriques et statistiques, générer des prévisions ou des simulations de modèles et produire des graphiques et des tableaux de haute qualité pour publication ou inclusion dans d'autres applications.

Eviews offre aux chercheurs universitaires, entreprises, agences gouvernementales et aux étudiants l'accès à de puissants outils statistiques, de prévision et des outils de modélisation à travers une interface orientée-objet, innovante. Eviews allie le meilleur de la technologie logicielle moderne avec des fonctionnalités de pointe. Le résultat est un programme performant qui offre une puissance sans précédent au sein d'une interface flexible, facile à utiliser.

VI-2). LES FONCTIONNALITES

Logiciel d'économétrie moderne et convivial offrant toutes les fonctions nécessaires en analyse financière, prévision macro-économique et simulations :

- 1) Estimations, prévisions, analyses statistiques, simulations, gestion de données, réunies dans une puissante interface orientée objet
- 2) Techniques d'estimation d'équations pour des séries chronologiques, des tableaux croisés...
- 3) Évaluation de modèles : tests d'hypothèse, modèles ARCH...
- 4) Prévision et simulation : simulation stochastique, méthode de Monte-Carlo, prévisions statistiques et dynamiques...
- 5) Gestion des données : conversion automatique des fréquences, prise en charge des formats Excel 2007 et ASCII, import de fichiers de la base de données FRED, interaction avec les programmations sous MATLAB et R, plus de 4 millions d'observations par séries...

VI-3). LES AVANTAGES

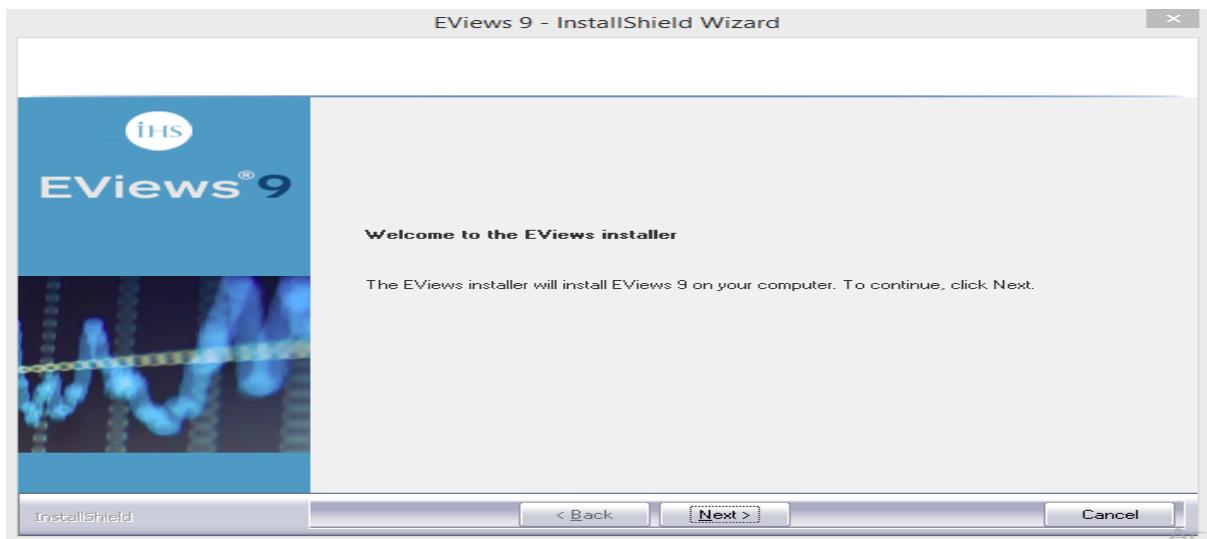
Ces avantages sont nombreux :

- Le logiciel le plus utilisé en économétrie
- Outil complet de séries chronologiques
- Une interface conviviale et intuitive
- Une gestion des données efficace
- Des graphiques de haute qualité

IV. L'installation

Eviews est disponible sous différentes plateformes : Windows, IOS et linux. Il faut donc adapter l'installation aux différents types de système d'exploitation avec une multitude de version « student, entreprise, ... »

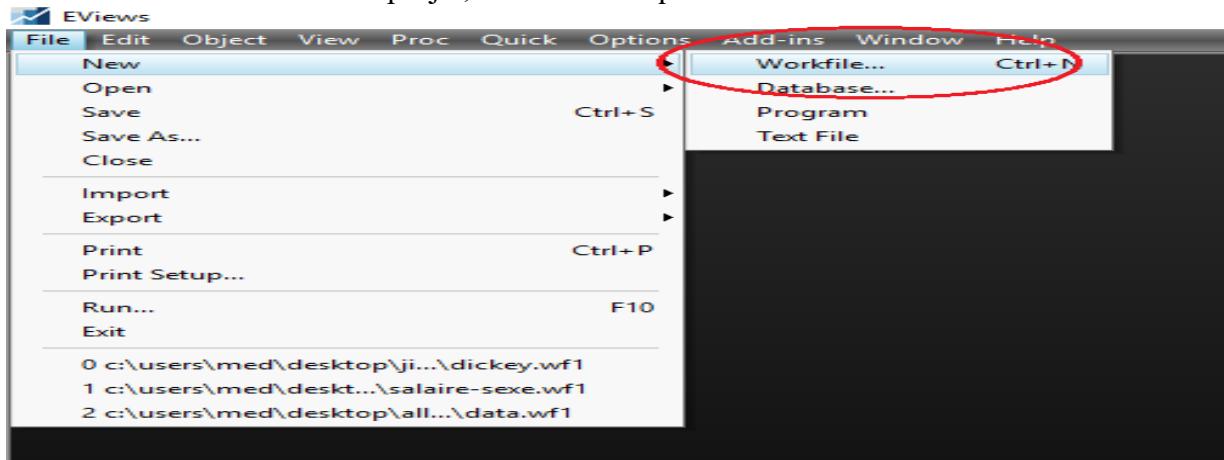
CHAPITRE VI : PRÉSENTATION DU LOGICIEL EVIEW 9.5



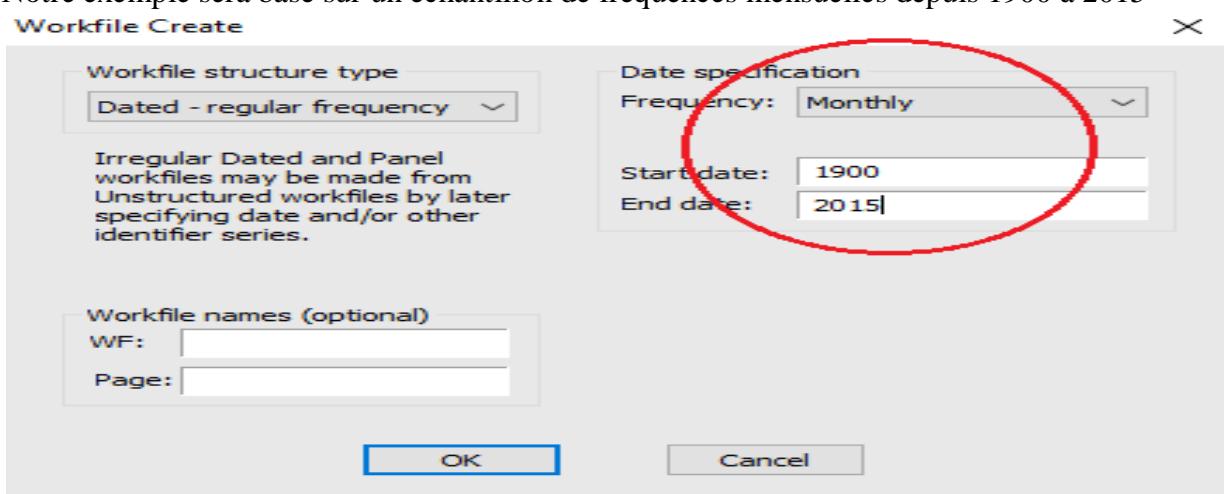
VI-4). DEMONSTRATION

1. Créer un nouveau projet

Pour la création d'un nouveau projet, il suffit de cliquer sur **file -> new -> workfile**



Notre exemple sera basé sur un échantillon de fréquences mensuelles depuis 1900 à 2015

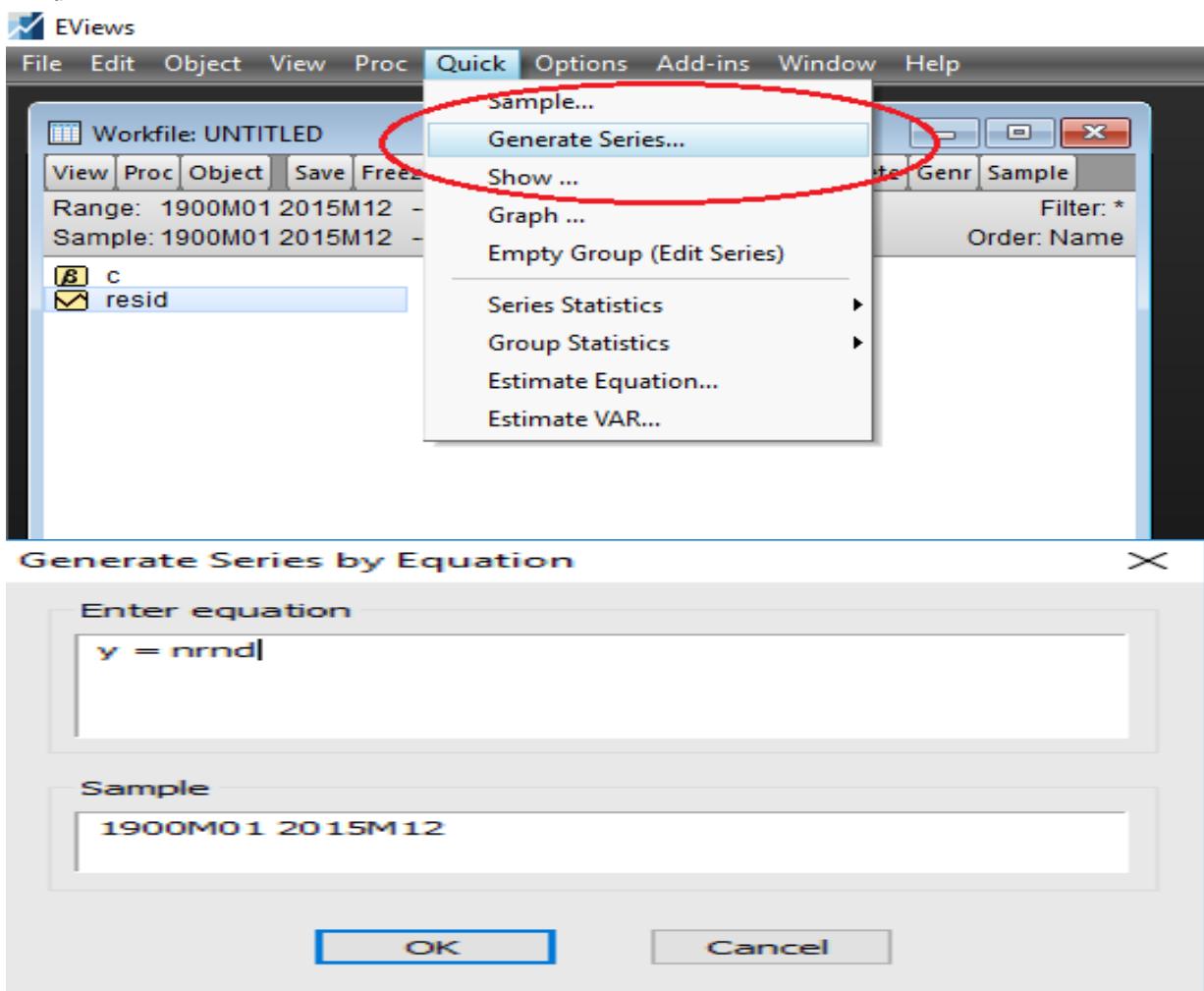


CHAPITRE VI : PRÉSENTATION DU LOGICIEL EVIEW 9.5

Series: RESID Workfile: UNTITLED::Untitled\					
View	Proc	Object	Properties	Print	Name
Last updated: 02/27/17 - 22:02					
1900M01	NA				
1900M02	NA				
1900M03	NA				
1900M04	NA				
1900M05	NA				
1900M06	NA				
1900M07	NA				
1900M08	NA				
1900M09	NA				
1900M10	NA				
1900M11	NA				
1900M12	NA				
1901M01	NA				
1901M02	NA				
1901M03	NA				
1901M04	NA				
1901M05	NA				
1901M06	NA				
1901M07	NA				
1901M08	NA				
1901M09	NA				
1901M10	NA				

VI-5). GENERER UNE SÉRIE TEMPORELLE ALÉATOIRE

Création une série aléatoire, se fait par une commande : Quick -> generate series ... Y = nrnd

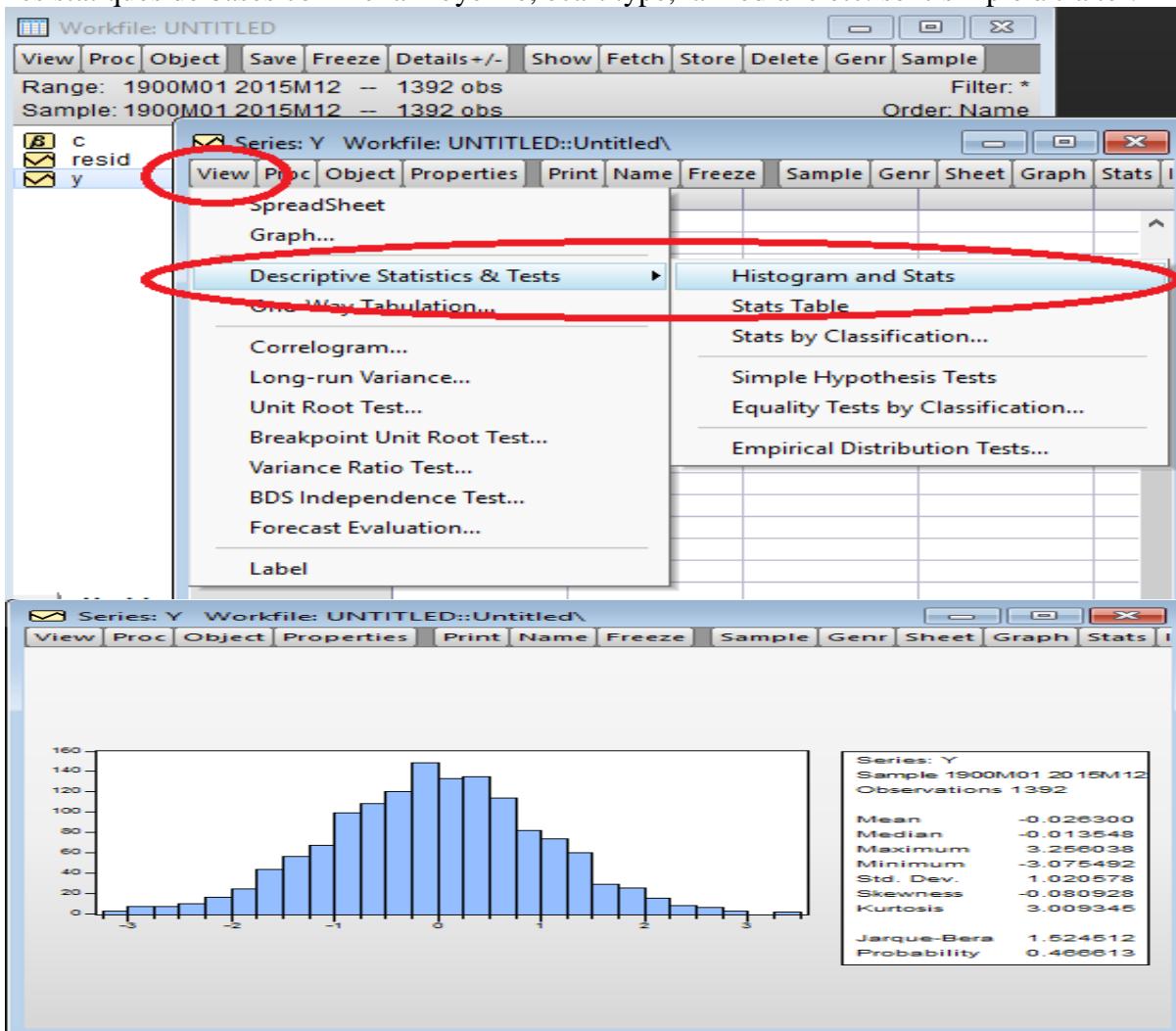


CHAPITRE VI : PRÉSENTATION DU LOGICIEL EVIEW 9.5

Series: Y Workfile: UNTITLED::Untitled\	
Last updated: 02/27/17 - 22:21	
Modified: 1900M01 2015M12 // y = nrnd	
1900M01	-1.146240
1900M02	-1.962531
1900M03	-0.199692
1900M04	-0.153682
1900M05	1.147600
1900M06	-1.871538
1900M07	1.369652
1900M08	-1.654297
1900M09	0.138773
1900M10	-0.558353
1900M11	1.040971
1900M12	1.216476
1901M01	0.070388
1901M02	0.497107
1901M03	-0.288316
1901M04	-0.770608

VI -6). LES STATIQUES DE BASES

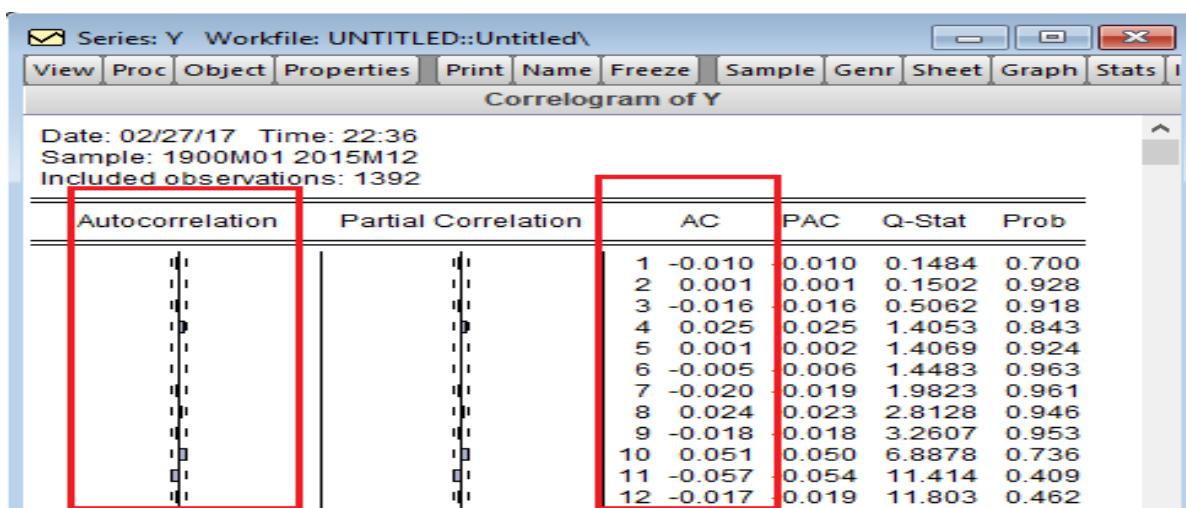
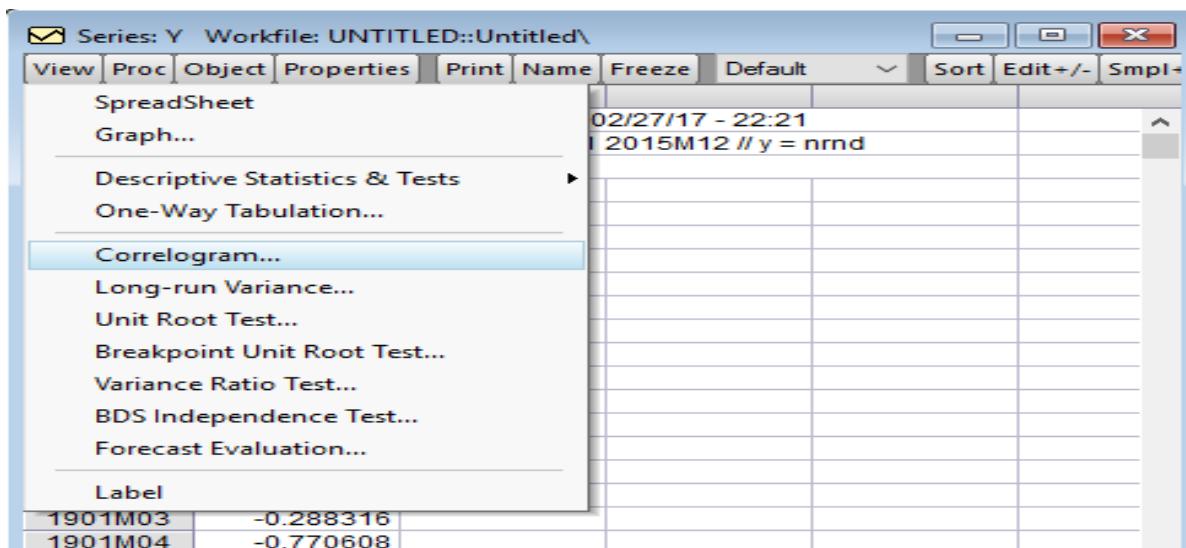
Les statiques de bases comme la moyenne, écart type, la médiane etc. sont simple à traiter.



VI-6-1). L'AUTOCORRELATION

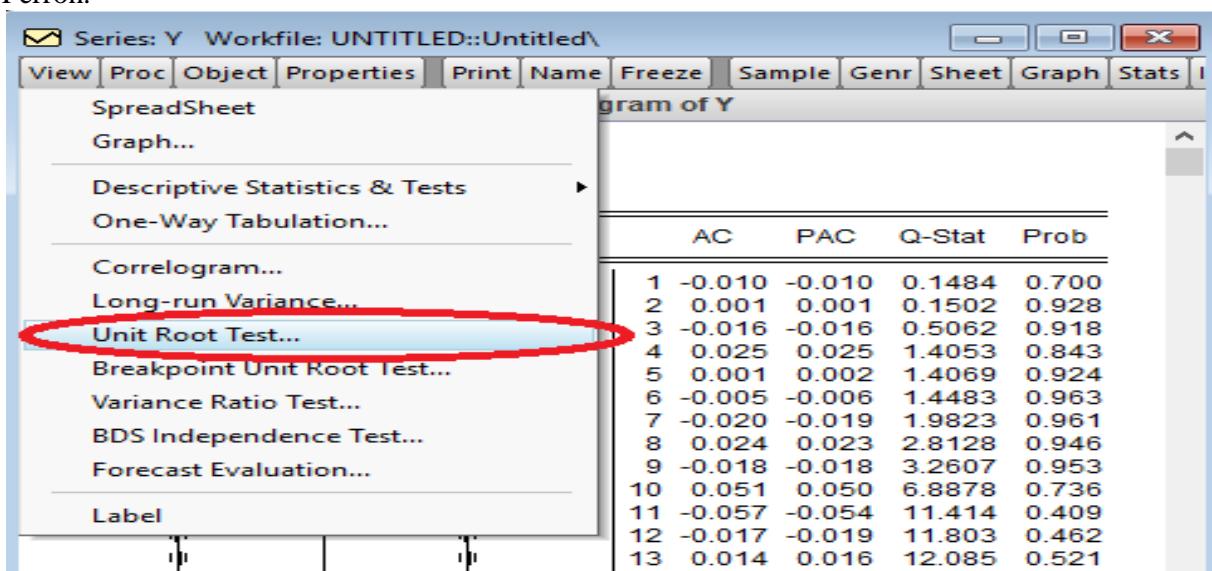
Pour calculer les autocorrelations, il existe une fonction qui se génère automatiquement, « Auto Correlation Function AC »

CHAPITRE VI : PRÉSENTATION DU LOGICIEL EVIEW 9.5



VI-6-2). LA STATIONNARITÉ D'UNE SÉRIE TEMPORELLE

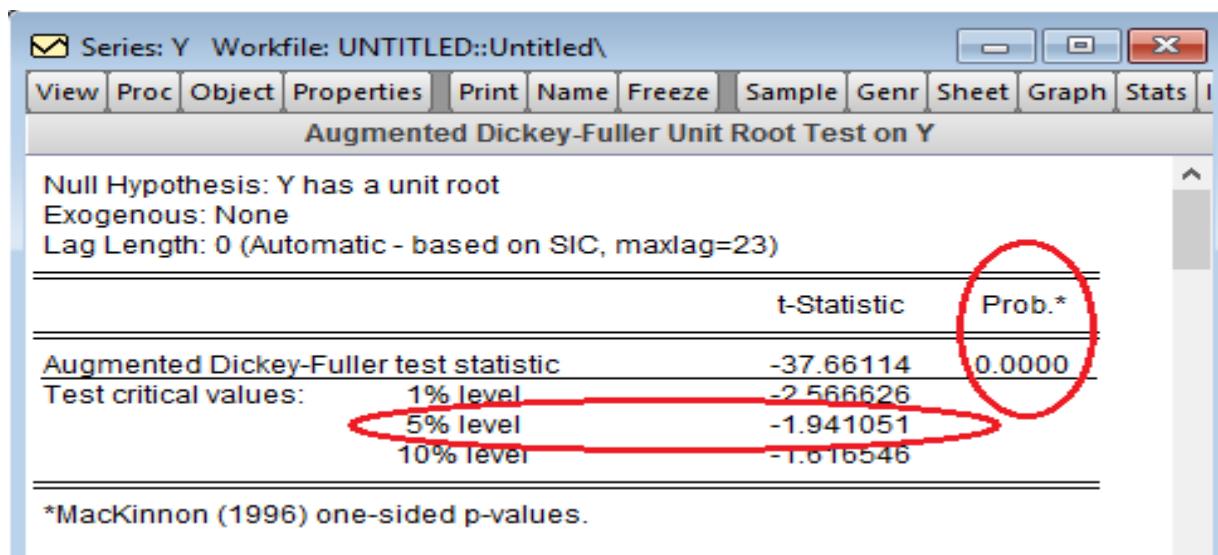
Pour étudier la stationnarité, il existe deux tests, le teste de Dickey-Fuller et le teste de Phillips-Perron.



CHAPITRE VI : PRÉSENTATION DU LOGICIEL EVIEW 9.5

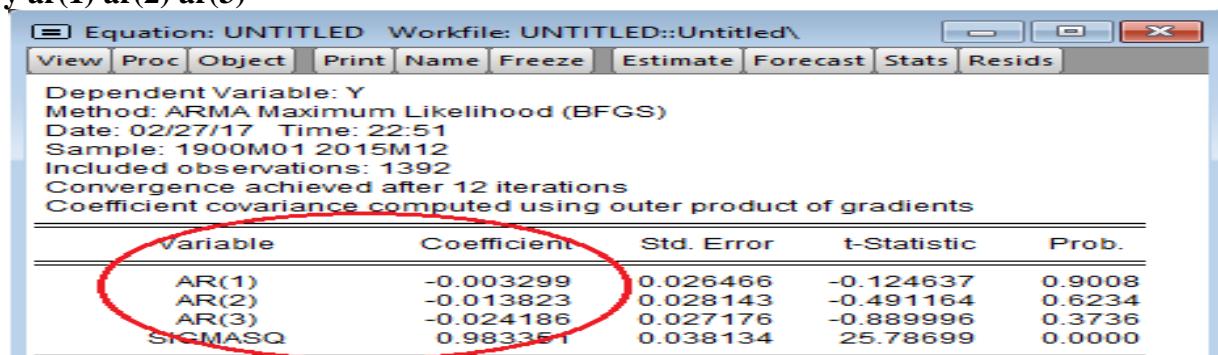
L'hypothèse Nulle : Présence de racine unitaire : Série non Stationnaire et l'Hypothèse alternative : Pas de racine Unitaire : Série Stationnaire

La P-Value: 0.0009 accepte H₀ la série est non stationnaire. Aussi il y a un second moyen de vérification. Il faut que le T-Statistic : -37.66114 soit supérieur en valeur absolue au Test Critical Values. (2.56; 1.94 ; 1..61). Le T-Statistic est supérieure, la série est stationnaire et donc pas de racine unitaire.

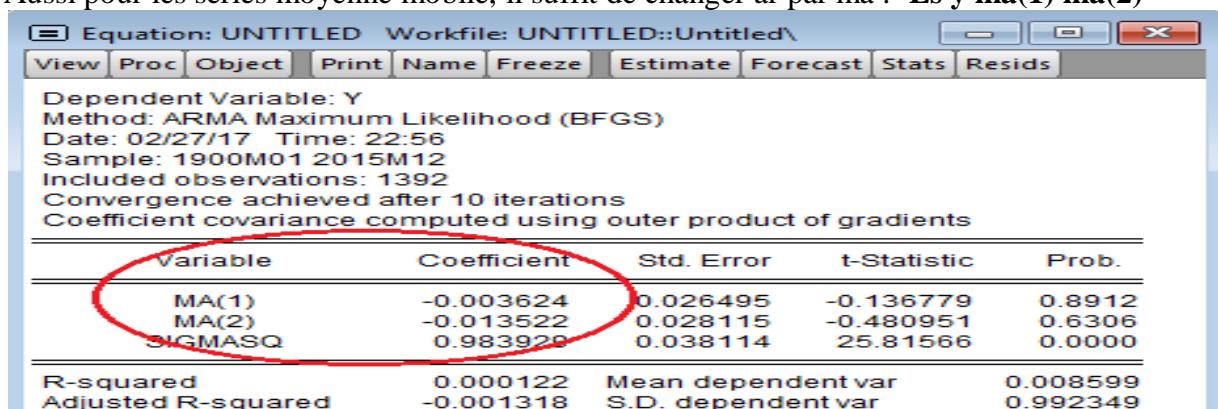


VI -6-3). LISTER LES COEFFICIENTS D'UNE SÉRIE AUTO REGRESSIVE AR(P) ET MOYENNE MOBILE MA(q)

Par exemple, générer les coefficients d'une série AR(3), on utilise la commande suivante : Ls y ar(1) ar(2) ar(3)



Aussi pour les séries moyenne mobile, il suffit de changer ar par ma : Ls y ma(1) ma(2)



CHAPITRE VI : PRESENTATION DU LOGICIEL EVIEW 9.5

VI-7). LISTER LES COEFFICIENTS D'UNE SERIE ARMA (p, q)

Eviews par défaut, traie les séries come des séries de type ARMA (p,q), et pour afficher les coefficients d'une ARMA (p,q), il suffit de combiner les commandes de lister les coefficients AR(p) et de MA(q).

Ls y ar(1) ar(2) ar(3) ma(1)

Equation: UNTITLED Workfile: UNTITLED::Untitled\				
View	Proc	Object	Print	Name
Dependent Variable: Y				
Method: ARMA Maximum Likelihood (BFGS)				
Date: 02/27/17 Time: 23:01				
Sample: 1900M01 2015M12				
Included observations: 1392				
Convergence achieved after 20 iterations				
Coefficient covariance computed using outer product of gradients				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	-0.426955	0.752493	-0.567388	0.5705
AR(2)	-0.015077	0.031130	-0.484315	0.6282
AR(3)	-0.031633	0.027805	-1.137663	0.2555
MA(1)	0.423974	0.751679	0.564036	0.5728
SIGMASQ	0.983127	0.038276	25.68525	0.0000
R-squared	0.000937	Mean dependent var		0.008599
Adjusted R-squared	-0.001944	S.D. dependent var		0.992349
S.E. of regression	0.993313	Akaike info criterion		2.828046

VI-8) ESTIMATION DU MODELE LINEAIRE A UNE EQUATION SOUS EVIEW

La spécification d'un modèle linéaire à une équation: concepts et analyse. La saisie des données sur Excel (feuille d'entrée), la création de « workfile » et l'importation des données par le logiciel « Eviews ». L'estimation du modèle et les tests, notamment les tests de diagnostics sur les termes d'erreur (résidus), de restriction sur les coefficients et sur les tests de stabilité. Des analyses approfondies ont été faites sur les résultats de l'estimation du modèle, les différents tests et surtout l'interprétation de ces résultats sur le plan macroéconomique.

VI-8-1) SPECIFICATION ET HYPOTHESES.

Considérons la fonction de consommation suivante :

Soit un modèle de consommation des ménages $C = a + bY + \varepsilon$ avec :

C = la consommation

Y = le revenu

ε est le terme d'erreur (ou résidu), il capte l'ensemble de variables explicatives non prises en compte dans la spécification.

Les hypothèses sur le terme d'erreur ε : • Moyenne nulle (les erreurs se compensent); • ε doit avoir une variance constante (hypothèse d'homoscédasticité); • Les ε doivent être indépendantes (les erreurs au temps t ne sont pas influencées par les erreurs au temps $t-1$) ; • Les ε suivent une distribution normale.

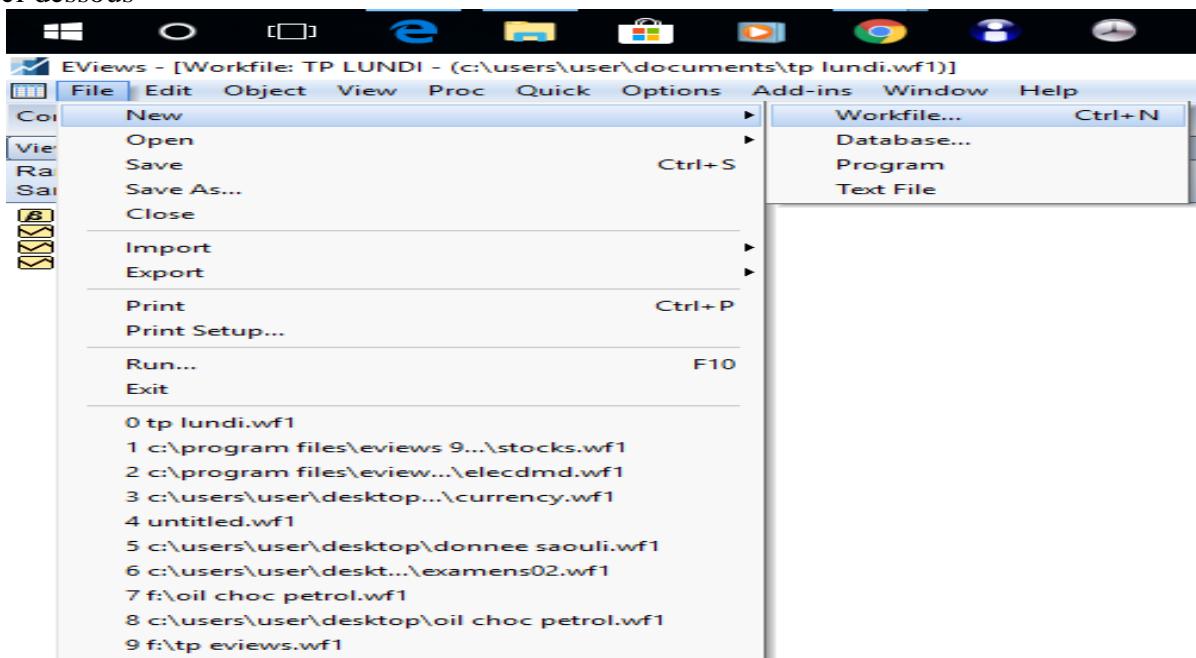
VI-8-2) ETAPES A SUIVRE POUR ESTIMER LE MODELE AVEC EVIEW

On peut exécuter les commandes Eviews soit par l'approche menus, soit par l'approche programme. Saisie de données sous Excel (feuilles d'entrée) Les données statistiques sont saisies dans EXCEL. Il faut bien noter trois choses : • La période des observations ; • Le nombre de variables ; • Le nom des variables. Dans notre exemple, nous avons trois variables C, Y et P. Après avoir noté ces trois éléments, fermez EXCEL.

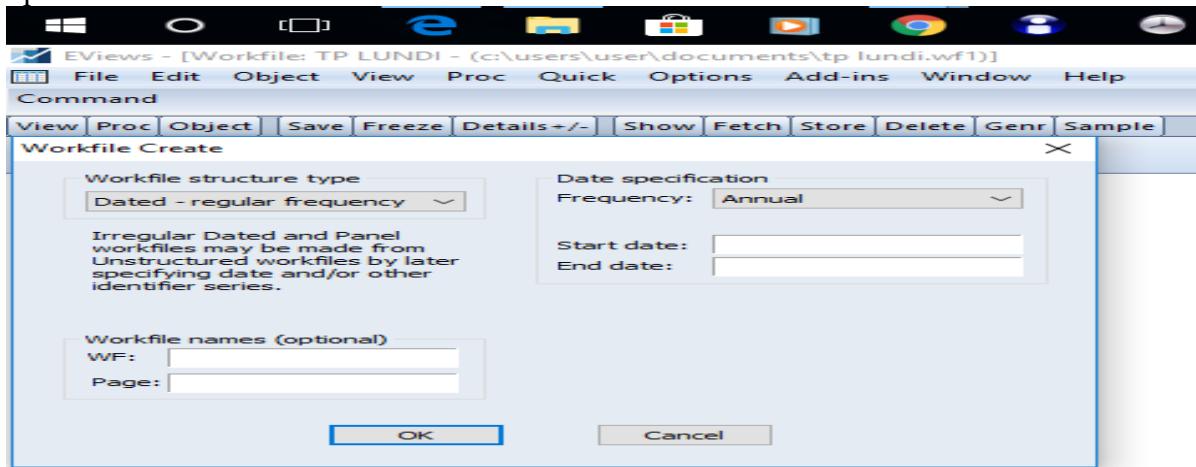
CHAPITRE VI : PRÉSENTATION DU LOGICIEL EVIEWS 9.5

✓ IMPORTATION DES DONNÉES

Lancez Eviews. Créez un « workfile » : Sélectionnez « File/New/Workfile », comme indiqué ci-dessous



Après avoir validé on obtient l'écran suivant :



Dans la fenêtre Start date, entrez la date ou l'année de début de vos séries. Et dans la fenêtre End date, entrez la date de fin de vos séries. Après avoir rentré les dates, cliquez sur OK pour valider et voici le tableau que vous obtiendrez

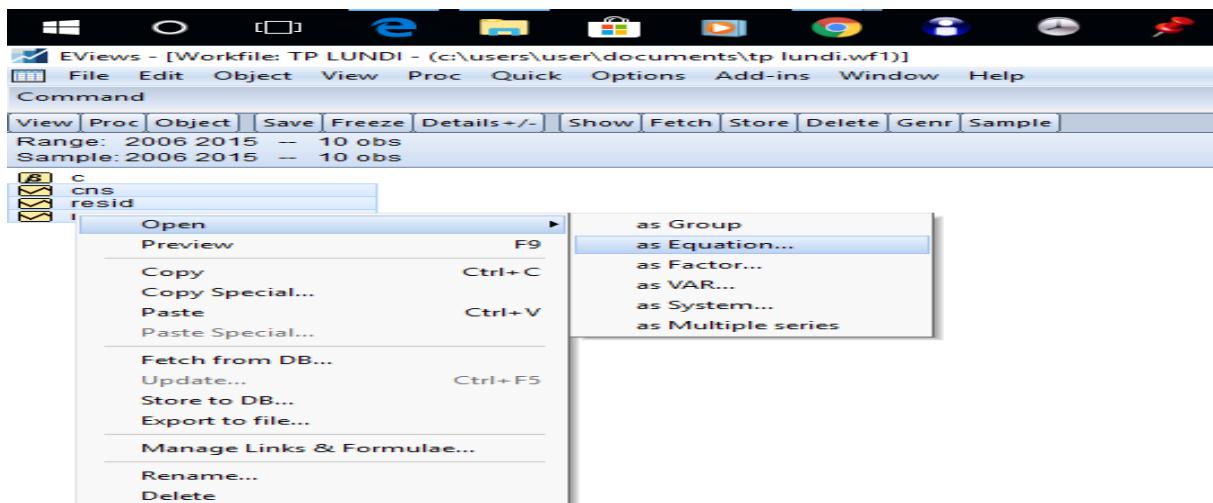
Les données apparaissent dans le « workfile » et nous pouvons maintenant passer aux estimations. Il faut toujours enregistrer ou sauvegarder le « workfile ». Pour cela, cliquez sur « Save » et donnez le nom du « Workfile ».

Il faut toujours enregistrer ou sauvegarder le « workfile ». Pour cela, cliquez sur « Save » et donnez le nom du « Workfile ».

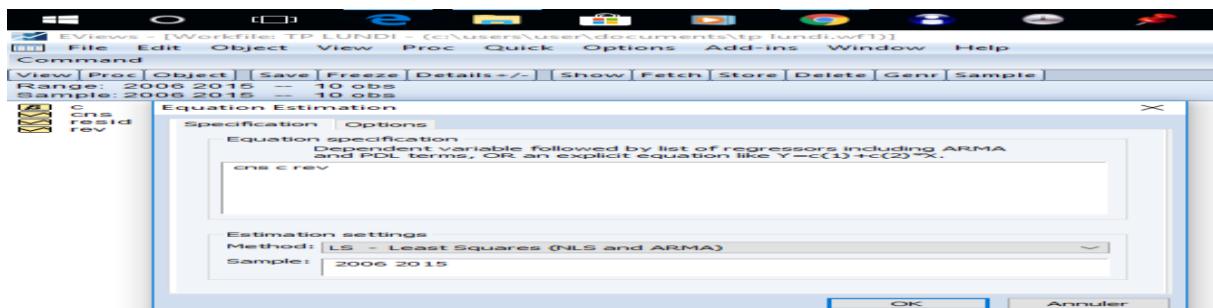
CHAPITRE VI : PRÉSENTATION DU LOGICIEL EVIEW 9.5

✓ ESTIMATION SOUS EVIEW 9.5

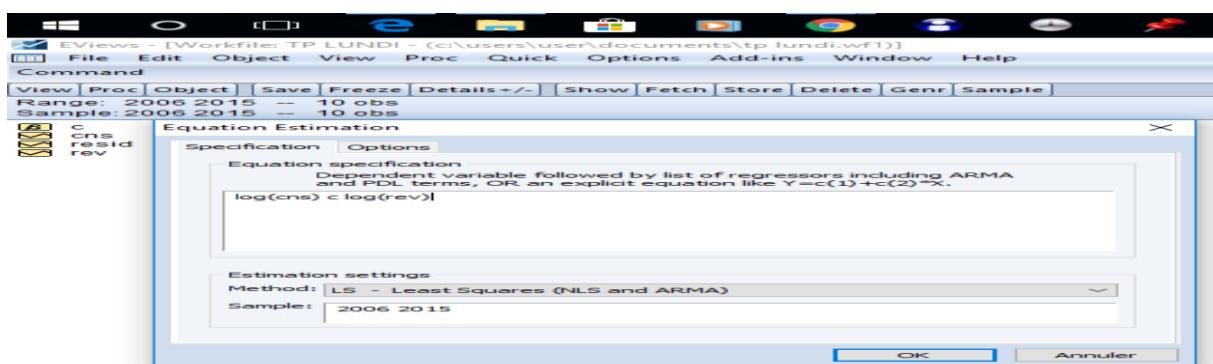
A l'étape de l'estimation, vous pouvez choisir l'une des trois formes : niveau, logarithmique et semi-log. Ici nous allons faire l'estimation en log. L'avantage de cela est d'obtenir une transformation linéaire d'un modèle non linéaire et d'obtenir directement les élasticités. Cependant, il faudrait noter qu'une fois les simulations faites, il faudrait revenir aux valeurs en niveau en prenant les exponentielles. Le modèle ici est linéaire. Nous avons estimé le modèle en niveau et en logarithme. L'estimation en logarithme nous donne les élasticités partielles. Pour estimer l'équation, il y a deux façons de faire : - Sélectionnez les variables en commençant par la variable endogène ; clic droit et sélectionnez « Open as Equation ».



Quand vous cliquez sur « as Equation », vous obtenez le tableau ci-dessous.



Dans cette estimation, vous avez choisi les moindres carrés ordinaires et vous faites une estimation en niveau. Si vous cliquez sur OK, vous aurez les résultats des estimations, mais en niveau. Si vous voulez les estimations en log, vous pouvez cliquer directement sur la fenêtre, comme indiqué :



CHAPITRE VI : PRÉSENTATION DU LOGICIEL EVIEW 9.5

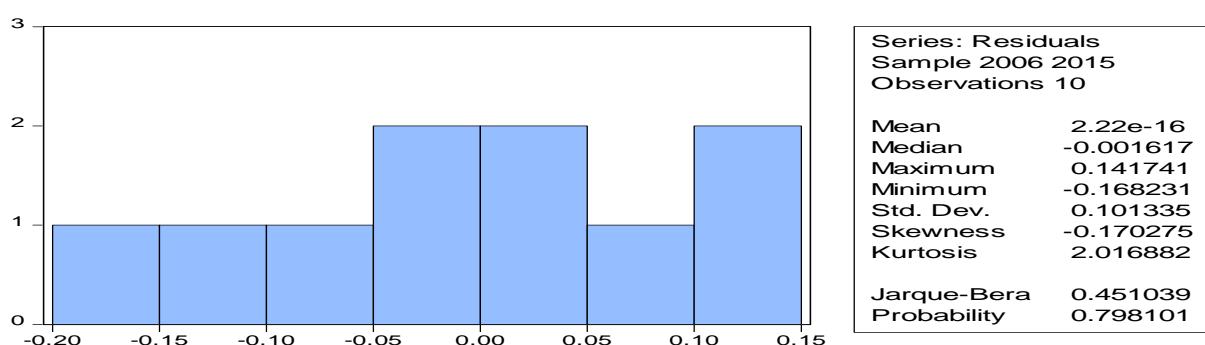
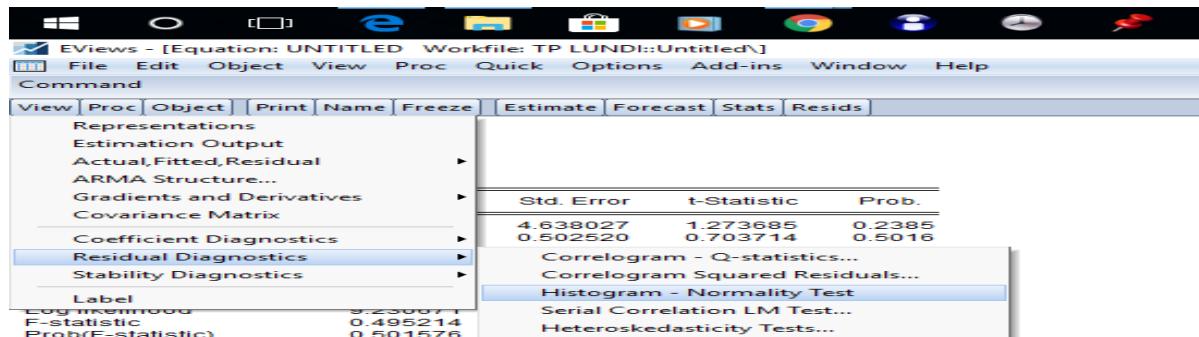
Quand vous cliquez sur OK, vous obtenez les résultats suivants :

Dependent Variable: LOG(CNS)				
Method: Least Squares				
Date: 04/06/18 Time: 22:43				
Sample: 2006 2015				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	5.907385	4.638027	1.273685	0.2385
LOG(REV)	0.353630	0.502520	0.703714	0.5016
R-squared	0.058293	Mean dependent var	9.171144	
Adjusted R-squared	-0.059420	S.D. dependent var	0.104424	
S.E. of regression	0.107482	Akaike info criterion	-1.446134	
Sum squared resid	0.092419	Schwarz criterion	-1.385617	
Log likelihood	9.230671	Hannan-Quinn criter.	-1.512521	
F-statistic	0.495214	Durbin-Watson stat	1.089789	
Prob(F-statistic)	0.501576			

Vous pouvez maintenant procéder aux différents tests

- ✓ **TESTS SUR LE MODÈLE**
- **TESTS DIAGNOSTICS SUR LES TERMES D'ERREURS**

- Test de normalité Selectionnez « View/Residuals Tests/Histogram-Normality Test...”

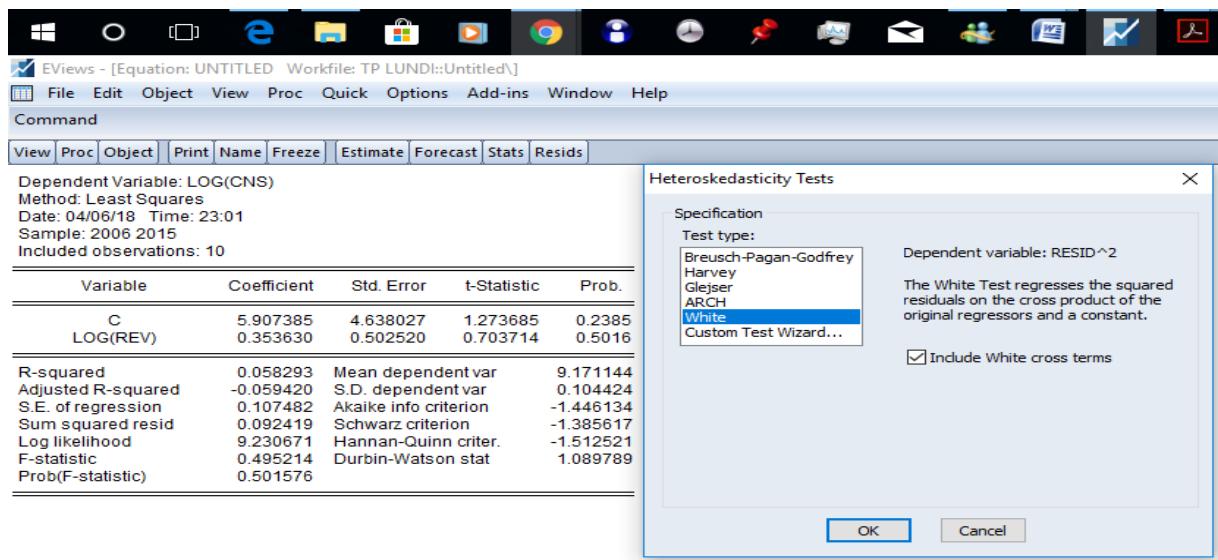


Dans le tableau de droite, vous avez les trois statistiques : Skewness, Kurtosis et Jarque-Bera. Le Jarque-Bera a une probabilité de 0,798 qui est supérieure à 0,05=5%, ce qui veut dire qu'on accepte l'hypothèse nulle de normalité des termes d'erreurs ou résidus. Observez les valeurs de deux statistiques Skewness et Kurtosis et pour l'analyse et l'interprétation de ces deux statistiques, référez-vous à la section : Test de normalité.

CHAPITRE VI : PRÉSENTATION DU LOGICIEL EVIEW 9.5

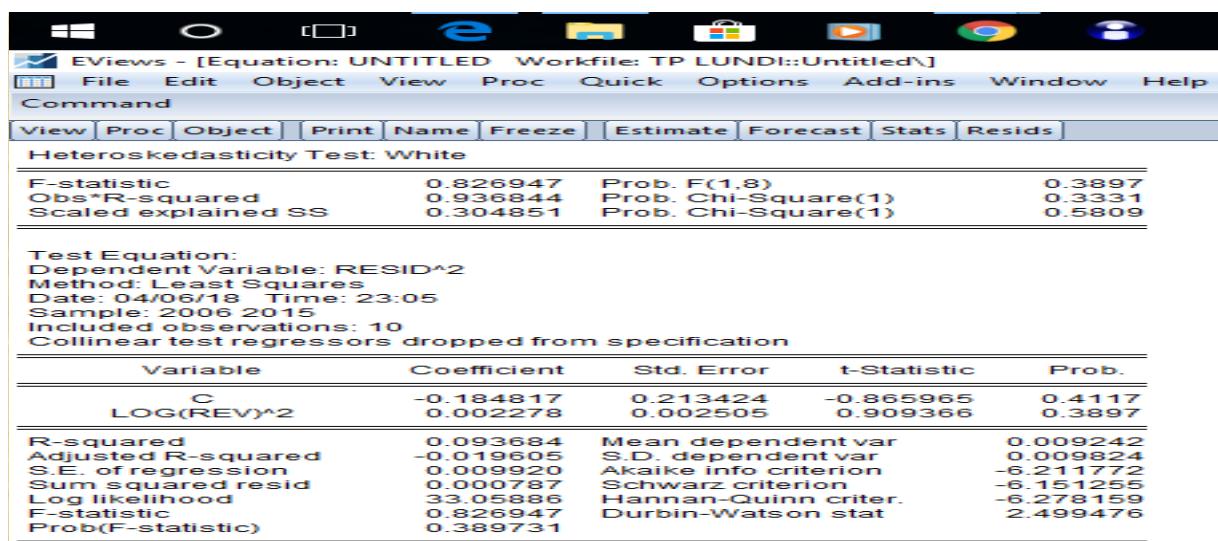
• TEST D'HETEROSCEDASTICITE

Pour revenir au tableau des estimations, cliquez sur « Stats. » Sélectionnez « View/Residuals Tests/White Heteroskedasticity »...



The screenshot shows the EViews interface with a menu bar (File, Edit, Object, View, Proc, Quick, Options, Add-ins, Window, Help) and a toolbar. A command window is open with the title 'EViews - [Equation: UNTITLED Workfile: TP LUNDI::Untitled]'. The command tab is selected. On the left, there is a table of regression statistics for 'LOG(CNS)' as the dependent variable. On the right, a 'Heteroskedasticity Tests' dialog box is open, showing the 'Specification' and 'Test type:' sections. The 'Test type:' dropdown is set to 'White'. The 'Dependent variable:' is set to 'RESID^2'. There is a note explaining the White test: 'The White Test regresses the squared residuals on the cross product of the original regressors and a constant.' A checkbox for 'Include White cross terms' is checked. At the bottom of the dialog box are 'OK' and 'Cancel' buttons.

Après avoir cliqué, vous obtenez les résultats suivants :



The screenshot shows the EViews interface with a menu bar (File, Edit, Object, View, Proc, Quick, Options, Add-ins, Window, Help) and a toolbar. A command window is open with the title 'EViews - [Equation: UNTITLED Workfile: TP LUNDI::Untitled]'. The command tab is selected. On the left, there is a table of regression statistics for 'LOG(CNS)' as the dependent variable. On the right, the results of the 'Heteroskedasticity Test: White' are displayed. The table includes the following statistics:

F-statistic	0.826947	Prob. F(1,8)	0.3897
Obs*R-squared	0.936844	Prob. Chi-Square(1)	0.3331
Scaled explained SS	0.304851	Prob. Chi-Square(1)	0.5809

Below the table, the 'Test Equation' section provides details about the regression, including the dependent variable 'RESID^2', method (Least Squares), date (04/06/18), time (23:05), sample (2006 2015), and included observations (10). It also notes that collinear test regressors were dropped from the specification. A second table below shows the estimated coefficients for the model, including C and LOG(REV)^2.

La probabilité du test de White est ici de 0,3331, qui est supérieure à 0,05=5%, ce qui veut dire qu'on accepte l'hypothèse nulle d'homoscédasticité des résidus ou termes d'erreurs. –

• TEST D'AUTOCORRELATION

Nous avons ici trois tests : Durbin-Watson, le test de Ljung-Box (analyse du corrélogramme et du Q-Stat) et le test de Breusch-Godfrey. Sélectionnez « View/Residuals Tests/Correlogram-Q-Statistics... »

CHAPITRE VI : PRÉSENTATION DU LOGICIEL EVIEW 9.5

EViews - [Equation: UNTITLED Workfile: TP LUNDI::Untitled\]

File Edit Object View Proc Quick Options Add-ins Window Help

Command

View Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids

Representations
Estimation Output
Actual,Fitted,Residual
ARMA Structure...
Gradients and Derivatives
Covariance Matrix
Coefficient Diagnostics
Residual Diagnostics
Stability Diagnostics

Label
Log likelihood: 9.250071
F-statistic: 0.495214
Prob(F-statistic): 0.501576

Std. Error t-Statistic Prob.
4.638027 1.273685 0.2385
0.502520 0.703714 0.5016

Correlogram - Q-statistics...
Correlogram Squared Residuals...
Histogram - Normality Test
Serial Correlation LM Test...
Heteroskedasticity Tests...

Date: 04/06/18 Time: 23:14
Sample: 2006 2015
Included observations: 10

	Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.277	0.277	1.0245	0.311		
2	0.319	0.262	2.5520	0.279		
3	0.135	-0.003	2.8663	0.413		
4	-0.142	-0.294	3.2673	0.514		
5	-0.171	-0.160	3.9724	0.553		
6	-0.420	-0.301	9.2566	0.160		
7	-0.082	0.247	9.5237	0.217		
8	-0.244	-0.059	13.091	0.109		
9	-0.173	-0.172	16.702	0.054		

Ici on constate que les rectangles du corrélogramme sont à l'intérieur de la bande stylisé en pointillés, ce qui indique que les erreurs sont indépendantes.

- **TEST DE BREUSCH-GODFREY**

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	0.805712	Prob. E(1,7)	0.3992
Obs*R-squared	1.032209	Prob. Chi-Square(1)	0.3096

Test Equation:
Dependent Variable: RESID
Method: Least Squares
Date: 04/06/18 Time: 23:23
Sample: 2006 2015
Included observations: 10
Presample missing value lagged residuals set to zero.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.632644	4.747996	0.133244	0.8977
LOGREV	-0.000005	0.114851	-0.01160	0.9595
RESID(-1)	0.372380	0.414851	0.897618	0.3992

R-squared: 0.103221
Adjusted R-squared: 0.153002
S.E. of regression: 0.108811
Sum squared resid: 0.082299
Log likelihood: 9.250071
F-statistic: 0.402856
Prob(F-statistic): 0.682966

CHAPITRE VI : PRESENTATION DU LOGICIEL EVIEW 9.5

La probabilité du test de Breusch-Godfrey est ici de 0,03, qui est inférieure à 0,05=5%, ce qui veut dire qu'on rejette l'hypothèse nulle de non auto corrélation des termes d'erreurs. En d'autres termes, les erreurs sont auto-correlées d'ordre 1.

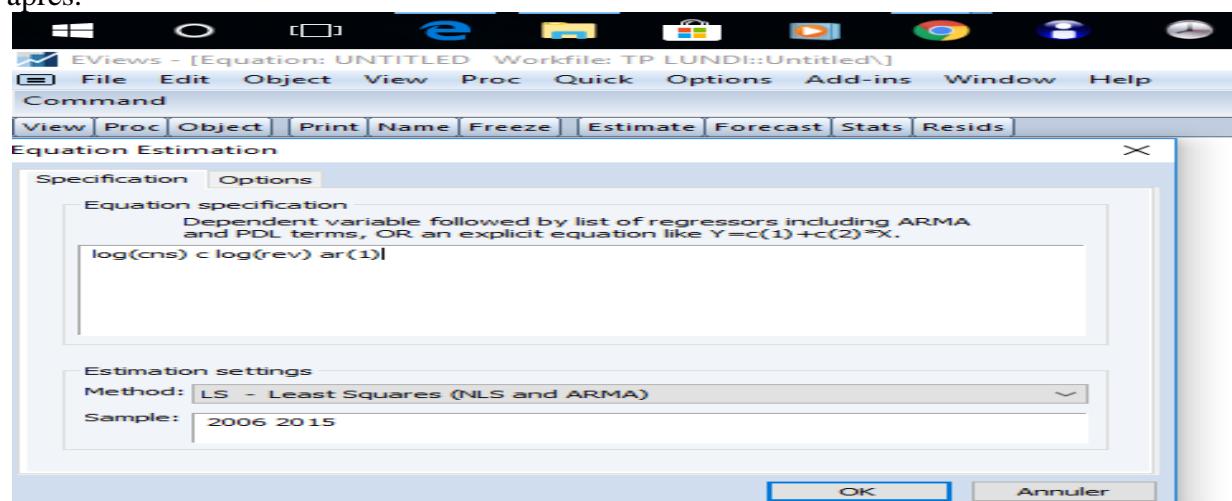
VI-8-3) ESTIMATION EN PRÉSENCE D'AUTO CORRELATION DES ERREURS

Quatre méthodes peuvent être utilisées pour estimer le modèle en cas d'auto corrélation des erreurs :

- Méthode itérative de Cochrane-Orcutt ;
- Méthode Hildreth-Lu ;
- Méthode du maximum de vraisemblance ;
- Méthode des doubles moindres carrés.

Ici nous allons appliquer la méthode itérative de Cochrane-Orcutt.

Cliquez sur Estimate et ajoutez le terme AR(1) à la spécification comme cela est indiqué ci-après.



Cliquez ensuite sur OK pour valider. Vous obtenez les résultats suivants :

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	6.896963	4.348134	1.586189	0.1638
LOG(REV)	0.246722	0.469925	0.525024	0.6184
AR(1)	0.395823	0.665751	0.594551	0.5739
SIGMASQ	0.008106	0.007813	1.037523	0.3395
R-squared	0.173997	Mean dependent var	9.171144	
Adjusted R-squared	-0.239004	S.D. dependent var	0.104424	
S.E. of regression	0.116235	Akaike info criterion	-1.160190	
Sum squared resid	0.081064	Schwarz criterion	-1.039156	
Log likelihood	9.800949	Hannan-Quinn criter.	-1.292964	
F-statistic	0.421300	Durbin-Watson stat	1.819042	
Prob(F-statistic)	0.744645			
Inverted AR Roots	.40			

VI-8-4) TESTS DE RESTRICTIONS SUR LES COEFFICIENTS

On a plusieurs types de tests de restrictions :

- Test de significativité globale (test de Fisher) ;
- Test de significativité des coefficients individuel (test de Student) ;
- Test de restrictions linéaires.

CHAPITRE VI : PRÉSENTATION DU LOGICIEL EVIEW 9.5

a) TEST DE SIGNIFICATIVITE GLOBALE (TEST DE FISHER)

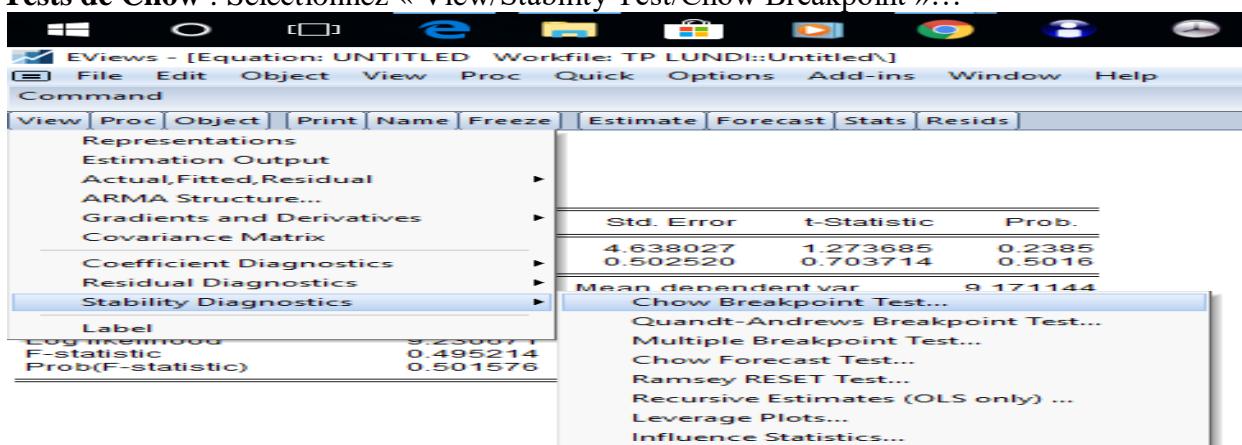
La statistique de Fisher apparaît directement dans le tableau des résultats. Sa probabilité est supérieure à 0,05, donc les coefficients sont globalement non significatifs.

b) TEST DE SIGNIFICATIVITE DES COEFFICIENTS INDIVIDUELS (TEST DE STUDENT)

Les coefficients sont individuellement significatifs si leur probabilité est inférieure à 0,05. Ces probabilités apparaissent dans la dernière colonne du tableau des résultats (Prob avant le t-Statistic). Ainsi, le coefficient du revenu est non significatif dans le modèle. En effet, la Prob de la variable explicative GDP est égal à 0,5016 donc supérieur au seuil de signification.

c) TESTS DE STABILITE

Tests de Chow : Selectionnez « View/Stability Test/Chow Breakpoint »...



A ce niveau, vous devez connaître la tendance de vos séries et repérer le point de rupture que vous devez indiquer dans la fenêtre qui s'ouvre. Voici l'exemple :

The screenshot shows the Eviews software window with the title bar 'EViews - [Equation: UNTITLED Workfile: TP LUNDI::Untitled\]'. The menu bar includes 'File', 'Edit', 'Object', 'View', 'Proc', 'Quick', 'Options', 'Add-ins', 'Window', and 'Help'. The 'View' menu is open, showing options like 'Representations', 'Estimation Output', 'Actual,Fitted,Residual', 'ARMA Structure...', 'Gradients and Derivatives', 'Covariance Matrix', 'Coefficient Diagnostics', 'Residual Diagnostics', and 'Stability Diagnostics'. The 'Stability Diagnostics' option is highlighted with a blue selection bar. Below the menu, there is a table of coefficients and statistics. On the right side of the screen, a 'Chow Tests' dialog box is open. It has two main sections: 'Enter one or more breakpoint dates' containing the value '2008', and 'Regressors to vary across breakpoints' containing the value 'c log(rev)'. At the bottom of the dialog box are 'OK' and 'Cancel' buttons.

CHAPITRE VI : PRÉSENTATION DU LOGICIEL EVIEW 9.5

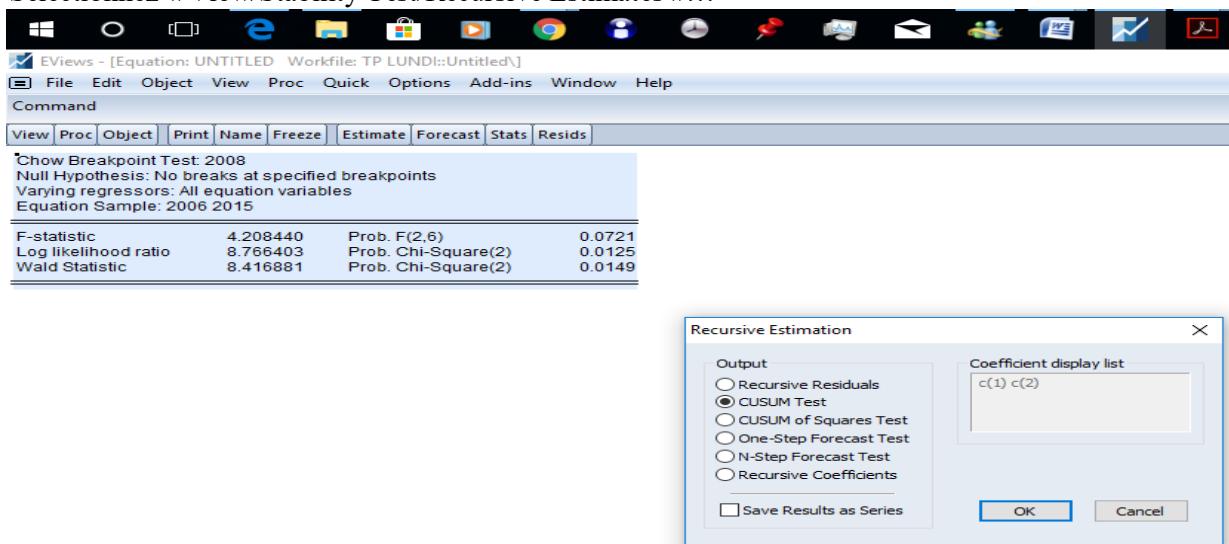
Pour nos données, l'année de rupture est 2008. Cliquez sur OK pour valider. Vous obtenez le tableau ci-dessous :

Chow Breakpoint Test: 2008			
Null Hypothesis: No breaks at specified breakpoints			
Varying regressors: All equation variables			
Equation Sample: 2006 2015			
F-statistic	4.208440	Prob. F(2,6)	0.0721
Log likelihood ratio	8.766403	Prob. Chi-Square(2)	0.0125
Wald Statistic	8.416881	Prob. Chi-Square(2)	0.0149

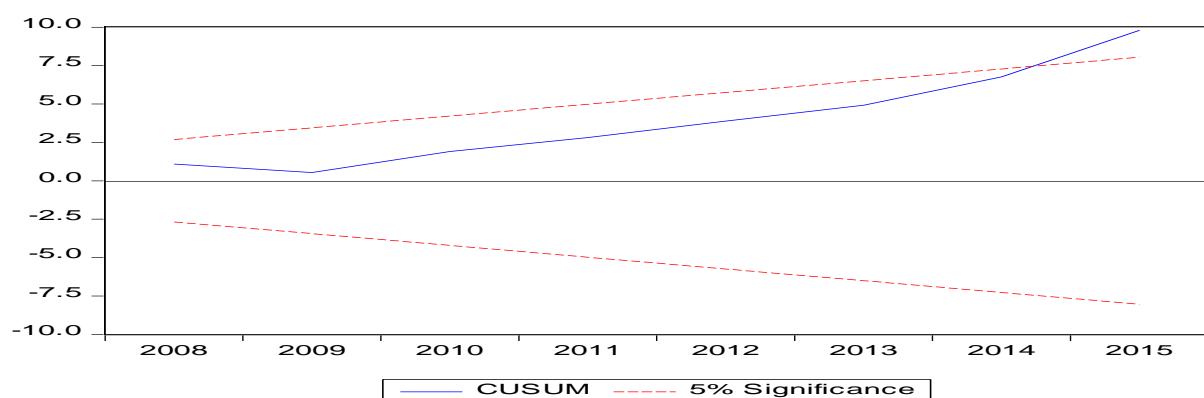
La probabilité du test de Chow est de 0,0141 supérieure à 0,05, donc on accepte l'hypothèse de changement structurel du modèle.

✓ Test CUSUM :

Sélectionnez « View/Stability Test/Recursive Estimates »...



Après avoir sélectionné, cochez CUSUM test comme indiqué ci-dessous :



La différence entre le test CUSUM et le test de Chow est que le test de Chow demande qu'on indique l'année de rupture, alors que le test de CUSUM vous l'indique. Si la courbe sort du corridor, il y a instabilité du modèle. Ici, vous constatez que la courbe sort de la bande, on peut donc conclure que le modèle est instable sur toute la période.

CHAPITRE VI : PRESENTATION DU LOGICIEL E VIEWS 9.5

VI-8-5) SYNTHESE DES DIFFERENTES COMMANDES POUR FAIRE UNE SPECIFICATION DES MODELES ECONOMETRIQUES

Pour la saisie de la base de données dans Excel

- Ouvrir le logiciel Excel
- saisir les données dans une feuille d'entrée Excel
- Sauvegarder la base de données de la feuille d'entrée

Pour la spécification des modèles économétriques sur base des données déjà saisies dans Excel :

- ouvrir Excel et identifier le fichier sur lequel on veut travail
- identifier le nom et le nombre des variables
- fermer Excel

Ouvrir Excel et identifier le fichier sur lequel on veut travail

- open – new – workfile • file – import – read lottus excel- ok
- détermination de la fréquence – start date –end date (toute en indiquant le nombre de variable) – ok
- visualiser les variables de la base de données qu'on a importé en procédant de la sorte
- sélection des variables dont on veut visualiser les données- clic droit de la souris – open – open as group
- une fois qu'on est rassuré que la base de données est correcte, on la ferme pour entamer les spécifications des modèles

Estimation de l'équation

choisir la variable endogène et après l'avoir identifiée, sélectionner toutes les variables explicatives dont on a besoin pour la spécification et par un clic droit procéder comme suit : open – open as équation –ok

Interprétation des résultats sur E-views

A priori, il faut vérifier s'il y a ou pas auto corrélation des erreurs (résidus).

- 1) Avec le résultat donné par le test DW (Durbin-Watson), on est plus ou moins renseigné s'il y a ou pas une présomption d'auto corrélation des erreurs.
 - * Si la valeur calculée est proche de 2 → Absence d'auto corrélation des résidus,
 - * Si la valeur calculée est proche de 0 → Détection d'une auto corrélation des erreurs.

Que se passe-t-il si la valeur donnée par le test de DW n'est ni proche de 0 et ni proche de 2 ?

Etape 1 : Correlogramme test

On visualise le correlogramme des résidus pour voir de par et d'autre, les bandes dépassent les pointillées qui symbolisent l'intervalle de confiance.

View - Residual test - Collerogramm - validez

- Si la bande sort les pointillées → Auto corrélation des erreurs
- En cas contraire → Absence d'auto corrélation des erreurs

Etape 2 : Test de Breusch-Godfrey

En cas de détection d'auto corrélation des erreurs, on applique le test de Breusch-Godfrey. Ce dernier vise l'indépendance des erreurs car il ne faut pas que l'erreur en t soit liée à celle de t (-1) ou t (-2) ou

View - Residual test - Serial correlation test - Lag to include (1) (ordre de niveau 1) - validez

N.B. L'ordre va de 1,2,... Et on s'arrête quand, au niveau supérieur, les résidus ne sont pas

significatifs.

H0 : Absence d'auto corrélation

H1 : Auto corrélation des erreurs

Seuil critique de significativité α : Prob = 5%

N.B. Le niveau de probabilité renseigne sur le risque que l'on courre en rejetant l'hypothèse nulle.

- $\alpha > 0,05 \rightarrow$ On accepte l'hypothèse nulle (absence d'auto corrélation des erreurs)
- $\alpha < 0,05 \rightarrow$ On rejette l'hypothèse nulle (auto corrélation des erreurs)

Etape 3 : Test d'hétérosécédasticité (Test de White) A ce niveau, on vérifie si les erreurs conservent une variance constante tout au long de la période.

View - Residual test - White Heteroscedasticity test –validez

H0 : Les résidus sont homoscédastiques

H1 : Les résidus ne sont pas hétérosécédastiques

Seuil critique de significativité α : Prob = 5%

N.B. Le niveau de probabilité renseigne sur le risque que l'on courre en rejetant l'hypothèse nulle

- $\alpha > 0,05 \rightarrow$ On accepte l'hypothèse nulle (résidus homoscédastiques)
- $\alpha < 0,05 \rightarrow$ On rejette l'hypothèse nulle (résidus hétérosécédastiques)

Etape 4 : Test de stabilité du modèle

A ce niveau, il s'agira de s'assurer si, dans une équation de comportement par exemple, les ménages n'ont pas changé de comportement depuis une certaine période.

Etape 4.1 Test de Chow

Ce test sert à :

- détecter s'il existe ou pas une année de cassure
- estimer les équations avant et après l'année de cassure
 - a) si les coefficients des deux droites sont égaux \rightarrow pas de cassure dans la série
 - b) Si les coefficients des deux droites sont différents \rightarrow break point détecté

View - stability test - Chow test –validez

H0 : Pas de changement de comportement \rightarrow stabilité du modèle sur toute la période

H1 : Changement des comportements \rightarrow modèle n'est pas stable sur toute la période.

Etape 4.2 : Test de Cusum

Ce test vous suggère :

- à quel point il y a eu rupture dans les habitudes de comportement
- la variation des comportements à travers l'intervalle de confiance
- mesurer l'ampleur du choc (structurel ou conjoncturel) $\frac{3}{4}$ Structurel (quand la courbe sort de l'intervalle de confiance et ne rentre pas dans cet intervalle), conjoncturel (quand la courbe sort et entre par la suite dans l'intervalle de confiance)

View - stability test - Recursive estimation –validez

Etape 5. Détection de la multicollinéarité

On parle de « multicollinéarité », si on est en présence des variables explicatives qui s'expliquent entre elles. On parle d'un modèle redondant. Les variables explicatives doivent être indépendantes sinon, on aura la confusion des effets sur la variable endogène.

Un modèle parcimonieux est toujours conseillé car vaut mieux avoir peu de variables qui expliquent beaucoup la variable endogène que d'avoir plusieurs variables qui n'expliquent

CHAPITRE VI : PRESENTATION DU LOGICIEL EVIEW 9.5

rien du tout. Pour détecter s'il y a multicollinéarité ou pas, on passe par la matrice des corrélations « correlation matrix »

View - correlation simple - correlation matrix

Si deux variables sont fortement corrélées (proche de 1) c'est-à-dire qu'on peut utiliser l'une à la place de l'autre et vice-versa. Mais pas les deux en même temps car cela a pour conséquence de rendre l'autre variable non significative.

Etape 6. Coefficient de détermination R2 et R2 ajusté

Le R^2 renseigne sur le niveau d'explication (en %) du modèle par les variables explicatives prises en considération et il est compris entre 0 et 1. S'il est proche de 1, le modèle est plus que satisfaisant. Cependant, c'est le R^2 ajusté (version pénalisée de R^2 , qui choisit entre plusieurs modèles alternatifs) car le coefficient de détermination simple R^2 augmente (mécaniquement) avec le nombre de variables explicatives prises en compte dans le modèle. R^2 ajusté < R^2 ; R^2 ajusté = $f(n, k)$ où k = nombre de variables explicatives.

Etape 7. Tests de significativité globale du modèle

Etape 7.1 : Test de Fischer

Ce test renseigne sur la significativité des coefficients des variables explicatives prises globalement. Il s'agit de vérifier s'il existe au moins un coefficient significatif.

$H_0 : a = 0 ; b = 0 \rightarrow$ tous les coefficients sont nuls

$H_1 : a = 0 ; b = 0 \rightarrow$ il y a au moins un coefficient qui n'est pas nul c'est-à-dire significatif
Interprétation des probabilités : Idem (on se réfère toujours aux probabilités)

Etape 7.2 Test de Student

Ce test renseigne sur la significativité des coefficients des variables explicatives (exogènes) prises individuellement.

$H_0 : b = 0 \rightarrow$ coefficient nul (pas significatif)

$H_1 : b = 0 \rightarrow$ coefficient non nul i.e. significatif. Interprétation des probabilités : Idem

A RETENIR : Pour des tests de significativité, il faut savoir ce qu'on veut tester et se mettre en tête que l'hypothèse nulle (H_0) sera toujours l'hypothèse que l'on veut mettre à l'épreuve.

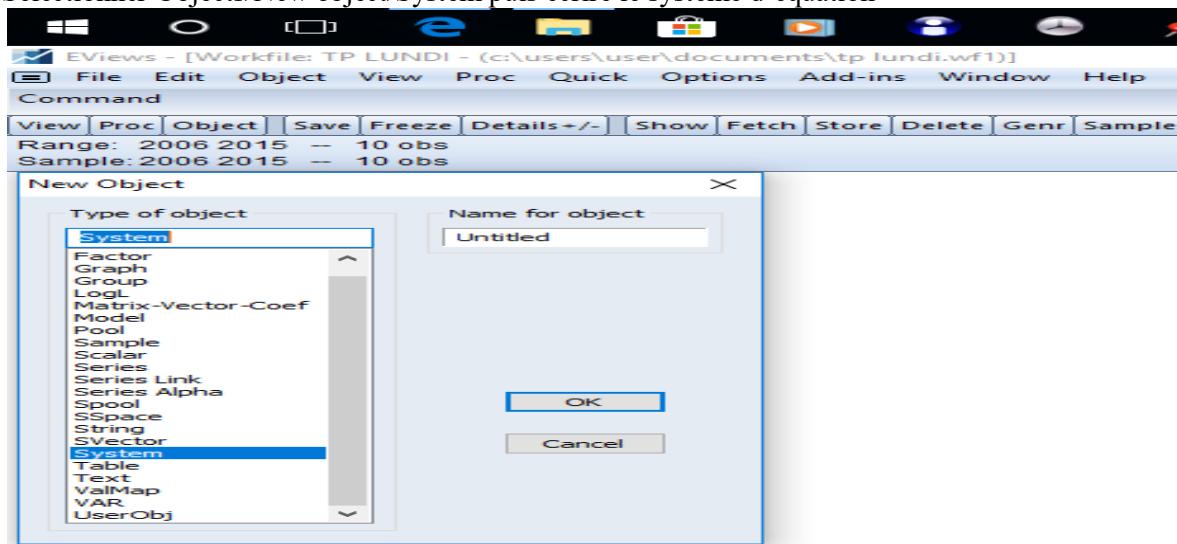
Prévision	Après avoir effectué une régression, cliquez sur le bouton Forecast du menu de la fenêtre équation et choisissez la méthode adéquate. <ul style="list-style-type: none">- Prévision dynamique: pour chaque période, la valeur prévue à la date $t-1$ est utilisée pour calculer la prévision à la date t.- Prévision statique: pour une période au delà de la période d'observation, cette prévision
-----------	---

CHAPITRE VI : PRÉSENTATION DU LOGICIEL EVIEW 9.5

VI-8-6) ESTIMATION DES SYSTEMES D'EQUATIONS SUR EVIEW 9.5

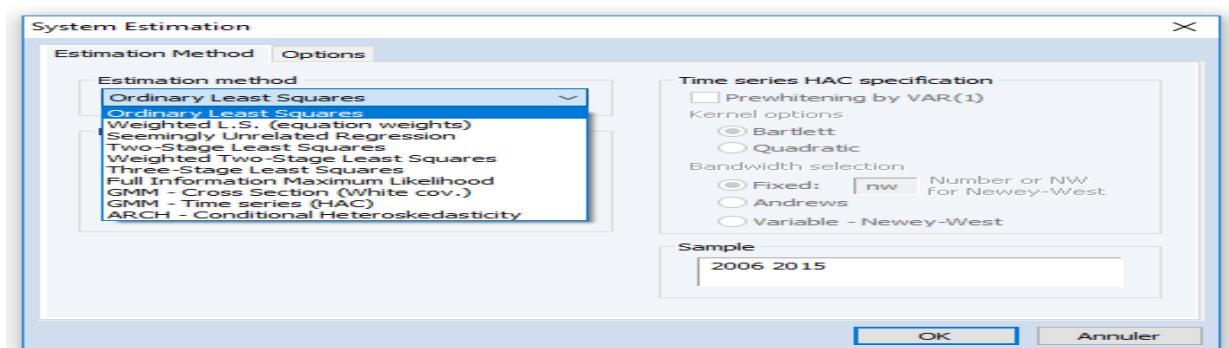
Création d'un système :

Selectionner Objects/New object/System puis écrire le système d'équation



Méthodes d'estimation :

- 1) **Ordinary Least Squares** : Minimise la somme des carrés des résidus pour chaque équation en tenant compte d'éventuelles contraintes
- 2) **Cross-Equation Weighting**: Minimise la somme des carrés des résidus pondérés (en tenant de l'éhétéroskédasticité). Les poids sont définis par l'inverse de la matrice de variance-covariance
- 3) **-Seemingly Unrelated Regression (SUR)**: Minimise la somme des carrés des résidus pondérés en tenant de l'éhétéroskédasticité et de la corrélation entre les équations M.
KOUKI M. KOUKI - IEQ 2004 IEQ 2004 38
- 4) **-Two-Stage Least Squares (TSLS)**: Cette technique est appropriée lorsque une variable explicative est corrélée avec les résidus
- 5) **-Weighted Two-Stage Least Squares (WTSLS)** : La version TSLS de la méthode Weighted Least Squares
- 6) **-Three-Stage Least Squares** : La version TSLS de la méthode Weighted Least Squares de la méthode SUR
- 7) **-Full Information Maximum Likelihood (FIML)**
- 8) **-GMM**



CHAPITRE VI : PRÉSENTATION DU LOGICIEL EVIEW 9.5

Création d'un nouveau système par exemple :
@STACKINST

@INST

GDPR = C(1)

INF = C(2)

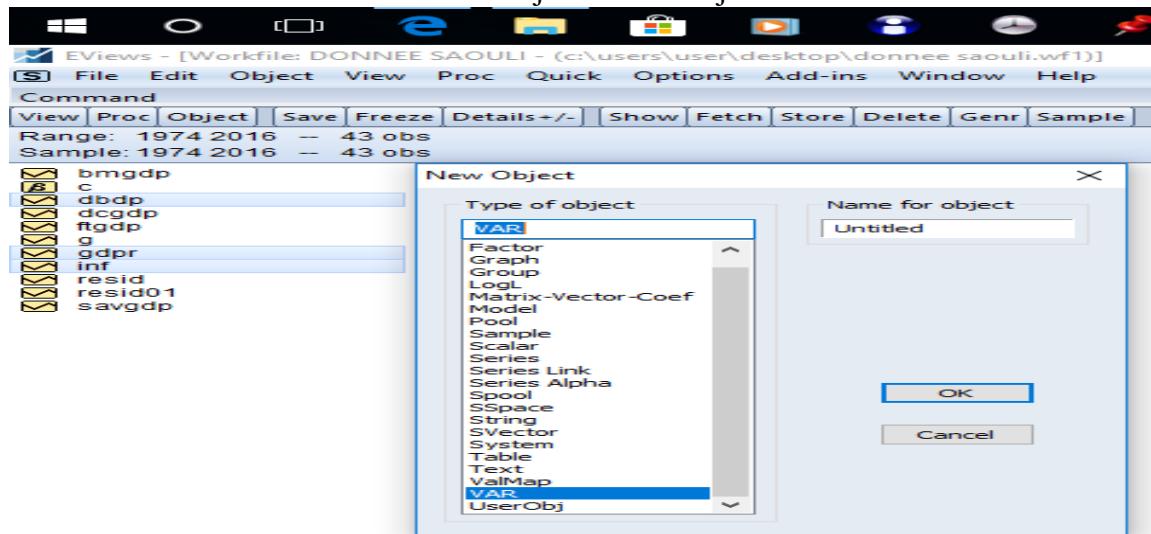
G = C(3)

System: UNTITLED Estimation Method: Least Squares Date: 04/12/18 Time: 16:58 Sample: 1974 2016 Included Observations: 43 Total system (balanced) observations 129				
	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	4160.607	809.6301	5.138898	0.0000
C(2)	9.565116	1.220945	7.834189	0.0000
C(3)	4407050.	423778.6	10.39942	0.0000
Determinant residual covariance		9.65E+21		
Equation: GDPR = C(1) Observations: 43				
R-squared	0.000000	Mean dependent var	4160.607	
Adjusted R-squared	0.000000	S.D. dependent var	5309.100	
S.E. of regression	5309.100	Sum squared resid	1.18E+09	
Durbin-Watson stat	0.021914			
Equation: INF = C(2) Observations: 43				
R-squared	0.000000	Mean dependent var	9.565116	
Adjusted R-squared	0.000000	S.D. dependent var	8.006274	
S.E. of regression	8.006274	Sum squared resid	2692.218	
Durbin-Watson stat	0.363670			
Equation: G = C(3) Observations: 43				
R-squared	0.000000	Mean dependent var	4407050.	
Adjusted R-squared	0.000000	S.D. dependent var	2778902.	
S.E. of regression	2778902.	Sum squared resid	3.24E+14	
Durbin-Watson stat	0.552133			

VI-8-7) ESTIMATION DES MODELES VAR SUR EVIEW

Création d'un objet var :

Dans la fenêtre de travail sélectionner Objects /New Objets / VAR



CHAPITRE VI : PRÉSENTATION DU LOGICIEL EVIEW 9.5

The screenshot shows the Eviews 9.5 interface. A dialog box titled "VAR Specification" is open, showing settings for "Unrestricted VAR" estimation, sample period "1974 2016", endogenous variables "gdpr g inf", and exogenous variable "c". Below the dialog, a table titled "Vector Autoregression Estimates" displays regression results for variables GDPR, G, and INF.

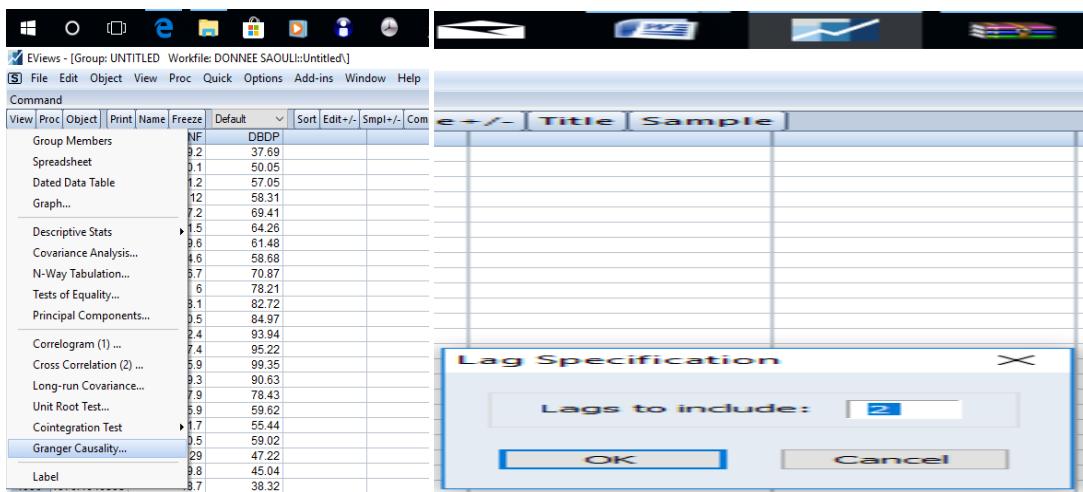
	GDPR	G	INF
GDPR(-1)	0.969963 (0.17064) [5.68416]	1.705243 (641.503) [0.00266]	-0.001513 (0.00156) [-0.96679]
GDPR(-2)	0.141532 (0.18934) [0.74751]	122.4248 (711.785) [0.17200]	0.001477 (0.00174) [0.85072]
G(-1)	-2.22E-05 (4.4E-05) [-0.50346]	0.706541 (0.16568) [4.26460]	-1.36E-07 (4.0E-07) [-0.33541]
G(-2)	2.23E-05 (4.3E-05) [0.51888]	-0.112286 (0.16139) [-0.69573]	-3.08E-07 (3.9E-07) [-0.78144]
INF(-1)	-3.583957 (18.3378) [-0.19544]	-4755.790 (68937.6) [-0.06899]	0.852499 (0.16818) [5.06906]
INF(-2)	11.11771 (18.5948) [0.59789]	102276.2 (69903.7) [1.46310]	-0.099219 (0.17053) [-0.58182]
C	3.877235 (221.788) [0.01748]	500996.9 (833772.) [0.60088]	4.945268 (2.03403) [2.43126]
R-squared	0.992024	0.579642	0.713815
Adj. R-squared	0.990617	0.505462	0.663312
Sum sq. resids	9159022.	1.29E+14	770.3512
S.E. equation	519.0219	1951167	4.759978

VI-8-8) TEST DE CAUSALITÉ DE GRANGER

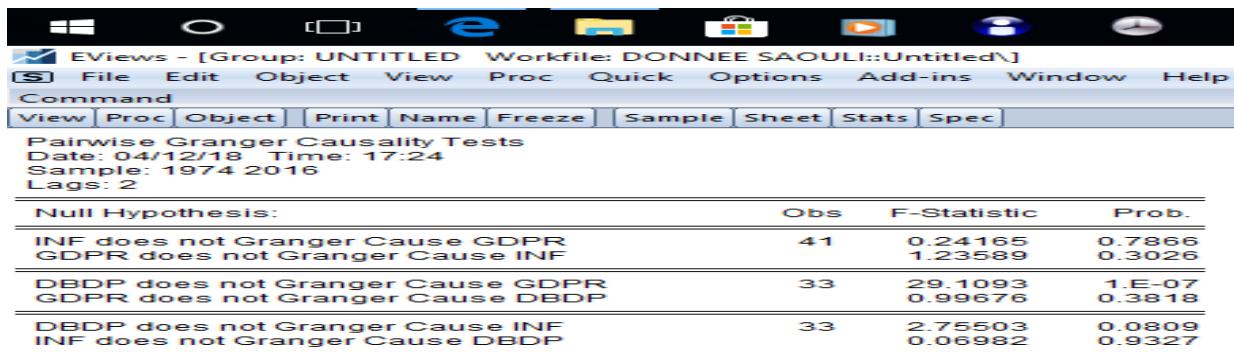
Dans la fenêtre de travail: Sélectionner les variables (dbdp gdpr, inf) et avec le bouton droit sélectionner open as group

The screenshot shows the Eviews 9.5 interface with a context menu open over variables dbdp, gdpr, and inf. The menu path "Object > Open" is highlighted, and a submenu "as Group" is shown, containing options: as Group, as Equation..., as Factor..., as VAR..., as System..., and as Multiple series.

CHAPITRE VI : PRÉSENTATION DU LOGICIEL EVIEW 9.5



Dans la fenêtre group sélectionner View puis Granger Causality ensuite donner le nombre de retards.

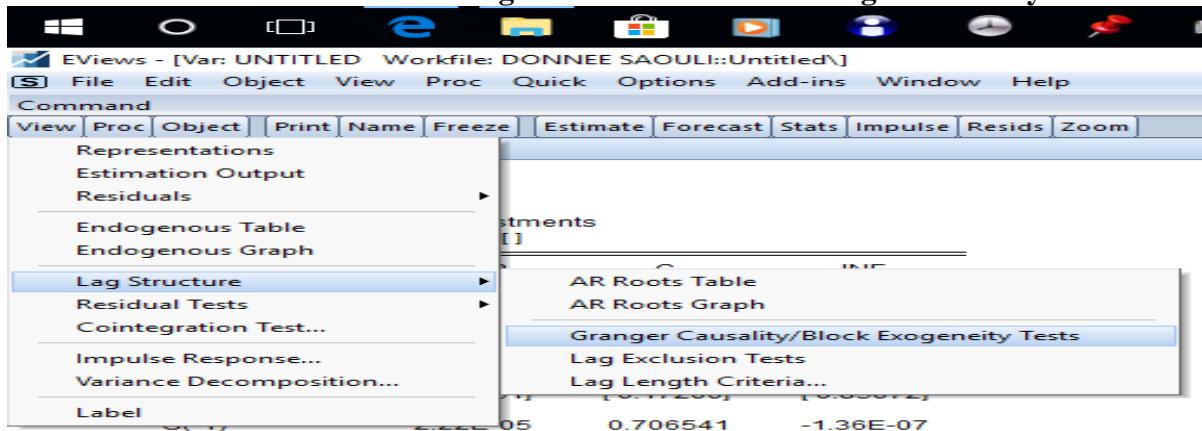


On accepte l'hypothèse de causalité si F statistiques est supérieure à la valeur de la table de Ficher au seuil de alfa%. Ou bien si la probabilité est inférieure à alfa.

VI-8-9) PAIRWISE GRANGER CAUSALITY TESTS :

Pour chaque équation du VAR on teste si une variable endogène peut être traité comme exogène.

Dans le menu sélectionner View/ Lag Structure/Pairwise Granger Causality Tests



CHAPITRE VI : PRÉSENTATION DU LOGICIEL EVIEW 9.5

The screenshot shows the EViews interface with the title bar "EViews - [Var: UNTITLED Workfile: DONNEE SAOULI::Untitled\]" and menu bar "File Edit Object View Proc Quick Options Add-ins Command". Below the menu is a toolbar with buttons for View, Proc, Object, Print, Name, Freeze, Estimate, Forecast, Stats, Impulse, Resids, and Zoom.

The main window displays the following text:

```
VAR Granger Causality/Block Exogeneity Wald Tests
Date: 04/12/18 Time: 17:41
Sample: 1974 2016
Included observations: 41
```

Dependent variable: GDP

Excluded	Chi-sq	df	Prob.
G	0.307619	2	0.8574
INF	0.520060	2	0.7710
All	0.768199	4	0.9427

Dependent variable: G

Excluded	Chi-sq	df	Prob.
GDPR	2.283230	2	0.3193
INF	4.764242	2	0.0924
All	5.048779	4	0.2823

Dependent variable: INF

Excluded	Chi-sq	df	Prob.
GDPR	1.833835	2	0.3997
G	2.144565	2	0.3422
All	4.626273	4	0.3278

Dans l'équation la variable GDPR les deux variables G et INF seraient exogènes.

Dans l'équation la variable G la variable GDPR serait exogène

Dans l'équation la variable INF les deux variables GDPR et G seraient exogènes.

VI-8-10) LA FONCTION IMPULSION REPONSE

Selectionner View/Impulse Response

The screenshot shows the EViews interface with the title bar "EViews - [Var: UNTITLED Workfile: DONNEE SAOULI::Untitled\]" and menu bar "File Edit Object View Proc Quick Options Add-ins Window Help". Below the menu is a toolbar with buttons for View, Proc, Object, Print, Name, Freeze, Estimate, Forecast, Stats, Impulse, Resids, and Zoom.

The main window displays the following text:

```
Vector Autoregression Estimates
Date: 04/12/18 Time: 18:17
Sample (adjusted): 1976 2016
Included observations: 41 after adjustments
Standard errors in () & t-statistics in []

```

	GDPR	G	INF
GDPR(-1)	0.969963 (0.17064) [5.68416]	1.705243 (641.503) [0.00266]	-0.001513 (0.00156) [-0.96679]
GDPR(-2)	0.141532 (0.18934) [0.74751]	122.4248 (711.785) [0.17200]	0.001477 (0.00174) [0.85072]
G(-1)	-2.22E-05 (4.4E-05) [-0.50346]	0.706541 (0.16568) [4.26460]	-1.36E-07 (4.0E-07) [-0.33541]
G(-2)	2.23E-05 (4.3E-05) [0.51888]	-0.112286 (0.16139) [-0.69573]	-3.08E-07 (3.9E-07) [-0.78144]

Impulse Responses

Display Impulse Definition

Display Format
 Table
 Multiple Graphs
 Combined Graphs

Impulses:
 gdpr g inf

Responses:
 None
 Analytic (asymptotic)
 Monte Carlo

Periods: 10
 Accumulated Responses

Le choc est égal à une unité du résidu Le choc est égal à une unité du de l'écart-type des résidus Les chocs utilisés correspondent à l'inverse de la factorisation de cholesky de la matrice de var/cov des résidus (ordre?)

The screenshot shows the EViews interface with the title bar "EViews - [Var: UNTITLED Workfile: DONNEE SAOULI::Untitled\]" and menu bar "File Edit Object View Proc Quick Options Add-ins Window Help". Below the menu is a toolbar with buttons for View, Proc, Object, Print, Name, Freeze, Estimate, Forecast, Stats, Impulse, Resids, and Zoom.

The main window displays the following text:

```
Vector Autoregression Estimates
Date: 04/12/18 Time: 18:17
Sample (adjusted): 1976 2016
Included observations: 41 after adjustments
Standard errors in () & t-statistics in []

```

	GDPR	G	INF
GDPR(-1)	0.969963 (0.17064) [5.68416]	1.705243 (641.503) [0.00266]	-0.001513 (0.00156) [-0.96679]
GDPR(-2)	0.141532 (0.18934) [0.74751]	122.4248 (711.785) [0.17200]	0.001477 (0.00174) [0.85072]
G(-1)	-2.22E-05 (4.4E-05) [-0.50346]	0.706541 (0.16568) [4.26460]	-1.36E-07 (4.0E-07) [-0.33541]
G(-2)	2.23E-05 (4.3E-05) [0.51888]	-0.112286 (0.16139) [-0.69573]	-3.08E-07 (3.9E-07) [-0.78144]

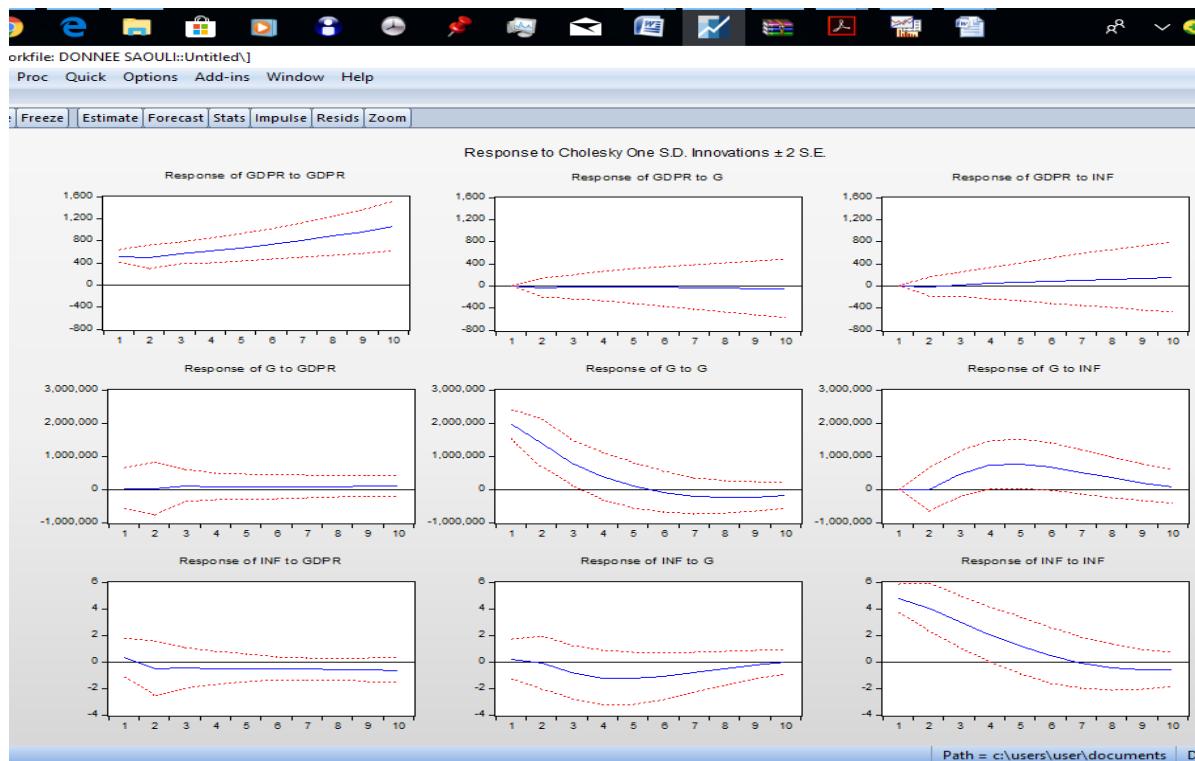
Impulse Responses

Display Impulse Definition

Decomposition Method:
 Residual - one unit
 Residual - one std.deviation
 Cholesky - dof adjusted
 Cholesky - no dof adjustment
 Generalized Impulses
 Structural Decomposition
 User Specified

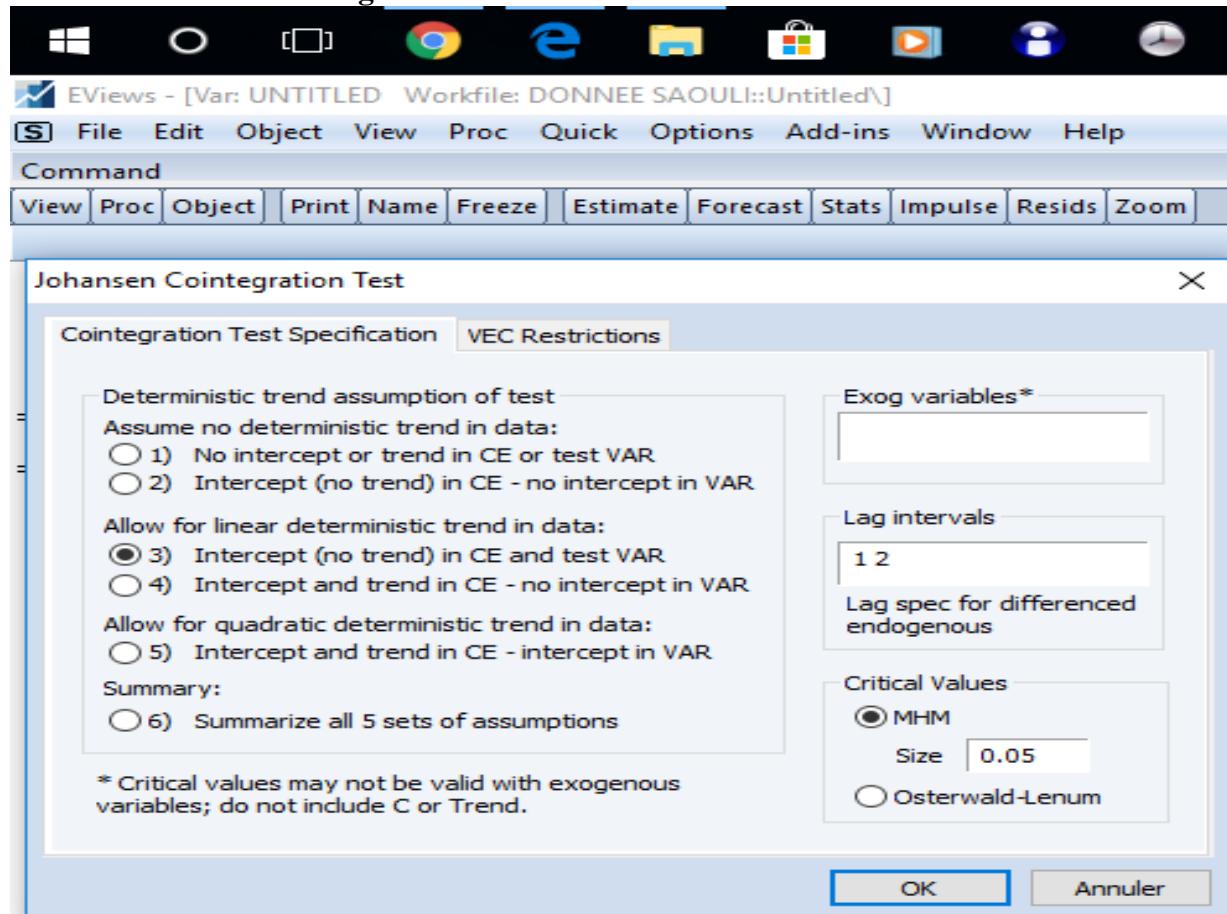
Cholesky Ordering:
 gdpr g inf

CHAPITRE VI : PRÉSENTATION DU LOGICIEL EVIEW 9.5



VI -8-11) TEST DE COINTEGRATION DE JOHANSEN

Sélectionner View/Cointegration Test



CHAPITRE VI : PRÉSENTATION DU LOGICIEL EVIEW 9.5

Date: 04/12/18 Time: 18:28
 Sample (adjusted): 1977 2016
 Included observations: 40 after adjustments
 Trend assumption: Linear deterministic trend
 Series: GDP G INF
 Lags interval (in first differences): 1 to 2

Unrestricted Cointegration Rank Test (Trace)

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Trace Statistic	0.05 Critical Value	Prob.**
None *	0.450358	45.41007	29.79707	0.0004
At most 1 *	0.299334	21.47053	15.49471	0.0056
At most 2 *	0.165597	7.241550	3.841466	0.0071

Trace test indicates 3 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level
 * denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level
 **MacKinnon-Haug-Michelis (1999) p-values

Unrestricted Cointegration Rank Test (Maximum Eigenvalue)

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Max-Eigen Statistic	0.05 Critical Value	Prob.**
None *	0.450358	23.93954	21.13162	0.0196
At most 1	0.299334	14.22898	14.26460	0.0506
At most 2 *	0.165597	7.241550	3.841466	0.0071

Max-eigenvalue test indicates 1 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level
 * denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level
 **MacKinnon-Haug-Michelis (1999) p-values

Unrestricted Cointegrating Coefficients (normalized by $b^*S11^*b=1$):

GDP	G	INF
0.000193	-4.51E-07	0.076578
0.000363	5.05E-08	-0.061560
-0.000341	-1.52E-07	-0.149097

VI-8-12) ESTIMATION D'UN VECM

VAR Specification

Rank Number of cointegrating	1
Deterministic Trend Specification	No trend in data
(<input type="radio"/> 1) No intercept or trend in CE or VAR	
(<input type="radio"/> 2) Intercept (no trend) in CE - no intercept in VAR	
(<input checked="" type="radio"/> 3) Intercept (no trend) in CE and VAR	
(<input type="radio"/> 4) Intercept and trend in CE - no trend in VAR	
(<input type="radio"/> 5) Intercept and trend in CE- linear trend in VAR	

VAR Specification

VAR Type <input type="radio"/> Unrestricted VAR <input checked="" type="radio"/> Vector Error Correction <input type="radio"/> Bayesian VAR	Endogenous Variables gdpr g inf
Estimation Sample 1974 2016	Lag Intervals for D (Endogenous): 1 2
	Exogenous Variables

Vector Error Correction Estimates

Date: 04/12/18 Time: 18:35
 Sample (adjusted): 1977 2016
 Included observations: 40 after adjustments
 Standard errors in () & t-statistics in []

Cointegrating Eq:

GDP(-1)	1.000000
G(-1)	-0.002335 (0.00048) [-4.83437]
INF(-1)	396.6934 (160.981) [2.46423]
C	2637.475

Error Correction:

CointEq1	D(GDP)	D(G)	D(INF)
D(GDP(-1))	0.011761 (0.01843) [0.63828]	257.7607 (55.5692) [4.63855]	0.000224 (0.00016) [1.40405]
	0.280528 (0.17172)	-575.1823 (517.888)	-0.001596 (0.00149)

- 1) AKAIKE H. [1973], Maximum Likelihood Estimation of Gaussian Autoregressive Moving Average Models, *Biometrika*, 60, 255-265.
- 2) ANDRSON, T.W. (1951). Estimating linear restrictions on regression coefficients for multivariate normal distributions. *Annals of Mathematical Statistics* 22, 327-351. Correction in *Annals of Statistics* 8, 1400 (1980).
- 3) ANTOINE D'AUTUME, «Cointegration et modèles dynamiques», *Economie et Prévision* 106 (1992).
- 4) Bourbonnais R, Terraza M (2004), Analyse des séries temporelles, Application à l'économie et à la gestion, Ed. DUNOD, Paris, *
- 5) Bresson G. et A. Pirotte, (1995), *Econométrie des séries temporelles : théorie et applications*, PUF, 658 pages.
- 6) Campbell J., A. Lo et A. C. MacKinlay, (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton, 611 pages
- 7) Chris B (2014). Introductory econometrics for finance. 3rd Edition
- 8) Cohen A., Lotfi S., Mélard G., Ouakasse A. et Wouters A., « Formation en analyse des séries temporelles », Actes des XXXIVes Journées de Statistique, Bruxelles et Louvain-la-Neuve, 13-17 mai 2002, Paris, Société Française de Statistique, p. 296-297.
- 9) Dufour, J.M(2003), Lissage exponentiel, Université de Montréal, 2 page 245
- 10) Delcor L., Delignières D., Cadopi, M., Brouillet, D., Analyse de la variabilité par les modèles ARIMA : une source d'information pour la compréhension des processus mnésiques. Consulté le 16/03/2018 sur http://euromov.eu/m2h/documents/publications/publication_39.pdf
<http://euromov.eu/m2h/fr/publications.php>
- 11) Emmanuel.C&Bruno (2006), les séries temporelles. Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines. Module XML et Data Mining.
- 12) Hélène Hamisultane, Econométrie des séries temporelles, Consulté le 04/04/2018 sur http://helene-hamisultane.voila.net/travaux/SERIES_TEMPORELLES.pdf ou <http://helene-hamisultane.voila.net/>
- 13) Hamilton J., (1994) *Times Series Analysis*, Princeton, 799 pages.
- 14) Giard. V (1993) Statistiques appliquée à la gestion. 8 ième édition. ECONOMICA
- 15) Greene W., (1995), *Econometric Analysis*, Third edition, MacMillan Editor, 791 pages.
- 16) Gouriéroux C., (1992) Modèles ARCH et applications financières, *Economica*, 288 pages.
- 17) Gouriéroux, C. ET Monfort, A. (1983), cour de séries temporelles, *Economica*, Paris
- 18) Marian S, Stephen S et Vic Ba time series data analysis using eviews.
- 19) Mélard G (1990) « Méthodes de prévision à court terme », Editions de l'Université de Bruxelles, 1990.
- 20) Mélard G., Pasteels J.-M., « Manuel d'utilisateur de Time Series Expert (TSE version 2.3) »,3e édition, Institut de Statistique et de Recherche Opérationnelle, Université Libre de Bruxelles, Bruxelles, 1997.
- 21) Sandrin L. Valérie M (2002): Econométrie des séries temporelles Macroéconomiques et financières. Edition ECONOMICA.
- 22) Serge D,(2007) cour de séries chronologique. Université Joseph Fourier.
- 23) Tassi Ph., (1992), Méthodes statistiques, *Economica*, collection ESA, 474 pages
- 24) Valérie M (2008) : Econométrie. Théorie et Applications. Corpus Economie. Edition ECONOMICA.
- 25) Walter Enders, « Applied econometric time series », Wiley series, 1995.
- 26) Xavier G(2008), Cours "Séries Temporelles", Cotonou, octobre 2008 Consulté sur <http://ebookbrowse.com/notes-de-cours-st-cotonou-pdf-d90109820> le 6/02/2018

ANNEXE N°1 CONCEPTS MATHÉMATIQUES POUR ABORDER LES SÉRIES TEMPORELLES

1) VARIABLES ALÉATOIRES

Soit (Ω, \mathcal{M}, P) un espace de probabilité, où Ω est l'espace des événements, \mathcal{M} est une tribu adaptée à Ω (c'est l'ensemble qui contient les combinaisons possibles d'événements) et P est une mesure de probabilité définie sur \mathcal{M} .

Définition Une variable aléatoire réelle (v.a.r) est une fonction à valeurs réelles $y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout réel c , $A_c = \{\omega \in \Omega | y(\omega) \leq c\} \in \mathcal{M}$.

En d'autres termes, A_c est un événement dont la probabilité est définie en termes de P . La fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ définie par $F(c) = P(A_c)$ est la *fonction de distribution* de y .

1) PROCESSUS STOCHASTIQUES

Soit T en ensemble d'indexation dénombrable contenu dans l'ensemble des entiers naturels ou dans celui des entiers relatifs.

Définition Un processus stochastique (discret) est une fonction à valeurs réelles

$$y : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Telle que pour tout $t \in T$ donné, $y_t(\cdot)$ soit une variable aléatoire.

En d'autres termes, un processus stochastique est une suite ordonnée de variables aléatoires $\{y_t(\omega), \omega \in \Omega, t \in T\}$, telle que pour tout $t \in T$, y_t soit une variable aléatoire sur Ω et que pour tout $\omega \in \Omega$, $y_t(\omega)$ soit une réalisation du processus stochastique sur l'ensemble d'indexation T .

Définition Une série temporelle $\{y_t\}_{t=1}^T$ est une réalisation d'un processus stochastique $\{y_t\}$.

2) STATIONNARITÉ

Définition Le processus $\{y_t\}$ est dit *stationnaire au sens faible*, ou *stationnaire au second ordre* si les premiers (moyenne ou espérance mathématique) et seconds (variance et autocovariances) moments du processus existent et sont indépendants de t .

La stationnarité est une propriété de stabilité, la distribution de y_t est identique à celle de y_{t-1} . La série oscille autour de sa moyenne avec une variance constante. Le lien entre y_t et y_{t-h} ne dépend alors que de l'intervalle h et non de la date t .

Définition Le processus $\{y_t\}$ est dit *strictement ou fortement stationnaire* si pour tous h_1, \dots, h_n , la distribution jointe de $(y_t, y_{t+h_1}, \dots, y_{t+h_n})$ dépend uniquement des intervalles h_1, \dots, h_n et non de t .

$$f(y_t, y_{t+h_1}, \dots, y_{t+h_n}) = f(y_T, y_{T+h_1}, \dots, y_{T+h_n})$$

La stationnarité stricte implique que tous les moments soient indépendants du temps.

3) QUELQUES PROCESSUS COURANT

Définition Un *bruit blanc* (white noise) est un processus stationnaire au sens faible de moyenne zéro et qui est dynamiquement non corrélé.

$$u_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

ANNEXE N°1 CONCEPTS MATHEMATIQUES POUR ABORDER LES SERIES TEMPORELLES

Ainsi $\{u_t\}$ est un bruit blanc si pour tout $t \in T$: $E[u_t] = 0$, $E[u_t^2] = \sigma^2 < \infty$, avec u_t et u_{t-h} indépendants si $h \neq 0$, t et $(t-h) \in T$.

Définition Si un bruit blanc $\{u_t\}$ est distribué Normalement, on parle de **bruit blanc Gaussien** :

$$u_t \sim NID(0, \sigma^2)$$

L'hypothèse d'indépendance est alors équivalente à celle de non corrélation :
 $E[u_t u_{t-h}] = 0$ si $h \neq 0$, t et $(t-h) \in T$.

4) LES METHODES COURANTES

5-1) EXTRAPOLATION DETERMINISTE DES SERIES

Les modèles sont dits déterministes lorsque leurs valeurs futures sont connues avec certitude à tout instant. Elles ne font donc pas référence aux sources d'incertitudes des processus stochastiques.

Si on dispose d'un échantillon de T observations d'une série : $y_1, y_2, \dots, y_{T-1}, y_T$, il existe un polynôme de degré $n = T-1$ qui passe par tous les points y_t :

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$$

5-2) TENDANCES LINEAIRES

Un caractéristique simple de y_t est sa tendance de long terme : si on pense qu'une tendance à la hausse existe et va perdurer, il est possible de construire un modèle simple qui va permettre de prévoir y_t . Le plus simple consiste en une **tendance linéaire** selon laquelle la série va s'accroître du même montant à chaque période :

$$\begin{aligned} y_t &= a + bt \\ \Delta y_t &= y_t - y_{t-1} = b \\ y_{T+h} &= a + b(T+h) \end{aligned}$$

Il peut sembler plus réaliste de penser que y_t va s'accroître du même pourcentage à chaque période, auquel cas une tendance exponentielle s'impose :

$$y_t = A e^{rt}$$

5-3) TENDANCES AUTOREGRESSIVES

Ici la valeur de t dépend de la valeur précédente :

$$y_t = a + b y_{t-1}$$

Selon les valeurs de b et a , le comportement de la série diffère. Si $a = 0$ et $|b| \neq 1$, b est le taux de croissance de la série, et si $b = 1$, y_t suit une tendance déterministe.

ANNEXE N°1 CONCEPTS MATHÉMATIQUES POUR ABORDER LES SÉRIES TEMPORELLES

5) MOYENNES MOBILES

Il existe deux types de moyenne mobile, l'un correspond au **modèle MA** et l'autre est davantage une **méthode ad hoc** permettant de donner une estimation d'une série. On suppose alors que la variable sera proche de sa moyenne récente. Une moyenne mobile est alors simplement une moyenne sur une fenêtre glissante d'observations :

$$\bar{y}_t^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_{t+k-i}$$

où k est librement fixé selon les besoins du modélisateur, pour une prévision, il est nécessaire que $k \leq 0$.

Mais il peut paraître peu réaliste que la prochaine valeur y_{T+1} puisse être proche d'une simple moyenne des dernières observations. Si on souhaite accorder plus de poids aux observations les plus récentes, on peut alors utiliser le modèle EWMA (Exponentially Weighted Moving Average) selon lequel :

$$\begin{aligned}\hat{y}_{T+1} &= \alpha y_T + \alpha(1-\alpha)y_{T-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{T-2} \dots \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^i y_{T-i},\end{aligned}$$

où α est compris entre 0 et 1 et indique l'importance accordée aux observations les plus récentes. Si $\alpha = 1$:

$$\hat{y}_{T+1} = y_T.$$

Notons qu'il s'agit bien d'une moyenne puisque la somme des coefficients est unitaire :

$$\alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^i = 1$$

Le modèle EWMA se prête mal aux variables présentant une tendance de fond à la hausse ou à la baisse, car il va dans ces cas sous- ou sur-prédire. Il est en revanche possible de l'appliquer à une série dont on a ôté la tendance.

Pour une prévision à horizon $h > 1$, il semble logique d'étendre

$$\hat{y}_{T+h} = \alpha \sum_{i=1}^{h-1} (1-\alpha)^{i-1} \hat{y}_{T+h-i} + \alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^{h-1+i} \hat{y}_{T-i}$$

ce qui donne

$$\hat{y}_{T+h} = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^i y_{T-i}$$

et ainsi le modèle EWMA fournit la même prévision à tous horizons.

6) LISSAGE

Les méthodes de lissage ont pour but de retirer ou de réduire les fluctuations (cycliques ou non) de court terme des séries. Les deux méthodes les plus employées pour lisser une série sont les moyennes mobiles et le lissage exponentiel.

7-1) MOYENNES MOBILES

Les moyennes mobiles présentées précédemment permettent aussi d'obtenir des séries lissées : par exemple en utilisant une moyenne mobile d'ordre n données par :

ANNEXE N°1 CONCEPTS MATHÉMATIQUES POUR ABORDER LES SÉRIES TEMPORELLES

$$\tilde{y}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_{t-i}$$

Plus n est élevé, plus la série sera lissée. Le problème est de n'utiliser que les valeurs passées et présentes. Pour y remédier, on peut faire appel à une moyenne mobile centrée :

$$\tilde{y}_t = \frac{1}{2k+1} \sum_{i=-k}^k y_{t+i}$$

7) LISSAGE EXPONENTIEL

Le lissage exponentiel fait appel aux modèles EWMA :

$$\tilde{y}_t = \alpha y_t + \alpha(1-\alpha) y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \dots + \alpha(1-\alpha)^{t-1} y_1$$

En pratique, il est plus facile d'écrire :

$$(1-\alpha)\tilde{y}_{t-1} = \alpha(1-\alpha) y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \dots + \alpha(1-\alpha)^{t-1} y_1$$

En soustrayant ces 2 équations on obtient la formule de récurrence du lissage exponentiel simple :

$$\tilde{y}_t = \alpha y_t + (1-\alpha) \tilde{y}_{t-1}$$

Plus α est proche de zéro, plus la série est lissée. En pratique toutefois, on peut souhaiter effectuer un lissage important mais sans donner trop de poids aux observations lointaines. On applique pour ce faire un lissage exponentiel double pour obtenir :

$$\tilde{y}_t = \alpha \tilde{y}_t + (1-\alpha) \tilde{y}_{t-1}$$

avec une valeur plus élevée de α .

Enfin il est possible d'appliquer cette formule aux changements moyens de la tendance de long terme de la série en utilisant la formule de lissage exponentiel à deux paramètres de Holt-Winters :

$$\begin{aligned}\tilde{y}_t &= \alpha y_t + (1-\alpha)(\tilde{y}_{t-1} + r_{t-1}) \\ r_t &= \gamma(\tilde{y}_t - \tilde{y}_{t-1}) + (1-\gamma)r_{t-1},\end{aligned}$$

où r_t est la série lissée représentant la tendance, i.e. le taux moyen de croissance.

Cette tendance est ajoutée lors du lissage afin d'éviter que le lissage exponentiel de y_t ne s'éloigne trop des valeurs récentes de la série originale y_t . Une prévision à horizon h peut être obtenue en posant

$$\hat{y}_{T+h} = \tilde{y}_T + h r_T$$

8) AJUSTEMENTS SAISONNIERS

Il existe diverses méthodes de correction des variations saisonnières. Elles fonctionnent pour la plupart sur une décomposition entre tendance et variations saisonnières de la forme :

$$Y_t = L \times S \times C \times I$$

Avec L la valeur de long terme, S le coefficient saisonnier, C le cycle saisonnier, et I une composante irrégulière. Le but est d'isoler S x I.

ANNEXE N°1 CONCEPTS MATHEMATIQUES POUR ABORDER LES SERIES TEMPORELLES

9) LES EQUATIONS DE YULE-WALKER

En l'absence de composante MA (q = 0 dans ARMA(p,q) la méthode à utiliser correspond aux moindres carrés ordinaires ou résolution des équations de Yule-Walker :

$$\lambda_1, \dots, \lambda_p \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \lambda_1 + \dots + \alpha_p \lambda_{p-1} \\ \lambda_2 = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p \lambda_{p-2} \\ \dots \\ \lambda_p = \alpha_1 \lambda_{p-1} + \alpha_{p-2} + \dots + \alpha_p \\ \lambda_k = \alpha_1 \lambda_{k-1} + \alpha_{k-2} + \dots + \alpha_{k-p}, \text{ pour } k > p \end{array} \right.$$

en remplaçant les auto corrélations théoriques par leurs estimateurs

10) LES ALGORITHMES PRESENTATION GENERALE DES MODELES USUELS

Voici une liste non exhaustive des modèles couramment utilisés dans les séries temporelles :

- ARIMA(Box&Jenkins) and Autocorrelations
- Interrupted Time Series ARIMA
- Exponential Smoothing
- Seasonal Decomposition (Census1)
- X-11 Census method II seasonal adjustement
- Distributed Lags Analysis
- Single Spectrum (Fourier) Analysis
- Cross Spectrum Analysis
- Spectrum Analysis
- Fast Fourier Transformations

1) LA REGRESSION LINEAIRE SIMPLE:

Considérons le modèle de régression suivant : $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, n$

où, Y_i est une variable qui dépend de la variable X_i , β_0 et β_1 sont des paramètres, ε_i est le terme d'erreur supposé d'espérance $E[\varepsilon_i] = 0$, de variance $\sigma^2[\varepsilon_i] = \sigma^2$, on suppose de plus que ε_i et ε_j sont non corrélés (i.e., $\sigma(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ pour tout $i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n$).

La réponse Y_i est la somme de deux composantes : Le terme constant $\beta_0 + \beta_1 X_i$ et le terme aléatoire ε_i . Donc Y_i est une variable aléatoire.

De $E[\varepsilon_i] = 0$, on déduit que : $E[Y_i] = E[\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i] = \beta_0 + \beta_1 X_i + E[\varepsilon_i] = \beta_0 + \beta_1 X_i$

Donc, la réponse Y_i découle d'une distribution de probabilité dont la moyenne est : $E[Y_i] = \beta_0 + \beta_1 X_i$

Nous obtenons pour le modèle considéré : $E[Y] = \beta_0 + \beta_1 X$

Les termes de l'erreur ε_i sont supposés avoir une variance constante σ^2 . Il vient alors que les Y_i ont la même variance, $\sigma^2(Y_i) = \sigma^2(\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i) = \sigma^2(\varepsilon_i) = \sigma^2$

Finalement Y a la même variance σ^2 . Comme les termes de l'erreur sont supposés non corrélés, les Y_i le sont également.

Pour trouver de bons estimateurs des paramètres de régression β_0 et β_1 on emploie la méthode dite **des moindres carrés**. Pour chaque observation (X_i, Y_i) la méthode des moindres carrés considère la différence entre Y_i et la valeur attendue :

$$Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i)$$

En particulier, on considère le carré de ces n (le nombre d'observations) différences ;

$$Q = \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2$$

Les estimateurs de β_0 et β_1 sont les valeurs b_0 et b_1 , respectivement, qui minimise Q pour l'échantillon des n observations $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$.

Pour trouver b_0 et b_1 , les valeurs qui minimisent Q , on utilise souvent une méthode analytique. On peut montrer que b_0 et b_1 sont donnés par les équations suivantes :

$$\sum Y_i = nb_0 + b_1 \sum X_i$$

$$\sum X_i Y_i = b_0 \sum X_i + b_1 \sum X_i^2$$

Les deux équations sont appelées **équations normales**. Celles-ci peuvent être résolues simultanément pour b_0 et b_1 :

$$b_1 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \text{ et } b_0 = \frac{1}{n} (\sum Y_i - b_1 \sum X_i) = \bar{Y} - b_1 \bar{X}$$

Où, \bar{X} et \bar{Y} sont les moyennes des observations X_i et Y_i respectivement. Bien qu'il existe d'autres expressions pour estimateurs des moindres carrés, celles-ci sont les plus adaptées pour le calcul informatique.

Fonction de régression estimée s'écrit comme suit : $\hat{Y} = b_0 + b_1 X$

Où \hat{Y} est la valeur de la fonction de régression estimée au niveau X . Nous appellerons $E[Y]$ la *moyenne de la réponse*, c'est donc la moyenne de la distribution de probabilité de Y correspondant au niveau X . \hat{Y} est un estimateur de la moyenne de la réponse au niveau X . Ceci peut-être vu comme une extension du théorème de Gauss-Markov ; \hat{Y} est un estimateur sans biais de $E[Y]$, de variance minimum dans la classe des estimateurs linéaires sans biais.

Nous appellerons $\hat{Y}_i : \hat{Y}_i = b_0 + b_1 X_i \quad i = 1, \dots, n$ la *valeur ajustée* pour l'indice i (\hat{Y}_i doit être distingué de Y_i qui est la valeur observée).

Les résidus : Le $i^{\text{ème}}$ résidu est la différence entre la valeur observée Y_i et la valeur ajustée correspondante \hat{Y}_i . Ce résidu noté e_i est, en général, défini de la manière suivante :

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i.$$

Pour le modèle, nous obtenons $e_i = Y_i - (b_0 + b_1 X_i) = Y_i - b_0 - b_1 X_i$

Il faut distinguer le terme de l'erreur du modèle $\varepsilon_i = Y_i - E[Y_i]$ du résidu $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$. Le premier représente la déviation verticale de Y_i par rapport à la vraie droite de régression inconnue, il est donc aussi inconnu. Le résidu, par contre, est la déviation verticale de Y_i par rapport à la valeur ajustée \hat{Y}_i sur la droite de régression estimée ; il est donc connu

2) LE MODELE DE REGRESSION LINEAIRE GENERAL

Le modèle linéaire général (multilinéaire) étend au cas d'un nombre quelconque de variables explicatives le modèle simple considéré précédemment. Soit,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i,1} + \beta_2 X_{i,2} + \dots + \beta_{p-1} X_{i,p-1} + \varepsilon_i$$

où, $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p-1}$ sont des paramètres,

$X_{i,1}, X_{i,2}, \dots, X_{i,p-1}$ sont constantes,

ε_i sont indépendants de loi $N(0, \sigma^2)$,

$i=1, \dots, n$

En posant $X_{i,0} = 1$, on peut écrire le modèle sous la forme suivante :

$$Y_i = \beta_0 X_{i,0} + \beta_1 X_{i,1} + \beta_2 X_{i,2} + \dots + \beta_{p-1} X_{i,p-1} + \varepsilon_i$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} \beta_k X_{i,k} + \varepsilon_i \qquad \text{où, } X_{i,k}=1$$

La *réponse* pour ce modèle s'écrit :

$$E[Y] = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_{p-1} X_{p-1}$$

Ce modèle implique que les variables aléatoires Y_i sont des variables indépendantes normales de moyenne $E[Y_i]$ et de variance σ^2 . Sous la forme matricielle, le modèle s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{Y}_{nx1} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_{nxp} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1,p-1} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2,p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{n,1} & X_{n,2} & \cdots & X_{n,p-1} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\beta}_{px1} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{p-1} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{nx1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}.$$

Le modèle peut s'écrire sous la forme : $\mathbf{Y}_{nx1} = \mathbf{X}_{nxp} \boldsymbol{\beta}_{px1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{nx1}$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ est un vecteur de variables aléatoires indépendantes normales centrées, $E[\boldsymbol{\varepsilon}] = 0$, de matrice

$$\text{de variance-covariance, } \sigma^2 \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_{nn} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \cdot \mathbf{I}.$$

En conséquence, on obtient pour le vecteur aléatoire \mathbf{Y} :

$$E[\mathbf{Y}]_{nx1} = \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}_{px1} \text{ et } \sigma^2 \{\mathbf{Y}\}_{nn} = \sigma^2 \cdot \mathbf{I}$$

On généralise la méthode des moindres carrés. On cherche donc à minimiser

$$Q = \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_{i,1} - \beta_2 X_{i,2} - \cdots - \beta_{p-1} X_{i,p-1})^2$$

Les estimateurs des moindres carrés sont les valeurs $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_{p-1}$ qui minimisent Q. Soit b_1, b_2, \dots, b_{p-1}

Les estimateurs des moindres carrés sont :

$$\mathbf{b}_{px1} = (\mathbf{X}' \mathbf{X})_{pxp}^{-1} (\mathbf{X}' \mathbf{Y})_{px1}$$

Notons par $\hat{\mathbf{Y}}$ le vecteur des valeurs ajustées \hat{Y}_i et e le vecteur des termes résiduels est donné par : $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$:

NB : La méthode du maximum de vraisemblance nous mène aux mêmes estimateurs (l'erreur est normale), on les obtient en maximisant la fonction de vraisemblance suivante :

$$L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_{i,1} - \cdots - \beta_{p-1} X_{i,p-1})^2 \right]$$