# МИНОБРНАУКИ РОССИИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)

Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

#### ОТЧЕТ

по практической работе №2 по дисциплине «Построение и Анализ Алгоритмов»

Тема: Алгоритмы на графах

Студент гр. 8382	 Вербин К.М.
Преподаватель	Фирсов М.А.

Санкт-Петербург

2020

#### Цель работы.

Ознакомится с реализацией алгоритмов: жадный и  $A^*$ , написать программу на языке программирования C++.

#### Вариант 3

Написать функцию, проверяющую эвристику на допустимость и монотонность.

#### Жадный алгоритм

#### Постановка задачи

Разработайте программу, которая решает задачу построения пути в ориентированном графе при помощи жадного алгоритма. Жадность в данном случае понимается следующим образом: на каждом шаге выбирается последняя посещённая вершина. Переместиться необходимо в ту вершину, путь до которой является самым дешёвым из последней посещённой вершины. Каждая вершина в графе имеет буквенное обозначение ("a", "b", "c"...), каждое ребро имеет неотрицательный вес.

Пример входных данных

a e

a b 3.0

b c 1.0

c d 1.0

a d 5.0

d e 1.0

В первой строке через пробел указываются начальная и конечная вершины Далее в каждой строке указываются ребра графа и их вес В качестве выходных данных необходимо представить строку, в которой перечислены вершины, по которым необходимо пройти от начальной вершины до конечной. Для приведённых в примере входных данных ответом будет

#### Описание алгоритма

Решение поставленной задачи осуществляется с помощью рекурсивной функции funk(std::vector\* vector, char curChar, char endChar, std::vector\* answer), которая и реализует жадный алгоритм. Вначале всегда происходит проверка – не является ли подаваемая начальная вершина равной конечной. Далее, пройдя проверку, создается пустой временный вектор путей(temporary Vector) и начинается проход по вектору исходному. В этом проходе происходит отбор нужных нам путей, т.е. тех, у которых nameFrom(имя родителя) равняется текущей вершине, которую рассматриваем. Если это так, то записываем путь (в котором родитель – рассматриваемая вершина) в текущий временный вектор(temporary Vector). Далее, так как нужен самый "дешевый" путь, то вызываем функцию сортировки вершин(sort), которая сортирует вершины по наименьшему весу ребер. И потом рекурсивно вызываем функцию func(), только теперь текущая вершина будет первая (минимальная весу ребра) ПО вектора temporary Vector.

#### Описание используемого класса

Класс путей (class Path): Класс путей состоит из следующих свойств:

- char nameFrom имя вершины откуда исходит путь(т.е. ребро графа);
- char nameOut имя вершины куда входит путь(т.е. ребро графа);
- double weightPath вес ребра графа; Класс пути содержит следующие методы:
- Path(char nameFrom, char nameOut, double weightPath) конструктор, принимающий имя вершины начала, имя вершины конца и вес этого ребра.
  - char getNameFrom() метод, для получения поля nameFrom класса Path.
  - getNameOut() метод, для получения поля nameOut класса Path.

• double getWeightPath() – метод, для получения поля weightPath класса Path.

#### Описание main ():

В функции прописан ввод вершины начальной, вершины конечной, а также ввод ребер с их весами, вызовы функций и выводы промежуточных данных на консоль.

# Описание дополнительных функций

Функция bool comp(Path a, Path b), принимает две переменные класса Path, и сравнивает их по весу.

#### Сложность алгоритма по памяти

Сложность для жадного алгоритма оценивается как O(|V+E|), так как в исходном векторе может максимум хранится число всех ребер, и с каждой новой вершиной мы 'проваливаемся' в рекурсию и создаем новый вектор.

#### Сложность алгоритма по времени

Сложность для жадного алгоритма оценивается как  $O(|E|\log E|)$ , так как в худшем случае будет совершаться обход по всем ребрам, а изначальная сортировка ребер по длине имеет сложность  $O(|E|\log E|)$ .

#### <u>Алгоритм А\*</u>

#### Постановка задачи.

Разработайте программу, которая решает задачу построения кратчайшего пути в ориентированном графе методом А\*. Каждая вершина в графе имеет буквенное обозначение ("a", "b", "c"...), каждое ребро имеет неотрицательный вес. В качестве эвристической функции следует взять близость символов, обозначающих вершины графа, в таблице ASCII.

Пример входных данных

a e

a b 3.0

b c 1.0

c d 1.0

a d 5.0

d e 1.0

В первой строке через пробел указываются начальная и конечная вершины Далее в каждой строке указываются ребра графа и их вес В качестве выходных данных необходимо представить строку, в которой перечислены вершины, по которым необходимо пройти от начальной вершины до конечной. Для приведённых в примере входных данных ответом будет

ade

#### Описание алгоритма

Вначале создаются 2 вектора: с открытыми вершинами и закрытыми вершинами. (Изначально в вектор открытых вершин кладем начальную вершину). Первым делом из списка открытых вершин выбирается вершина, с наименьшей f(x) (f(x) = g(x) + h(x) где g(x) - стоимость пути от начальной вершины до вершины x, а h(x) - значение эвристической функции). (Выбор наименьшего значения осуществляется путем функции sort() и компаратора). Выбранная вершина удаляется из открытого списка и записывается в закрытый. Далее происходит проход по детям текущей вершины. Если ребенок не записан в открытый список, то записывается. Затем начинает обновляться информация о ребенке, а именно: кратчайший путь до него и значение эвристической функции и записывается информация откуда мы в него пришли(кто родитель). Цикл продолжается до тех пор, пока вектор открытых вершин будет не пуст. Далее, когда функция доходит до искомой конечной вершины, происходит вызов функции для вывода ответа.

#### Описание используемых классов

Класс вершин(class Top): Класс вершин состоит из следующих свойств:

- char name имя вершины;
- double pathToTop путь до текущей вершины;
- double heuristicF эврестическая функция;
- char nameFromT имя, откуда исходит вершина.
- vector coupled вектор для исходящих из вершины вершин. Класс вершин содержит следующие методы:
- Top(char name) конструктор, принимающий имя вершины, используется для создания самой первой вершины.
  - Тор() конструктор, для создания вершин по умолчанию

#### Описание дополнительных функций

- bool comp(Top a, Top b) функция принимает 2 переменные типа Тор, используется для сортировки открытых вершин по значению эвристической функции.
  - Тор а 1 вершина
  - Тор b 2 вершина
- void answer(std::vector& vectorTops, char startTop, char endTop) функция принимает вектор вершин, а также начальную и искомую вершины. Данная функция используется для вывода ответа.
  - o std::vector& vectorTops вектор вершин
  - o char startТор начальная вершина
  - o char endTop искомая вершина
- void changeInfo(std::vector& vectorTops, std::vector& openVertexes, char a, char name, double temp\_G, char endTop ) функция принимает вектор вершин, вектор открытых вершин, имя ребенка вершины, которую рассматриваем, имя самой вершины, значение длины пути до него и имя

конечной вершины, для вычисления эвристической оценки. Данная функция используется для смены информации о вершине и ребенке вершины.

- o std::vector& vectorTops вектор вершин
- o std::vector& openVertexes вектор открытых вершин
- o double temp\_G имя ребенка вершины
- o char endTop имя самой вершины
- int whatNumber(char a, std::vector& vectorTops) функция принимает имя вершины и вектор вершин. Данная функция ищет вершину в векторе и возвращает её индекс.
  - o char a имя вершины
  - o std::vector& vectorTops вектор вершин
- bool check(std::vector& vectorPath, std::vector& vectorTops, char endTop, bool flagM, bool flagAd) функция принимает вектор пути, вектор вершин и имя искомой вершины. Данная функции сначала выполняет проверку эвристики на монотонность, по свойству монотонности: Эвристическая функция h(v) называется монотонной, если для любой вершины v1 и её потомка v2 разность h(v1) и h(v2) не превышает фактического веса ребра c(v1,v2) от v1 до v2, а эвристическая оценка целевого состояния равна нулю. Далее, в случае, когда она не монотонна, функция выполняет проверку эвристики на допустимость по следующему свойству:
  - std::vector& vectorPath вектор пути
  - o std::vector& vectorTops вектор вершин
  - o char endTop имя искомой вершины
  - o bool flagM флаг монотонности
  - o bool flagAd флаг эвристики

Говорят, что эвристическая оценка h(v) допустима, если для любой вершины v значение h(v) меньше или равно весу кратчайшего пути от v до цели. Данная проверка происходит в случае, когда монотонность не

выполнилась, так как существует теорема: Любая монотонная эвристика допустима, однако обратное неверно.

#### Сложность алгоритма по памяти

Сложность для алгоритма  $A^*$  оценивается как O(n+e) при более точной эвристической функции, так как программе приходится хранить граф целиком. В случае не точной эвристической функции придется запоминать экспоненциальное количество узлов. Тогда сложность может оказаться экспоненциальной  $(O(2^e))$ .

### Сложность алгоритма по времени

Сложность алгоритма по операциям зависит от эвристики  $|h(x)-h^*(x)| \le O(\log h^*(x))$  В цикле выполняется е итераций, где e- количество рёбер в графе. На каждой итерации в массиве кратчайших расстояний выполняется поиск вершины с кратчайшим до неё путём с учётом эвристической функции (п операций, где n- количество вершин графа). Далее идёт цикл по всем соседям вершины со всеми прямыми путями до них (е). Проверка на непосещённость вершины из текущей занимает n операций, проверка на содержание этой вершины в массиве кратчайших расстояний тоже занимает n операций. Если вершина содержится в массиве кратчайших расстояний, то на поиск вершины в этом массиве и замену величины кратчайшего пути до неё (если найден лучше) тратится (n+n) операций. Все вставки и извлечения из массивов константны по операциям. Получаем O ( e (n+e (n+n+n+n)) ) = O ( e (n+4\*n\*e\*e) в лучшем случае, где n- количество рёбер в графе, n- количество вершин. O ( $2^e$ ) в худшем случае, n- количество рёбер.

# Тестирование

Input	Output	
Жадный Алгоритм		
a e	abcde	

a b 3.0		
b c 1.0		
c d 1.0		
a d 5.0		
d e 1.0		
a h	acfh	
a b 3.0		
a c 1.0		
a d 2.0		
b e 5.0		
c f 2.0		
d g 6.0		
e h 1.0		
f h 3.0		
g h 1.0		
a g	adfg	
a b 1.0		
b c 1.0		
a d 3.0		
d e 1.0		
d f 2.0		
f g 4.0		
a e	Error!	
a b 2.0		
b c 1.0		
a d 3.0		
Алгоритм А*		
Input	Output	
a e	ade	
a b 3.0		

b c 1.0	
c d 1.0	
a d 5.0	
d e 1.0	
a h	acfh
a b 3.0	
a c 1.0	
a d 2.0	
b e 5.0	
c f 2.0	
d g 6.0	
e h 1.0	
f h 3.0	
g h 1.0	
a g	adfg
a b 1.0	
b c 1.0	
a d 3.0	
d e 1.0	
d f 2.0	
f g 4.0	
a e	Error!
a b 2.0	
b c 1.0	
a d 3.0	

# Вывод

В результате работы была написана полностью рабочая программа, выполняющая поставленную задачу.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

# КОД ПРОГРАММЫ

```
Жадный алгоритм
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>
#include <iomanip>
                      // std::setw
using namespace std;
class Path {
private:
  char nameFrom;
  char nameOut:
  double weightPath;
public:
  Path(char nameFrom, char nameOut, double weightPath)
     : nameFrom(nameFrom), nameOut(nameOut), weightPath(weightPath) {}
  char getNameFrom() const {
     return nameFrom;
  }
  char getNameOut() const {
     return nameOut;
  }
  double getWeightPath() const {
     return weightPath;
};
bool comp(Path a, Path b) {//comparator
  return a.getWeightPath() < b.getWeightPath();</pre>
}
bool func(std::vector<Path>* vector, char curChar, char endChar,
std::vector<char>* answer, int depth) {
  depth++;
  std::cout << setw(depth + 1) << ' ' << "Processing the vertex: " << curChar <<
std::endl;
```

```
if (curChar == endChar) { //exit from recursion
     std::cout << setw(depth + 1) << ' ' << "Reached the desired peak" <<
endChar << ". The function returns TRUE and shuts down." << std::endl:
     return true;
  }
  std::cout << setw(depth + 1) << ' ' << "Search for paths leading from this
vertex." << std::endl;</pre>
  std::vector<Path> temporaryVector;
  temporaryVector.reserve(0);
  for (Path path: *vector) {// all vertexes in the vector will be passed
     if (path.getNameFrom() == curChar) {//selects all paths from the desired
vertex
       std::cout << setw(depth + 1) << ' ' << "Since the vertex" <<
path.getNameOut() << " comes from the current vertex, writing this path to the
vector." << std::endl;
       temporaryVector.emplace back(path);//written to a vector
     }
  }
  //since we need the cheapest way we will cohabit
  std::cout << setw(depth + 1) << ' ' << "Sorting of vertices of minimum weight."
<< std::endl:
  std::sort(temporaryVector.begin(), temporaryVector.end(), comp);
  for (Path path: temporary Vector) {//going through all the vertexes
     if (func(vector, path.getNameOut(), endChar, answer, depth)) {//new variable
       depth--;
       std::cout << setw(depth + 1) << ' ' << "Writing a vertex" <<
path.getNameOut() << " in the response vector" << std::endl;</pre>
       answer->emplace back(path.getNameOut());
       return true;
  }
  return false;
int main() {
  setlocale(LC ALL, "rus");
```

```
int depth = 0;
  int flag = 1;
  std::vector<Path> vector;
  vector.reserve(0);
  std::vector<char> answer;
  answer.reserve(0);
  char startChar;
  char endChar:
  std::cout << "Please, enter the starting vertex and ending vertex, as well as the
edges of the graph with its weight: " << std::endl;
  std::cin >> startChar:
  std::cin >> endChar;
  char start, end;
  double weight;
  while (std::cin >> start >> end >> weight) {
    vector.emplace back(Path(start, end, weight));
  }
  std::cout << "The greedy algorithm function is started" << std::endl;
  if (!func(&vector, startChar, endChar, &answer, depth))
    std::cout << "Error!" << std::endl;
    flag = 0;
  }
  if (flag)
    std::cout << "The greedy algorithm function shuts down" << std::endl;
    std::cout << "The initial vertex is added to the response vector." << std::endl;
     answer.emplace back(startChar);
    std::cout << "Reversing the response vector." << std::endl;
     std::reverse(answer.begin(), answer.end());
     std::cout << "Answer: " << std::endl;
     for (char sym: answer) {
       std::cout << sym;
```

```
}
  return 0;
Алгоритм А*
include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>
#include <set>
class Top {//vertex class
public:
  char name;
  double pathToTop;//path to the current vertex - g
  double heuristicF;//heuristic function - f
  char nameFromT;
  std::vector<char> coupled;//vector for vertexes originating from a vertex
  Top(char name)//constructor1-required to fill in the initial vertex
     : name(name) {
    heuristicF = 0;
     pathToTop = -1;//will be used for unprocessed vertexes instead of the infinity
sign
     nameFromT = '-';
  }
                         //constructor2
  Top() {
     name = '!';
     heuristicF = 0;
    pathToTop = -1;
    nameFromT = '-';
};
class Path {//path class. It stores only the path: from where to where and how much
the path weighs
public:
```

```
char nameFromP;
  char nameOutP;
  double weightPath;
  Path(char nameFromP, char nameOutP, double weightPath)
    : nameFromP(nameFromP), nameOutP(nameOutP), weightPath(weightPath)
{}
  char getNameFromP() const {
    return nameFromP;
  }
  char getNameOutP() const {
    return nameOutP;
  }
  double getWeightPath() const {
    return weightPath;
};
bool check(std::vector<Path>& vectorPath, std::vector<Top>& vectorTops, char
endTop, bool flagM, bool flagAd)
  std::cout << "\nThe monotony and tolerance check function is started " <<
std::endl;
  if (abs(endTop - endTop) != 0) {
    std::cout << "\nThe heuristic estimate of the target state is not zero!" <<
std::endl;
    flagM = false;
  }
  for (unsigned int i = 0; i < \text{vectorPath.size}(); i++) {
    if ((abs(endTop - vectorPath[i].nameFromP) - abs(endTop -
vectorPath[i].nameOutP)) > vectorPath[i].weightPath) {
       std::cout << "\nThe monotony is broken." << std::endl;
       flagM = false;
     }
```

```
//checking for validity
  if (!flagM)
    for (unsigned int i = 0; i < vectorTops.size(); i++) {
       if ((abs(endTop - vectorTops[i].name) > (vectorTops[vectorTops.size() -
1].pathToTop - vectorTops[i].pathToTop)))
          std::cout << "\nTolerance is violated." << std::endl;
          flagAd = false;
  if (flagM)
    std::cout << "\nThe heuristic is monotonous and valid!" <<
std::endl;//monottonna i dopystima
    return true;
  else if (!flagM && flagAd)
    std::cout << "\nThe heuristic is valid!" << std::endl;//dopustima
    return true;
  else
    std::cout << "\nThe heuristic is not monotonous and is not allowed!" <<
std::endl;
    return false;
}
int whatNumber(char a, std::vector<Top>& vectorTops) {
  for (unsigned int i = 0; i < vectorTops.size(); i++) {
    if (vectorTops[i].name == a) {
```

```
return i;
  }
  return -1;
bool comp(Top a, Top b) {//comparator, used for sorting in an open list
  return a.heuristicF < b.heuristicF;
void answer(std::vector<Top>& vectorTops, char startTop, char endTop)
  std::cout << "\nThe response output function starts. \n" << std::endl;
  std::vector<Top> answer;
  answer.reserve(0);
  Top temp = vectorTops[whatNumber(endTop, vectorTops)];
  std::cout << "\tWriting the last vertex to the response vector " << endTop <<
std::endl:
  answer.emplace back(temp);
  while (temp.name != startTop) {
    temp = vectorTops[whatNumber(temp.nameFromT, vectorTops)];
    std::cout << "\tWriting a vertex to the response vector " << temp.name <<
std::endl;
    answer.emplace back(temp);
  std::cout << "\nReversing the response vector " << std::endl;
  std::reverse(answer.begin(), answer.end());//since it was filled in the reverse
order, we do reverse
  std::cout << "\nAnswer: " << std::endl;
  for (Top ans : answer) {
    std::cout << ans.name;
  std::cout << std::endl;
}
void changeInfo(std::vector<Top>& vectorTops, std::vector<Top>&
openVertexes, char a, char name, double temp G, char endTop)
  std::cout << "\nUpdate information: \n" << std::endl;
  vectorTops[whatNumber(a, vectorTops)].nameFromT = name;
  vectorTops[whatNumber(a, vectorTops)].pathToTop = temp G;
  openVertexes[whatNumber(a, openVertexes)].nameFromT = name;
  openVertexes[whatNumber(a, openVertexes)].pathToTop = temp G;
```

```
openVertexes[whatNumber(a, openVertexes)].heuristicF = temp G +
abs(endTop - a);
  std::cout << "\tVertex " << a << " set that comes from " << name <<
std::endl;
  std::cout \ll "\tPath to the vertex " \ll a \ll " = " \ll temp G \ll std::endl;
  std::cout << "\tF(" << a << ") (Heuristic estimation + cost) = " << temp G +
abs(endTop - a) << std::endl;
  std::cout << "\nThe end of the update information. \n" << std::endl;
}
bool A(std::vector<Path>& vectorPath, std::vector<Top>& vectorTops, char
startTop, char endTop) {
  Top temp;
  double temp G;
  std::vector<Top> closedVertexes;
  closedVertexes.reserve(0);
  std::vector<Top> openVertexes;
  openVertexes.reserve(0);
  std::cout << "\tAdding a vertex to the vector of open vertexes " <<
vectorTops[0].name << std::endl;
  openVertexes.emplace back(vectorTops[0]);
  while (!openVertexes.empty()) {
    Top min = openVertexes[0];
    std::cout << "\nSort the open tops of the \n" << std::endl;
    std::sort(openVertexes.begin(), openVertexes.end(), comp);
    temp = openVertexes[0]; //minimum f from openVertexes
    std::cout << "\tCurrent vertex: " << temp.name << std::endl;
    if (temp.name == endTop) {
       std::cout << "\nThe current vertex is equal to the one you are looking for,
so we call the response output function.\n" << std::endl;
       answer(vectorTops, startTop, endTop);
       return true;
    std::cout << "\tAdding a vertex " << openVertexes[0].name << " in the
vector of closed vertexes. And delete it from the vector of open vertexes." <<
std::endl:
    closedVertexes.emplace back(temp); //adding the processed vertex
    openVertexes.erase(openVertexes.begin()); //deleting the processed vertex
    for (unsigned int i = 0; i < temp.coupled.size(); i++) { //for each neighbor
```

```
if (whatNumber(temp.coupled[i], closedVertexes) != -1) { //if the neighbor
is in closedVertexes (already processed)
         continue;
       int j = 0;
       while (true) {
         if (vectorPath[i].nameFromP == temp.name && vectorPath[i].nameOutP
== temp.coupled[i]) {
            std::cout << "\tCounting the value of the shortest path to the vertex
<< vectorPath[i].nameOutP << std::endl;
            temp G = vectorPath[i].weightPath + temp.pathToTop;
            std::cout << "\tShortest path to the top = " << temp G << std::endl;
       if (whatNumber(temp.coupled[i], openVertexes) == -1) { //if the neighbor
is not in openVertexes
         std::cout << "\tSince the neighboring vertex " << temp.coupled[i] << "
if it is not in the vector of open vertexes, then we add it to it." << std::endl;
         openVertexes.emplace back(vectorTops[whatNumber(temp.coupled[i],
vectorTops)]); //adding a neighbor
         std::cout << "\nCalling the information update function." << std::endl;
         changeInfo(vectorTops, openVertexes, temp.coupled[i], temp.name,
temp G, endTop);
       else {
         if (temp G < openVertexes[whatNumber(temp.coupled[i],
openVertexes)].pathToTop) {
            std::cout << "\nSince a shorter path was found(" << temp G << ") up
       " << temp.coupled[i] << ". Update information." << std::endl;
            changeInfo(vectorTops, openVertexes, temp.coupled[i], temp.name,
temp G, endTop);
  return false;
int main() {
```

```
setlocale(LC ALL, "Russian");
  bool flag = true;
  bool flagM = true;
  bool flagAd = true;
  std::vector<Path> vectorPath;//vector paths
  vectorPath.reserve(0);
  std::vector<Top> vectorTops;//vector tops
  vectorTops.reserve(0);
  char startTop;
  char endTop;
  std::cout << "Please enter the starting vertex and ending vertex, as well as the
edges of the graph with its weight: " << std::endl;
  std::cin >> startTop;
  std::cin >> endTop;
  char start, end;
  double weight;
  while (std::cin >> start >> end >> weight) {
     vectorPath.emplace back(Path(start, end, weight));
  }
  std::set<char> set;//
  set.insert(startTop);//inserting the first vertex
  vectorTops.emplace back(Top(startTop));//creating the initial vertex and putting
it in the vector
  int number;
  for (Path path : vectorPath) {//going through the path vector
     char from = path.getNameFromP();//
     char out = path.getNameOutP();
     if (set.find(from) == set.end()) {//checks that there is no from in the set
       set.insert(from);
       vectorTops.emplace back(Top(from));
     if (set.find(out) == set.end()) {
       set.insert(out);
```

```
vectorTops.emplace back(Top(out));
  }
//the path vector is full, but the neighbor vector is not =>
//performing a pass through the path vector again
for (Path path: vectorPath) {//going through the path vector
  char from = path.getNameFromP();//
  char out = path.getNameOutP();
  if (set.find(from) != set.end()) {//checks that the set has from
    number = whatNumber(from, vectorTops);
    vectorTops[number].coupled.emplace back(out);//adding a vertex neighbor
  }
}
vectorTops[0].pathToTop = 0;
vectorTops[0].heuristicF = abs(endTop - startTop);
std::cout << "\nLaunching the algorithm function A*!\n" << std::endl;
if (!A(vectorPath, vectorTops, startTop, endTop)) {
  flag = false;
  std::cout << "\nERROR! ERROR! ERROR!" << std::endl;
}
if (flag)
  check(vectorPath, vectorTops, endTop, flagM, flagAd);
```

}