



山东大学

崇新学堂

2023—2024 学年第一学期

实 验 报 告

课程名称： 信息基础 II

专 业 班 级 崇新学堂 21 级

学 生 姓 名 刘浩

个 人 学 号 202120120312

实 验 名 称 HomeWork 6

HomeWork 6

一、HomeWork6.1 Bayes Net

(a) Please draw the directed graph corresponding to the following distribution:

$$P(A,B,C,D,E,F) = P(A)P(B)P(C)P(D|A)P(E|A)P(F|B,D)P(G|D,E)$$

Answer:

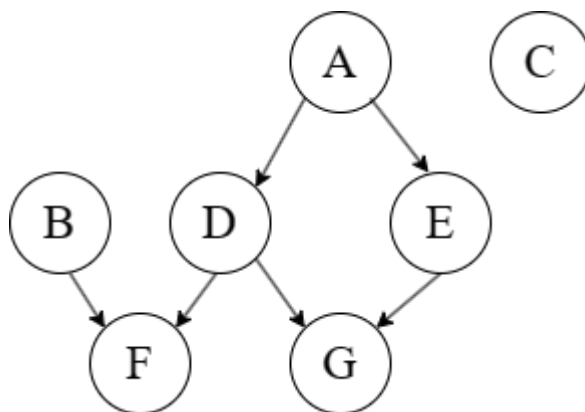


图 1 Answer (a)

(b) Please write down the factored joint distribution represented by the graph below.

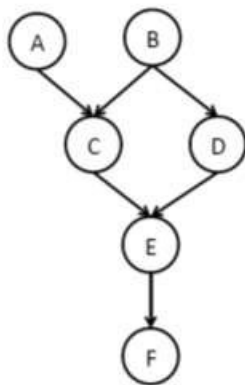


Figure 1: Bayes net for question parts (b) and (c).

Answer:

$$P(A,B,C,D,E,F) = P(A)P(B)P(C|A,B)P(D|B)P(E|C,D)P(F|E)$$

(c) Assume the random variables in the graph shown above are Boolean. How many parameters are needed in total to fully specify this Bayesian network? Justify your answer.

Answer:

总共需要 14 个参数，证明如下：

对于有 M 个父节点的节点而言，其需要的参数个数为 2^M 个

例如对于 C 节点而言，在本题中随机变量为布尔类型，因此其条件分布表如下：

	C_0	C_1
$A_0 B_0$	$P(C_0 A_0 B_0)$	$P(C_1 A_0 B_0)$
$A_0 B_1$	$P(C_0 A_0 B_1)$	$P(C_1 A_0 B_1)$
$A_1 B_0$	$P(C_0 A_1 B_0)$	$P(C_1 A_1 B_0)$
$A_1 B_1$	$P(C_0 A_1 B_1)$	$P(C_1 A_1 B_1)$

而由于变量是布尔类型因此 $P(C_0|A_0 B_0) + P(C_1|A_0 B_0) = 1$ 我们只需要知道其中一个参数即可，因此 C 需要的参数是 4 个。

依次类推，A 需要的参数为 1 个，B 需要的参数为 1 个，C 需要的参数为 4 个，D 需要的参数为 2 个，E 需要的参数为 4 个，F 需要的参数为 2 个

因此总共需要的参数为： $1 + 1 + 4 + 2 + 4 + 2 = 14$

(d) Based on the graph shown in part(b), state whether the following are true or false

Answer:

完成这道题的思路我主要采用 PPT 中在 D-Separation 中讲的画线法

i. $A \perp\!\!\!\perp B$ **True**

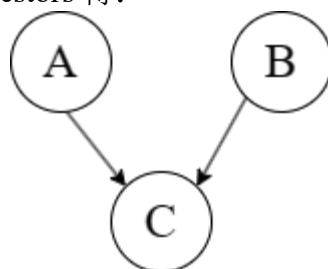
首先保留 AB 及其 ancestors 得：



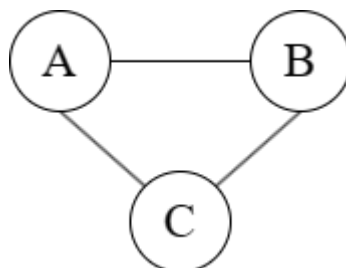
因此 AB 之间没有连线，故为 **True**

ii. $A \perp\!\!\!\perp B|C$ **False**

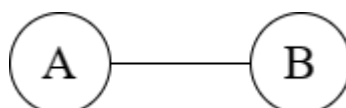
首先保留 A、B、C 及其 ancestors 得：



去掉方向性得：



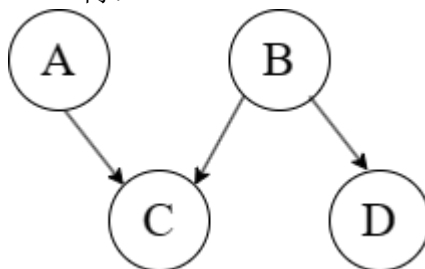
去掉已知的 C 得：



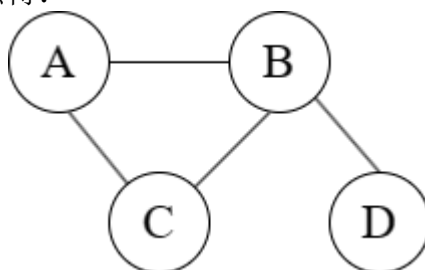
A,B 之间有连线，故为 **False**

iii. $C \perp\!\!\!\perp D$ **False**

首先保留 C、D 及其 ancestors 得：



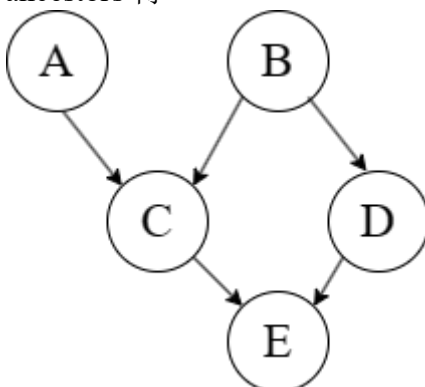
去掉方向性和已知的节点得：



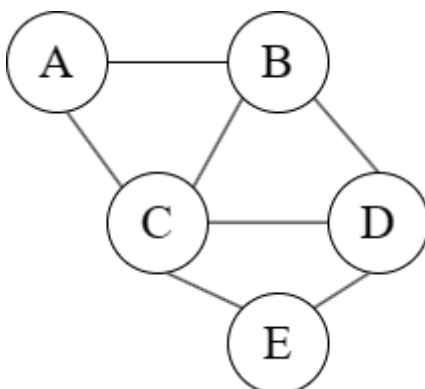
C, D 之间仍然存在连线，因此为 **False**

iv. $C \perp\!\!\!\perp D|E$ **False**

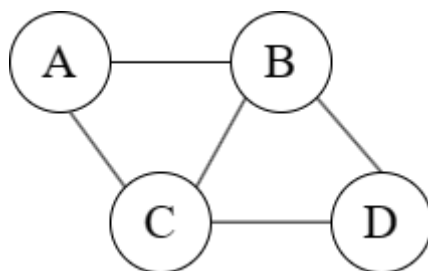
首先保留 C、D、E 及其 ancestors 得



去掉方向性得：



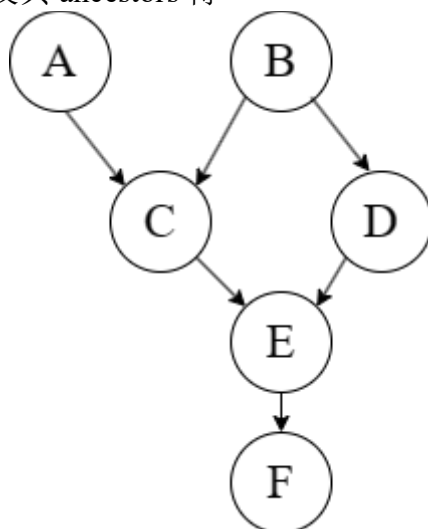
去掉已知的节点 E 得：



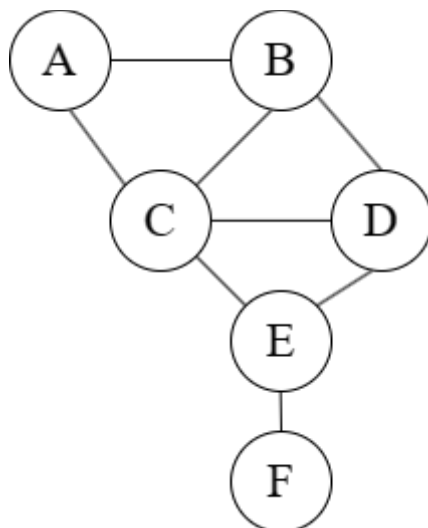
C、D之间存在连线，故为 **False**

v. $C \perp\!\!\!\perp D | B, F$ **False**

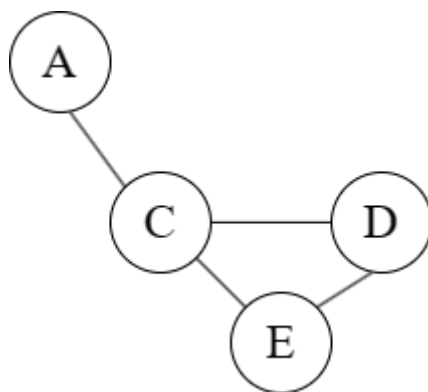
首先保留 C、D、B、F 及其 ancestors 得



去掉方向性得到：



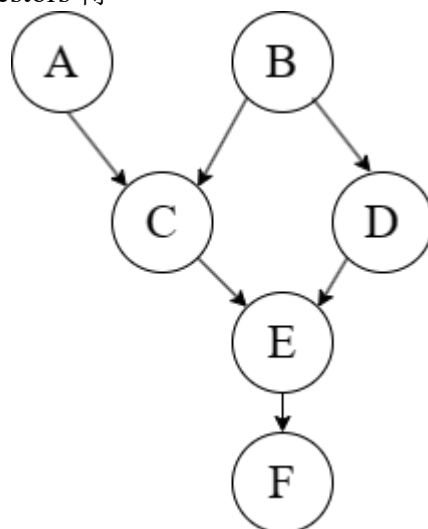
去除已知的节点得：



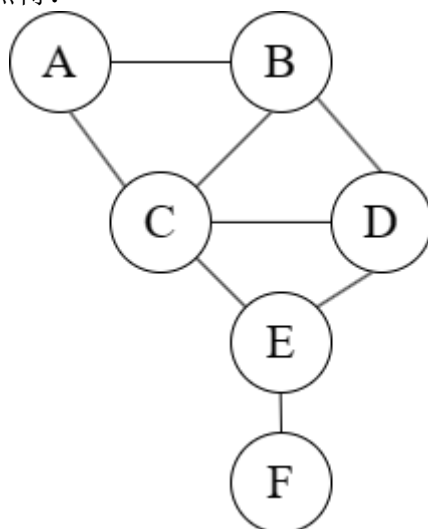
C,D 之间存在连线，故为 **False**

vi. $F \perp\!\!\!\perp B$ **False**

首先保留 B、F 及其 ancestors 得



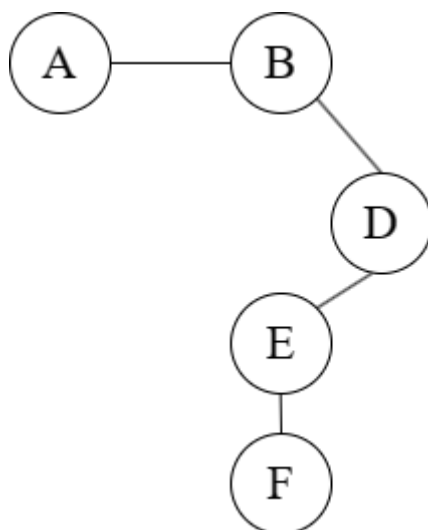
去掉方向性和已知的节点得：



B, F 之间仍有连线，故为 **False**

vii. $F \perp\!\!\!\perp B|C$ **False**

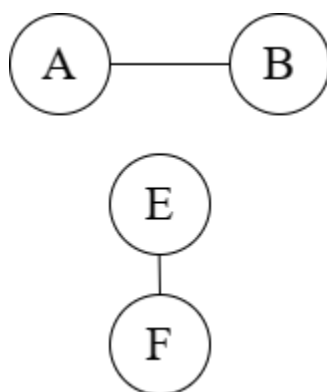
只需要在 vi 的基础上去除 C 即可：



B,F 之间仍存在连线，所以为 **False**

viii. $F \perp\!\!\!\perp B | C, D$ **True**

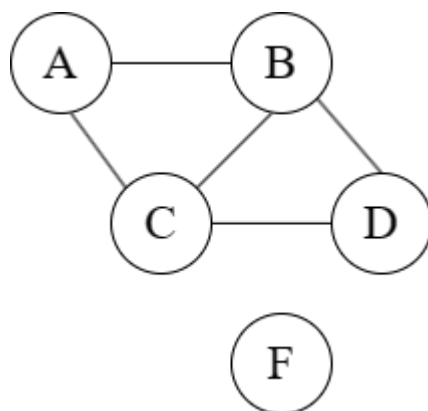
在 vii 的基础上再把 D 去掉即可：



B,F 之间没有连线，因此为 **True**

ix. $F \perp\!\!\!\perp B | E$ **True**

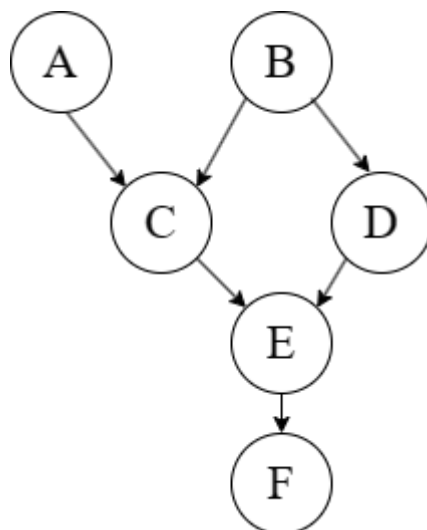
在 vi 的基础上去掉 E 即可：



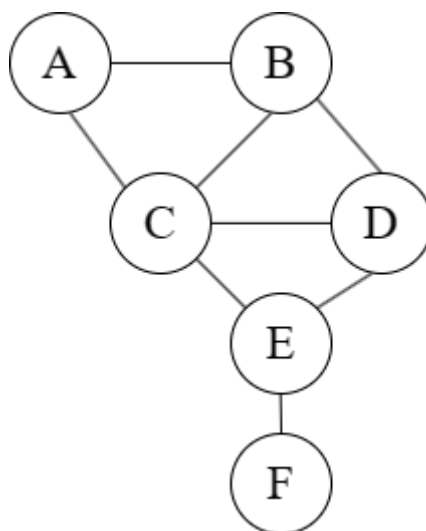
B,F 之间没有连线，所以为 **True**

x. $A \perp\!\!\!\perp F$ **False**

首先保留 A、F 及其 ancestors 得



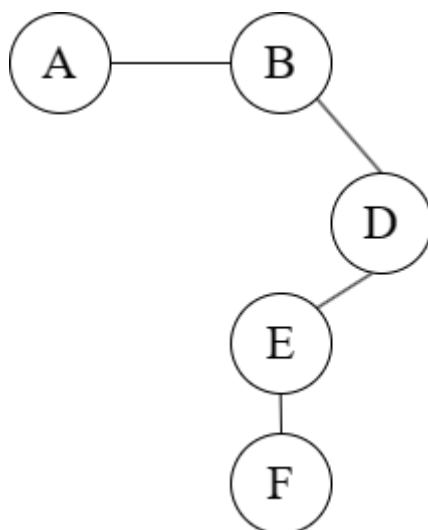
去掉方向性得：



A,F 之间存在连线，故为 **False**

xi. $A \perp\!\!\!\perp F | C$

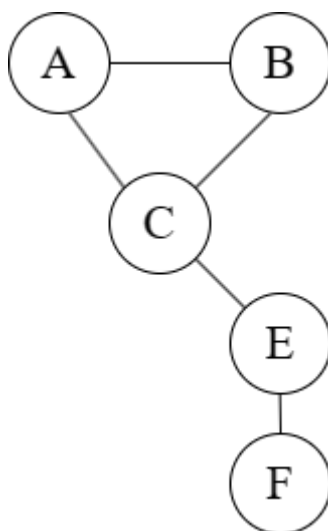
在 x.的基础上去除 C 即可：



A,F 之间仍有连线，故为 **False**

xii. $A \perp\!\!\!\perp F|D$ **False**

在 xi 的基础上去掉 D 即可：



A,F 之间仍有连线，故为 **False**

二、HomeWork6.2 Gibbs Sampling

给定 x_1, x_2 的一个高斯分布：

$$\mathcal{N}\left(0, \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\right)$$

条件概率分布为：

$$x_1^{t+1} | x_2^t \sim \mathcal{N}\left\{\frac{b}{a} x_2^t, a - \frac{b^2}{a}\right\}$$

$$x_2^{t+1} | x_1^{t+1} \sim \mathcal{N}\left\{\frac{b}{a} x_1^{t+1}, a - \frac{b^2}{a}\right\}$$

请根据上述条件概率分布通过 Gibbs Sampling 生成

$$\mathcal{N}\left(0, \begin{bmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 100 \end{bmatrix}\right)$$

请生成 50 个点(每个点迭代 100 次)

Answer:

Gibbs Sampling 思路：首先初始化 x, y ，然后分别在确定 x 的条件下依概率 $P(x^{(1)}|y^{(0)})$ 选择下一个 x ，再依概率 $P(y^{(1)}|x^{(1)})$ 选择下一个 y ，每个点迭代 100 次确定为最终的点，按照这个思路生成 50 个点即可

代码基于以上思路编写：

```
# 迭代次数
iterations = 100
x_list = []
y_list = []
for _ in range(50):
    x = np.random.randn()
    y = np.random.randn()
    for _ in range(iterations):
        x = np.random.normal(b * y / a, a - b ** 2 / a)
        y = np.random.normal(b * x / a, a - b ** 2 / a)
    x_list.append(x)
    y_list.append(y)
```

得到的结果如下，右侧是我采用 numpy 内置的生成标准的高斯分布用于对比：

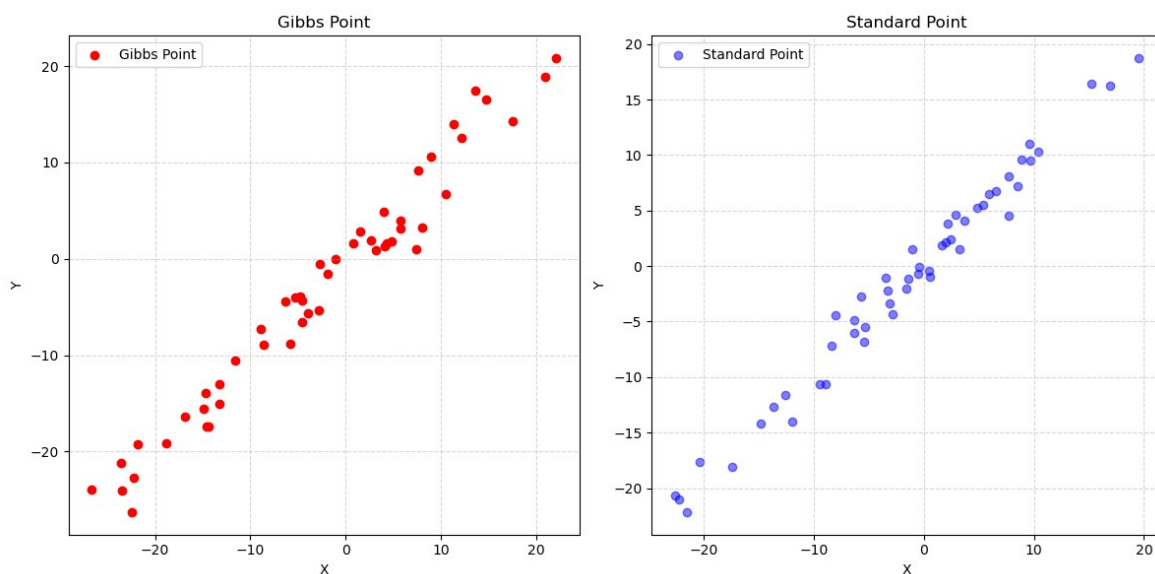
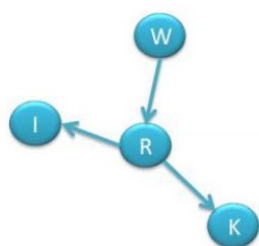


图 2 Gibbs 采样结果

三、HomeWork6.3



	R=w	R=s
W=w	0.8	0.2
W=s	0.3	0.7

	I=w	I=s
R=w	0.8	0.2
R=s	0.3	0.7

	K=w	K=s
R=w	0.8	0.2
R=s	0.3	0.7

给定一个简单的BayesNet，条件概率入上图所示

给定 $K=w$ ，计算 $W=w$ 的条件概率 $P(W=w|K=w)$

$$P(W=w|K=w) = \frac{P(W=w, K=w)}{P(K=w)}$$

$$\begin{aligned}
 P(W=w, K=w) &= \sum_I \sum_R P(W)P(R|W)P(I|R)P(K|R) \\
 &= 0.9 \times 0.8 \times 0.8 + 0.9 \times 0.2 \times 0.3 \\
 &= 0.63
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(K=w) &= \sum_I \sum_R \sum_W P(W)P(R|W)P(I|R)P(K|R) \\
 &= 0.9 \times 0.8 \times 0.8 + 0.1 \times 0.3 \times 0.8 + 0.9 \times 0.2 \times 0.3 + 0.1 \times 0.7 \times 0.3 \\
 &= 0.675
 \end{aligned}$$

$$\text{因此: } P(W=w|K=w) = \frac{0.63}{0.675} = 0.933333$$