

4.

$$I - S^T S \text{ is PSD.} \Rightarrow y^T (I - S^T S) y \geq 0$$

$$y^T y - y^T S^T S y \geq 0$$

$$y^T y \geq y^T S^T S y$$

$$\|y\|^2 \geq \|S y\|^2$$

$$\frac{\|S y\|^2}{\|y\|^2} \leq 1 \quad \text{for all } y \neq 0$$

$$\|S\|_2 = \max_{y \neq 0} \frac{\|S y\|}{\|y\|} < 1$$

$$\frac{\|S y\|}{\|y\|} \leq 1 \quad \text{for } \|S y\|, \|y\| > 0$$