

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа радиотехники и компьютерных технологий

# Отчёт о выполнении лабораторной работы

## 1.4.1

Изучение физического маятника

Автор:  
Шляпин Илья Семенович  
Б01-308

Долгопрудный 2023

# 1 Введение

**Цель работы:** исследовать зависимость периода колебаний физического маятника от момента его инерции.

**В работе используются:** физический маятник (однородный стальной стержень), опорная призма, счётчик числа колебаний, линейка, секундомер.

## 2 Теоретические сведения

Физическим маятником называют любое твердое тело, которое под действием силы тяжести может свободно качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Движение маятника описывается уравнением

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M, \quad (1)$$

где  $I$  – момент инерции маятника,  $\varphi$  – угол отклонения маятника от положения равновесия,  $t$  – время,  $M$  – момент сил, действующих на маятник.

В данной работе в качестве физического маятника (рис. 1) используется однородный стальной стержень длиной  $l$ . На стержне закрепляется опорная призма, острое ребро которой является осью качания маятника. Призму можно перемещать вдоль стержня, меняя таким образом расстояние  $OC$  от точки опоры маятника до его центра масс. Пусть это расстояние равно  $a$ . Тогда по теореме Гюйгенса-Штейнера момент инерции маятника

$$I = \frac{ml^2}{12} + ma^2,$$

где  $m$  – масса маятника. Момент силы тяжести, действующий на маятник,

Рис. 1: Физический маятник

$$M = -mga \sin \varphi.$$

Если угол  $\varphi$  мал, то  $\sin \varphi \approx \varphi$ , так что

$$M \approx -mga\varphi$$

В исправной установке маятник совершает несколько сот колебаний без заметного затухания. Поэтому моментом силы трения в первом приближении можно пренебречь. Подставляя выражение для  $I$  и  $M$  в (1), получим уравнение

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \quad (2)$$

где

$$\omega^2 = \frac{ga}{a^2 + \frac{l^2}{12}}.$$

Тогда период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + \frac{l^2}{12}}{ag}} \quad (3)$$

Таким образом, период малых колебаний не зависит ни от начальной фазы, ни от амплитуды колебаний. Это утверждение (изохорность) справедливо для колебаний, подчиняющихся уравнению (2). Движение маятника описывается по этой формуле только для малых углов  $\varphi$ .

Период колебаний математического маятника определяется формулой

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}},$$

где  $l'$  – длина математического маятника. Поэтому величину

$$l_{\text{пр}} = a + \frac{l^2}{12a}$$

называют приведённой длиной математического маятника. Поэтому точку  $O'$  (см. рис. 1), отстоящую от точки опоры на расстояние  $l_{\text{пр}}$ , называют центром качания физического маятника. Точка опоры и центр качания маятника обратимы, т.е. при качании маятника вокруг точки  $O'$  период будет таким же, как и при качании вокруг точки  $O$ .

### 3 Оборудование и экспериментальные погрешности

Секундомер:  $\Delta_c = 0,01$  с

Линейка:  $\Delta_{\text{лин}} = 0,05$  см

## 4 Результаты измерений и обработка данных

### 4.1 Определение диапазона амплитуд, в пределах которых период колебаний маятника можно считать не зависящим от амплитуды

Определим диапазон амплитуд, в пределах которым колебания можно считать не зависящими от начальной фазы. Для этого отклоняем маятник на угол  $\varphi \approx 10^\circ$  и измеряем период колебаний. Затем уменьшаем угол отклонения в 2 раза и повторяем измерения. Результаты приведены в таблице 1.

№	$\varphi$	$T_{\text{общ}}, \text{ с}$	$N_{\text{изм}}$	$T, \text{ с}$	$T_{\text{ср}}, \text{ с}$	$\sigma, \text{ с}$	$\varepsilon, \%$
1	10	153,92	100	1,5392	1,5389	0,0002	0,0130
2	10	153,87	100	1,5387			
3	10	153,89	100	1,5389			
4	5	154,08	100	1,5408	1,5411	0,0002	0,0129
5	5	154,12	100	1,5412			
6	5	154,13	100	1,5413			

Таблица 1: Результаты измерения периода колебаний в зависимости от начального угла

Время одного колебания для отдельного эксперимента рассчитываем по формуле:

$$T = \frac{T_{\text{общ}}}{N_{\text{изм}}},$$

где  $T_{\text{общ}}$  – время  $N_{\text{изм}}$  колебаний.

Среднее значение периода колебаний для одной серии опытов рассчитываем по следующей формуле:

$$T_{\text{ср}} = \frac{1}{N_{\text{изм}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{изм}}} T_i.$$

Случайная погрешность определения  $T_{\text{ср}}$  вычисляется по формуле:

$$\sigma_{\text{сл}} = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{изм}}(N_{\text{изм}} - 1)} \sum_{i=1}^{N_{\text{изм}}} (T_{\text{ср}} - T_i)^2}.$$

Полная погрешность измерения периода колебаний в одной серии опытов определяется следующим соотношением:

$$\sigma = \sqrt{\Delta_{\text{с}}^2 + \sigma_{\text{сл}}^2}.$$

Также можем рассчитать относительную погрешность:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{T_{\text{ср}}}.$$

Исходя из измерений и пользуясь представленными выше формулами, получаем, что  $T_{10^\circ} = (1,5389 \pm 0,0002)$  с и  $T_{5^\circ} = (1,5411 \pm 0,0002)$  с. Следовательно, полученные значения периода колебаний маятника совпадают с хорошей точностью. Поэтому в дальнейшем будем считать колебания не зависящими от начальной фазы при отклонении на угол не более  $\varphi_0 \approx 5^\circ$ .

## 4.2 Исследуем зависимость периода колебаний от расстояния между точкой опоры и центром масс

Для вычисления ускорения свободного падения и длины стержня будем исследовать зависимость периода колебаний  $T$  от расстояния  $a$  между точкой опоры и центром масс. Результаты проведённых измерений представлены в таблице 2.

№	$a$ , см	$T_{\text{общ}}$ , с	$N_{\text{изм}}$	$T$ , с	$T_{\text{ср}}$ , с	$\Delta$ , с	$\sigma_{\text{сл}}$ , с	$\sigma_T$ , с	$\varepsilon$ , %
1	7,3	212,47	100	2,1247	2,1240	0,0001	$7,04 \cdot 10^{-5}$	0,000122	0,0058
2	7,3	212,33	100	2,1233					
3	10,4	189,51	100	1,8951	1,8959	0,0001	$8,04 \cdot 10^{-5}$	0,0001	0,0067
4	10,4	189,67	100	1,8967					
5	13,3	175,34	100	1,7534	1,7528	0,0001	$5,53 \cdot 10^{-5}$	0,0001	0,0065
6	13,3	175,23	100	1,7523					
7	16,4	165,72	100	1,6572	1,6576	0,0001	$5,53 \cdot 10^{-5}$	0,0001	0,0065
8	16,4	165,81	100	1,6581					
9	18,3	160,16	100	1,6016	1,6021	0,0001	$5,53 \cdot 10^{-5}$	0,0001	0,0071
10	18,3	162,27	100	1,6027					
11	24	154,08	100	1,5408	1,5410	0,0001	$2,01 \cdot 10^{-5}$	0,0001	0,0066
12	24	154,12	100	1,5412					
13	26,5	153,02	100	1,5302	1,5298	0,0001	$3,52 \cdot 10^{-5}$	0,0001	0,0069
14	26,5	152,95	100	1,5295					

Таблица 2: Измерение периода колебаний маятника  $T$  в зависимости от расстояния  $a$

По полученным данным вычисляем  $T$ ,  $T_{\text{ср}}$ ,  $\Delta$ ,  $\sigma_{\text{сл}}$ ,  $\sigma$  и  $\varepsilon$  по формулам представленным в разделе 4.1.

Используя формулу для периода физического маятника (3) получаем следующее соотношение:

$$T^2 a = \frac{4\pi^2}{g} a^2 + \frac{\pi^2 l^2}{3g}.$$

Отсюда можно сделать вывод о том, что  $T^2 a$  линейно зависит от  $a^2$ , поэтому эту зависимость можно представить в виде

$$T^2 a = k a^2 + b,$$

где

$$k = \frac{4\pi^2}{g} \text{ и } b = \frac{\pi^2 l^2}{3g}. \quad (4)$$

Найдём эти коэффициенты. Для удобства перенесём все необходимые данные в таблицу 3.

$a$ , см	7,3	10,4	13,3	16,4	18,3	24	26,5
$a^2$ , см <sup>2</sup>	53,29	108,16	176,89	268,96	334,89	576	702,25
$\sigma_{a^2}$ , см <sup>2</sup>	0,73	1,04	1,33	1,64	1,83	2,4	2,65
$\varepsilon_{a^2}$ , %	1,37	0,96	0,75	0,61	0,55	0,42	0,38
$T$ , с	2,124	1,896	1,753	1,658	1,602	1,541	1,530
$T^2$ , с <sup>2</sup>	4,511	3,594	3,072	2,748	2,567	2,375	2,340
$aT^2$ , см · с <sup>2</sup>	32,933	37,382	40,864	45,064	46,974	56,922	62,022
$\sigma_{aT^2}$ , см · с <sup>2</sup>	0,226	0,182	0,154	0,138	0,129	0,119	0,117
$\varepsilon_{aT^2}$ , %	0,69	0,48	0,38	0,31	0,27	0,21	0,19

Таблица 3: Значения  $aT^2$  и  $a^2$  и их погрешности

Погрешность расчёта  $a^2$  найдём по следующей формуле:

$$\sigma_{a^2} = 2a^2 \frac{\Delta a}{a} = 2a \Delta a,$$

где  $\Delta a = \Delta_c = 0,05$  см.

Погрешность вычисления  $aT^2$  можно найти по формуле:

$$\sigma_{aT^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T}{T}\right)^2},$$

где  $\Delta T = \sigma_T$  из таблицы 2.

Для вычисления коэффициентов  $k$  и  $b$  из (4) воспользуемся методом наименьших квадратов:

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 0,0426 \frac{\text{с}^2}{\text{см}},$$

$$b = \langle y \rangle - k \langle x \rangle \approx 32,59 \text{ см} \cdot \text{с}^2,$$

где  $x = a^2$ ,  $y = aT^2$ .

Случайные погрешности вычисления  $k$  и  $b$  можно найти по следующим формулам:

$$\sigma_k^{\text{сл}} = \sqrt{\frac{1}{N-2} \left( \frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - k^2 \right)} \approx 0,0018 \frac{\text{с}^2}{\text{см}},$$

$$\sigma_b^{\text{сл}} = \sigma_k^{\text{сл}} \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 0,4134 \text{ см} \cdot \text{с}^2.$$

Систематическая погрешность вычисления коэффициентов определяется следующим соотношением:

$$\sigma_k^{\text{сист}} = k \sqrt{(\varepsilon_{aT^2})^2 + (\varepsilon_{a^2})^2} \approx 0,0034 \frac{\text{с}^2}{\text{см}},$$

$$\sigma_b^{\text{сист}} = b \sqrt{(\varepsilon_{aT^2})^2 + (\varepsilon_{a^2})^2} \approx 2,62 \text{ см} \cdot \text{с}^2.$$

Тогда полную погрешность вычисления коэффициентов подсчитываем по следующей формуле:

$$\sigma_k = \sqrt{(\sigma_k^{\text{сл}})^2 + (\sigma_k^{\text{сист}})^2} \approx 0,0038 \frac{\text{с}^2}{\text{см}},$$

$$\sigma_b = \sqrt{(\sigma_b^{\text{сл}})^2 + (\sigma_b^{\text{сист}})^2} \approx 2,65 \text{ см} \cdot \text{с}^2.$$

Таким образом, получаем:

- $k = (0,0426 \pm 0,0038) \frac{\text{с}^2}{\text{см}}, \varepsilon_k = 8,92\%$
- $b = (32,59 \pm 2,65) \text{ см} \cdot \text{с}^2, \varepsilon_b = 8,13\%$

Учитывая формулу (4), вычисляем  $g$  и  $l$ :

$$g = \frac{4\pi^2}{k} \approx 9,28 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$\sigma_g = g \cdot \varepsilon_k \approx 0,83 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$l = \sqrt{\frac{3bg}{\pi^2}} \approx 95,88 \text{ см},$$

$$\sigma_l = l \sqrt{\left(\frac{1}{2}\varepsilon_b\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\varepsilon_g\right)^2} \approx 5,8 \text{ см}.$$

В итоге имеем следующие результаты:

- $g = (9,28 \pm 0,83) \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \varepsilon_g = 8,9\%$
- $l = (95,88 \pm 5,8) \text{ см}, \varepsilon_l = 6,05\%$

### 4.3 Проверка обратимости точки подвеса и центра качания физического маятника

Для  $a_1 = 25 \text{ см}$  вычислим  $l_{\text{пр}}$ :

$$l_{\text{пр}} = a_1 + \frac{l^2}{12a_1} \approx 58,3 \text{ см}.$$

Следовательно расстояние от центра масс до центра качания  $a_2$  вычисляем следующим образом:

$$a_2 = |a_1 - l_{\text{пр}}| \approx 33 \text{ см}$$

Проведём измерение периода колебаний физического маятника для  $a_1 = 25 \text{ см}$  и  $a_2 = 33 \text{ см}$ . Результаты измерений представлены в таблице 4.

Получаем, что

- $T_{\text{ср1}} = (1,5354 \pm 0,0001) \text{ с}$
- $T_{\text{ср2}} = (1,5336 \pm 0,0001) \text{ с}$

Следовательно,  $T_{\text{ср1}} \approx T_{\text{ср2}}$  и точка подвеса и центр качания физического маятника обратимы.

№	$a$ , см	$T_{\text{общ}}$ , с	$N_{\text{изм}}$	$T_1$ , с	$T_{\text{ср}}$ , с	$\sigma_T$ , с	$\varepsilon$ , %
1	25	138,19	90	1,5354	1,5354	0,0001	0,007
2	25	138,18	90	1,5353			
1	33	153,31	100	1,5331	1,5336	0,0001	0,008
2	33	153,44	100	1,5344			

Таблица 4: Измерение периода колебаний физического маятника для  $a_1 = 25$  см и  $a_2 = 33$  см

## 5 Выводы и обсуждение результатов

В ходе работы были получены следующие величины:

- $g = (9,28 \pm 0,83) \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ ,  $\varepsilon_g = 8,9\%$
- $l = (95,88 \pm 5,8) \text{ см}$ ,  $\varepsilon_l = 6,05\%$

Они были получены с не достаточно хорошей точностью, что говорит о погрешностях при измерениях.

Также, были экспериментально проверена теория о приведённой длине физического маятника и теория об обратимости точки подвеса и центра качания. Точность полученных результатов можно повысить, если исключить ошибку при фиксации периода колебаний маятника, которая существует в силу неидеальной реакции экспериментатора. В не меньшей степени на результат повлияло трение в точке подвеса. Также свою погрешность вносит неточность определения расстояния от точки опоры до центра масс стержня.