

1.2.2 Экспериментальная проверка закона вращательного движения на крестообразном маятнике

Шляпин Илья Б01-308

1 Теоретические сведения

Закон вращательного движения:

$$I\ddot{\varphi} = M \quad (1)$$

$$\ddot{\varphi} \equiv \dot{\omega} \equiv \beta$$

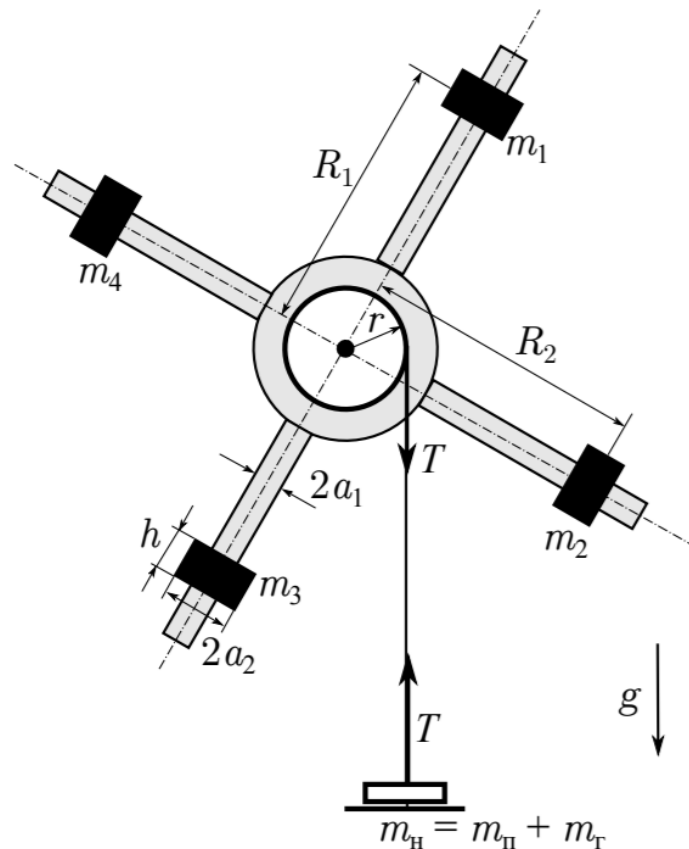


Рис. 1: Крестообразный маятник Обербека

На маятник действуют два момента сил: силы натяжения нити (M_T) и трения ($M_{тр}$): $M_T = rT$, r - радиус шкива. Для движения платформы с учетом нерастяжимости нити:

$$m_H \beta r = m_H \ddot{y} = m_H g - T$$

Откуда согласно основному уравнению вращательного движения:

$$(I + m_H r^2) \beta = m_H g r - M_{тр} \quad (2)$$

Таблица 1: Характеристики системы в сбалансированном состоянии

№ груза	m, г	R, см
1	157.8 ± 0.1	16.21 ± 0.05
2	152.1 ± 0.1	16.45 ± 0.05
3	153.9 ± 0.1	16.12 ± 0.05
4	151.9 ± 0.1	17.05 ± 0.05

Рассмотрим момент силы трения. Его зависимость от скорости не ясна, однако может иметь как составляющую, пропорциональную силе реакции в оси N (сухое трение), так и составляющую, пропорциональную угловой скорости вращения (вязкое трение). Откуда:

$$M_{\text{тр}} \simeq \left(1 + \frac{m_H}{m_M}\right) M_0 + \eta\omega \approx M_0 + \eta\omega \quad (3)$$

где M_0 - момент сил трения для покоящегося маятника при нулевой массе подвеса, m_M - масса маятника

Для расчета момента инерции системы, предположим, что грузы m_i имеют форму полых цилиндров, внутренний и внешний радиус которых известен, образующая h

$$I = I_0 + \sum_{i=1}^4 (I_i + m_i R_i^2) \quad (4)$$

где I_0 - момент инерции системы без грузов, R_i - расстояние от центров масс грузов до оси вращения

$$I_i = \frac{1}{12} m_i h^2 + \frac{1}{4} m_i (a_1^2 + a_2^2) \quad (5)$$

- момент инерции груза относительно оси, проходящей через его центр масс

2 Экспериментальная установка

В работе используется крестообразный маятник (рис. 1), состоит из четырех тонких стержней, перпендикулярных друг другу, укрепленных на втулке. Втулка и два шкива насажены на общую ось, вся система благодаря подшипникам может вращаться вокруг горизонтальной оси. Установка позволяет автоматически фиксировать моменты прохождения концов стержня через датчик.

3 Измерения и обработка данных

3.1 Балансировка

Балансировка системы при помощи добавления грузов на стержни, при движении несбалансированного маятника слышны стуки в подшипниках, график зависимости ускорения от угловой скорости имеет пульсации (рис. 2)

Маятник приходит в движение без добавления перегрузок, поэтому так момент силы трения в подшипниках измерить невозможно. Но можно сделать вывод, что:

$$M_0 < m_{\text{п}} g r = 1.5 \cdot 10^{-3} \quad (6)$$

3.2 Измерения с постоянным моментом инерции и разными перегрузками

Построим график $\beta_0(M_T)$ зависимости начального ускорения от момента силы натяжения. Полученная зависимость является прямой пропорциональностью, то есть $\beta_0 = a + bM_T$.

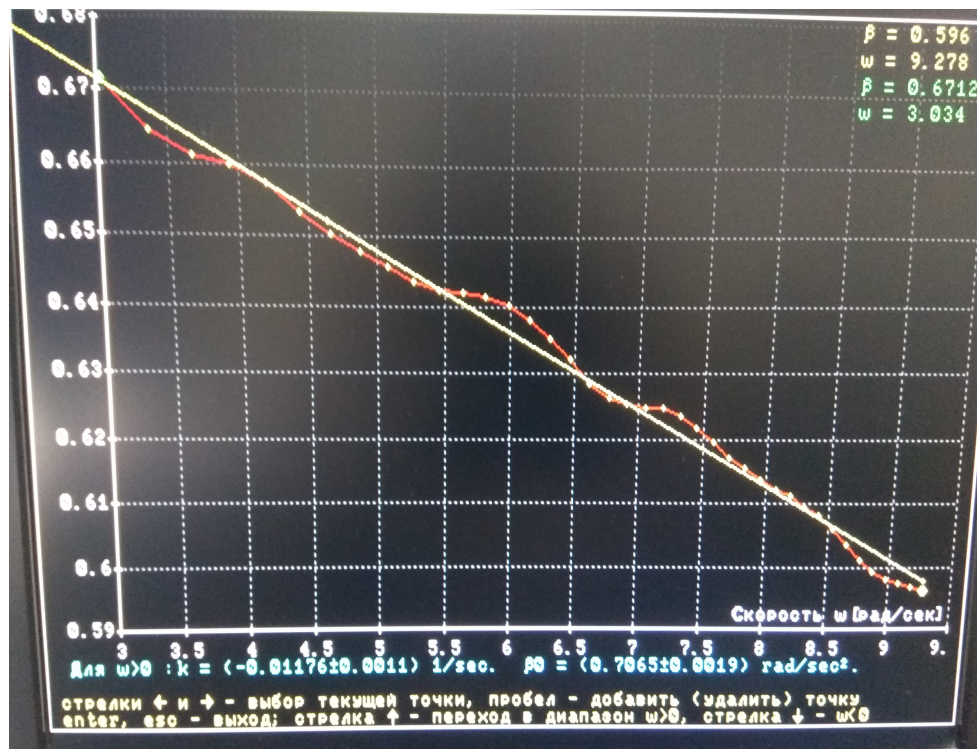


Рис. 2: Пульсации при движении недостаточно сбалансированного маятника

Таблица 2: Измерения с постоянным моментом инерции и разными перегрузками

m_n , г	k , 1/с	σ_k , 1/с	β_0 , рад/с ²	σ_{β_0} , рад/с ²	R_1 , см	R_2 , см	R_3 , см	R_4 , см	r , см
11,8	-0,001336	0,00027	0,07262	0,00012	16,21	16,45	16,12	17,05	1,75
22	-0,004862	0,00099	0,1588	0,00074	16,21	16,45	16,12	17,05	1,75
52,9	-0,008006	0,00062	0,4047	0,0007	16,21	16,45	16,12	17,05	1,75
70,7	-0,009354	0,00044	0,5459	0,00057	16,21	16,45	16,12	17,05	1,75
80,3	-0,009036	0,00074	0,6187	0,001	16,21	16,45	16,12	17,05	1,75
108,7	-0,01039	0,00091	0,836	0,0014	16,21	16,45	16,12	17,05	1,75
152,9	-0,01292	0,001	1,188	0,002	16,21	16,45	16,12	17,05	1,75
208,7	-0,01521	0,00096	1,631	0,0023	16,21	16,45	16,12	17,05	1,75

Коэффициенты a и b вычислим по МНК.

$$a \approx -0,0158(\text{рад/с}^2)$$

$$b \approx 45,9754(1/\text{кг} \cdot \text{м}^2)$$

Пересечение с осью абсцисс при $\beta_0 = 0 \Rightarrow M_0 = -a/b \approx 0.344 \cdot 10^{-3}(\text{Н} \cdot \text{м})$ – момент сил трения.
(Найденный ранее – $1.5 \cdot 10^{-3}(\text{Н} \cdot \text{м})$).

Вычислим $I = 1/b \approx 0,02175(\text{кг} \cdot \text{м}^2)$.

Оценим погрешность I . Из формулы выше следует, что $\varepsilon_I = \varepsilon_b$.

$$\sigma_b = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle \beta_0^2 \rangle - \langle \beta_0 \rangle^2}{\langle M_T^2 \rangle - \langle M_T \rangle^2} - b^2} \approx 0,109(1/\text{кг} \cdot \text{м}^2)$$

$$\varepsilon_b = \sigma_b/b \approx 0,0024$$

$$\text{Тогда } \sigma_I = \varepsilon_I I = \varepsilon_b I \approx 0.00005(\text{кг} \cdot \text{м}^2)$$

В итоге имеем:

$$I = (0,02175 \pm 0.00005)\text{кг} \cdot \text{м}^2$$

Таблица 3: Измерения с одинаковой массой (108,7 г) перегрузка, но разными моментами инерции

$k, 1/c$	$\sigma_k, 1/c$	$\beta_0, \text{рад}/c^2$	$\sigma_{\beta_0}, \text{рад}/c^2$	$R_1, \text{см}$	$R_2, \text{см}$	$R_3, \text{см}$	$R_4, \text{см}$	$r, \text{см}$	$I, \text{кг} \cdot \text{м}^2$
-0,01039	0,00091	0,836	0,0014	16,21	16,45	16,12	17,05	1,75	0,02189
-0,01155	0,0011	0,941	0,0018	15,15	15,05	14,73	15,99	1,75	0,01945
-0,01501	0,0013	1,213	0,0026	12,45	12,53	12,25	13,15	1,75	0,01508
-0,02537	0,0019	1,892	0,0041	7,69	8,74	8,48	8,25	1,75	0,00967
-0,03445	0,003	2,509	0,008	4,95	5,45	5,4	5,33	1,75	0,00729

3.3 Измерения с одинаковой массой перегрузка, но разными моментами инерции

Проведём измерения зависимости углового ускорения от момента инерции ситемы. $m_r = 108.7(\text{г})$ – масса груза $r = 1.75(\text{см})$ – радиус шкива По формуле (3) имеем:

$$(I + m_r r^2) \beta = m_r g r - M_{\text{тр}}$$

$$I \gg m_r r^2 \Rightarrow I_i \approx \frac{m_r g r - M_{\text{тр}}}{\beta_i}.$$

Полученные значения I_i занесём в таблицу и построим по ним график $I(R^2)$.

Полученные по МНК коэффициенты прямой $I = a + bR^2$ равны:

$$a \approx 0.00564(\text{кг} \cdot \text{м}^2)$$

$$b \approx 0.448(\text{кг})$$

Вычислим I по формуле:

$$I = I_0 + \sum_{i=1}^4 (I_i + m_i R_i^2)$$

где I_0 – момент инерции системы без грузов, а $I_i = \frac{1}{12} m_i h^2 + \frac{1}{4} m_i (a_1^2 + a_2^2)$. Поскольку массы грузов и расстояния до центра масс почти не отличаются $\sum_{i=1}^4 (I_i + m_i R_i^2) \approx 4I_1$. Вычислим эту величину и получим, что $4I_1 \approx 10^{-4}(\text{кг} \cdot \text{м}^2) \ll a \Rightarrow I_0 \approx a$.

$$\text{Тогда } \sigma_I = \sigma_a = \sqrt{\frac{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2 - b^2 (\langle R^4 \rangle - \langle R^2 \rangle^2)}{n}} \approx 0.00002(\text{кг} \cdot \text{м}^2)$$

Имеем

$$I_0 = (0.00564 \pm 0.00002)(\text{кг} \cdot \text{м}^2)$$

Определим сумму I_i :

$$\sum_i I_i = \sum_i \left(\frac{1}{12} m_i h^2 + \frac{1}{4} m_i (a_1^2 + a_2^2) \right) = 9.5 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Сумма значительно меньше сдвига (а) прямой графике, определенного по МНК, поэтому $I_0 \approx a$. С помощью графиков и формул (4 и 5) определим значение $I_0 = a = (56,40 \pm 0.19) \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

4 Вывод

Экспериментально получена зависимость углового ускорения от момента прикладываемых к маятнику сил, тем самым подтверждено уравнение вращательного движения. Определен момент инерции маятника несколькими способами, приводящими к одному и тому же результату.