3月7日　　　　　　7.1节 7.2节

要求：

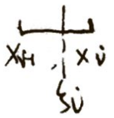
① 作业：给分、占比、目标、学号.

② 上学期考试情况

③ 习题课班级与交作业.

积分：

1、积分不同的定义方式：Riemann积分、Lebesgue积分、随机积分等.

2、积分与分割区间选点的关系.  Riemann积分和与 ξ_i 的选取无关

SDE. 左，右. midpoint.

3. Riemann积分的步骤：分割. 作和. 取极限.

4. 可积

① 必要条件. $f \in R[a,b]$ 则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界

② $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，则下面的三个结论相互等价.

(1) $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积

(2) 对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists$ 区间 $[a,b]$ 的一个分割 Δ s.t. $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$.

(3) 对 $\forall \varepsilon>0$，$\forall \sigma>0$，$\exists$ 区间 $[a,b]$ 的一个分割 Δ，s.t. $\omega_i \geq \varepsilon$ 的小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度总和小于 σ.

(振幅不能任意小的那些小区间总长可以任意小).

(要知道Darboux大和，Darboux小和的概念、及上，下积分的定义)

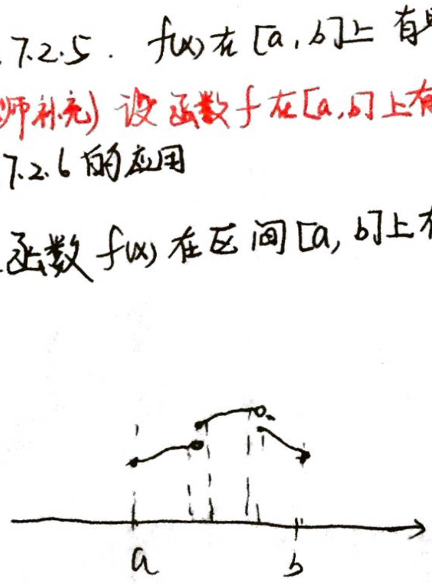
定理7.2.5. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，则 $f(x) \in R[a,b] \Leftrightarrow \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

③（老师补充）设函数 f 在 $[a,b]$ 上有界，~~如果f的所有~~，则 $f \in R[a,b] \Leftrightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续

5. 定理7.2.6的应用

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x) \in R[a,b]$.

证：设 f 在 $[a,b]$ 上振幅为 ω.（不妨令 $\omega>0$）



N 个间断点，每个间断点振幅小于 ω.

故若每个包含间断点的区间长度 $< \frac{\varepsilon}{2N\omega}$. 则

剩下的部分一致连续，则可细分.

$\exists \delta$. 当 $x', x'' \in I_j$. $|x'-x''| < \delta$

$|f(x')-f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

故可找到 $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2N\omega} \cdot \omega N + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) = \varepsilon$.

2、$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则 $f(x) \in R[a,b]$

① 不妨设 $f(x)$ ↑，不连续点 x_0，则 $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$

则 $f(x_0-0) < f(x_0+0)$，那么 $(f(x_0-0), f(x_0+0))$ 为 $f(x)$ 在不连续点 x_0 处的跳跃区间.

且互不相交. 每区间可以找个有理数.

② $\forall \varepsilon > 0$，等分成 n 份 s.t. $\dfrac{(b-a)[f(b)-f(a)]}{n} < \varepsilon$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right) \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\left(f(b)-f(a)\right) < \varepsilon.$$

3. Riemann 函数可积

$\forall \varepsilon > 0$，$\forall \sigma > 0$，$R(x) \geq \varepsilon$ 的点为 $x=0$ 和 $x=\frac{q}{p}$，$\frac{1}{p} \geq \varepsilon \Leftrightarrow p \leq \frac{1}{\varepsilon}$

只有有限个 p，则 $\frac{q}{p}$ 也只有有限个，设为

$x_1', x_2', \ldots, x_N'$

把区间包含它们的点，且每个区间长 $\leq \frac{\sigma}{N}$

于是含 ε 的小区间总和 $\leq \frac{\sigma}{N} \cdot N = \sigma$

（证明可积性，就可以取任意分割和任意分点，求极限值）

4. 几乎处处，零测度集

$\mu(a,b] = b-a$ (Lebesgue).

$$\int_a^b dx = b-a = \int_{[a,b]} d\mu = \cancel{\int_{A(a-\frac{1}{n},b]} d\mu}$$

$[a,b$

$(a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}] \downarrow \{a\}$

$\mu(a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}] = \frac{2}{n} \to 0 \qquad \mu\{a\}=0$

撒点，落在 $\{\frac{1}{n}\}, n \geq 1$ 的概率.

习题.

3.(2) 变成求和形式,取log.

则 $\log\frac{\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}}{n} = \frac{1}{n}[\log n+\log(n+1)+\cdots+\log(2n-1)-n\log n]$

$$= \frac{1}{n}[\log 1+\log(1+\frac{1}{n})+\cdots+\log(1+\frac{n-1}{n})]$$

$$= \int_1^2 \log x\, dx$$

$$= x\log x\Big|_1^2 - \int_1^2 dx = 2\log 2-1$$

故原极限 $= e^{2\log 2-1} = \frac{e^{\log 4}}{e} = \frac{4}{e}$

4. 由P3, 例7.1.1 令 $J_n = \frac{1}{n^{1+\alpha}}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)$

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}}(1+2^\alpha+3^\alpha+\cdots+n^\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$$

~~则 $\lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{J_n} = \lim_{n\to\infty}\alpha+$~~

$$\lim_{n\to\infty}\frac{J_n}{I_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{1+2^\alpha+\cdots+n^\alpha} = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{n^\alpha} = 1.$$ (Stolz定理)

11. 证: ① 因为 $f(u)$ 在 $[A,B]$ 上连续, 故一致连续

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ 当 $u',u''\in[A,B]$ 时, 满足 $|u'-u''|<\delta$ 时, 有

$$|f(u')-f(u'')| < \frac{\varepsilon}{2}$$

② 对某个划分 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上

若 $g(x)$ 的振幅 $w_i^g<\delta$, 则 $F(x)= f(g(x))$ 的振幅 $w_i^F<\varepsilon$

事实上. 对 $\forall x',x''\in[x_{i-1},x_i]$ 令 $u'=g(x')$, $u''=g(x'')$.

$$~~|u'-u''|\le|\varphi(x')-\varphi(x'')|~~$$

$$|u'-u''|=|g(x')-g(x'')|\le w_i^g<\delta$$

则 $|F(x')-F(x'')|=|f(u')-f(u'')| < \frac{\varepsilon}{2}$

故 $w_i^F = \sup_{x_{i-1}\le x',x''\le x_i}|F(x')-F(x'')| \le \frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$

因此在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上 若 $\omega_i^F \geq \varepsilon$ 必有 $\omega_i^g \geq \delta$

故 $\displaystyle\sum_{\omega_i^F \geq \varepsilon} \Delta x_i \leq \sum_{\omega_i^g \geq \delta} \Delta x_i$

② 构造如下. 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \sigma > 0$, 首先根据 ε 找到 $\delta > 0$.

再由 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 存在分割 P, 使得 $\displaystyle\sum_{\omega_i^g \geq \delta} \Delta x_i < \sigma$.

于是 $\displaystyle\sum_{\omega_i^F \geq \varepsilon} \Delta x_i < \sigma$

第11题 ⇒ 第7题 正部, 负部的概念.