

数学分析习题课 1

高家兴

2017.09.18

1 集合有界

对任意集合 $E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset$,

- (1) 有上界: $\exists M \in \mathbb{R}$, 使得对 $\forall x \in E, x \leq M$.
- (2) 有下界: $\exists m \in \mathbb{R}$, 使得对 $\forall x \in E, x \geq m$.
- (3) 有界: $\exists M > 0$, 使得对 $\forall x \in E, |x| \leq M$.
- (4) 无界: $\forall M > 0, \exists x \in E, |x| \geq M$.

这里我们需要熟练掌握的是有界和无界的数学表述, 接下来我们还会遇到函数有界和无界的概念。我们还要学会 \exists 和 \forall 的表达方式, 可以对一些数学表述, 作出相应的否定表达, 这一点在数学分析中用的相当多, 尤其是在反证法中。

2 确界

对于确界的理解, 有几点需要注意的地方。

- (1) 记住上(下)确界的 ϵ 语言表述。(课本第 6 页定义 1.1.2)
- (2) 上确界是最小上界, 下确界是最大下界。
- (3) $-\infty, \infty \notin \mathbb{R}$ 。
- (4) 数集的上(下)确界如果存在, 则必定唯一。

定理 1 (确界存在定理) 非空有上界的实数集必有上确界; 非空有下界的实数集必有下确界。

注: 对于确界存在定理, 注意里面强调的实数集。在其他数集中不一定成立, 例如:

在有理数中, $a_1 = 1, a_2 = 1.4, a_3 = 1.41 \dots$, 即 a_n 是 $\sqrt{2}$ 截取前 n 位有效数字, 显然 $\{a_n : i = 1, 2, \dots\}$ 单调递增, 且上确界是 $\sqrt{2}$,

3 一些常用不等式

$$(1) ||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$$

$$(2) (\text{Bernoulli 不等式}) \text{ 对 } \forall n, x \geq -1, (1+x)^n \geq 1+nx$$

4 函数

(1) 函数的定义三要素: 定义域, 值域, 对应法则。

有一些数学课程中常用的函数, 他们常常被用来举反例, 或者经过变化之后造出反例。我们需要记住的是 Dirichlet 函数, Gauss 取整函数, 特征函数 (示性函数)。Riemann 函数了解即可。

(2) 函数的运算

- 在共同定义域中进行四则运算
- 限制和延拓
- 函数的复合: 内函数的值域需要包含在外函数的定义域中, 一般不满足交换律

(3) 反函数

定义 1 设 $f : X \rightarrow Y$ 是一个一一对应。定义函数 $g : Y \rightarrow X$ 如下: 对任意 $y \in Y$, 函数值 $g(y)$ 规定为由关系式 $y = f(x)$ 所唯一确定的 $x \in X$. 这样定义的函数 $g(y)$ 称为是函数 $f(x)$ 的反函数, 记为 $g = f^{-1}$

性质:

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

(4) 函数的有界性

设 $y = f(x)$ 是定义在 X 上的函数,

- 若 \exists 常数 M , 使得对 $\forall x \in X$, 都有 $f(x) \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 X 上有上界
- 若 \exists 常数 m , 使得对 $\forall x \in X$, 都有 $f(x) \geq m$, 则称 $f(x)$ 在 X 上有下界
- 若 \exists 常数 $M > 0$, 使得对 $\forall x \in X$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 X 上有界

(5) 函数的单调性, 周期性和奇偶性

5 习题

(1) 需要看的例题: 例 1.2.6, 例 1.3.2, 例 1.3.7, 例 1.3.9

(2) 课后习题: 15, 16, 26, 27