数学分析习题课 6

2017.10.30

1　函数的连续与间断

定义 1 (连续性)设函数 *f(x)* 在 $U(x,\delta_0)(\delta_0>0)$ 内有定义。若有 $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称 *f(x)* 在 x_0 点连续，否则称在 x_0 处间断。

定义 2 (右连续性) 设函数 *f(x)* 在 $U^+(x,\delta_0)$ 内有定义。若有 $f(x_0+)=f(x_0)$，则称 *f(x)* 在 x_0 点右连续。

定义 3 (右连续性) 设函数 *f(x)* 在 $U^-(x,\delta_0)$ 内有定义。若有 $f(x_0-)=f(x_0)$，则称 *f(x)* 在 x_0 点左连续。

函数在 x_0 点处连续等价于在 x_0 点出左连续且右连续。注意函数极限在某点存在，是左右极限都存在且相等。

定义 4 (区间上的连续性) 设函数 *f(x)* 在 *[a,b]* 内有定义。若对任意的 $x\in(a,b)$，*f(x)* 在点 x 处连续，则称 *f(x)* 在 (*a,b*) 上连续，记为 $f(x)\in C(a,b)$*;* 进一步，若 *f(x)* 在 a 处右连续，在 b 处左连续，则称 *f(x)* 在 *[a,b]* 上连续，记为 $f(x)\in C[a,b]$.

函数的连续延拓;
可去间断点 (左右极限存在且相等，但不等于函数在那一点的值)；跳跃间断点 (左右极限存在，但不相等)；第二类间断点 (左右极限至少有一个不存在).

1.0.1　连续函数的性质

1. 连续函数是局部有界的;

2. 局部保号性；
3. 连续函数经过四则运算后仍然是连续的。
4. 复合函数的连续性；
5. 反函数的连续性；
6. 初等函数的连续性。

2 闭区间上连续函数的基本性质

定理 1 *(有界性) 设函数 $f(x) \in C[a,b]$, 则 $f(x)$ 在区间 [a,b] 上有界.*

定理 2 *(最值定理) 设 $f(x) \in C[a,b]$, 则 f(x) 在 [a,b] 上必有最大值和最小值。*

定理 3 *(介值定理) 设 $f(x) \in C[a,b]$, 记 $m = min_{x\in[a,b]}\{f(x)\}, M = max_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$, 则 $f([a,b]) = [m,M]$, 即对 $\forall \eta \in (m,M), \exists \xi \in [a,b]$, 使得 $f(\xi) = \eta$.*

定义 5 *(一致连续) 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义。若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x_1, x_2 \in I$ 且 $|x_1 - x_2| < \epsilon$ 时，有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$, 则称 f(x) 在 I 上一致连续。*

定理 4 *(康托尔定理) 闭区间上的连续函数一定是绝对连续的。*

3 无穷小量与无穷大量的阶

定义 6 *设函数 $f(x)$ 在 $U_0(x_0, \delta_0)$ 上有定义. 若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, 则称 f(x) 为 $x \to x_0$ 时的无穷小量；若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, 则称 f(x) 为 $x \to x_0$ 时的无穷大量。*

高阶无穷小量 $f(x) = o(g(x))(x \to x_0)$;同阶无穷小量;等价无穷小量;$f(x) = O(g(x))(x \to x_0)$.