例1. 证明：若 $\beta=\sup A\in A$，则令 $a_n=\beta$ $(n\in N_+)$ 即可.

否则，由 β 定义

对每个自然数 n $(n\geq 1)$

$\exists\ a_n\in A$，使得 $\beta\geq a_n>\beta-\frac{1}{n}$，则 $\{a_n\}$ 收敛于 β.

实际上，可以令 $\beta-1<a_1\leq\beta$ $(\beta-1<a_1<\beta)$ 严格上.

由于 a_1，$\beta-\frac{1}{2}$ 都比 β 小，则可以找到 a_2.

$$\beta-\frac{1}{2}<a_2<\beta \quad \text{并且}\ a_1<a_2$$

$$\vdots$$

$$\beta-\frac{1}{n}<a_n<\beta. \quad \text{且}\ a_{n-1}<a_n.$$

从而 $\{a_n\}$ 可以做到严格递增.

习题2.7.

(2). $n>m$.

$$|x_n-x_m|=|a_{m+1}q^{m+1}+a_{m+2}q^{m+2}+\cdots+a_nq^n| \qquad |a_n|\leq M.\ \forall n.$$

$$\leq M\cdot|q|^{m+1}(\cancel{1+}|q|+\cdots+|q|^{n-m-1})$$

$$=M|q|^{m+1}\frac{1-|q|^{n-m}}{1-|q|}\leq\frac{M}{1-|q|}|q|^{m+1}$$

$$\begin{cases}|x_{n+p}-x_n|<\frac{p}{n}\\ |x_{n+p}-x_n|<\frac{p}{n^2}\end{cases}$$

(3). $$|x_n-x_m|=\left|\frac{\sin(m+1)x}{(m+1)^2}+\cdots+\frac{\sin nx}{n^2}\right|$$

$$\leq\underbrace{\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}}\leq\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\leq\frac{1}{m}$$

$$\underbrace{\leq\frac{n-m}{(m+1)^2}}$$ (无法让它 $<\varepsilon$)

20. $(1+\frac{1}{n})^n\to e$ $\qquad (1-\frac{1}{n})^n\to\frac{1}{e}$

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\to e^0=1$$

$$\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^n=\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{n+1}}\right)^{\frac{n^2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}}\to e^1$$

上下极限

(1) $\{x_n\}$无上界, $h_n=+\infty$, $\forall n\in N$, $\overline{\lim_{n}} x_n=+\infty$

(2) $\{x_n\}$无下界, $l_n=-\infty$, $\forall n\in N$, $\underline{\lim_{n}} x_n=-\infty$

(3) $\{x_n\}$有下界,无上界. 有下界,则有下确界,则 l_n 有定义

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n=\sup_n l_n$$

例 $x_n=n$ 时,有下界 1, $l_n=n$, 从而 $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n=+\infty$

(4) $\{x_n\}$有上界,无下界, h_n 有定义, $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n=\inf_n h_n$

$x_n=-n$ 有上界, $h_n=-n$, 则 $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n=-\infty$

(5) 判断 $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n\le\lim_{n\to\infty} x_n\le\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ 对不对. ?

定理2.5.3 (1)(2)(3)(4)要记住.

例 习题1. 举例说明:覆盖定理在Q中不成立.

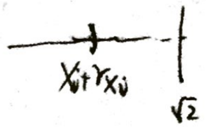
$J=[0,2]\cap Q$

$\forall x\in J$, x是有理数, $x\neq\sqrt{2}$. 则可以找到 r_x, $(x-r_x, x+r_x)$不包含$\sqrt{2}$.

于是 $\{(x-r_x, x+r_x)\mid x\in J, r_x\in Q\}$ 是J的一个开覆盖.

若有 $(x_1-r_{x_1}, x_1+r_{x_1}),\dots,(x_N-r_{x_N}, x_N+r_{x_N})$ 是一有限覆盖

则



最接近$\sqrt{2}$的端点到$\sqrt{2}$之间还有无穷多个有理数没有被覆盖.

习题2. 用Lebesgue方法证明覆盖定理.

证明: 设闭区间$[a,b]$有个开覆盖$\{O_\alpha\}$. 定义数集

$$A=\{x\ge a\mid 区间[a,x]在\{O_\alpha\}中存在有限子覆盖\}$$

从区间的左端点$x=a$开始, 由于$\{O_\alpha\}$中必然有一个开区间覆盖a, 从而a及a右侧充分邻近的点也在A中, 从而A非空。

且如果 $x\in A$, 则$[a,x]$在$\{O_\alpha\}$中存在有限子覆盖.

则 $[a,x]\subset A$.

(1) A 无上界，则 $b\in A$，结果成立.

(2) A 有上界，则有上确界 $\xi=\sup A$.

对于 $x<\xi$，一定存在 $y\in A$，使得 $x<y$. $[a,y]$ 在 $\{O_\alpha\}$ 中存在有限覆盖

则 $[a,x]$ 也一定存在有限覆盖，则 $x\in A$.

故只要证明 $b<\xi$

反证法 若 $\xi\le b$，则 $\xi\in[a,b]$，因此有开区间 O_{α_0} 覆盖 ξ.

自然可以在 O_{α_0} 中找到 a_0, b_0，使得 $a_0<\xi<b_0$

于是 $a_0\in A$. 则 $[a, a_0]$ 可以被有限覆盖，再加一个 O_{α_0}

则成为 $[a,b_0]$ 的有限覆盖，于是 $b_0\in A$.

与 $\xi=\sup A$ 矛盾.

习题3：如果 $\{O_\alpha\}$ 是区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖，则 $\exists$ 一个正数 $\delta>0$，使得对于区间 $[a,b]$ 中的任何两点 x', x''，只要 $|x'-x''|<\delta$，就存在开覆盖中的一个开区间，它覆盖 x', x''.

证：首先用覆盖定理，得到区间 $[a,b]$ 的一个有限子覆盖，即开覆盖 $\{O_\alpha\}$ 中的有限个开区间 $O_1, O_2, \dots, O_n$ 覆盖了 $[a,b]$.

将这有限个开区间的所有端点按大小排列，去掉可能重复的点，记为

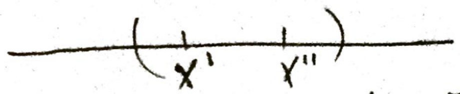
$$x_0<x_1<\cdots<x_N$$

$$A=\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$$

$$\delta=\min\{x_1-x_0,\ x_2-x_1,\ \dots,\ x_N-x_{N-1}\}$$

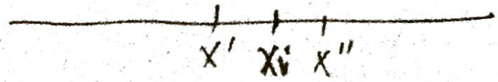
$\forall\ x', x''\in[a,b]$, s.t. $0<x''-x'<\delta$

(1)



x' 与 x'' 之间没有 A 中的点，于是覆盖 x' 和 x'' 中的一个点的开区间一定同时覆盖了另一个点.

(2)



这样的 x_i 只有一个，这个开区间不覆盖 x_i，则一定有另一个开区间覆盖 x_i.

从而也就覆盖了 x', x''

习题4. 设正数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+m} \le a_n a_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}_+$，则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} = \inf_{n\ge1}\left\{\frac{\ln a_n}{n}\right\}$$

令 $\alpha = \inf\limits_{n\ge1}\left\{\frac{\ln a_n}{n}\right\}$ 则 $\alpha \le \varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n}$

又 α 为下确界，则对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N$: $\frac{\ln a_N}{N} < \alpha+\varepsilon$

记 $n = mN + k$，$0\le k < N$

$$a_n = a_{mN+k} \le a_N^m a_k$$

$$\frac{\ln a_n}{n} \le \frac{m}{n}\ln a_N + \frac{1}{n}\ln a_k \le \frac{m}{n}N(\alpha+\varepsilon) + \frac{1}{n}\ln a_k$$

令 $n\to\infty$ $\quad \frac{mN}{n} = \frac{n-k}{n} = 1-\frac{k}{n} \to 1$ $\quad$ k 只取有限个值，则 $\frac{1}{n}\ln a_k \to 0$

于是 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} \le \alpha+\varepsilon$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} \le \alpha$.

$\alpha \le \varliminf\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{n} \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} \le \alpha$

注 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+m} \le a_n + a_m$. $\quad \forall m, n \in \mathbb{N}_+$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\ge1}\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$$

习题5. 设 $\{x_n\}$ 为正数列，且有正下界. 证明 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \ge 1$

课本33.

证明：取 $y_n = -x_n$.

若满足(1)，则 $0 = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n - \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \{x_n\}$ 收敛

若满足(2)，则 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(-x_n)x_n = -\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n^2 = -\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$

$\Leftarrow$ $\cancel{\varlimsup_n x_n}$ $\left(\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n\right)^2 = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n^2$

$\exists x_{n_k}$. $\lim x_{n_k} = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ $\quad \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}^2 = \left(\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n\right)^2$ $\quad \varliminf\limits_{n} x_n^2 \le \lim\limits_{k} x_{n_k}^2 = \left(\varliminf x_n\right)^2$

$\exists x_{n_k}$. $\lim x_{n_k}^2 = \varliminf\limits_{n} x_n^2$ $\quad \lim\limits_{k} x_{n_k} = \sqrt{\varliminf\limits_{n} x_n^2}$

$$\varliminf_{n} x_n \le \lim_{k} x_{n_k} = \sqrt{\varliminf_{n} x_n^2}.$$

有问题，见下一页

33（修正） 令 $y_n = M - x_n$. $M > 2\sup\{x_n\}$

① 若 y_n 满足(1)式，则

$$M = \overline{\lim_n}(x_n + M - x_n) = \overline{\lim_n}\, x_n + \overline{\lim_n}(M - x_n)$$

$$= \overline{\lim_n}\, x_n + M - \underline{\lim_n}\, x_n$$

即 $\overline{\lim_n}\, x_n = \underline{\lim_n}\, x_n$

② 若 $\{y_n\}$ 满足(2)式，则

$$\overline{\lim_n}\, x_n(M-x_n) = \left(\overline{\lim_n}\, x_n\right)\left(\overline{\lim_n}(M-x_n)\right) \qquad (*)$$

往证 $\overline{\lim_n}\, x_n(M-x_n) = \overline{\lim_n}\, x_n \left(M - \overline{\lim_n}\, x_n\right)$ $\cancel{(**)}$

证明如下：$\exists$ 子列 $x_{n_k} \to \overline{\lim}\, x_n$

则 $x_{n_k}(M - x_{n_k}) \to \overline{\lim_n}\, x_n(M - \overline{\lim_n}\, x_n)$

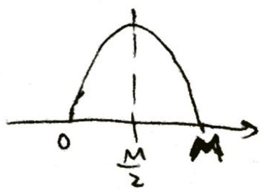
从而 $\overline{\lim_n}\, x_n(M - \overline{\lim_n}\, x_n) \le \overline{\lim_n}\, x_n(M - x_n)$ (1)

又 $\exists$ 子列 x_{m_k}, s.t. $x_{m_k}(M - x_{m_k}) \to \overline{\lim}\,[x_n(M-x_n)]$

且 x_{m_k} 收敛（否则可以再取它的收敛子列）

易知 $\lim_k x_{m_k} \le \overline{\lim_n}\, x_n$

而 $f(x) \triangleq x(M-x)$ 在 $(0, \frac{M}{2}]$ ↑



则 $\lim_k x_{m_k}(M - x_{m_k})$ $\cancel{\lim_k x_{m_k}(M - \lim_k x_{m_k})}$ $\le \overline{\lim_n}\, x_n(M - \overline{\lim_n}\, x_n)$

即 $\overline{\lim}\,[x_n(M-x_n)] \le \overline{\lim_n}\, x_n(M - \overline{\lim_n}\, x_n)$ (2)

由(1)(2)可知 $\overline{\lim_n}\, x_n(M-x_n) = \overline{\lim_n}\, x_n\left(M - \overline{\lim_n}\, x_n\right)$ 成立

代入(*)式 $\overline{\lim_n}\, x_n\left(M - \overline{\lim_n}\, x_n\right) = \cancel{\overline{\lim_n}\, x_n(M - \overline{\lim_n}\, x_n)}$

$$= \overline{\lim_n}\, x_n\left(\overline{\lim_n}(M - x_n)\right) = \overline{\lim_n}\, x_n\left(M - \underline{\lim_n}\, x_n\right)$$

若 $\overline{\lim_n}\, x_n = 0$ 则由 $\{x_n\}$ 非负可知 $\overline{\lim_n}\, x_n = \underline{\lim_n}\, x_n = 0$

否则 $\overline{\lim_n}\, x_n = \underline{\lim_n}\, x_n \Rightarrow \{x_n\}$ 收敛