一、例13.1.1

二、习题十三

扣分：写错了不一定扣分，但只写答案还写错了要扣分。

1. $|\vec{x}-\vec{z}| \le |\vec{x}-\vec{y}| + |\vec{y}-\vec{z}|$

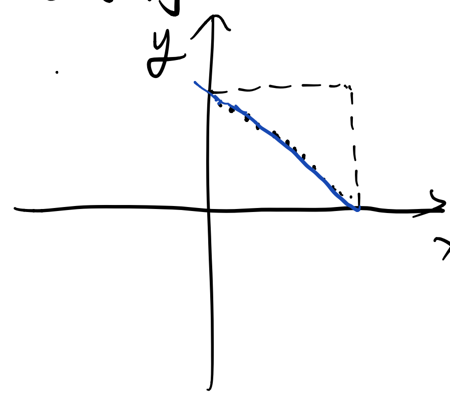
$\Leftrightarrow \quad |\vec{x}-\vec{z}|^2 \le (|\vec{x}-\vec{y}| + |\vec{y}-\vec{z}|)^2$

$\Leftrightarrow \quad (\vec{x}-\vec{z})\cdot(\vec{x}-\vec{z}) \le (\vec{x}-\vec{y})\cdot(\vec{x}-\vec{y}) + (\vec{y}-\vec{z})\cdot(\vec{y}-\vec{z}) + 2|\vec{x}-\vec{y}|\cdot|\vec{y}-\vec{z}|$.

展开即可.

2. 见上课讲义

3. (1) $\{(t, t, 1) : 0 \le t \le 1\}$

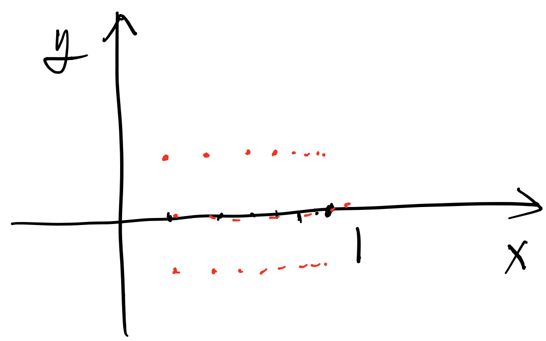


E是线上的有理点组成的集合.

(2)

$\sin\frac{k\pi}{2}$ 可以取值 $1, 0, -1, 0, \cdots\cdots$ 周期地.

$\ln(1+\frac{1}{k})^k \uparrow 1$



$\{(1,1), (1,0), (1,-1)\}$.

6. (1) $\forall x \in \bar{E}$

若 $x \in E$，则 x 一定不是E的外点，从而 $x \in E^\circ \cup \partial E$.

若 $x \in E'$，则 $\exists \{x_k\} \subset E$. s.t. $\lim_{k\to\infty} x_k = x$

于是 x 也不是E的外点，从而 $x \in E^\circ \cup \partial E$

故 $\bar{E} \subset E^\circ \cup \partial E$.

$\forall y \in E^\circ \cup \partial E$.

若 $y \in E^\circ$，则 $y \in E \subset \bar{E}$

若 $y \in \partial E$，则对 $\forall \delta > 0$，有 $U(y,\delta) \cap E \neq \emptyset$

若 $y \notin E$，则 存在数列 $\{y_k\} \subset E$. s.t. $y_k \to y\ (k \to \infty)$

从而 $y \in E'$

于是 $E^\circ \cup \partial E \subset \bar{E}$

故 $\bar{E} = E^\circ \cup \partial E$.

(2). $\bar{E}' = (E \cup E')'$

显然 $E' \subset (E \cup E')'$

其次，对 $\forall x \in (E \cup E')'$

$\forall \delta > 0$，$U(x,\delta)$ 中 有 $E \cup E'$ 中不同于 x 的点 y

若 $y \in E'$

则取 $\delta_1 = \min\{d(x,y), \delta - d(x,y)\}$

从而 $U_0(y,\delta_1)$ 中有 E 中点而点.

否则 $y \in E$, $y \neq x$

综上 $\forall \delta > 0$，$U(x,\delta)$ 中都有 E 中异于 x 的点.

即 $x \in E'$.

14. (1) 存在 0　　(3) 存在 0

(4) 不存在　　(5) 不存在.

15. $f(x,y,z)=(x+y+z)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\sin\frac{1}{z}$

极限存在，但累次极限不存在。

18. 见课上讲义

19. 可用第20题的结论说明

$F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) $(y_0\neq\frac{1}{2})$ 处的连续性.

当 $y_0=\frac{1}{2}$ 时. 若 x_0 满足 $f(x_0)=0$

则 $|F(x,y)|=|f(x)g(y)|\leq M|f(x)|$ (M 是 g 的上界)

则 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,\frac{1}{2})}F(x,y)=M\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0=f(x_0)g(y_0)$

从而 $F(x,y)$ 在 $(x_0,\frac{1}{2})$ 处连续 若 $f(x_0)=0$.

否则 $y_0=\frac{1}{2}$ 时，x_0 满足 $f(x_0)\neq0$.

从 $(x_0,y)\to(x_0,\frac{1}{2})$，则有

$\lim\limits_{y\to\frac{1}{2}}F(x_0,y)=\lim\limits_{y\to\frac{1}{2}}f(x_0)g(y)\neq f(x_0)g(\frac{1}{2})$

从而 $F(x,y)$ 的间断点集为 $\{(x,\frac{1}{2}): 0\leq x\leq1，且 f(x)\neq0\}$.

28. $(x_k',y_k')=(\frac{1}{k},k)$

$(x_k'',y_k'')=(0,k)$

则 $|(x_k',y_k')-(x_k'',y_k'')|=|(\frac{1}{k},0)|=\frac{1}{k}\to0$

$|f(x_k',y_k')-f(x_k'',y_k'')|=|\sqrt{\frac{1}{k}k}-\sqrt{0k}|=1$

从而不一致连续.

30. 见上课讲义.