4月2日　　第八章

一、广义积分敛散性的判断（十二法）

1) 若 $f(x)\geq 0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，可考察 $x\to+\infty$ 时 无穷小量 $f(x)$ 的阶 λ，$\lambda>1$ 收敛，$\lambda\leq 1$ 发散

2) $f(x)\geq 0$　比较判别法，极限~~基式~~形式

3) $f(x)\geq 0$　考察 $\int_a^{A} f(x)dx$ 是否有界

4) 以上 $f\geq 0$ 的条件在 x 充分大时成立即可。

5) $\int_a^{+\infty} f\,dx$ 与 $\int_a^{+\infty}(-f)dx$ 同敛散，故对 $f\leq 0$ 有类似的方法。

6) $x\to+\infty$ 时，无穷次变号　考察 Abel，Dirichlet 判别法

7) $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$　判断绝对收敛、相对收敛。

8) 以上方法无效，Cauchy 准则

9) 用定义，$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^{A} f(x)dx$ 是否存在

10) 用换元，分部积分转换形式（瑕积分转换为无穷积分）

11)* 级数

12) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$，$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}(f\pm g)dx$ 收敛。

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散，则 $\int_a^{+\infty}(f\pm g)dx$ 发散。

习题八

2. (6). $f(x)=x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)^{\alpha}$，在 $x\geq 1$ 时有 $f(x)\geq 0$

因 $1-\cos\frac{1}{x}\sim\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2$

则 $f(x)\sim\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\frac{1}{x^{2\alpha-1}}$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\frac{1}{x^{2\alpha-1}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}}\right)^{\alpha}=1$

于是当 $2\alpha-1\leq 1$ 即　$\alpha\leq 1$ 时，发散

$\alpha>1$ 时，收敛

(7) $f(x)=\ln(\cos\frac{1}{x}+\sin^p\frac{1}{x})$ $(p>1)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 从而 $|f(x)|\geq 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|=0$ 考察阶数

$$\ln(\cos\frac{1}{x}+\sin^p\frac{1}{x}) \sim \cos\frac{1}{x}+\sin^p\frac{1}{x}-1$$

$$\cos\frac{1}{x}-1 \sim -\frac{1}{2x^2} \quad \sin^p\frac{1}{x}\sim(\frac{1}{x})^p$$

当 $1<p\leq 2$ 时.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\cos\frac{1}{x}+\sin^p\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^p}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\cos t+\sin^p t-1}{t^p}=1$$

当 $p>2$ 时.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\cos\frac{1}{x}+\sin^p\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^p}}=-\frac{1}{2}$$

从而 $\int_1^{+\infty}|\ln(\cos\frac{1}{x}+\sin^p\frac{1}{x})|dx$ 绝收敛. 于是 $\int_1^{+\infty}\ln(\cos\frac{1}{x}+\sin^p\frac{1}{x})dx$ 也收敛

3. (4). $\sin t=t+o(t^2)$ $(t\to 0)$ （讲 例12.2.4）

故 $\sin(\frac{\sin x}{x})=\frac{\sin x}{x}+o(\frac{1}{x^2})$??

因为 $\frac{o((\frac{\sin x}{x})^2)}{\frac{1}{x^2}}=\frac{o((\frac{\sin x}{x})^2)}{(\frac{\sin x}{x})^2}\cdot\frac{(\frac{\sin x}{x})^2}{\frac{1}{x^2}}=\frac{o((\frac{\sin x}{x})^2)}{(\frac{\sin x}{x})^2}\cdot\underbrace{(\sin x)^2}_{有界}\to 0$

$\to 0$

从而 $\int_1^{+\infty}\sin(\frac{\sin x}{x})dx=\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx}_{收敛}+\underbrace{\int_1^{+\infty}o(\frac{1}{x^2})dx}_{收敛}$

$$\frac{o(\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}}\to 0 \quad (x\to+\infty)$$

故 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛. 则 $\int_1^{+\infty}o(\frac{1}{x^2})dx$ 也收敛.

又 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 不是绝对收敛. $\int_1^{+\infty}o(\frac{1}{x^2})$ 是绝对收敛.

从而 $\int_1^{+\infty}\sin(\frac{\sin x}{x})dx$ 不是绝对收敛的.

(3) ① 首先讨论 $\alpha \le 0$ 的情形

取 $x_n' = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$，$x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

则 $\left|\int_{x_n'}^{x_n} \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x} dx\right| = \int_{x_n'}^{x_n} \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x} dx \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{x_n'}^{x_n} \frac{1}{x^\alpha + 1} dx$ (*)

当 $\alpha = 0$ 时，(*) $= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{16}\pi > 0$ 发散

当 $\alpha < 0$ 时，(*) $\geqslant \frac{1}{(2n\pi)^\alpha + 1} \to 1$ 从而也发散.

② 当 $\alpha > 0$ 时

[首先考察 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ 的敛散性.

(i) 当 $p > 1$ 时 $\left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \le \frac{1}{x^p}$ 则 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ 绝对收敛.

(ii) 当 $p > 0$ 时. 由 Dirichlet 判别法. 可知 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ 收敛.

(iii) 当 $0 < p \le 1$ 时. 对 $\forall x \geqslant 1$

$$\frac{|\sin x|}{x^p} \geqslant \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$ 发散，$\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$ 由 Dirichlet 判别法. 可知收敛.

从而 $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx$ 发散

故 $p>1$ 时 绝对收敛，$0 < p \le 1$ 时. 条件收敛.]

(1) 由 $\frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x} = \frac{\frac{\sin x}{x^\alpha}}{1 + \frac{\sin x}{x^\alpha}} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{\sin x}{x^\alpha}} = 1 - \left(1 - \frac{\sin x}{x^\alpha} + o\left(\left(\frac{\sin x}{x^\alpha}\right)^2\right)\right)$

$$= \frac{\sin x}{x^\alpha} + o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right) \triangleq I_1 + I_2 .$$

当 $\alpha > 1$ 时. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ 绝对收敛. $\int_1^{+\infty} o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right) dx$ 绝对收敛.

得 $\alpha > 1$ 时. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x} dx$ 绝对收敛.

(2) 当 $\frac{1}{2} < \alpha \le 1$ 时. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ 条件收敛. $\int_1^{+\infty} o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right) dx$ 绝对收敛.

从而 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x} dx$ 条件收敛.

(3) 当 $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$ 时 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ 收敛，I_2 发散…

$$\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}=\frac{\sin x}{x^\alpha}-\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha+\sin x)}$$

当 $\alpha\le\frac{1}{2}$ 时. $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ 收敛

而 $\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha+\sin x)}\ge\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha+1)}$ 这里断定 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha+1)}dx$ 发散

[引理：设 $f(x)>0$ 且 $\downarrow$ ，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}f(x)\sin^2 x\,dx$ 同敛散.

① $f(x)\downarrow 0$

$$\int_a^{+\infty}f(x)\sin^2 x=\int_a^{+\infty}f(x)\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_a^{+\infty}f(x)dx-\frac{1}{2}\int_a^{+\infty}f(x)\cos 2x\,dx$$

由Dirichlet判别法. 而 $\int_a^{+\infty}f(x)\cos 2x\,dx$ 收敛.

② $f(x)\downarrow A$ $(A>0)$

$f(x)\sin^2 x\ge A\sin^2 x$ ，又 $\int_a^{+\infty}\sin^2 x\,dx$ 是发散的

$\Downarrow$

取 $x_n'=2n\pi$, $x_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (Cauchy准则)

则 $\int_a^{+\infty}f(x)\sin^2 x\,dx$ 与 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 都发散]

从而 $\alpha\le\frac{1}{2}$ 时 发散.

(3)'

$$\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}=\frac{\sin x}{x^\alpha}\left(\frac{1}{1+\frac{\sin x}{x^\alpha}}\right)=\frac{\sin x}{x^\alpha}\left(1-\frac{\sin x}{x^\alpha}+o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\right)$$

$$=\frac{\sin x}{x^\alpha}-\frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right)$$

$$=\underset{I_1}{\frac{\sin x}{x^\alpha}}\cancel{+\cos^2 x}-\underset{I_2}{\frac{\cos 2x}{2x^{2\alpha}}}+\underset{I_3}{\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\frac{1}{x^{2\alpha}}}$$

① $\alpha\le 0$ 发散.

② $\alpha>1$ I_1 绝对收敛. I_2 绝对收敛. I_3 绝对收敛

③ $0<\alpha\le\frac{1}{2}$ I_1 收敛 I_2 收敛 I_3 发散

④ $\frac{1}{2}<\alpha\le 1$ I_1, I_2, I_3 收敛. 从而条件收敛

I_1 条件收敛.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，且无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

证明：(反证法) 若 ~~x→+∞~~ $x\to+\infty$ 时 $f(x)\not\to 0$.

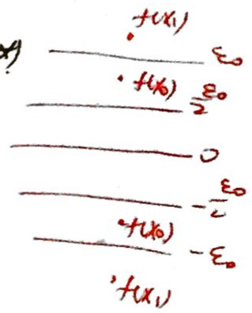
则 $\exists \varepsilon_0>0$，$\forall A>0$，$\exists x_1\geq A$，s.t. $|f(x_1)|\geq\varepsilon_0$

又 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续

对 $\frac{\varepsilon_0}{2}>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时，$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon_0}{2}$.

故当 $x\in[x_1, x_1+\delta]$ 时

$$|f(x)| = |f(x)-f(x_1)+f(x_1)| \geq \big||f(x_1)| - |f(x)-f(x_1)|\big| > \frac{\varepsilon_0}{2} \quad (*)$$



则又有 $f(x)$ 与 $f(x_1)$ 同号，否则 $|f(x)-f(x_1)|>\frac{\varepsilon_0}{2}$

若 $f(x_1)>0$，则 $f(x)>0$，由(*)式 $f(x)>\frac{\varepsilon_0}{2}$

故 $\left|\int_{x_1}^{x_1+\delta} f(x)dx\right| \geq \frac{\varepsilon_0}{2}\delta$

同理 若 $f(x_1)<0$，亦有

$$\left|\int_{x_1}^{x_1+\delta} f(x)dx\right| \geq \frac{\varepsilon_0}{2}\delta$$

这即证明了：对 ~~$\frac{\varepsilon_0}{2}$~~ $\frac{\varepsilon_0}{2}\delta>0$，$\forall A$，$\exists x_1+\delta>x_1>A$，s.t.

$$\left|\int_{x_1}^{x_1+\delta} f(x)dx\right| \geq \frac{\varepsilon_0}{2}\delta$$

根据 Cauchy 准则 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

11. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调，并且无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，证明

$$\lim_{x\to+\infty} x f(x)=0$$

证明：(不妨设 $f\downarrow$) 首先，我们有 $f(x)\geq 0$ 因为若某个 x_1，$f(x_1)<0$

则当 $x>x_1$ 时，$f(x)\leq f(x_1)<0$

从而 $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{+\infty} f(x)dx$ 发散

又由 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，知 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists A>a$，当 $A''>A'>A$ 时，有

$$\int_{A'}^{A''} f(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

故 $\forall x>2A$，

$$0 \leq x f(x) \leq 2\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt < \varepsilon.$$

此即 $\lim\limits_{x\to+\infty} x f(x)=0$

15. (5) $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^{\frac{3}{2}}\ln(1+\frac{1}{x})}dx$

于 无穷次变号. 化成无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{\frac{1}{2}}\ln(1+t)}dt$.

对于 $\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}\ln(1+t)}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减 $\to 0$.

又对 $\forall\ x>1$ $\left|\int_1^x \sin t\,dt\right| = \left|-\cos t\Big|_1^x\right| \le 2$

从而由Dirichlet判别法可知. 收敛.

16. (5) $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}dx$

$I=\int_0^1\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}dx \triangleq I_1+I_2$

① 当 $p\le 0$ 时. 取 x_n' s.t. $x_n'+\frac{1}{x_n'}=2n\pi+\frac{\pi}{4}$ $(x_n'>1)$

取 x_n, s.t. $x_n+\frac{1}{x_n}=2n\pi+\frac{3\pi}{4}$ $(x_n>1)$

则 $\left|\int_{x_n'}^{x_n}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}dx\right| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}(x_n')^{-p}\to+\infty$. $(n\to\infty)$

故 I_2 发散. $I_1=\int_1^{+\infty}$ $\left|\sin(t+\frac{1}{t})t^{p-2}\right|\le t^{p-2}=\frac{1}{t^{2-p}}$ 收敛

令 $x=\frac{1}{t}$ 则 $I_1=\int_1^{+\infty}\sin(t+\frac{1}{t})\,t^{p-2}dt$

则由①可知 $p-2\ge 0$ 即 $p\geqslant 2$ 时. 发散

② $I=\int_0^{+\infty}\frac{(1-\frac{1}{x^2})\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p(1-\frac{1}{x^2})}dx=\int_0^1\cdots+\int_1^{+\infty}\cdots$

由Dirichlet判别法可知 $\int_1^{+\infty}\cdots$ 收敛. 令 $x=\frac{1}{t}$. 可知 $\int_0^1$ 上也收敛.

故 I 在 $(0,2)$ 内收敛.

③. $\left|\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\right| \geqslant \frac{\sin^2(x+\frac{1}{x})}{x^p}=\underbrace{\frac{1}{2x^p}}_{\Delta_1}-\underbrace{\frac{1}{2x^p}\cos 2(x+\frac{1}{x})}_{\Delta_2}$

当 $0<p\le 1$ 时. Δ_1 在 $[1,+\infty)$ 上发散, Δ_2 在 $[1,+\infty)$ 上收敛.

从而 $0<p\le 1$ 时. 非绝对收敛.

④ 当 $1<p<2$ 时. 也非绝对收敛.