10.30. 数分习题

1. 间断点：

$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$ $x=0$ 是可去间断点

$f(x)=\frac{1}{x}-[\frac{1}{x}]$ $x=1$ 是跳跃间断点

$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 第二类间断点

2. 黎曼函数 $\forall x_0\in(0,1)$ $\lim_{x\to x_0}R(x)=0$

⇒ 有理数点是可去间断点，无理数点连续

3. $f(x)$, $g(x)$ 在 $I$ 上一致连续，是否 $f(x)g(x)$ 也一致连续

$f(x)=g(x)=x$. $I=[1,+\infty)$

$x_n'=\sqrt{n+1}$, $x_n''=\sqrt{n}$ $|x_n'-x_n''|=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$|x_n'^2-x_n''^2|=1\not\to 0$.

4. $f(x)$ 在有穷区间上无界 ⇒ 不一致连续.

在无穷区间上无界 → 可能一致连续，也可能不一致连续.

5. 若 $f$ 在区间 $(a,b]$，$[b,c)$ 上分别一致连续 证明 $f$ 在 $(a,c)$ 上一致连续

6. $\lim_{x\to\infty}$，$\lim_{x\to+\infty}$，$\lim_{x\to-\infty}$ 差别

极限定义 $x\in U_0(x_0,\delta)$ 或 $0<|x-x_0|<\delta$.

$\lim_{n\to\infty}$

7. $a_n>0$. $a_n\to a>0$ $(n\to\infty)$，则 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$

8. 求解序列的极限 或证明收敛性

(1) 定义，$\varepsilon-N$ 语言，夹逼定理.

(2) 转化为数列递推关系 (i) 单调有界原理. (ii) 求通项 (iii) 两边取极限 求方程.

(3) 转化为常用极限表达，$e$，$c$（欧拉常数）.

(4) Stolz 定理 $\frac{和}{和}$

(5) Cauchy 收敛定理，子列收敛与原列收敛关系

(6) $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n=\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$

9. 设有正数列$\{a_n\}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$. 则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$.

若$a=0$. $0\le\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{a_1}{1}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}}\le\frac{\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n-1}}}{n}\to 0.\ (n\to\infty)$

若$a>0$.

$$a=\frac{1}{\frac{1}{a}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}}{n}}\le\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt[n]{\frac{a_1}{1}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}}}_{\sqrt[n]{a_n}}\le\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n-1}}}{n}=a.$$

$$\left(\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}\le\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}\le\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right).$$

10. $a_n=(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})\cdots(1+\frac{1}{2^n})$

$a_n\uparrow$

$\ln a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{2^k})\le\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}<2.$

习题三.

32、反证法：假设$f(x)$在$[a,b]$上不是严格单调.

则必存在 $x_1<x_2<x_3\in[a,b]$，使得

(1) $f(x_1)<f(x_2)$ 且 $f(x_2)>f(x_3)$

或者 (2) $f(x_1)>f(x_2)$ 且 $f(x_2)<f(x_3)$

我们不妨认为(1)发生，并且假设 $f(x_3)>f(x_1)$


则 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则必在$[x_1,x_3]$上连续

又 $f(x_1)<f(x_3)<f(x_2)$

则由介值定理，$\exists\ x_4\in[x_1,x_2]$，使得

$$f(x_4)=f(x_3)$$

这与条件矛盾.

34. 证明：由于 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$

则 $\exists$ $M<0<N$ 当 $x<M$ 或 $x>N$ 时，有 $f(x)>f(0)$.

当 $x\in[M,N]$时，由$f(x)$的连续性.

利用最值定理可知，$\exists\ \xi\in[M,N]$，使得对$\forall\ x\in[M,N]$，有

$$f(\xi)\le f(x).$$

于是 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上取最小值 $\min\{f(0),f(\xi)\}$.

35. 证明（充分性）若$f(x)$在$[0,1]$上单调上升.

则对$\forall\ x\in[0,1]$，$M(x)=\max\limits_{0\le t\le x} f(t)=f(x)$

于是 $Q(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{f(x)}{M(x)}\right]^n=1$ 在$[0,1]$上连续.

(必要性).

$$M(0)=\max_{0\le t\le 0} f(t)=f(0)$$

则 $Q(0)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f(0)}{M(0)}\right)^n=1$

又 $Q(x)$在$[0,1]$上连续，则 $Q(x)\equiv 1$ 当$x\in[0,1]$

从而 $f(x)\equiv M(x)$. $x\in[0,1]$

于是对$\forall\ x_1<x_2\in[0,1]$

$$f(x_2)=\max_{0\le t\le t_2} f(t)\ge f(x_1)$$

即 $f(x)$在$[0,1]$上是单调上升的.

38. $x_n' = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ , $x_n'' = \dfrac{1}{2n\pi}$

则 $|x_n'-x_n''| \to 0 \quad (n\to\infty)$

$$\left|\sin\frac{1}{x_n'} - \sin\frac{1}{x_n''}\right| = |1-0| = 1$$

$$\left|\sin\frac{1}{x_1} - \sin\frac{1}{x_2}\right| = 2\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right| \le 2\cdot\frac{|x_1-x_2|}{2} \le |x_1-x_2|.$$

41. (法一). 利用40结论.

$f(x)-g(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上连续, 极限存在. 则一致连续.

(法二) 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$

则对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists M>a$. 当 $x\ge M$ 时, 有 $|f(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$

由 $g(x)$ 在 $[a, M+1]$ 上连续, 从而一致连续.

那么对上述 $\varepsilon>0$. $\exists\delta_1>0$. 当 $x_1,x_2\in[a,M+1]$ 且 $|x_1-x_2|<\delta_1$ 时 有

$$|g(x_1)-g(x_2)|<\varepsilon$$

又由 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续. 则 $\exists\delta_2>0$. 当 $x_1,x_2\in[M,+\infty)$

且 $|x_1-x_2|<\delta_2$ 时 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{3}$

即 $\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. 当 $x_1,x_2\in[M,+\infty)$ 时. 且 $|x_1-x_2|<\delta$

有 $|g(x_1)-g(x_2)| \le |f(x_1)-f(x_2)|+\frac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon$

不妨设为 上述 $\delta<1$. 则 对 $\forall$ ~~存在~~ $\varepsilon>0$. $\exists$ 上述 $\delta$. 当 $x_1,x_2\in[a,\infty)$ 时.

且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时. $x_1,x_2$ 要么同属于 $[M,+\infty)$, 要么同属于 $[a, M+1]$.

都有 $|g(x_1)-g(x_2)|<\varepsilon$.

即 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续

42. $f(x)=x$, $g(x)=\sin x$

$f(x)g(x)=x\sin x$ 不是一致连续

$x_n' = 2n\pi+\frac{1}{n}$, $x_n''=2n\pi$.

则 $|x_n'-x_n''| = \frac{1}{n}\to 0 \ (n\to\infty)$

$$\left|\left(2n\pi+\tfrac{1}{n}\right)\sin\left(2n\pi+\tfrac{1}{n}\right)-(2n\pi)\sin(2n\pi)\right| = \left(2n\pi+\tfrac{1}{n}\right)\sin\tfrac{1}{n}$$

$$= 2\pi\cdot\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$$

$$\to 2\pi$$

46. (1) $$\lim_{x\to 0+0} \frac{x\ln(1+3x)}{(1-\cos 2\sqrt{x})^2} = \lim_{x\to 0+0} \frac{x(3x)}{4(\sin\sqrt{x})^4} = \lim_{x\to 0+0} \frac{3}{4}\cdot\frac{x^2}{(\sqrt{x})^4} = \frac{3}{4}$$

(2) $$\lim_{x\to\infty} x^2\left(\sqrt{x^4-2}-x^2\right) = \lim_{x\to\infty} x^2\frac{-2}{\sqrt{x^4-2}+x^2} = \lim_{x\to\infty} -\frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{2}{x^4}}} = -1$$

(3) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos ax-1}{\cos bx-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}(ax)^2}{\frac{1}{2}(bx)^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

(4). $$\lim_{x\to 0} \frac{2^x-3^x}{3^x-4^x} = \lim_{x\to 0} \frac{2^x\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)}{3^x\left(1-\left(\frac{4}{3}\right)^x\right)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\frac{\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^x}{x}}{\frac{1-\left(\frac{4}{3}\right)^x}{x}}$$

$$= \frac{\ln\frac{3}{2}}{\ln\frac{4}{3}} = \frac{\ln 3-\ln 2}{\ln 4-\ln 3}$$