数学分析习题课 4

2017.10.16

1 几个基本定理的回顾

定理 1 *(确界存在定理)* 非空有上界的实数集必有上确界；非空有下界的实数集必有下确界。

例 1：设 A 是有上界的数集，$\beta = supA$. 证明：存在 $\{a_n\}$, 使得 $a_n \in A$, 而且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \beta$.

定理 2 *(单调收敛原理)* 单调有界序列必收敛.

上节课我们已经用这个定理证明并求解了很多序列的极限，大家应该熟练掌握这个定理的应用条件和基本步骤。

定理 3 *(闭区间套定理)* 设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间，并满足:
(1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots;$
(2) $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0,$
则存在唯一的一点 $c \in \mathbb{R}$, 使得 $c \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots.$

我们其实已经很自然地接触过这个闭区间套定理。例 2：(习题 19) 设 $0 < a_1 < a_2$, 令 $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, 证明序列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的极限存在且相等。

定理 4 *(有限覆盖定理)* 设 $[a, b]$ 是一个闭区间，$\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $[a, b]$ 的任意一个开覆盖，则必存在 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的一个子集构成的 $[a, b]$ 的一个有限覆盖。

定理 5 *(波尔查诺-威尔斯特拉斯定理)* 任何有界序列必有收敛的子列。

还是要特别注意这些定理的成立条件，都是在实数域中。例如波尔查诺-威尔斯特拉斯定理在有理数域中的反例。
例 3：$a_1 = 1, a_2 = 1.4, a_3 = 1.41, \cdots, b_n = a_n + \frac{1}{10^{n-1}}$, 则 b_n, a_n 都是以 $\sqrt{2}$ 为极限，不在有理数中。将二者进行相间插值，则形成的新序列的任何子列都不收敛。

定义 1 *设 $\{x_n\}$ 是一个序列，若 $\forall \epsilon > 0, \exists N$, 当 $n, m > N$ 时，有 $|x_n - x_m| < \epsilon$, 则称 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列。*

定理 6 *(Cauchy 收敛准则) 序列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是它是一个 Cauchy 序列。*

在应用 Cauchy 收敛准则的时候，很多同学都有误区，上次交的作业里发现了很多问题，见上次作业习题 27.
还有就是有关于 e 极限的序列变化，例如习题 20.

2 上下极限

设 $\{x_n\}$ 是有界序列，令

$$l_n = inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots\},$$

$$h_n = sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots\}$$

.
则 $\{l_n\}$ 是单调递增的，$\{h_n\}$ 是单调递减的，且有界。那么有有界收敛定理可以知道:
$l = \lim_{n\to\infty} l_n = sup_n inf_k x_{n+k} := \liminf_{n\to\infty} x_n$.
$h = \lim_{n\to\infty} h_n = inf_n sup_k x_{n+k} := \limsup_{n\to\infty} x_n$.

定理 7 *设 $\{x_n\}$ 是一有界序列，h 是一实数，则下列三个命题等价:*

(1) h 是 $\{x_n\}$ 的上极限;

(2) $\forall \epsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时，有 $x_n < h + \epsilon$, 而且对 $\forall K, \exists n_k > K$, 使得 $x_{n_k} > h - \epsilon$;

(3) 存在以 h 为极限的子序列，且任何收敛的其他子列的极限都不超过 h;

定理 8 *(1)* 有界序列由互不相同的数组成，则上极限是最大聚点，下极限是最小聚点；

(2) $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的任一子列，则 $\liminf_{n\to\infty} x_n \le \liminf_{k\to\infty} x_{n_k} \le \limsup_{k\to\infty} x_{n_k} \le \limsup_{n\to\infty} x_n$;

(3) $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 的充要条件是它的上下极限都是 a;