3月28日　　7.6节 反常积分综合题目.

1. 设函数 $f(x)$ 在任何有限区间上可积，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$，求证：

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = l.$$

证明：由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ 可知.

$\forall \varepsilon>0$，$\exists A>0$ 当 $x>A$ 时，$|f(x)-l|<\varepsilon$.

于是
$$0\le \left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt - l\right| = \left|\frac{1}{x}\int_0^x (f(t)-l)\,dt\right|$$
$$\le \frac{1}{x}\int_0^A |f(t)-l|\,dt + \frac{1}{x}\int_A^x |f(t)-l|\,dt$$
$$\le \frac{1}{x}\int_0^A |f(t)-l|\,dt + \frac{1}{x}\cdot\varepsilon(x-A)$$

于是
$$0\le \liminf_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt - l\right| \le \limsup_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt - l\right| \le \varepsilon.$$

从而 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = l$.

2. 设 $f(x)\ge 0$，$g(x)>0$，都在 $[a,b]$ 上连续，求证
$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f(x)^n g(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}} = \max_{a\le x\le b} f(x)$$

证：(1) 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $\exists x_0\in[a,b]$. s.t.
$$f(x_0)=\max_{a\le x\le b} f(x) \triangleq M.$$

于是 $\left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}} \le \left(\int_a^b M^n g(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}} = M\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}} \to M \quad (n\to\infty)$

(2) 另一方面，取 x_0 的邻域 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ ，s.t.
$$f(x)>M-\varepsilon. \quad 当 x\in[\alpha,\beta].$$

故 $\left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}} \ge \left(\int_\alpha^\beta (M-\varepsilon)^n g(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}} = (M-\varepsilon)\left(\int_\alpha^\beta g(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}} \to M-\varepsilon.$

由 ε 的任意性.
$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}} = \max_{a\le x\le b} f(x)$$

3. 证.

(1) $f\in R([0,1])$. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx=0$

(2) $f\in C([0,1])$. $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 x^{n-1} f(x)dx=f(1)$

证.(1)

$$\left|\int_0^1 x^n f(x)dx\right| \le M\int_0^1 x^n dx = M\frac{1}{n+1}\to 0 \quad (|f|\le M)$$

(2)

$$\left|n\int_0^1 x^{n-1}f(x)dx - f(1)\right| = \left|n\int_0^1 x^{n-1}(f(x)-f(1))dx\right| \quad (*)$$

(小技巧. 在放缩时. 若用 f 的界 把 f 拿掉. 则 $\int_0^1 x^{n-1}dx=\frac{1}{n}$ 没用)

由于 $f\in C[0,1]$. 则 $\forall\varepsilon>0$, $0<\varepsilon<1$, $\exists\delta>0$. 当 $1-\delta\le x\le 1$ 时

有 $|f(x)-f(1)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

于是 $(*) = \left|n\int_0^{1-\delta} x^{n-1}(f(x)-f(1))dx + n\int_{1-\delta}^1 x^{n-1}(f(x)-f(1))dx\right|$

$\le 2M\cdot(1-\delta)^n + \frac{\varepsilon}{2}$

当 $n\to\infty$ 时. $\exists N$. s.t. $(1-\delta)^n<\frac{\varepsilon}{4M}$

从而 $(*)<\varepsilon$.

4. 证明下列极限成立 (课本19题)

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-1}^1(1-x^2)^n dx=0$ (2) 设 $f\in C[-1,1]$. 则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^n dx}{\int_{-1}^1(1-x^2)^n dx}=f(0)$$

证明 (1)

$\left(0\le\int_{-1}^1(1-x^2)^n dx \le \int_{-1}^1 1\cdot dx=2\right.$ 并不能起到作用. 于是将上下限放缩$\Big)$

$$\int_{-1}^1(1-x^2)^n dx = \underset{①}{\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n dx} + \underset{②}{\int_{\delta}^1(1-x^2)^n dx} + \underset{③}{\int_{-1}^{-\delta}(1-x^2)^n dx}$$

$② = \int_\delta^1(1-x^2)^n dx \le (1-\delta^2)^n(1-\delta)\to 0$

$③ \le (1-\delta^2)^n(1-\delta)\to 0$

$① \le \int_{-\delta}^{\delta}1\cdot dx = 2\delta$.

从而 取 $\delta<\frac{\varepsilon}{2}$ 容易得到.

(2)

$$\frac{\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^n dx}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx} - f(0) = \frac{\int_{-1}^{1}(f(x)-f(0))(1-x^2)^n dx}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx}$$

$$= \frac{\int_{-1}^{-\delta}(f(x)-f(0))(1-x^2)^n dx + \int_{-\delta}^{\delta}(f(x)-f(0))(1-x^2)^n dx + \int_{\delta}^{1}(f(x)-f(0))(1-x^2)^n dx}{\int_{-1}^{-\delta}(1-x^2)^n dx + \int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n dx + \int_{\delta}^{1}(1-x^2)^n dx} \quad (*)$$

若能证明 对 $\forall f \in C[-1,1]$，有

$$\frac{\int_{\delta}^{1}(f(x)\cancel{-f(0)})(1-x^2)^n dx}{\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n dx} \to 0 \quad (n\to\infty)$$ 则上述极限 $(*)$

等价于求 $$\frac{\int_{-\delta}^{\delta}(f(x)-f(0))(1-x^2)^n dx}{\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n dx}$$

下面证明，对 $\forall f \in C[-1,1]$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\int_{\delta}^{1} f(x)(1-x^2)^n dx}{\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n dx} = 0$

$$0 \le \left| \frac{\int_{\delta}^{1} f(x)(1-x^2)^n dx}{\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n dx} \right| \le \frac{M\int_{\delta}^{1}(1-x^2)^n dx}{\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}}(1-x^2)^n dx} \le \frac{M(1-\delta^2)^n(1-\delta)}{(1-\frac{\delta^2}{4})^n \cdot \delta}$$

$$= M \cdot \left(\frac{1-\delta^2}{1-\frac{\delta^2}{4}}\right)^n \cdot \frac{1-\delta}{\delta} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

下面求 $$\frac{\int_{-\delta}^{\delta}(f(x)-f(0))(1-x^2)^n dx}{\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n dx}$$

由于 f 连续，则对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $|x|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-f(0)|<\varepsilon.$$

从而 $$\left| \frac{\int_{-\delta}^{\delta}(f(x)-f(0))(1-x^2)^n dx}{\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n dx} \right| \le \varepsilon.$$

证毕.

5、求由方程 $x^2+xy+y^2=1$ 所确定的图形面积.

① 解出 y.

$$y_{1,2}(x) = -\frac{x}{2} \pm \sqrt{1-\frac{3}{4}x^2}, \quad -\frac{2}{\sqrt{3}} \le x \le \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$S = \int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \left(y_1(x) - y_2(x)\right) dx = 2\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \sqrt{1-\frac{3}{4}x^2}\, dx$$

② $x = r\cos\theta$. $y = r\sin\theta$

$$r^2 + r^2\sin\theta\cos\theta = 1. \Rightarrow r^2 = \frac{1}{1+\sin\theta\cos\theta}$$ (极坐标方法)

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\theta)\, d\theta$$

③. $$x^2+xy+y^2=1 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2 + \left(y+\frac{x}{2}\right)^2 = 1$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos t, \quad y = \sin t - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t. \quad 0 \le t \le 2\pi$$

(参数方程方法)

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x\,dy - y\,dx$$

积分第一中值定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积不变号，则 $\exists \xi \in (a,b)$ s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx \qquad (*)$$

证明：不妨设 $g(x) \geq 0$，记 $m = \min_{a\le x\le b} f(x)$ $M = \max_{a\le x\le b} f(x)$

(i) 若 $\int_a^b g(x)dx = 0$ 由

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

则 $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ 故 $\forall \xi \in (a,b)$，都有 $(*)$ 成立

(ii) (考虑 等于 m 和 M 的情况) $\int_a^b g(x)dx > 0$ 时

若 $(f(x)-m)g(x) \equiv 0$，则有 $\int_a^b f(x)g(x)dx = m\int_a^b g(x)dx$

记 $E = \{x : f(x) = m,\ x \in [a,b]\}$

①若 E 包含 $[a,b]$ 的内点 ξ，则 $f(\xi) = m$，$(*)$ 成立

② 否则 $E \cap (a,b) = \phi$，即 $\forall x \in (a,b)$，$f(x) > m$ 从而 $g(x) \equiv 0$，$x \in (a,b)$

于是 $\int_a^b g(x)dx = 0$ ~~由(i)知成立~~ 与假设矛盾

(iii) $(f(x)-m)g(x) \not\equiv 0$ 即集合 $X = \{x : (f(x)-m)g(x) > 0,\ x \in [a,b]\}$ 非空

① 若至少 $\exists$ 一点 $x_0 \in X$ (内点)，$\delta > 0$ s.t. $N(x_0,\delta) \subset X$ 且当 $x \in N(x_0,\delta)$ 时

$(f(x)-m)g(x) > 0$

若 g 是连续的，①假设就是对的.

则 $\int_a^b (f(x)-m)g(x)dx \geq \int_{N(x_0,\delta)} (f(x)-m)g(x)dx > 0$ 故

$$\int_a^b f(x)g(x)dx > m\int_a^b g(x)dx$$

所以 $m < \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$

同理 可证 $\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} < M$

于是由介值定理 $\exists \xi \in (a,b)$ s.t. $(*)$ 成立

② 若集合 X 没有内点，于是 $\int_a^b (f(x)-m)g(x)dx = 0$

由于 $\int_a^b g(x)dx > 0$，$\exists x', \delta$ s.t. $(x'-\delta, x'+\delta) \subset (a,b)$

且 $g(x) > 0$ 当 $x \in (x'-\delta, x'+\delta)$

又此时 $f(x)-m$ ~~$\neq 0$~~ 不是恒为0的，故 $\exists \xi \in (a,b)$ s.t.

$f(\xi) = m$，即 $(*)$ 成立

设 $n\in N_+$. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nt}{\sin t}dt$. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_n}{\ln n}$

证明: $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin t}\cdot\frac{1-\cos 2nt}{2}$

$$1-\cos 2nt=\sum_{k=0}^{n-1}\cos 2kt-\cos 2(k+1)t=2\sum_{k=0}^{n-1}\sin t\sin(2k+1)t$$

于是 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)t\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2k+1)t\,dt$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1}\ \sim\cancel{\ln n}$$

可以用 Stolz 定理，求极限.

也可以不等式放缩. 利用 欧拉常数 C 的结论.