数学分析习题课 1

高家兴

2017.09.18

1 集合有界

对任意集合 $E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset$,

(1) 有上界：$\exists M \in \mathbb{R}$，使得对 $\forall x \in E, x \leq M$.

(2) 有下界：$\exists m \in \mathbb{R}$，使得对 $\forall x \in E, x \geq m$.

(3) 有界：$\exists M > 0$，使得对 $\forall x \in E, |x| \leq M$.

(4) 无界：$\forall M > 0$，$\exists x_0 \in E, |x_0| \geq M$.

这里我们需要熟练掌握的是有界和无界的数学表述，接下来我们还会遇到函数有界和无界的概念。我们还要学会 $\exists$ 和 $\forall$ 的表达方式，可以对一些数学表述，作出相应的否定表达，这一点在数学分析中用的相当多，尤其是在反证法中。

2 确界

对于确界的理解，有几点需要注意的地方。

(1) 记住上 (下) 确界的 ϵ 语言表述。（课本第 6 页定义 1.1.2）

(2) 上确界是最小上界，下确界是最大下界。

(3) $-\infty, \infty \notin \mathbb{R}$。

(4) 数集的上 (下) 确界如果存在，则必定唯一。

定理 1 *(确界存在定理)* *非空有上界的实数集必有上确界；非空有下界的实数集必有下确界。*

注：对于确界存在定理，注意里面强调的实数集。在其他数集中不一定成立，例如：
在有理数中，$a_1 = 1, a_2 = 1.4, a_3 = 1.41\ \cdots$，即 a_n 是 $\sqrt{2}$ 截取前 n 位有效数字，显然 $\{a_n : i = 1, 2, \cdots\}$ 单调递增，且上确界是 $\sqrt{2}$,

3 一些常用不等式

(1) $||x| - |y|| \le |x - y| \le |x| + |y|$

(2) (Bernoulli 不等式) 对 $\forall n, x \ge -1, (1+x)^n \ge 1 + nx$

4 函数

(1) 函数的定义三要素：定义域，值域，对应法则。

有一些数学课程中常用的函数，他们常常被用来举反例，或者经过变化之后造出反例。我们需要记住的是 Dirichlet 函数，Gauss 取整函数，特征函数（示性函数）。Riemann 函数了解即可。

(2) 函数的运算

- 在共同定义域中进行四则运算
- 限制和延拓
- 函数的复合：内函数的值域需要包含在外函数的定义域中，一般不满足交换律

(3) 反函数

定义 1 *设 $f : X \to Y$ 是一个一一对应。定义函数 $g : Y \to X$ 如下：对任意 $y \in Y$，函数值 $g(y)$ 规定为由关系式 $y = f(x)$ 所唯一确定的 $x \in X$. 这样定义的函数 $g(y)$ 称为是函数 $f(x)$ 的反函数，记为 $g = f^{-1}$*

性质：

$$f(f^{-1}(y)) = y$$
$$f^{-1}(f(x)) = x$$

(4) 函数的有界性

设 $y = f(x)$ 是定义在 X 上的函数，

- 若 $\exists$ 常数 M，使得对 $\forall x \in X$，都有 $f(x) \leq M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有上界
- 若 $\exists$ 常数 m，使得对 $\forall x \in X$，都有 $f(x) \geq m$，则称 $f(x)$ 在 X 上有下界
- 若 $\exists$ 常数 $M > 0$，使得对 $\forall x \in X$，都有 $|f(x)| \leq M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有界

(5) 函数的单调性，周期性和奇偶性

5 习题

(1) 需要看的例题：例 1.2.6, 例 1.3.2, 例 1.3.7, 例 1.3.9

(2) 课后习题：15，16，26，27