1、数列 $x_n$ 表示方程 $x+x^2+\cdots+x^n=1$ 在闭区间 $[0,1]$ 上的根，求 $\lim_{n} x_n$

证：$f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n-1$

$f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增　$f_n(0)=-1<0$，$f_n(1)=n-1>0$

于是 $f_n(x)=0$ 在 $[0,1]$ 上有唯一解

(1) $f_n(x_n)=x_n+x_n^2+\cdots+x_n^n-1=0$

$f_{n+1}(x_n)=x_n+\cdots+x_n^n+x_n^{n+1}-1=x_n^{n+1}>0$

从而 $x_{n+1}<x_n$

于是 $\{x_n\}$ 收敛

(2) $0<x_n<x_2<1$　$0<x_n^n<x_2^n\to 0\ (n\to\infty)$

故 $x_n^n\to 0\ (n\to\infty)$

$$0=x_n+x_n^2+\cdots+x_n^n-1=\frac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}-1\to\frac{a}{1-a}-1=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

2、数列 $x_n$ 满足

$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|<M\quad (n=2,3,\cdots)$$

$M$ 为固定正数，证 $\lim_{n} x_n$ 存在。

证 令 $S_n=|x_1|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|$

$S_n\uparrow$　$S_n<M$　$\lim_{n} S_n$ 存在，则 $\{S_n\}$ 是柯西列。

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$ 当 $n>N$ 时，对 $m,n>N$，$|S_m-S_n|<\varepsilon$

~~$S_{m}-S_n$~~

$(m>n)$

于是 $|x_m-x_n|\le|x_m-x_{m-1}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|=S_m-S_n<\varepsilon$

3. $x_{n+1}=\sin x_n$，$x_1\in(0,\pi)$，证 $\lim_{n\to\infty}x_n\sqrt{\frac{n}{3}}=1$

证明：$x_n\downarrow 0$　$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)$

$$(\sin x)^2=x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)$$

由于 $x_{n+1}=\sin x_n$

则 $\frac{1}{x_n^2}=\cancel{\frac{1}{(\sin x_{n})^2}}=\frac{1}{\sin(x_{n-1})^2}=\frac{1}{x_{n-1}^2\left(1-\frac{x_{n-1}^2}{3}+o(x_{n-1}^2)\right)}$

$$= \frac{1}{x_{n-1}^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x_{n-1}^2}{3} + o(x_{n-1}^2)} \qquad \left( \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots \right)$$

$$\frac{1}{1 - \frac{x_{n-1}^2}{3} + o(x_{n-1}^2)} = 1 + \frac{x_{n-1}^2}{3} + o(x_{n-1}^2)$$

于是 $$\frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{x_{n-1}^2}\left(1 + \frac{x_{n-1}^2}{3} + o(x_{n-1}^2)\right) = \frac{1}{x_{n-1}^2} + \frac{1}{3} + o(1)$$

令 $y_n = o(1)$

则 $$\frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_{n-1}^2} = \frac{1}{3} + y_n$$

将上式叠加得

$$\frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{n-1}{3} + \sum_{k=2}^{n} y_k$$

由 Stolz 公式 $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} y_k = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

于是 $$\frac{3}{n x_n^2} = \frac{3}{n x_1^2} + \frac{n-1}{n} + \frac{3}{n}\sum_{k=2}^{n} y_k \to 1$$

即 $$\lim_{n\to\infty} x_n \sqrt{\frac{n}{3}} = 1$$

4. 课本 206 页 $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin(2\pi e n!)$

5. 设函数在 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明存在 $[0,+\infty)$ 上的连续函数 $\varphi(t)$，

满足 ① $\varphi(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调不减，当 $t \geq b-a$ 时，$\varphi(t)$ 为常数．

② 对 $\forall\ x, y \in [a,b]$，$|f(x)-f(y)| \leq \varphi(|x-y|)$

③ $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = 0$

证：由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以有界，对 $\forall t>0$，

令 $\varphi(t)=\sup\{|f(x)-f(y)| : x,y\in[a,b],\ |x-y|\le t\}$

① 当 $t_1<t_2$ 时，

$\{|f(x)-f(y)| : x,y\in[a,b],\ |x-y|\le t_1\} \subset \{|f(x)-f(y)| : x,y\in[a,b],\ |x-y|\le t_2\}$

故 $\varphi(t_1)\le\varphi(t_2)$.

当 $t\ge b-a$ 时

$\varphi(t)=\varphi(b-a)$ 为常数.

② $\forall x,y\in[a,b]$.

$|f(x)-f(y)| \in \{|f(x)-f(y)| ; x,y\in[a,b],\ |x-y|\le|x-y|\}$

则 $|f(x)-f(y)|\le\varphi(|x-y|)$.

③ 由于 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而一致连续.

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，只要 $|x-y|<\delta$，$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 同上的 $\delta>0$，只要 $0<t<\delta$，有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

于是 $\varphi(t)\le\varepsilon$

即 $\lim\limits_{t\to0^+}\varphi(t)=0$.

6、求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}-x\right\}$ 其中 $a_1, a_2, \dots a_k$ 给定常数.

解：设 $t=\frac{1}{x}$，$f(t)=\sqrt[k]{(1+a_1t)(1+a_2t)\cdots(1+a_kt)}$，则 $f(0)=1$.

$f'(t)=\frac{1}{k}\left[(1+a_1t)(1+a_2t)\cdots(1+a_kt)\right]^{\frac{1}{k}-1}\left((1+a_1t)\cdots(1+a_kt)\right)'$

则多项式乘积，求一次导后在0处取值，剩下的仅为原函数一次项的系数.

即 $f'(0)=\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k}a_i$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}-x\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\sqrt[k]{(1+\frac{a_1}{x})(1+\frac{a_2}{x})\cdots(1+\frac{a_k}{x})}-1\right\}x$

$=\lim\limits_{t\to0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=f'(0)=\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k}a_i$

例：(3题的推论).

$f \in C^{(3)}(U(0))$. $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$. $a_{n+1}=f(a_n)$ 满足 $a_n \to 0$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n^2$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(\theta x)\cdot\frac{x^3}{6}.$$

即 $f(x) = x + f'''(\theta x)\dfrac{x^3}{6}$

$$\frac{1}{f^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - f^2(x)}{x^2 f^2(x)} = \frac{x^2 - (x + f'''(\theta x)\cdot\frac{x^3}{6})^2}{x^2(x + f'''(\theta x)\cdot\frac{x^3}{6})^2}$$

$$= \frac{-f'''(\theta x)\cdot\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \quad (x\to 0)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{f^2(x)} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}, \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}^2} - \frac{1}{a_k^2}\right)}{n} \to \frac{1}{3} \quad (n\to\infty)$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{n a_{n+1}^2} - \frac{1}{n a_1^2} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{(n+1)a_{n+1}^2} - \frac{1}{n a_1^2} \to \frac{1}{3}$$

故 $n a_n^2 \to 3$

8. (*) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

令 $\sqrt{x}=t$. $t\geq 0$ $\quad x=t^2$

$$(*)=\int \frac{2t\,dt}{1+t+\sqrt{1+t^2}}$$

令 $t=\tan y$. $0\leq y<\frac{\pi}{2}$ $\quad$ ~~$y=\arctan t$~~ $dt=\frac{1}{\cos^2 y}dy$

$$(*)=\int \frac{2\tan y}{1+\tan y+\frac{1}{\cos y}}\frac{1}{\cos^2 y}dy=\int \frac{2\tan y\,dy}{\cos^2 y+\sin y\cos y+\cos y}$$

令 $\tan\frac{y}{2}=s$ $\quad$ ~~$y=2\arctan s$~~. $dy=2\cdot\frac{1}{1+s^2}ds$ $\quad s\in[0,1)$.

$$(*)=\int \frac{2\cdot\frac{2s}{1-s^2}}{\left(\frac{1-s^2}{1+s^2}\right)^2+\frac{2s}{1+s^2}\cdot\frac{1-s^2}{1+s^2}+\frac{1-s^2}{1+s^2}}\cdot 2\cdot\frac{1}{1+s^2}ds$$

$$=4\int \frac{s(1+s^2)}{(1+s)^3(1-s)^2}ds$$

$$=\int\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{1+s}+2\cdot\frac{1}{(1+s)^2}-2\cdot\frac{1}{(1+s)^3}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-s}+\frac{1}{(1-s)^2}\right]ds$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(1+s)-2\frac{1}{1+s}+\frac{1}{(1+s)^2}+\frac{1}{2}\ln(1-s)+\frac{1}{1-s}+C$$

$$x=t^2=(\tan y)^2=\left(\frac{2\tan\frac{y}{2}}{1-(\tan\frac{y}{2})^2}\right)^2=\left(\frac{2s}{1-s^2}\right)^2$$

$$\begin{cases}\sqrt{x}=\frac{2s}{1-s^2}\\ \sqrt{x+1}=\frac{1+s^2}{1-s^2}\end{cases}$$

$$s=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$(*)=-\frac{1}{2}\ln\frac{1+s}{1-s}-\frac{1}{1+s}+\left(\frac{1}{1-s}-\frac{1}{1+s}\right)+\frac{1}{(1+s)^2}+C$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})-\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}+1}+\sqrt{x}+\frac{1}{\left(1+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+1}\right)^2}+C$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})+\sqrt{x}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{x(x+1)}+C$$

$$= f'\left(\frac{a+\eta}{2}\right)+f''\left(\frac{a+\eta}{2}\right)\frac{\eta-a}{2}+\frac{f'''(\xi)}{2}\left(\frac{\eta-a}{2}\right)^2,$$

可知前式成为

$$\frac{f'''(\xi)}{2}\left(\frac{\eta-a}{2}\right)^2-3A(\eta-a)^2=0,\qquad A=f'''(\xi)/24.$$

**例 5.6.12** 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$在$(-1,1)$上二次可导，且有

$$f(0)=0,\quad f'(0)=0,\quad |f''(x)|\leqslant|f(x)|+|f'(x)|,\quad x\in(-1,1),$$

则存在 $\delta>0$，使得 $f(x)=0(-\delta<x<\delta)$.

(2) 设 $f\in C^{(\infty)}((-\infty,\infty))$，且有

(i) 存在 $M>0$，使得$|f^{(n)}(x)|\leqslant M(x\in(-\infty,\infty),n\in\mathbf{N})$；

(ii) $f(1/n)=0(n=1,2,\cdots)$，

则 $f(x)=0(-\infty<x<\infty)$.

**证明** (1) 考察区间$[-1/4,1/4]$上的函数$|f(x)|+|f'(x)|$，并假定它在$x_0\in[-1/4,1/4]$点上取到最大值$M$. 由题设知，$f(x_0)$，$f'(x_0)$在$x=0$处的 Taylor 公式为

$$f(x_0)=f''(\xi_0)x_0^2/2,\qquad f'(x_0)=f''(\eta_0)x_0,$$

其中 $\xi_0$ 位于 $x_0$ 与 0 之间，$\eta_0$ 位于 $x_0$ 与 0 之间. 从而有

$$\begin{aligned}M&=|f(x_0)|+|f'(x_0)|=|f''(\xi_0)|x_0^2/2+|f''(\eta_0)x_0|\\&\leqslant[|f''(\xi_0)|+|f''(\eta_0)|]/4\\&\leqslant[|f(\xi_0)|+|f'(\xi_0)|+|f(\eta_0)|+|f'(\eta_0)|]/4\\&\leqslant M/2.\end{aligned}$$

这说明 $M=0$，得证.

(2) 由题设知 $f(0)=0$. 从而由 Rolle 定理知，存在$\{x_m^{(0)}\}$，使得

$$\lim_{m\to\infty}x_m^{(0)}=0,\qquad f'(x_m^{(0)})=0\qquad(m=1,2,\cdots).$$

现在假定存在$\{x_m^{(k)}\}$，使得

$$\lim_{m\to\infty}x_m^{(k)}=0,\qquad f^{(k)}(x_m^{(k)})=0\qquad(m=1,2,\cdots).$$

则由 Rolle 定理知，存在$\{x_m^{(k+1)}\}$，使得

$$\lim_{m\to0}x_m^{(k+1)}=0,\qquad f^{(k+1)}(x_m^{(k+1)})=0\qquad(m=1,2,\cdots).$$

以上说明 $f^{(n)}(0)=0(n=0,1,2,\cdots)$. 于是对 $x\in(-\infty,\infty)$，有

$$|f(x)|=\left|\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n\right|\leqslant\frac{M}{n!}|x|^n\qquad(n=1,2,\cdots).$$

由此即得所证.

**例 5.6.13** 解答下列问题：

将上两式相加，得到

$$1=[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]/2,\qquad f''(\xi_1)+f''(\xi_2)=2.$$

如果 $f''(\xi_1)=1$ 以及 $f''(\xi_2)=1$，那么结论自然成立. 如果 $f''(\xi_1)<1$(或 $f''(\xi_2)<1$)，则 $f''(\xi_2)>1$(或 $f'(\xi_1)>1$)，那么根据导函数的介值性可知，存在 $\xi\in(-1,1)$，使得 $f''(\xi)=1$.

(2) 应用 Taylor 公式，我们有

$$1=f(1)=f''(0)/2+f'''(\xi_1)/3!,\qquad 0<\xi_1<1,$$
$$0=f(-1)=f''(0)/2-f'''(\xi_2)/3!,\quad -1<\xi_2<0.$$

将上两式相减，可得

$$f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)=6.$$

由此即知 $f'''(\xi_1)\geqslant 3$ 或 $f'''(\xi_2)\geqslant 3$. 证毕.

**注** 结论中的等号是可以成立的. 例如：

$$f(x)=(x^3+x^2)/2.$$

**例 5.6.15** 设 $f\in C^{(2)}((0,1))$，且 $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=0$. 若存在 $M>0$，使得 $(1-x^2)|f''(x)|\leqslant M(0<x<1)$，则

$$\lim_{x\to1-}(1-x)f'(x)=0.$$

**证明** 对 $t,x\in(0,1)$：$t>x$，作 Taylor 公式

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+f''(\xi)(t-x)^2/2,\qquad x<\xi<t,$$

并取 $t=x+(1-\delta)x(0<\delta<1/2)$，我们有

$$f(t)-f(x)=\delta(1-x)f'(x)+f''(x+\theta\delta(1-x))(1-x)^2.$$

令 $x\to1-$，则得 $0=\lim\limits_{x\to1-}[(1-x)f'(x)+\delta f''(x+\theta\delta(1-x))(1-x)^2]$.

由此知，对 $\varepsilon>0$，当 $x$ 从左边充分接近于 1 时，可知

$$(1-x)|f'(x)|\leqslant\varepsilon+\delta|f''(x+\theta\delta(1-x))|(1-x)^2/2$$
$$\leqslant\varepsilon+M\delta/2(\theta\delta-1)^2.$$

由 $\delta$ 的任意性，即得$(1-x)|f'(x)|\leqslant\varepsilon$($x$ 充分接近于 1-).

**例 5.6.16** 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$在$[0,1]$上二次可导. 若有

$$|f(x)|\leqslant A,\qquad |f''(x)|\leqslant B,\qquad x\in[0,1],$$

则$|f'(x)|\leqslant 2A+B/2(x\in[0,1])$.

(2) 设 $f(x)$在$[0,1]$上二次可导，且有 $f(0)=f(1)$，$|f''(x)|\leqslant M(0\leqslant x\leqslant 1)$，则$|f'(x)|\leqslant\dfrac{M}{2}(0\leqslant x\leqslant 1)$.

(3) 设 $f(x)$在$[0,1]$上二次可导，且 $f(0)=f(1)=0$. 若$\min\limits_{[0,1]}\{f(x)\}=-1$，则$\max\limits_{[0,1]}\{f''(x)\}\geqslant 8$.

(4) 设 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上二次可导,且有

$$M_k=\sup\{|f^{(k)}(x)|:-\infty<x<\infty\}<+\infty \qquad (k=0,1,2),$$

则 $M_1\leqslant\sqrt{2M_0M_2}$.(等号可以成立,例如 $f(x)=2x^2-1(-1<x<0)$, $f(x)=(x^2-1)/(x^2+1)(0\leqslant x<\infty)$,则 $M_0=1,M_1=M_2=4$.)

(5) 设 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上 $m$ 次可导,且有

$$M_k=\sup\{|f^{(k)}(x)|:-\infty<x<\infty\}<+\infty \qquad (k=0,1,\cdots,m;m\geqslant 2),$$

则 $M_k\leqslant 2^{\frac{k(m-k)}{2}}M_0^{1-k/m}M_m^{k/m}(k=1,2,\cdots,m-1)$.

**证明**　(1) 对任一点 $x_0\in[0,1]$,作 Taylor 公式

$$f(0)=f(x_0)-f'(x_0)x_0+f''(\xi_1)x_0^2/2, \qquad 0<\xi_1<x_0;$$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+f''(\xi_2)(1-x_0)^2/2, \qquad x_0<\xi_2<1.$$

由此知 $f(1)-f(0)=f'(x_0)+[f''(\xi_2)(1-x_0)^2-f''(\xi_1)x_0^2]/2$,故

$$|f'(x_0)|\leqslant|f(1)|+|f(0)|+B[(1-x_0)^2+x_0^2]/2\leqslant 2A+B/2.$$

(2) 由于结论涉及任意点 $x$ 上的导数值,故应在点 $x$ 上展开 Taylor 公式. 为了利用 $f(0)=f(1)$,0 和 1 点当然就成为展开目标了. 由

$$\begin{cases} f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\dfrac{f''(\xi_1)(1-x)^2}{2}, & x<\xi_1<1, \\ f(0)=f(x)+f'(x)(-x)+\dfrac{f''(\xi_2)x^2}{2}, & 0<\xi_2<x, \end{cases}$$

可知(两式相减)

$$f'(x)=\frac{f''(\xi_2)x^2-f''(\xi_1)(1-x)^2}{2}.$$

从而易得 $|f'(x)|\leqslant M/2(0\leqslant x\leqslant 1)$.

(3) 设 $x_0\in(0,1)$使 $f(x_0)=-1$,则 $f'(x_0)=0$. 由 Taylor 公式

$$0=f(0)=-1+f''(\xi_1)x_0^2/2, \qquad 0<\xi_1<x_0;$$

$$0=f(1)=-1+f''(\xi_2)(1-x_0)^2/2, \qquad x_0<\xi_2<1,$$

可得 $f''(\xi_1)=2/x_0^2$; $f''(\xi_2)=2/(1-x_0)^2$. 显然有

$$f''(\xi_1)>8\quad(x_0<1/2); \qquad f''(\xi_2)\geqslant 8\quad(x_0\geqslant 1/2),$$

即得所证.

(4) 作 Taylor 公式($h>0$)

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x+\theta_1h)h^2/2, \qquad 0<\theta_1<1,$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+f''(x-\theta_2h)h^2/2, \qquad 0<\theta_2<1.$$

从而可得

$$f'(x)=[f(x+h)-f(x-h)]/2h-[f''(x+\theta_1h)-f''(x-\theta_2h)]h/4.$$

因此我们有 $|f'(x)|\leqslant M_0/h+hM_2/2$. 取 $h=\sqrt{2M_0/M_2}$ 即得所证.