数学分析习题课 5

2017.10.23

1 函数的极限

定义 1 *设函数 $f(x)$ 在 $U_0(x_0,\delta_0)(\delta_0>0)$ 内有定义。若存在实数 A, 使得对 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $x\in U_0(x_0,\delta)$(即 $0<|x-x_0|<\delta$) 时，有 $|f(x)-A|<\epsilon$, 则称当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，记为 $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$.*

这里采用的是去心邻域，x_0 这一点的函数值本身可以是没有定义的。即使有定义，也不一定等于函数在这一点的极限。我们关心的只是函数在这一点附近的变化情况，在这一点的取值是函数的连续性需要考虑的内容。
例：阶梯函数的极限情况介绍。
这里函数的极限证明过程实际是和序列都是一样的，首先固定 ϵ, 然后根据极限满足的不等式 $|f(x)-A|<\epsilon$ 反解出 δ.
序列极限改变有限项不改变其收敛性，和这个性质类似，在函数极限中，因为我们考虑的是在某个 x_0 附近区域函数值的变化情况，所以我们考虑的范围可以很小，可以是 x_0 有定义的任何邻域。这也就是为什么我们可以事先为了方便先设 δ 为 1 或者其他数的原因。

定理 1 *(唯一性和有界性) 设极限 $\lim_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则*
(1) 该极限值是唯一的；(2) $\exists\delta_0>0$, 使得 $f(x)$ 在 $U_0(x_0,\delta_0)$ 有界.

定理 2 *(保序性) 设 $\lim_{x\to x_0}f(x)=A,\lim_{x\to x_0}g(x)=B$, 则*
(1) 若 $\exists\delta_0>0$, 使得当 $x\in U_0(x_0,\delta_0)$ 时，有 $f(x)\le g(x)$, 则 $A\le B$. (2) 若 $A<B$, 则对任何 $C\in(A,B),\exists\delta_c>0$, 使得当 $x\in U_0(x_0,\delta_c)$ 时，有 $f(x)<C<g(x)$.

定理 3 *函数极限的四则运算；*

定理 4 复合函数的极限;

注意记住复合函数极限后给出的反例，用来说明当 $x \in U_0(x_0, \delta_0)$ 时，有 $g(x) \in U_0(u_0, \delta_1)$ 的条件是必要的。

$$f(u) = \begin{cases} 0 & u > 0 \\ 1 & u \neq 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = \frac{1}{n} \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{2}$$

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1 & x = \frac{1}{n} \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{3}$$

2 函数极限概念的推广

2.1 单侧极限

举例说明，研究单侧极限的必要性, 例如阶梯函数对应的跳过程。相应的也就有了右邻域，左邻域，右空心邻域，左空心邻域，右极限和左极限;

定理 5 函数在某点极限存在的充要条件是左右极限都存在且相等。

2.2 函数在无穷远处的极限

自变量趋于正负无穷的极限行为。

2.3 广义极限

指的是在自变量趋于某个点时，函数在这个点附近的取值趋于无穷大的情况。注意这里也有正无穷大量和无界函数的区别，$f(x) = x^2 \sin(x)$

2.4 序列极限和函数极限的关系

掌握 $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq A$ 的表述，见课本 95 页最下面。

定理 6 设 $f(x)$ 在 $U_0(x_0,\delta_0)(\delta>0)$ 上有定义，则 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件为：对于 $U_0(x_0,\delta_0)(\delta>0)$ 内任意收敛于 x_0 的序列 $\{x_n\}$，都有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

这里 $\{x_n\}$ 在 x_0 的空心邻域内就排除了 $\{x_n\}$ 恒等于 x_0 的情况；

2.5 极限存在性定理和两个重要极限

1. 单侧单调，存在单侧广义极限；
2. 柯西收敛准则：设 $f(x)$ 在 $U_0(x_0,\delta_0)$ 内有定义，则 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是：$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $x',x''\in U_0(x_0,\delta_0)$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\epsilon$.
3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$.
4. $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$.