1. 对任意实数 $a$ 和任意正整数 $n$，有 $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$，进步

对于多项式 $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$，有 $\lim\limits_{x\to a} P_n(x) = P_n(a)$.

证明：因为 $x\to a$，不妨先设 $|x-a|<1$，则 $|x| \le |a|+1$

从而
$$|x^n - a^n| = |x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + a^{n-1}|\,|x-a|$$
$$\le \left[(|a|+1)^{n-1} + (|a|+1)^{n-2}|a| + \cdots + |a|^{n-1}\right]|x-a|$$
$$\le n(|a|+1)^{n-1}|x-a|$$

令 $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{n(|a|+1)^{n-1}}\}$

则 $|x^n - a^n| < n(|a|+1)^{n-1} \cdot \frac{\varepsilon}{n(|a|+1)^{n-1}} = \varepsilon$

从而 $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$.

$$\frac{e^{ax}-1}{x} - \frac{e^{bx}-1}{x}$$

2. 如果 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $b_n>0$，$\forall n\ge 1$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$，则对任何序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$，有

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{x} = a$$

证明：若 $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$，则成立.

否则，令 $L = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ （L 要么有限，要么 $-\infty$）

$$\left|\frac{e^{ax}-1}{x} - a\right|$$

对 $\forall\, l > L$，由定义，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有
$$\frac{a_n}{b_n} \le l.$$

从而 $a_1+a_2+\cdots+a_n \le (a_1+a_2+\cdots+a_N) + l(b_{N+1}+\cdots+b_n)$ $\quad 0<|x|<\delta$

令 $A_n = a_1+a_2+\cdots+a_n$，$B_n = b_1+b_2+\cdots+b_n$

$$\frac{e^{ax}-1-ax}{x}$$

则 $A_n \le A_N + l(B_n - B_N)$

$$e^{ax} \le ax+1$$

于是 $\frac{A_n}{B_n} \le l + \frac{A_N - lB_N}{B_n}$

两边取上极限，有
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} \le l \qquad \forall\, l > L.$$

因此 $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} \le L$.

(推广)：设 $a_n>0$，且 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \to +\infty\ (n\to\infty)$. 若对任意的有界数列 $\{b_k\}$，令 $\tilde{b}_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{S_n}$

则 $\varliminf\limits_{n\to\infty} b_n \le \varliminf\limits_{n\to\infty} \tilde{b}_n \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} \tilde{b}_n \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$

3. 不等式 $[x] \le x < [x]+1$

用来解决一些含有取整函数的极限… $(1+\frac{1}{x})^x \to e \ (x\to\infty)$

4、适当的变量代换是非常有用的手段，关键在于复合函数定理部分.

$F(x)=f(g(x))$ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=A$. $\lim\limits_{y\to A} f(y)=B \overset{?}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to a} F(x)=B$

成立条件：1、存在 $a$ 的去心邻域 $U_0(a,\delta)$, s.t. $g(x)\neq A$ 当 $x\in U_0(a,\delta)$.

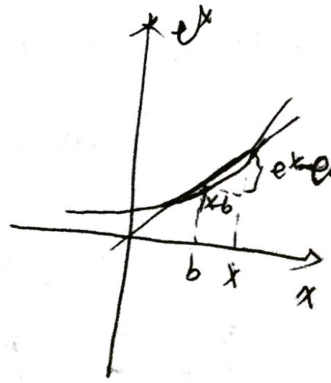
2、$\lim\limits_{y\to A} f(y)=f(A)$（即此时在 $y=A$ 时，$|f(y)-f(A)|<\varepsilon$ 恒成立）.

3、$A=\infty$，且 $\lim\limits_{y\to A} f(y)$ 有意义.

注：问题出现在极限的定义 $x\in U_0(x_0,\delta)$. 若 $x=x_0$ 则居然以1为极限. 但定义却不成立

5. 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A>0$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$，是否有 $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}=A^B$ 成立？

$\lim\limits_{x\to a}\ln x=\ln a$，$\lim\limits_{x\to b} e^x=e^b$.




$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[g(x)\ln f(x)]}$$

$$A^B = e^{B\ln A} = e^{(\lim\limits_{x\to a} g(x))\ln(\lim\limits_{x\to a} f(x))}.$$

关键在于 $\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)\ \ln\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$.

(1) $A=0$，$B=0$. (2) $A=+\infty$. $B=0$. (3). $A=1$，$B=\infty$.

6. 利用Heine原理证明函数极限的四则运算.

将函数极限转化为数列极限.

尤其是运用Heine原理证明极限不存在.

7、Heine原理在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 上的推广.

设 $A$ 为有限数. 存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 的充要条件为：对每个严格递增的正无穷大数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

习题三.

5 (2). 若 $A\neq 0$

$$\left|\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{A}\right|=\frac{|f(x)-A|}{\left|f(x)^{\frac{2}{3}}+f(x)^{\frac{1}{3}}A^{\frac{1}{3}}+A^{\frac{2}{3}}\right|}\leq\frac{|f(x)-A|}{\frac{3}{4}A^{\frac{2}{3}}}$$

$$\left(f(x)^{\frac{2}{3}}+f(x)^{\frac{1}{3}}A^{\frac{1}{3}}+A^{\frac{2}{3}}=\left(f(x)^{\frac{1}{3}}+\frac{A^{\frac{1}{3}}}{2}\right)^2+\frac{3}{4}A^{\frac{2}{3}}\right)$$

由于 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$

则 $\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta>0$ 当 $0<|x-a|<\delta$ 时. $|f(x)-A|<(\frac{3}{4}A^{\frac{2}{3}})\varepsilon$.

则对 $\forall\varepsilon>0$. 且同样的 $\delta$. 当 $0<|x-a|<\delta$ 时

$$\left|\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{A}\right|<\varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{A}$.

6. (8) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{(1+\sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x})}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}+1}}}=\frac{1}{2}.$$

7. (2) 由于 $x\to 2-0$. 则不妨设 $1<x<2$.

从而 $[x]=1$.

$$\lim_{x\to2-0}\frac{[x]^2-4}{x^2-4}=\lim_{x\to2-0}\frac{3}{4-x^2}=+\infty$$

8. (9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(n\arccos x)}{x}$ ($n$为奇数)

令 $\arccos x=t$ . 则 $x=\cos t$ $t\to\frac{\pi}{2}$

$$\text{从而}\lim_{x\to0}\frac{\cos(n\arccos x)}{x}=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos nt}{\cos t}\overset{\text{令}y=t-\frac{\pi}{2}}{=\!=}\lim_{y\to0}\frac{\cos n(y+\frac{\pi}{2})}{\cos(y+\frac{\pi}{2})}$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{\sin ny\cdot\sin\frac{\pi}{2}n}{\sin y}=\lim_{y\to0}\frac{\sin ny}{ny}\cdot\frac{y}{\sin y}\cdot n\sin\frac{\pi}{2}n$$

$$=\cancel{(-1)^{\frac{n+1}{2}}n}$$

$$=(-1)^{\frac{n-1}{2}}n.$$

(10). $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin([\pi(\sqrt{n^2+1}-n)+\pi n]$

$= \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \sin \pi \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0$

9.(3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

令 $e^{ax}-1=y$.

则 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{x} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{ay}{\ln(y+1)} = a\lim\limits_{y\to 0} \frac{1}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}} = a$

从而 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\frac{e^{ax}-1}{x}\right)-\left(\frac{e^{bx}-1}{x}\right)\right] = a-b$

(5). $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+(\sin x-1))^{\frac{1}{\sin x-1}(\sin x-1)\tan x}$

令 $\tan\frac{x}{2}=t$, $t\to 1$

则 $\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{t^2+1}$ $\quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

$\cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}$

从而 $(\sin x-1)\tan x = -\frac{(1-t)^2}{t^2+1}\cdot\frac{2t}{1-t^2} = \frac{-2(1-t)t}{(t^2+1)(1+t)} \to 0 \quad (t\to 1)$

从而 ~~$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\sin$~~ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} = e^0 = 1$

(6) 令 $\frac{1}{x}=t$ 则

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{t\to 0} (1+\sin t-1+\cos t)^{\frac{1}{\sin t-1+\cos t}(\sin t-1+\cos t)/t}$

$= e^{\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}+\frac{\cos t-1}{t}\right)} = e$

其中 $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\cos t-1}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{-2\sin^2\frac{t}{2}}{t} = \lim\limits_{t\to 0} 2\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right)^2\cdot\frac{t}{4} = 0$

26. 先计算 $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{a^x-1}{x}$ 令 $y=a^x-1$ 则 $x=\ln(y+1)/\ln a$

$\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{a^x-1}{x} = \lim\limits_{y\to 0+0} \frac{y}{\ln(y+1)}\ln a = \ln a$

于是 $\lim\limits_{x\to 0+0} \left(\frac{a_1^x+a_2^x+\dots+a_p^x}{p}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0+0} \left[1+\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\dots+a_p^x}{p}-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{a_1^x+\dots+a_p^x}{p}-1}\cdot\frac{1}{x}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\dots+a_p^x}{p}-1\right)}$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{p}\left(\frac{a_1^x-1}{x}+\frac{a_2^x-1}{x}+\dots+\frac{a_p^x-1}{x}\right)}$

$= e^{\frac{1}{p}\ln a_1 a_2\cdots a_p} = \sqrt[p]{a_1 a_2\cdots a_p}$