例题（谢惠民）

例 8.5.3　证明：在 $x>0$ 时，成立 $\sin x > x-\frac{x^3}{6}$

证：令 $F(x)=\sin x - x + \frac{x^3}{6}$

$F'(x)= \cos x -1 + \frac{x^2}{2}$

$F''(x)= -\sin x + x > 0$　当 $x>0$ 时

故 $F'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单增，从而 $F'(x) > F'(0)=0$　$(x>0)$

从而 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单增，于是

在 $x>0$ 时，$F(x)>F(0)=0$.

即 $\sin x > x-\frac{x^3}{6}$

练习题 8.6.2

2、证明：曲线 $y=\frac{x+1}{x^2+1}$ 有位于同一直线上的三个拐点

证明：曲线是三阶可导的。

$$y'=\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}, \quad y''=\frac{2(x-1)(x^2+4x+1)}{(x^2+1)^3}$$

令 $y''=0$，得 $x=1$，$x=-2+\sqrt{3}$，$x=-2-\sqrt{3}$

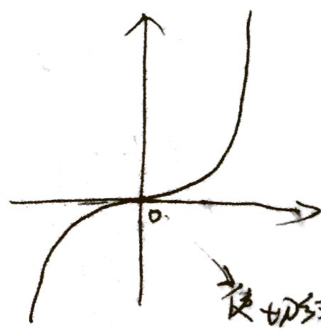
且在此三点处三阶导不等于 0，于是

三个拐点为 $\underset{(x_1,\ y_1)}{(1,1)}$，$\underset{(x_2,\ y_2)}{\left(-2+\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)}$，$\underset{(x_3,\ y_3)}{\left(-2-\sqrt{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)}$

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{4}-1}{(-2+\sqrt{3})-1}=\frac{\frac{1}{4}(\sqrt{3}-3)}{-3+\sqrt{3}}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{y_3-y_1}{\cancel{x_3-x_1}}=\frac{\frac{1-\sqrt{3}}{4}-1}{(-2-\sqrt{3})-1}=\frac{1}{4}$$

于是此三点在同一条直线上。



该切线穿过曲线的点，为拐点

（想想三阶导和二阶导都等于0的例子　x^2，x^4.

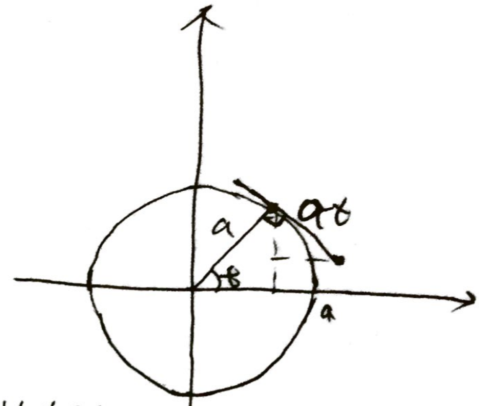
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

5·(6) 作曲线

$x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$

$x^2=a^2(\cos^2 t+t^2\sin^2 t+2t\sin t\cos t)$

$y^2=a^2(\sin^2 t+t^2\cos^2 t-2t\sin t\cos t)$



于是 $x^2+y^2=a^2(1+t^2)$

极坐标中 $r=a\sqrt{1+t^2}$

$\theta=\cancel{\arctan\frac{\cos t+t\sin t}{\quad}}$ $\arctan\frac{\sin t-t\cos t}{\cos t+t\sin t}$

at 是 t 对应的弧的长度.

则 $x=a\cos t+at\cdot\sin t=a(\cos t+t\sin t)$

$y=a\sin t-at\cos t=a(\sin t-t\cos t)$.

例：假设在某物理实验中，对某一物理量 x 进行了 n 次观测，得到的数据是 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 试问怎样的数值 $\bar{a}$ 代表要测量的真值，才能使它与上面各数据的误差平方和 $(\bar{a}-a_1)^2+(\bar{a}-a_2)^2+\dots+(\bar{a}-a_n)^2$ 最小.

$f(x)=(x-a_1)^2+\dots+(x-a_n)^2$

$f'(x)=\sum_{k=1}^{n}2(x-a_k)=2nx-2\sum_{k=1}^{n}a_k$

$f'(x)=0$. 的点为 $x=\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$

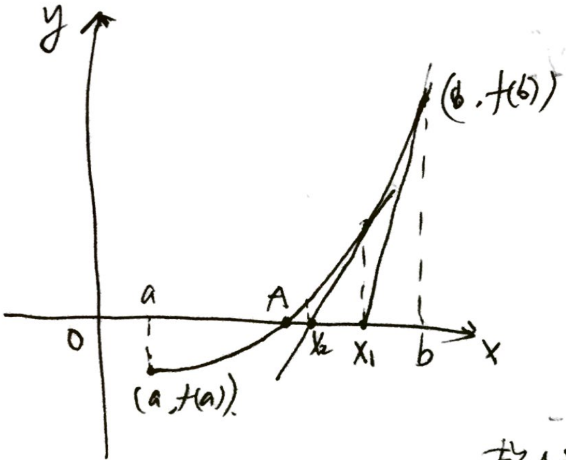
$f''(x)\Big|_{x=\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}}=2n>0$

极小值点.

解方程的Newton法.

函数$f(x)$在$[a,b]$内二阶连续可微，且$f'(x)$，$f''(x)$都恒大于0，$f(a)f(b)<0$

于是$f(x)$在$[a,b]$内有一零点，记为A，怎么求解A的近似值.



点$(b,f(b))$处的切线为

$$y=f(b)+f'(b)(x-b)$$

令$y=0$，得 $x_1=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$

由$f'(b)>0$，$f(b)>0$

故$A<x_1<b$　（$A<x_1$ 因为凸函数，切线在下方）.

过$(x_1,f(x_1))$的切线为 $y=f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)$

令$y=0$，得 $x_2=x_1-\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

有$A<x_2<x_1<b$

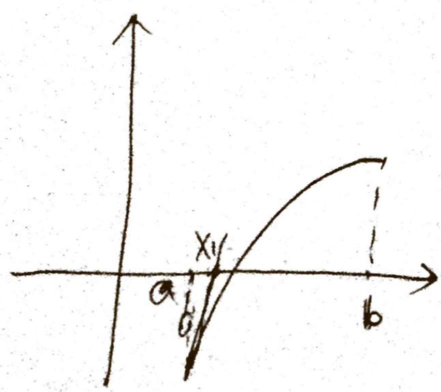
依此类推　$x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$　(*)　且 $A<x_n<x_{n-1}<\cdots<x_1<b$

由单调有界收敛原理，数列收敛，记为x'

(*)两端令$n\to\infty$ 得 $x'=x'-\dfrac{f(x')}{f'(x')}\Rightarrow f(x')=0$

于是 $A=x'$

其他情形，比如 $f'(x)>0$，$f''(x)<0$



从a开始作切线.

$$f(A)=0=f(x_n)+f'(x_n)(A-x_n)+\frac{f''(\xi_n)}{2}(A-x_n)^2.\quad \xi_n\in(A,x_n)$$

故 $$0<x_{n+1}-A=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-A=\frac{(x_n-A)f'(x_n)-f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$=\frac{f''(\xi_n)(x_n-A)^2}{2f'(x_n)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-A}{(x_n-A)^2}=\frac{f''(A)}{2f'(A)}\neq 0 \qquad (收敛阶).$$

(课外题).

对自然数 n. 给定方程 $x^n+x=1$. 求证:

(a) 在 $x>0$ 上方程有唯一解 x_n

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=1$

(c) 当 $n\to+\infty$ 时. 有 $1-x_n\sim\frac{\ln n}{n}$

证明: (1) 令 $F_n(x)=x^n+x-1$. $F(0)=~~0~~-1<0$, $F(1)=1>0$

且 $F'(x)=nx^{n-1}+1>0$ 当 $x\in(0,+\infty)$, 则 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上 ↑

故有唯一的解.

(2) 只考虑 $F(x)$. $x\in$ ~~$(0,+\infty)$~~ $(0,1)$

$F_n(x)=x^n+x-1>x^{n+1}+x-1=F_{n+1}(x)$

~~若 $F_n(x_0)=0$ 时~~ 而 $F_n(x_n)=0$.

而 $F_{n+1}(x_n)<0$. 故 $x_{n+1}>x_n$

从而 $\{x_n\}$ 是单调上升序列

由有界收敛定理 $\exists\, a$. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ $(a\leq 1)$

若 $a\neq 1$. 则由 $n=\frac{\ln(1-x_n)}{\ln x_n}\to\frac{\ln(1-a)}{\ln a}$ 矛盾.

则 $a=1$.

(3).

(1) 由于 $\ln(1-x) \le -x \quad 0<x<1$

故 $\ln(1-\frac{\ln n}{n}) \le -\frac{\ln n}{n}$

$n\ln(1-\frac{\ln n}{n}) \le -\ln n$

即 $\ln(1-\frac{\ln n}{n})^n \le -\ln n \le \ln\ln n-\ln n = \ln\left(\frac{\ln n}{n}\right)$

即 $(1-\frac{\ln n}{n})^n \le \frac{\ln n}{n} \Rightarrow 1-x_n \le \frac{\ln n}{n}$

(2) $\left(1-\frac{1}{n\ln n}\right)^n \ge 1-n\cdot\frac{1}{n\ln n} = 1-\frac{1}{\ln n} \ge \frac{1}{n\ln n}$

故 $\left(1-\frac{1}{n\ln n}\right)^n + \left(1-\frac{1}{n\ln n}\right)-1 \ge 0$

1倍 $x_n \le 1-\frac{1}{n\ln n} \qquad 1-x_n \ge \frac{1}{n\ln n}$

(3) 令 $y_n = n(1-x_n)$

则 $\frac{1}{\ln n} \le y_n \le \ln n$

$x_n = 1-\frac{y_n}{n}$

由 $x_n^n+x_n-1=0 \Leftrightarrow \left(1-\frac{y_n}{n}\right)^n = \frac{y_n}{n} \Leftrightarrow n\ln(1-\frac{y_n}{n}) = \ln y_n-\ln n \quad (*)$

$\frac{y_n}{n} = 1-x_n \to 0 \quad (n\to\infty)$

Taylor展开

$\ln(1-\frac{y_n}{n}) = -\frac{y_n}{n}-\frac{y_n^2}{2n^2}+o\left(\frac{y_n^2}{n^2}\right)$ 代入 $(*)$

$-y_n-\frac{y_n^2}{2n}+o\left(\frac{y_n^2}{n}\right) = \ln y_n-\ln n$

$-\frac{y_n}{\ln n}-\frac{y_n^2}{2n\ln n}+o\left(\frac{y_n^2}{n\ln n}\right) = \frac{\ln y_n}{\ln n}-1$

$\frac{y_n^2}{n\ln n} \le \frac{(\ln n)^2}{n\ln n} \le \frac{\ln n}{n} \to 0$

$0 \leftarrow \frac{-\ln(\ln n)}{\ln n} \le \frac{\ln y_n}{\ln n} \le \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} \to 0$

故 $\frac{y_n}{\ln n} \to 1 \quad (n\to\infty)$

构造辅助函数解决存在性问题.

1、设$f(x)$在$[0,+\infty)$上可导，且$0\le f(x)\le \frac{x}{1+x^2}$. 证明，$\exists\,\xi>0$，使$f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$

分析：$\exists\,\xi$. $f'(\xi)-\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}=0$

$\exists\,F(\xi)$. $F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}=0$

即构造辅助函数上 $F'(x)=f'(x)-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

$F(x)=f(x)-\frac{x}{1+x^2}$

$F(0)=f(0)-0=0$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

故$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$

由推广的Rolle定理，$\exists\,\xi$. $F'(\xi)=0$.

2. 设$f(x)$在包含x_0的区间I上二次可微，$x_0+h\in I$，$\lambda\in(0,1)$. 试证 $\exists\,\theta\in(0,1)$

使得 $f(x_0+\lambda h)=\lambda f(x_0+h)+(1-\lambda)f(x_0)+\frac{\lambda}{2}(\lambda-1)h^2f''(x_0+\theta h)$

分析：将$f''(x_0+\theta h)$记为A. 则对A有个自然满足的恒等式

$$f(x_0+\lambda h)-\lambda f(x_0+h)-(1-\lambda)f(x_0)-\frac{\lambda}{2}(\lambda-1)h^2A=0$$

构造辅助函数，将某一个变量作为变元.（λ很显然、不合适）

$$F(t)=f(x_0+th)-tf(x_0+h)-(1-t)f(x_0)-\frac{t}{2}(t-1)h^2A$$

$F(0)=F(1)=F(\lambda)=0$

两次应用Rolle定理，可知$\exists\,\theta\in(0,1)$. $F''(\theta)=0$.

解得 $A=f''(x_0+\theta h)$

3. $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. (a,b) 内可导. $\forall x\in(a,b)$ $g'(x)\neq 0$.

试证：$\exists\xi\in(a,b)$. 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}$.

分析：$\exists\xi\in(a,b)$. s.t.

$$f'(\xi)(g(b)-g(\xi)) - g'(\xi)(f(\xi)-f(a)) = 0$$

联想、乘积形式 求导法则

$$F(x) = [f(x)-f(a)][g(b)-g(x)].$$

4. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导. 且有 $f'(a)=f'(b)$. 则 $\exists\xi\in(a,b)$. s.t.

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$$ (群里发过答案).

5. $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ 上可导. 且 $f(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{5\pi}{4}) = 0$. 则 $\exists\xi\in(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ s.t.

$$f'(\xi)+f(\xi) = \cos\xi.$$

分析. $\exists\xi$. $\underline{f'(\xi)+f(\xi)} - \cos\xi = 0$

已知. $(e^{\xi}f(\xi))' = e^{\xi}(f'(\xi)+f(\xi))$

↓

相当于得到 $e^{\xi}(f'(\xi)+f(\xi)-\cos\xi)=0$

原函数 $F(x) = e^x(f(x)+g(x))$.

$$F'(x) = e^x(f(x)+g(x)+f'(x)+g'(x))$$
$$= e^x(f(x)+f'(x)+g(x)+g'(x))$$

$g(x)+g'(x) = \cos x$

$g(x) = \dfrac{\cos x+\sin x}{2}$ $\qquad g'(x) = \dfrac{\cos x-\sin x}{2}$