41. 设(X,Y)的密度函数是

$$p(x,y)=\begin{cases}cy^2, & 0\leqslant x\leqslant 2 \text{ 且 } 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

试确定常数 c 的值并计算概率：$P(X\leqslant 1)$，$P(X+Y>2)$，$P(X=3Y)$.

(了解即可)
概率上的应用.

例题 22.1.2 设有界非负函数 f 在区域 D 上可积, 证明

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0 \tag{22.2}$$

的充分必要条件是 f 在其连续点处的值均为零 (参见上册 333 页题 9).

证 先证必要性. 用反证法. 若不然, 存在 $\boldsymbol{p}_0(x_0,y_0)\in D$, f 在 $\boldsymbol{p}_0$ 点连续, 且 $f(x_0,y_0)>0$, 由连续函数的局部保号性定理知存在 $\delta>0$, 使得

$$f(x,y)>\frac{1}{2}f(x_0,y_0),\quad \forall\,(x,y)\in O_\delta(\boldsymbol{p}_0)\subset D.$$

于是

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\geqslant \iint\limits_{O_\delta(\boldsymbol{p}_0)}\frac{1}{2}f(x_0,y_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}\delta^2 f(x_0,y_0)>0,$$

与 (22.2) 矛盾.

再证充分性. 设 $f(x,y)$ 在其连续点处的函数值为 0. 对任意分划 T 中可求面积的小区域 σ_i, 如 $\Delta\sigma_i>0$, 则 σ_i 不是零测度集. 由可积充要条件知在每一个 σ_i 上至少有 f 的一个连续点, 记之为 (ξ_i,η_i), 作和数 $\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$, 则

零测度集

$$\sum_{i=1}^n f(\xi,\eta_i)\Delta\sigma_i=0.$$

于是

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=0.\quad\square$$

例题 22.1.3 设 D_R 是由 $x=R$, $y=0$, $y=\dfrac{2}{R}x-1$ 围成, 求

$$\lim_{R\to+\infty}\iint\limits_{D_R}\mathrm{e}^{-x}\arctan\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

$S=\frac{R}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}$
$=\frac{R}{4}$

解 在图 22.1 中作出了区域 D_R 的图形. 由于函数 $\mathrm{e}^{-x}\arctan\dfrac{y}{x}$ 在 D_R 上连续, 由积分中值定理, 存在 $(\xi,\eta)\in D_R$, 使得

$$\iint\limits_{D_R}\mathrm{e}^{-x}\arctan\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-\xi}\arctan\frac{\eta}{\xi}\cdot|D_R|$$
$$=\frac{R}{4}\mathrm{e}^{-\xi}\arctan\frac{\eta}{\xi},$$

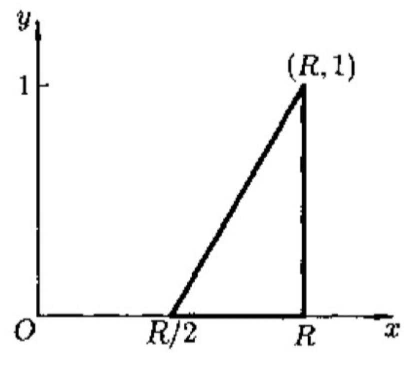

图 22.1

其中 $\dfrac{R}{2}\leqslant\xi\leqslant R$, $0\leqslant\eta\leqslant 1$. 于是当 $R\to+\infty$ 时

$$\left|\iint\limits_{D_R}\mathrm{e}^{-x}\arctan\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{R}{4}\mathrm{e}^{-R/2}\arctan\frac{\eta}{\xi}\longrightarrow 0.\quad\square$$

例题 22.2.2 设函数 f 定义在 $A=[0,1]\times[0,1]$ 上，

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是无理数},\\ 2y, & \text{当 } x \text{ 是有理数},\end{cases}$$

则 (1) f 在 A 上不可积；

(2) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 存在，$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 不存在.

证 (1) $\forall y\in[0,1]$, $y\neq\frac{1}{2}$, $f(x,y)$ 作为 x 的函数在 $[0,1]$ 上处处不连续，所以 $f(x,y)$ 在 A 上的 $y\neq\frac{1}{2}$ 的每点处都不连续. 于是 f 在 A 上不可积.

(2) 由于

$$\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^1 \mathrm{d}y=1, & \text{当 } x \text{ 为无理数},\\ \int_0^1 2y\,\mathrm{d}y=1, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\end{cases}$$

给定 $y\neq\frac{1}{2}$

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\setminus Q\\ \underset{\text{constant}}{2y}, & x\in Q\end{cases}$$

所以

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}x=1.$$

另一方面，对 $\forall y\in[0,1]$, $y\neq\frac{1}{2}$, $f(x,y)$ 作为 x 的一元函数，在 $[0,1]$ 上每一点都不连续，于是 $\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 对每个 $y\neq\frac{1}{2}$ 都不存在，从而

$$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

不存在. □

例题 22.2.3 设区域 $D=\{(x,y)\mid 2y\leqslant x^2+y^2\leqslant 4y, x\geqslant 0\}$. 分别将 D 表示为 x 型区域和 y 型区域.

解 (1) 表示为 x 型区域，D 可分为三块 (见图 22.2)，其中

$$D_1=\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-\sqrt{4-x^2}\leqslant y\leqslant 1-\sqrt{1-x^2},\end{cases}$$

$$D_2=\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant 2+\sqrt{4-x^2},\end{cases}$$

$$D_3=\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2-\sqrt{4-x^2}\leqslant y\leqslant 2+\sqrt{4-x^2}.\end{cases}$$

(2) 表示为 y 型区域，D 可分为两块 (见图 22.3)，其中

$$E_1=\begin{cases}0\leqslant y\leqslant 2,\\ \sqrt{2y-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{4y-y^2},\end{cases}\quad E_2=\begin{cases}2\leqslant y\leqslant 4,\\ 0\leqslant x\leqslant\sqrt{4y-y^2}.\end{cases}\qquad\square$$

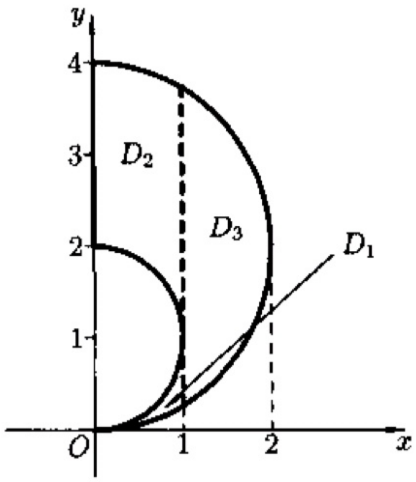

图 22.2

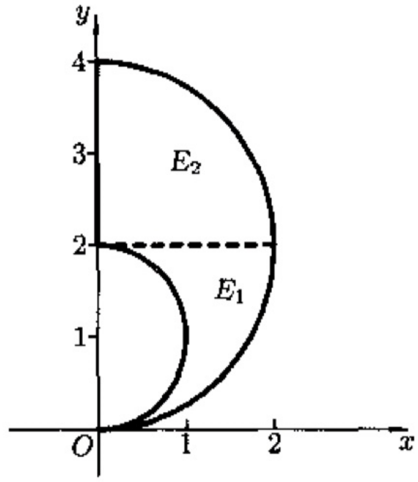

图 22.3

当 $f(x,y)$ 中含有 x^2+y^2 项或 D 的边界表达式中有 x^2+y^2 项, 则可利用

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{22.3}$$

先化为极坐标下的二重积分, 然后化为关于 r 和 θ 的二次积分去求解.

例题 22.2.9 求 $I=\iint\limits_{\Omega}(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Ω 是由 $y^2=2x$, $x+y=4$, $x+y=12$ 围成.

解 积分区域如图 22.6, 作变换

$$u=x+y,\quad v=y,$$

则变换后的积分区域为

$$4\leqslant u\leqslant 12,$$

$$-1-\sqrt{2u+1}\leqslant v\leqslant -1+\sqrt{2u+1},$$

且 $J=\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=1$. 于是

$$\begin{aligned}I&=\int_4^{12}u\,\mathrm{d}u\int_{-1-\sqrt{2u+1}}^{-1+\sqrt{2u+1}}\mathrm{d}v\\&=\int_4^{12}2u\sqrt{2u+1}\,\mathrm{d}u\quad(\sqrt{2u+1}=t)\\&=\int_3^5(t^2-1)t^2\,\mathrm{d}t=\frac{8\,156}{15}.\quad\square\end{aligned}$$

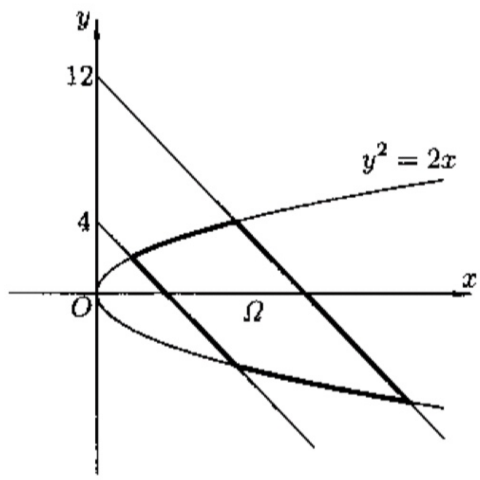

图 22.6