上周作业中的问题

① $f(x)$ 在 (a,b) 上可导，则 $f(x)\in C[a,b]$？ 反例 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上可导

② (1) $o(x^m)+o(x^n)=o(x^n)$ $(x\to 0)$ $m>n>0$

(2) $o(x^m)\,o(x^n)=o(x^{m+n})$ $(x\to 0)$ $m,n>0$. (3) $\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}=o(1)$ $(\Delta x\to 0)$

证(1) 令 $f(x)=o(x^m)$, $g(x)=o(x^n)$

则 $$\frac{f(x)+g(x)}{x^n}=\frac{f(x)}{x^m}\cdot\frac{x^m}{x^n}+\frac{g(x)}{x^n}\to 0\quad (x\to 0)$$

习题、四 第二题中

$$o(y_n-x_0)=o(y_n-x_n)$$

$$\frac{o(y_n-x_0)}{y_n-x_n}=\frac{o(y_n-x_0)}{y_n-x_0}\cdot\frac{y_n-x_0}{y_n-x_n}$$

由 $x_n<x_0<y_n$ 则 $0<\dfrac{y_n-x_0}{y_n-x_n}<1$

故 $$\frac{o(y_n-x_0)}{y_n-x_n}\to 0\quad (n\to\infty).$$

③ $f'_+(x_0)$ 表示函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的右导数

$f'(x_0+)$ 表示导函数 $f'(x)$ 在 x_0 处的右极限

例1： $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x^3, & x>1\\ x^2, & x\le 1\end{cases}$ $\quad f'(x)=\begin{cases}2x^2, & x>1\\ 2x, & x<1\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f'(x)=2$，而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\frac{2}{3}(1+\Delta x)^3-1}{\Delta x}$ 不存在.

例2： $g(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$ $\quad g'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\ (右导数)\end{cases}$

$$g'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{g(\Delta x)-g(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x^2\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=0$$

$g'(0+)$ 不存在.

定理：设函数 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\delta]$ 上连续，在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=A$ 存在，

则 $f'_+(x_0)$ 存在，且 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=A$.

证明：由中值定理，

$f(x_0+\delta)-f(x_0)=f'(\xi)\delta$ $\quad \xi\in(x_0,x_0+\delta)$

$$f'_+(x_0)=\lim_{\delta\to 0^+}\frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{\delta}=\lim_{\delta\to 0^+}f'(\xi)=\lim_{\xi\to x_0^+}f'(\xi)=A.$$

习题4.

34. 解：令 $T=f(l)=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ，$\Delta l=-0.01$

令 $f(l_0)=1$. 则 $l_0=\frac{g}{4\pi^2}$ ，$f'(l)=\frac{\pi}{\sqrt{lg}}$

$$f(l_0+\Delta l)-f(l_0)=f'(l_0)\Delta l+o(\Delta l)$$

故 $\Delta T\approx f'(l_0)\Delta L=\frac{\pi}{\sqrt{l_0 g}}\cdot(-0.01)=-0.01\cdot\frac{2\pi^2}{g}$

摆钟每天大约快 $0.01\times\frac{2\pi^2}{g}\times60\times60\times24$ 秒.

36. (3) $y=\frac{1+x}{\sqrt[3]{1-x}}=(1-x)^{-\frac{1}{3}}(1+x)$

$$y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left[(1-x)^{-\frac{1}{3}}\right]^{(n-k)}(1+x)^{(k)}$$

$$=\left[(1-x)^{-\frac{1}{3}}\right]^{(n)}(1+x)+n\left[(1-x)^{-\frac{1}{3}}\right]^{(n-1)} \qquad (*)$$

若令 $f(x)=(1-x)^{-\frac{1}{3}}$ 则 $f'(x)=-\frac{1}{3}(1-x)^{-\frac{4}{3}}(-1)=\frac{1}{3}(1-x)^{-\frac{4}{3}}$

$$f''(x)=\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)(1-x)^{-\frac{7}{3}}(-1)=\frac{4}{3^2}(1-x)^{-\frac{7}{3}}$$

$$f'''(x)=\frac{4}{3^2}\cdot\left(-\frac{7}{3}\right)(1-x)^{-\frac{10}{3}}\cdot(-1)=\frac{1\times4\times7}{3^3}(1-x)^{-\frac{10}{3}}$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x)=\frac{1\times4\times7\times\cdots\times(3n-2)}{3^n}(1-x)^{-\frac{1}{3}-n}$$

代入(*)式

$$y^{(n)}=\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)}{3^n}(1-x)^{-\frac{1}{3}-n}(1+x)+n\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-5)}{3^{n-1}}\cdot(1-x)^{-\frac{1}{3}-(n-1)}$$

39. (1) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 两端对x求导得.

$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0$ 解得 $y'=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

再对上式，两端对x求导得

$$-\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}+\left[-\frac{2}{9}y^{-\frac{4}{3}}(y')^2+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y''\right]=0$$

解得 $y''=\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}y^{-1}(y')^2=\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$

42. 证明：令 $g(x)=\sin(\ln|x|)$ ，$x\neq 0$

$$g'(x)=\cos(\ln|x|)\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\sin(\ln|x|+\frac{\pi}{2})$$

$$g''(x)=-\frac{1}{x^2}\sin(\ln|x|+\frac{\pi}{2})+\frac{1}{x}\cos(\ln|x|+\frac{\pi}{2})\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{x^2}[\sin(\ln|x|+2\cdot\frac{\pi}{2})-\sin(\ln|x|+\frac{\pi}{2})].$$

猜想，$g^{(m)}(x)=\frac{1}{x^m}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin(\ln|x|+k\cdot\frac{\pi}{2})$ 其中 $a_k(k=1,2,\dots,m)$ 为某些常数.

回到本题 当 $x\neq 0$ 时，对 $f(x)=x^n g(x)$ 运用莱布尼茨公式，有

对 $\forall m\geq 1$ ，$x\neq 0$

$$f^{(m)}(x)=\sum_{k=0}^{m}C_m^k(x^n)^{(m-k)}\cdot(g(x))^{(k)}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}C_m^k\cdot n(n-1)\cdots(n-m+k+1)\cdot x^{n-m+k}\cdot\frac{1}{x^k}\sum_{j=1}^{k}a_j\sin(\ln|x|+j\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$=\sum_{k=1}^{m}C_m^k n(n-1)\cdots(n-m+k+1)\cdot x^{n-m}\sum_{j=1}^{k}a_j\sin(\ln|x|+j\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$+n(n-1)\cdots(n-m+1)\cdot x^{n-m}g(x)$$

(1) 证明 $f^{(m)}(0)=0$ ，$m\leq n-1$

当 $m=1$ 时. $f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^n\sin(\ln|\Delta x|)}{\Delta x}=0$.

假设 $m=l$ 时. $f^{(l)}(0)=0$.

则当 $m=l+1$ 时. $f^{(l+1)}(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(l)}(\Delta x)-f^{(l)}(0)}{\Delta x}=\cancel{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sum_{k=1}^{m}C_m^k n(n-1)\cdots(n-m+k+1)\Delta x^{n-m}\sum_{j=1}^{k}a_j\sin(\ln|\Delta x|+j\frac{\pi}{2})+n(n-1)\cdots(n-m+1)\Delta x^{n-m}g(\Delta x)}{\Delta x}}$

$=0$.

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 有直到 $n-1$ 阶导数.

而 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(\Delta x)-f^{(n-1)}(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sum_{k=1}^{n-1}C_{n-1}^k n(n-1)\cdots(k+2)\Delta x\sum_{j=1}^{k}a_j\sin(\ln|\Delta x|+j\cdot\frac{\pi}{2})+n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot\Delta x\cdot g(\Delta x)}{\Delta x}$$

极限不存在.

于是 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有直到 $n-1$ 阶导数，但无 n 阶导数.

44. 要证 $f'(0)=m$，即证 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=m$.

由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=m$

则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x|<\delta$ 时，有

$$m-\varepsilon<\frac{f(2x)-f(x)}{x}<m+\varepsilon.$$

取 $x_k=\frac{x}{2^k}$，$k\in N$，则 $\left|\frac{x}{2^k}\right|<|x|<\delta$.

则 $$\frac{1}{2^k}(m-\varepsilon)<\frac{f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^k}\right)}{x}<\frac{1}{2^k}(m+\varepsilon)$$

将 $k=1,2,\cdots,n$ 式相加得

$$\left(1-\frac{1}{2^n}\right)(m-\varepsilon)<\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x}<\left(1-\frac{1}{2^n}\right)(m+\varepsilon) \quad (*)$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{2^n}=0$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则对 $(*)$ 式两端取 $n\to\infty$，有

$$m-\varepsilon\le\frac{f(x)-f(0)}{x}\le m+\varepsilon.$$

即 $$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}-m\right|\le\varepsilon.$$

于是 $f'(0)=m$.

45. $y=f(x)$ 是~~某区域~~某区间内三阶可导函数.

则 $x=f^{-1}(y)$

$$(f^{-1})^{(1)}(y)=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{f'(x)}$$

$$(f^{-1})^{(2)}(y)=\frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dy}=-\frac{1}{f'(x)^2}f''(x)\frac{dx}{dy}=-\frac{f''(x)}{f'(x)^2}\cdot\frac{1}{f'(x)}$$

$$(f^{-1})^{(3)}(y)=\frac{d^3x}{dy^3}=-\frac{f'''(x)\frac{dx}{dy}[f'(x)]^2-2f''(x)f'(x)f''(x)\frac{dx}{dy}}{[f'(x)]^4}\frac{1}{f'(x)}$$

$$-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\frac{1}{[f'(x)]^2}f''(x)\cdot\frac{dx}{dy}$$

$$=-\frac{f'''(x)}{[f'(x)]^4}+\frac{3[f''(x)]^2}{[f'(x)]^5}.$$

高阶导数与Leibniz公式

a. 先拆项再求导：拆项之后，变成易于求高阶导数的基本形式之和.

$(x^n, e^x, \ln x, \sin x, \cos x)$.

例： $y = \sin ax \sin bx$

$$y = \sin ax \sin bx = \frac{\cos(a-b)x - \cos(a+b)x}{2}$$

b. 直接使用Leibniz公式：写成两项相乘

例：设 f_1, f_2 在 x_0 及其附近有定义，在 x_0 有直到 n 阶导数. 记 $N(f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} |f^{(k)}(x_0)|$.

试证明 $N(f_1 f_2) \le N(f_1) N(f_2)$

证明： $N(f_1 f_2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} |(f_1 f_2)^{(k)}(x_0)|$

$$\le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} C_k^j |f_1^{(j)}(x_0)| |f_2^{(k-j)}(x_0)|$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!(k-j)!} |f_1^{(j)}(x_0)| |f_2^{(k-j)}(x_0)|$$

$$\le \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} |f_1^{(j)}(x_0)| \left| \sum_{k-j=0}^{n} \right| \frac{1}{(k-j)!} f_2^{(k-j)}(x_0)| \qquad \text{(常用技巧)}$$

$$= N(f_1) N(f_2).$$

C. 数学归纳法：总结规律，加以证明.

例 证明 $\left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}}$.

d. 用递推公式求导.

证明Legendre多项式 $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \{(x^2-1)^n\}^{(n)} \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$

满足方程 $(1-x^2) P_n''(x) - 2x P_n'(x) + n(n+1) P_n(x) = 0 \qquad (*)$

证明：令 $u = (x^2-1)^n$.

得 $(x^2-1) u' = 2nxu$

两端同时对 x 求 $n+1$ 阶导数

$$C_{n+1}^0 (x^2-1) u^{(n+2)} + C_{n+1}^1 (2x) \cdot u^{(n+1)} + C_{n+1}^2 (2) u^{(n)} = 2n\{C_{n+1}^0 x \cdot u^{(n+1)} + C_{n+1}^1 u^{(n)}\}$$

整理得 $(x^2-1) \cdot 2^n n! P_n''(x) + (n+1)(2x) 2^n n! P_n'(x) + \frac{(n+1)n}{2} (2) 2^n n! P_n(x)$

$= 2nx 2^n n! P_n'(x) + 2n(n+1) \cdot 2^n n! P_n(x) \Rightarrow (*)$式成立