7.5节　　3月21日.

定积分中值定理

1. 阿贝尔变换（分部求和）（可以看作分部积分的离散版本）

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 为两组数，令 $B_k = \sum_{i=1}^{k} \beta_i$ $(k=1,2,\dots,n)$

$\Delta \alpha_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$

则 $\sum_{i=1}^{n} B_i \Delta a_i = -\sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) B_i = \alpha_n B_n - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$

$= \alpha_n B_n - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (B_i - B_{i-1})$

$= \alpha_n B_n - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta B_i$

2、积分第一中值定理 $\Rightarrow$ Taylor展开：积分余项

积分第二中值定理.　　关键在于如何构造满足定理条件的 $f(x)$, $g(x)$.

注：记号：$C^k([a,b])$：称 $f \in C^k([a,b])$，若 f 直到 k 阶导数都是连续的，也称 k 次连续可微.

课后习题

31. 证明：(1) 对任意固定的 $x>0$，由积分第一中值定理，$\exists\, \xi_x$ s.t.

$$\int_0^x e^{t^2} dt = e^{\xi_x^2} \cdot x$$

(2) 令 $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$，由Lagrange微分中值定理，$\exists\, \xi_x$ s.t.

$$\frac{F(x) - F(0)}{x-0} = F'(\xi_x) = e^{\xi_x^2}$$

即 $\int_0^x e^{t^2} dt = x e^{\xi_x^2}$

唯一性易证（反证法）

则 $\xi_x^2 = \ln \dfrac{\int_0^x e^{t^2} dt}{x}$

$$\frac{\xi_x^2}{x^2} = \frac{\ln \int_0^x e^{t^2} dt - \ln x}{x^2} = \frac{\ln \int_0^x e^{t^2} dt}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}$$

① $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$

② $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln \int_0^x e^{t^2} dt}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{2x \int_0^x e^{t^2} dt} = \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{4+2x^2}{2+2x^2} = 1$

34. (1) 证明：令 $g(x)=f(x)-f(\pi)$

则 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上 ↓，故 $g(x)\geq 0$

由定积分第二中值定理.得. $\exists\,\xi\in[-\pi,\pi]$. s.t.

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin 2nx\,dx = g(-\pi)\int_{-\pi}^{\xi}\sin 2nx\,dx$$

即 $$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin 2nx\,dx = f(\pi)\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2nx\,dx + g(-\pi)\int_{-\pi}^{\xi}\sin 2nx\,dx$$

$$= f(\pi)\cdot\left.\frac{-\cos 2nx}{2n}\right|_{-\pi}^{\pi} + g(-\pi)\left.\frac{-\cos 2nx}{2n}\right|_{-\pi}^{\xi}$$

$$= g(-\pi)\cdot\frac{1-\cos 2n\xi}{2n}\geq 0$$

35. 证明：$|f(x)|\leq M$.

$$\left(\int_a^b f^n(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\int_a^b M^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}} = M\cdot(b-a)^{\frac{1}{n}} \to M \quad (n\to\infty)$$

假设存在 $x_0\in[a,b]$. s.t. $f(x_0)=M$.

则对 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists$ x_0 的小邻域 $[x_1,x_2]$ s.t. $f(x)\geq M-\varepsilon$，当 $x\in[x_1,x_2]$

于是 $$\left(\int_a^b f^n(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\int_a^b (M-\varepsilon)^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}} = (M-\varepsilon)\,(b-a)^{\frac{1}{n}} \to M-\varepsilon \quad (n\to\infty)$$

于是.对 $\forall\,\varepsilon>0$，有

$$M-\varepsilon \leq \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}} \leq M$$

由 ε 的任意性. $$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}} = M.$$

36. 证明：由第一中值定理，$\exists\,\xi_1\in(0,\frac{1}{2})$. s.t.

$$f(1)=2\cdot e^{1-\xi_1}f(\xi_1)\,\frac{1}{2} = e^{1-\xi_1}f(\xi_1)$$

令 $F(x)=e^{1-x}f(x)$

则 $F(1)=F(\xi_1)$. 于是 $\exists\,\xi\in(\xi_1,1)$ s.t.

$\cancel{f'(\xi)=0}$ $F'(\xi)=0$

即 $\left.-e^{1-x}f(x)+e^{1-x}f'(x)\right|_{x=\xi}=0$

即 $e^{1-\xi}(f'(\xi)-f(\xi))=0 \Rightarrow f'(\xi)=f(\xi)$.

($f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，

$f(1)=4\int_0^{\frac{1}{4}} e^{1-x^3}f(x)\,dx$

则 $\exists\,\xi\in(0,1)$. s.t

$f'(\xi)=3\xi^2f(\xi)$)

37. 证明：由积分第二中值定理，存在 $\xi\in[a,b]$. s.t.

$$\int_a^b f(x)g(\lambda x)dx = f(a)\int_a^{\xi} g(\lambda x)dx + f(b)\int_{\xi}^b g(\lambda x)dx$$

令 $\lambda x=y$.

则 $$\int_a^{\xi} g(\lambda x)dx=\frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda\xi} g(y)\,dy$$

$$\int_{\xi}^b g(\lambda x)dx=\frac{1}{\lambda}\int_{\lambda\xi}^{\lambda b} g(y)\,dy.$$

由课本 (P313) Riemann 引理. 或者上节课证明的结论.

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^{\xi} g(\lambda x)dx=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda\xi} g(y)dy$$

$$=\lim_{\lambda\to+\infty}\xi\frac{1}{\lambda\xi}\int_0^{\lambda\xi} g(y)dy-\lim_{\lambda\to+\infty}a\frac{1}{\lambda a}\int_0^{\lambda a} g(y)dy.$$

$$=\xi\cdot\frac{1}{T}\int_0^T g(y)dy-a\,\frac{1}{T}\int_0^T g(y)dy.$$

$$=(\xi-a)\,\frac{1}{T}\int_0^T g(y)dy=0$$

同理 $$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{\xi}^b g(\lambda x)dx=0$$

得 $$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\,g(\lambda x)\,dx=0$$

---

3. 设对每个 $n\in N_+$, $f_n(x)\in C[0,1]$ 且有 $\int_0^1 f_n^2(x)dx=1$ 证明. $\exists N$ 和 $c_i\ (i=1,2,\dots,N)$

s.t. $\sum_{i=1}^{N} c_n^2=1$, $\max_{x\in[0,1]}\left|\sum_{i=1}^{N} c_n f_n(x)\right|>100$

证: $$\int_0^1 (f_1^2(x)+\dots+f_N^2(x))\,dx=N$$

$\exists\xi$. s.t. $f_1^2(\xi)+\dots+f_N^2(\xi)=N$. 令 $v=(f_1(\xi),\dots f_N(\xi))$ $|v|^2=N$

$$c=\frac{v}{\sqrt N}.$$

则 $$\sum_{i=1}^{N} c_n^2=\sum_{i=1}^{N}\frac{f_n^2(\xi)}{N}=1$$

$$\sum_{i=1}^{N} c_n f_n(\xi)=\sum_{i=1}^{N}\frac{f_n^2(\xi)}{\sqrt N}=\sqrt N>100$$ 取 $N=100^2+1$ 即可.

补充题：

1. 设 $f\in C[a,b]$，且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负严格递增，若有 $f^p(\xi_p)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f^p(x)dx$

其中 $p>0$，$a<\xi_p<b$，试求 $\lim\limits_{p\to+\infty}\xi_p$.

解：令 $0<\varepsilon<\frac{b-a}{2}$，则由 $f(b-\varepsilon)>f(b-2\varepsilon)$ 可知，存在 $P\in N$. s.t.

$$\left(\frac{f(b-\varepsilon)}{f(b-2\varepsilon)}\right)^p>\frac{b-a}{\varepsilon}\qquad(p>P)$$

$$f^p(b-\varepsilon)>(b-a)\cdot f^p(b-2\varepsilon)/\varepsilon\qquad(p>P)$$

由 $\int_a^b f^p(x)dx>\int_{b-\varepsilon}^b f^p(b-\varepsilon)dx$，所以我们有

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f^p(x)dx>\frac{1}{b-a}\int_{b-\varepsilon}^b f^p(b-\varepsilon)dx$$
$$>\frac{1}{b-a}\cdot\varepsilon f^p(b-\varepsilon)>f^p(b-2\varepsilon)\qquad(p>P)$$

从而知，$\xi_p>b-2\varepsilon$. 提 $\xi_p\to b$ $(p\to+\infty)$

（或许将题目换成 证明 $\lim\limits_{p\to+\infty}\xi_p=b$ 更容易想）

2. 设 $f\in C[0,2\pi]$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f(x)|\sin nx|dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx$.

证：
$$\int_0^{2\pi}f(x)|\sin nx|dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{2(k-1)\pi}{n}}^{\frac{2k\pi}{n}}f(x)|\sin nx|dx$$
$$=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\cdot\int_{\frac{2(k-1)\pi}{n}}^{\frac{2k\pi}{n}}|\sin nx|dx$$

其中 $\xi_k\in\left(\frac{2(k-1)\pi}{n},\frac{2k\pi}{n}\right)$，$k=1,2,\dots n$

$$\int_{\frac{2(k-1)\pi}{n}}^{\frac{2k\pi}{n}}|\sin nx|dx=\frac{4}{n}$$

则 $\int_0^{2\pi}f(x)|\sin nx|dx=\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)=\frac{2}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\cdot\frac{2\pi}{n}\right)$

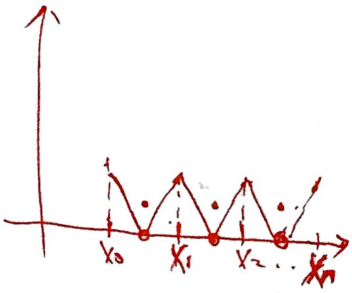
$$\to\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx\qquad(n\to\infty)$$

上次习题 + 集中作业问题.

15.

①错误做法 (1)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda(\Delta)\to 0} S(\Delta) \geq S(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i > 0 \quad ??$$



(2) $\exists \xi \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a) > 0$$

② 正确做法：

$\exists\ x_0 \in [a,b]$ 是连续点.

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ \delta > 0$，当 $|x-x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$

取 ε 满足 $f(x_0) - \varepsilon > 0$，δ，$(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset [a,b]$

则 $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} (f(x_0)-\varepsilon)\,dx = (f(x_0)-\varepsilon)\cdot 2\delta > 0.$

25. (2)

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\int_0^x (\sin t)^\alpha dt}{x^{1+\alpha}} \quad (\alpha > 0)$$