17. 证明：

$$a_{n+1}-a_n \geq \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-a_n}-a_n=\frac{1-4(1-a_n)a_n}{4(1-a_n)}=\frac{(2a_n-1)^2}{4(1-a_n)}\geq 0$$

从而 $\{a_n\}$ 是单调上升的

又 $0<a_n<1$，$\forall n\in\mathbb{N}$

则由单调收敛原理，有可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，记为 a

则 $(1-a)a\geq\frac{1}{4}$

即 $(a-\frac{1}{2})^2\leq 0 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$.

19. $b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)\geq\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a_nb_n}=\sqrt{a_nb_n}=a_{n+1}$.

故 $a_n\leq b_n$. $\forall n\in\mathbb{N}$. 成立

$a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}\geq\sqrt{a_n^2}=a_n$.

$b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)\leq b_n$

从而 $\{a_n\}$ 单调递增，$\{b_n\}$ 单调递减，则 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 極限~~存在~~

令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$

于是 $a=\sqrt{ab}$，$b=\frac{1}{2}(a+b) \Rightarrow a=b$.

20 (3).

由于 $(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}=(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n})$

则 $(1+\frac{1}{n})^n>\dfrac{e}{1+\frac{1}{n}}$

$$(1+\frac{1}{n})^{n^2}=\left[(1+\frac{1}{n})^n\right]^n>\frac{e^n}{(1+\frac{1}{n})^n}>e^{n-1}$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}=+\infty$　　（误区）$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}e^n=+\infty$.

21. 证明：由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$.

则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $k>N$ 时 有 $\left|\dfrac{a_k-a_{k-1}}{b_k-b_{k-1}}-A\right|<\varepsilon$

即 $(A-\varepsilon)(b_k-b_{k-1})<a_k-a_{k-1}<(A+\varepsilon)(b_k-b_{k-1})$　令 $k=N+1, N+2, \ldots, n$. ~~并相加得~~

$(A-\varepsilon)(b_n-b_N)<a_n-a_N<(A+\varepsilon)(b_n-b_N)$

$\cancel{\dfrac{a_n-a_N}{b_n-b_N}}$　　$\Rightarrow\left|\dfrac{a_n-a_N}{b_n-b_N}-A\right|<\varepsilon$　$(n>N)$

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-A\right| = \left|\left(1-\frac{b_N}{b_n}\right)\frac{a_n-a_N}{b_n-b_N} + \frac{a_N}{b_n}-A\right|$$

$$= \left|\left(1-\frac{b_N}{b_n}\right)\left(\frac{a_n-a_N}{b_n-b_N}-A\right) + \left(1-\frac{b_N}{b_n}\right)A + \frac{a_N}{b_n}-A\right|$$

$$= \left|\left(1-\frac{b_N}{b_n}\right)\left(\frac{a_n-a_N}{b_n-b_N}-A\right) + \frac{a_N-b_NA}{b_n}\right|$$

由 $b_n \to +\infty\ (n\to\infty)$

从而 $\exists N'$，当 $n>N'$ 时.

有 $\left|1-\frac{b_N}{b_n}\right| < 2$ ，$\left|\frac{a_N-b_NA}{b_n}\right| < \varepsilon$

取 $N''=\max\{N, N'\}$

则当 $n>N''$ 时，有

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-A\right| < 3\varepsilon \quad 即 \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$$

22. (1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n+1)-\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

由 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ 故 极限为 1.

(2)

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1+\sqrt{\frac{n}{n+1}} \to 2.$$

(3)

$$\frac{(2n+1)^2}{(n+1)^3-n^3} = \frac{4n^2+4n+1}{(n+1)^2+n^2+n(n+1)} \to \frac{4}{3}.$$

29. 证：由 $\{a_n\}\subset[a,b]$ 则 $\{a_n\}$ 是有界数列. 则 $\{a_n\}$ 必有收敛子列 $\{a_{n_k}\}$

记 $\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=C$.

由 $\{a_n\}$ 发散. 则 $\{a_n\}$ 不以 C 为极限

从而 $\exists\varepsilon_0>0$ 使得 $[C-\varepsilon_0, C+\varepsilon_0]$ ~~中没有有限个~~ 区间外有无穷个 $\{a_n\}$ 中的点.

记区间外这无穷个点组成的序列为 $\{b_n\}$

则 $\{b_n\}$ 也是有界序列. 且有收敛的子列 不以 C 为极限.

例1. 用单调有界数列的收敛定理，证明 $\left\{\frac{n^5}{2^n}\right\}$ 收敛，并求其极限.

证：令 $a_n=\frac{n^5}{2^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)^5}{2^{n+1}}}{\frac{n^5}{2^n}}=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^5$$

由于 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^5\to 1\ (n\to\infty)$，则 $\exists N$，当 $n>N$ 时 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^5<2$

于是 $a_{n+1}<a_n$ 从某个 N 开始.

又 $a_n>0$，则由单调有收敛原理可知，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 存在.

$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5a_n\Rightarrow a=\frac{1}{2}a\Rightarrow a=0$

例2. 研究 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 是否单调，并求出极限.

证：记 $a_n=\sqrt[n]{n}$.

$a_1=1$，$a_2=\sqrt{2}\approx1.41$，$a_3=\sqrt[3]{3}\approx1.44$，$a_4=\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}\approx1.41$，$a_5=\sqrt[5]{5}\approx1.38$.

$a_6=\sqrt[6]{6}\approx1.35$，……

有可能从第三项开始单调递减.

即 $a_{n+1}=\sqrt[n+1]{n+1}<a_n=\sqrt[n]{n}$　　$n\geq3$

即 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<n$

由于 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$，则当 $n\geq3$ 时　有 $n>e>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

故 $\{a_n\}$ 从第三项之后开始递减.

又 $a_n\geq1$，则由单调收敛定理知，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在. 记 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\geq1$.

若 $a>1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1+h$，$h>0$

则 $\sqrt[n]{n}>1+h$.　　$n>(1+h)^n>\frac{n(n-1)}{2}h^2$　不成立.

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

例3. 设对于 $\{a_n\}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=c<1$，则 $\{a_n\}$ 是无穷小量.

证：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|-c\right|<\varepsilon.\quad 即\ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<c+\varepsilon$$

取 $\varepsilon=\frac{1-c}{2}$，则 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<c+\frac{1-c}{2}=\frac{1+c}{2}<1$. 因此 $\{|a_n|\}$ 从 N ~~之后~~ 开始单调递减.

又 $|a_n|>0$ 则由单调收敛原理，可知 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|$ 存在，记为 a.

则 $0\le a \le a\left(\frac{1+c}{2}\right)$

若 $\frac{1+c}{2}<1$. 则 $a=0$ 于是 $a_n\to 0\ (n\to\infty)$.

当然也可以利用 $|a_{n+1}|<\frac{1+c}{2}|a_n|$ 这个式子进行递推

例4. $a_n=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$, $n\in\mathbb{N}_+$. 证明 $\{a_n\}$ 收敛

$$a_{n+1}-a_n=\left(\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2(n+1)}\right)-\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}>2\cdot\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=0$$

$a_n\nearrow$ 且 $a_n<\frac{n}{n+1}<1$. 故 $\{a_n\}$ 收敛. (利用欧拉常数求其极限)

例5. 数列 $\{b_n\}$ 由 $b_1=1$ 和 $b_{n+1}=4\frac{1}{b_n}$ 生成. 讨论 $\{b_n\}$ 的敛散性. 若收敛求出其极限. (课本52页)

(1) $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$

(2) $\varepsilon_n=e-(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!})$

$\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n(n+1)!=1$

$\frac{1}{(n+1)!}<\varepsilon_n<\frac{1}{n!\,n}$

(3) e 是无理数.

(4) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$