例2.2.4

3. (5) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 q^n = 0 \quad (|q|<1)$

这里只考虑 $0<q<1$ 即可　令 $\frac{1}{q}=1+a \quad (a>0)$

则 $n^3 q^n = \dfrac{n^3}{(1+a)^n} \le \dfrac{n^3}{C_n^4 a^4} \to 0 \quad (n\to\infty)$

5. 证明：不妨设 $a=0$，否则令 $b_n = a_n - a$ 即可

由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，则对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N_1 \in \mathbb{N}$，s.t. 当 $n \ge N_1$ 时，$|a_n|<\varepsilon$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_n}{P_1+P_2+\cdots+P_n} = 0$，则对上面的 $\varepsilon>0$，$\exists N_2 \in \mathbb{N}$，s.t. 当 $n>N_2$ 时，$\left|\dfrac{P_n}{P_1+P_2+\cdots+P_n}\right| < \varepsilon$

则对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N = N_1+N_2-1$，当 $n>N$ 时，令 $M=\max\{a_1, a_2, \ldots, a_{N_1}\}$

$$\left|\frac{P_1 a_n + P_2 a_{n-1} + \cdots + P_n a_1}{P_1+P_2+\cdots+P_n}\right| = \frac{|P_1 a_n + \cdots + P_{n-N_1} a_{N_1+1} + P_{n-N_1+1} a_{N_1} + \cdots + P_n a_1|}{P_1+P_2+\cdots+P_n}$$

$$\le \frac{(P_1+\cdots+P_{n-N_1})\varepsilon}{P_1+P_2+\cdots+P_n} + \frac{M(P_{n-N_1+1}+\cdots+P_n)}{P_1+P_2+\cdots+P_n}$$

$$< \varepsilon + M\left(\frac{P_{n-N_1+1}}{P_1+P_2+\cdots+P_{n-N_1+1}} + \cdots + \frac{P_n}{P_1+P_2+\cdots+P_n}\right) < (MN_1+1)\varepsilon$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_1 a_n + P_2 a_{n-1} + \cdots + P_n a_1}{P_1+P_2+\cdots+P_n} = 0$　证毕.

6. (3) $F_n \ge n \quad (n\ge 2)$

14. (1) $x_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$

$$x_n^2 = \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2n-1)^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n)^2} = \frac{(1\times3)\cdot(3\times5)\cdot(5\times7)\cdots(2n-3)\times(2n-1)\cdot(2n-1)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n-2)^2\cdot(2n)^2}$$

由于 $(2n-1)(2n+1) = 4n^2-1 < (2n)^2$

则 $x_n^2 < \dfrac{2n-1}{4n^2} \to 0$

则 $x_n \to 0 \quad (n\to\infty)$

(2) $x_n=\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}} \le (2n+2)\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2}} = 2+\frac{2}{n}$

$x_n=\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}} \ge (2n+2)\cdot\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = 2$

即 $2 \le x_n \le 2+\frac{2}{n}$ 　又 $\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{2}{n})=2$

由夹逼定理得. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$

(3) 考虑 $n\ge2$ 时.

$n\ln n \ge 1$ ，则 $\sqrt[n]{n\ln n}\ge1$

$\sqrt[n]{n\ln n} \le \sqrt[n]{n^2} = (n^2)^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n}}\cdot n^{\frac{1}{n}} \to 1 \ (n\to\infty)$

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$

15.
(1) 若 x_n+y_n 收敛，又 x_n 收敛，则 $-x_n$ 收敛

那么 $x_n+y_n+(-x_n)=y_n$ 收敛. 与 $\{y_n\}$ 发散矛盾.

从而 $\{x_n+y_n\}$ 必发散

(2) $x_n=\frac{1}{n}$ ，$y_n=n$ 　$x_ny_n=1$ 收敛

(3) $x_n=(-1)^n n$ ，$y_n=(-1)^{n+1}n$. 则 $x_n+y_n=0$ 收敛.

$x_n=(-1)^n$ ，$y_n=(-1)^n$ 　$x_ny_n=1$ 收敛

(4) $x_n=\frac{1}{n^2}$ ，$y_n=n$ 　则 $x_ny_n=\frac{1}{n}\to0\ (n\to\infty)$