数学分析习题课 3

2017.10.09

1 单调收敛原理

我们在前两节学习的是序列收敛的定义，序列的极限性质以及利用定义去求序列极限。然而根据定义求极限的方法太过于基本，很多情况下我们并不能猜出极限是什么。另外，夹逼定理是进行不等式放缩，转化为方便求极限的序列，本质上也是按照定义进行求解的。所以，为了适应更多的不同表现形式的序列，我们需要建立一些理论结果，这就是我们今天要学习的单调收敛原理。

其实，这种由基本定义扩展到理论结果的想法在很多方面都有应用，例如积分。这里稍微说一下积分的想法。

定理 1 *(单调收敛原理) 单调有界序列必收敛.*

(1) 单调序列可以是单调递减或单调递增，可以从某一项之后开始单调。

(2) 若 $\{x_n\}$ 单调上升无上界，则 $\lim_{n\to\infty} = +\infty$. 称为广义收敛。

(3) 只有在验证了单调收敛原理的条件满足之后，才可以在序列的递推式中取极限。

单调收敛定义的两个应用实例：无理数 e 和欧拉常数 c

1. $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \approx 2.718$.

2. $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} - lnn) = c \approx 0.577$.

2 实数系连续性的基本定理

2.1 闭区间套定理

定理 2 *(闭区间套定理) 设 $\{[a_n,b_n]\}$ 是一列闭区间，并满足：*
(1) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n], n=1,2,\cdots$;
(2) $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$,
则存在唯一的一点 $c\in\mathbb{R}$, 使得 $c\in[a_n,b_n], n=1,2,\cdots$.

注：

(1) 闭区间的条件是必要的；

(2) 若改为开区间，则将条件 (1) 改为 $a_n<a_{n+1}<b_{n+1}<b_n, n=1,2,\cdots$ 仍然是对的。

2.2 有限覆盖定理

掌握覆盖，开覆盖和有限覆盖的定义。

定理 3 *(有限覆盖定理) 设 $[a,b]$ 是一个闭区间，$\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $[a,b]$ 的任意一个开覆盖，则必存在 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的一个子集构成的 $[a,b]$ 的一个有限覆盖。*

注：

(1) 不能将闭区间改为开区间，例如 $(\frac{1}{n},\frac{2}{n})$ 是 $(0,1)$ 的一个开覆盖，但没有有限覆盖。

(2) 例 2.4.3 证明 [0,1] 区间中的实数构成一个不可数集。

2.3 聚点原理

定义 1 *设 E 是 $\mathbb{R}$ 的一个子集。若 $x_0\in\mathbb{R}(x_0$ 不一定属于 $E)$ 满足：对任意的 $\delta>0$, 有 $U_0(x_0,\delta)\cap E\neq\emptyset$, 则称 x_0 是 E 的一个聚点。*

注：

(1) x_0 是 E 的聚点，但不一定属于 E，也可能是边界点；

(2) 任意去心邻域中至少有 E 中的一个点，也就意味着会有无数的点；

(3) 可以找到 E 中一个以 x_0 为极限的序列；

(4) 了解孤立点的概念。是 E 中的点，但不是聚点。

定理 4 *(聚点原理)*$\mathbb{R}$ *中任何一个有界无穷子集至少有一个聚点.*

定理 5 *(波尔查诺-威尔斯特拉斯定理) 任何有界序列必有收敛的子列。*

3 柯西收敛准则

(1) 柯西序列的定义；

(2) 柯西序列与收敛性等价；

(3) 完备性概念；有理数域不完备举例，见确界原理给出的例子。

4 习题

例 2.3.3，2.3.4，2.4.10 和 e，欧拉常数的推导过程。
习题 2：16,18(2),20,27(1)(2)(4),29