数学分析

2008-2009 学年第二学期

1（15 分）求周期为 2π 的函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, -\pi<x\le 0,\\ x+\sin x, 0<x\le\pi\end{cases}$

的 Fourier 级数并讨论它的收敛性。

2（15 分）试求函数列 $f_n(x)=x(1-x)^n (n=1,2,\ldots)$ 的极限函数，并讨论该函数列在[0,1]上是否一致收敛。

3（15 分）试求函数 $f(x)=\ln^2(1+x)$ 在 $x=0$ 附近的 Taylor 展式，并讨论级数的收敛半径和收敛区域。

4（15 分）设 $u_n(x)(n=1,2,\ldots)$ 在[0,1]上连续，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在(0,1)上一致收敛。证明 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 也在[0,1]上一致收敛。

5（15 分）设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，在一个周期上黎曼可积，$\left|\frac{f(x)}{x}\right|<1(x\ne 0)$，证明

$f(x)$ 的 Fourier 级数在 $(x=0)$ 处收敛到 0。

6（15 分）设 $u_n(x)(n=1,2,\ldots)$ 在[0,1]上非负、连续，且 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在[0,1]收敛到 $U(x)$，证明

$U(x)$ 在[0,1]上能取到最小值。

7（10 分）考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n!\pi x)$ 证明

（1） 在任何区间(a,b)内都内存在收敛点

（2） 存在无理点 x 使得级数收敛

（3） 在任何区间(a,b)内都内存在无理点使得级数发散

整理 by defrost