7.3、7.4

1. 积分的性质（可积的意义之上）

① 线性性质

② 凸函数性质：（例绝对值）

假设 φ 是凸函数，即对所有的 $\lambda\in(0,1)$ $\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y)\geq\varphi(\lambda x+(1-\lambda)y)$

f 和 $\varphi(f)$ 都是可积的，则 $\varphi\left(\frac{\int_a^b f\,dx}{b-a}\right)\leq\frac{\int_a^b\varphi(f)\,dx}{b-a}$

证明：将区间 $[a,b]$ 划分为 n 等份，$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$

在 $[x_{i-1},x_i]$ 上，取端点 $f_i=f(x_i)$

于是 $\frac{\int_a^b f\,dx}{b-a}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}f_i\frac{1}{n}(b-a)}{b-a}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f_i}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}$

于是由凸函数性质

$$\varphi\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}}\right)\leq\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\varphi(f_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\varphi(f_i)$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}}\right)\leq\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\varphi(f_i)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}\varphi(f_i)}{b-a}=\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(f)\,dx$

即 $\varphi\left(\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(f)\,dx$

③ 保序性、分段积分 → 例 $\int_0^{8\pi}|\sin x|\,dx$ 分段求积分

④ 例7.3.1 函数逼近 → (习题1)

⑤ 例7.3.2 证明方法

2. 积分计算

① 存在原函数不一定可积、 $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$

② 可积一定存在原函数吗？ 导函数无第一类间断点 $f(x)=\begin{cases}0, & [0,\frac{1}{2})\\ 1, & [\frac{1}{2},1]\end{cases}$

③ 变动上限积分求导、极限

$$\frac{d}{dx}\left(\int_x^{x^2}e^{-t}\,dt\right)\qquad\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t\,dt}{x^4}$$

④ 积分计算，换元法分部积分法，注意"部"经常被写"步"。

⑤ 距离空间

① 非负性 $d(x,y)\geq 0$, $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$.

② 对称性.

③ 三角不等式

习题.

1. (若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $g(x)$ 以 T 为周期, 在 $[0,T]$ 上可积, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\,g(nx)\,dx=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx\int_a^b f(x)dx\ ).$$

特殊地: 设 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx=0$

(1) f 为常数 c, 则 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{c}{\lambda}(\cos\lambda a-\cos\lambda b)=0$

(2) 一般地, 有. $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 阶梯函数 g s.t.

$$\int_a^b |f-g|dx<\frac{\varepsilon}{2}$$

由 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b g(x)\sin\lambda x\,dx=0$

则 λ 充分大时. $\left|\int_a^b g(x)\sin\lambda x\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}$

得 $\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx\right|\leq\left|\int_a^b (f(x)-g(x))\sin\lambda x\,dx\right|+\left|\int_a^b g(x)\sin\lambda x\,dx\right|$

$<\varepsilon$.

故 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx=0$ (学会运用典型方法)

2. 设 $f\in\mathbb{R}[A,B]$, $a,b\in(A,B)$ 是 f 的两个连续点. 证明:

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx=f(b)-f(a).$$

证 $(*)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^b f(x+h)dx-\int_a^b f(x)dx\right)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{a+h}^{b+h}f(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right)$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_b^{b+h}f(x)dx-\int_a^{a+h}f(x)dx\right)$

$=f(b)-f(a)$. (直接把极限号和积分号交换是错误的)

3. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，且$\int_a^b f(x)dx=0$，$\int_a^b xf(x)=0$，证明至少存在两点

$x_1, x_2 \in (a,b)$，s.t $f(x_1)=f(x_2)=0$

证明：(i) 若没有零点，不妨设 $f(x)>0$，与 $\int_a^b f(x)dx=0$ 矛盾.

(ii) 若只有一个零点，不妨设为 x_0

令 $g(x)=(x-x_0)f(x)$

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b xf(x)dx - x_0\int_a^b f(x)dx = 0$$

而 $g(x) \geq 0$ 或者 ≤ 0.

于是 $f(x)$ 必存在零点异于 x_0.

从而至少有两个零点

(一般地). $f \in C[a,b]$，$\int_a^b x^k f(x)dx=0$. $(k=0,1,\cdots,n)$ 在(a,b)内至少 $n+1$ 个不同零点，

引入辅助函数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$，参考. 课本 P316. 例 10.3.3.

4. 设 $F(x)=\int_0^x \sin\frac{1}{t}\,dt$，求 $F'(0)$

$F(0)=0$

$$F(x)= \int_0^x t^2\, d\cos\frac{1}{t} = t^2\cos\frac{1}{t}\Big|_0^x - \int_0^x \left(\cos\frac{1}{t}\right)2t\,dt$$

$$= x^2\cos\frac{1}{x} - \int_0^x 2t\cos\frac{1}{t}\,dt$$

$$F'(0)= \lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(x\cos\frac{1}{x} - \frac{\int_0^x 2t\cos\frac{1}{t}dt}{x}\right)$$

$= 0$.

5. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，并且 $f(x)\in R[0,2\pi]$，证明：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

证明：不妨设 $f(x)\geq 0$，否则由 $|f(x)|\leq M$，以 $M-f(x)$ 代替 $f(x)$ 即可。

（抽象一下：f 周期为 $T>0$，$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$）.

对任给的 $x>0$，$\exists n$，使得 $nT\leq x<(n+1)T$.

① $\int_0^{nT} f(t)dt=\int_0^T f(t)dt+\int_T^{2T} f(t)dt+\cdots+\int_{(n-1)T}^{nT} f(t)dt=n\int_0^T f(t)dt$

则 $\int_0^T f(t)dt=\frac{1}{n}\int_0^{nT} f(t)dt\leq\frac{1}{n}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\cdot\frac{x}{n}$

$\leq\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\ \frac{n+1}{n}\cdot T$

故 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\geq\frac{n}{n+1}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$

② $\int_0^{(n+1)T} f(t)dt=(n+1)\int_0^T f(t)dt$

$\int_0^T f(t)dt=\frac{1}{n+1}\int_0^{(n+1)T} f(t)dt\geq\frac{1}{n+1}\int_0^x f(t)dt=\frac{x}{n+1}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$

$\geq\frac{n}{n+1}T\cdot\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$

故 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\leq\frac{n+1}{n}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$

$\therefore x\to\infty$ 则 $n\to\infty$，得证.

6. 设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且在任何有限~~区域~~闭区间可积。证明对任何的闭区间 $[a,b]$，有

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\,dx=0$$

证明：只要证对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|h|<\delta$ 时，有 $\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx<\varepsilon$

由于函数 f 的可积性，$\exists$ 分割 P，使得 $\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{6}$

$\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x+h)-f(x)|dx$

对任一区间 $[x_{i-1},x_i]$，$i=1,2,\cdots,n$

$x\in[x_{i-1},x_i]$，$x+h$（当 h 小于分割的最小区间长度时）.

$h>0$，$x+h\in[x_{i-1},x_{i+1}]$，则 $|f(x+h)-f(x)|\leq|f(x+h)-f(x_i)|+|f(x_i)-f(x)|\leq\omega_i+\omega_{i+1}$.

$h<0$, $x+h\in[x_{i-1},x_i]$ 则 $|f(x+h)-f(x)|\le \omega_i+\omega_{i-1}$

不论哪种情况，都有

$$|f(x+h)-f(x)|\le \omega_i+\omega_{i-1}+\omega_{i+1}$$

对于 x 左右两个边上的区间，可以用 ~~2M~~ $2M\Delta$ 控制 （Δ 为划分最大区间长度）

则 $\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x+h)-f(x)|dx \le 3\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i+2M\cdot\Delta$.

只要 $\Delta<\frac{\varepsilon}{4M}$. 则有 $\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx<\varepsilon$.