4月11日　　第八章　反常积分

1. $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ① 收敛与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ② 的关系

1) ① $\not\Rightarrow$ ②

2). $f\geq 0$，①$\not\Rightarrow$②

3). $f\geq 0$，f 连续，①$\not\Rightarrow$②

4) $f>0$　①$\not\Rightarrow$②

5) f 单调　① $\Rightarrow$ ② ✓（还可以对阶数作估计）

6). f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，①$\Rightarrow$② ✓

例：习题10，11

2. 补充：证明：若 $f(x)$ 连续可微，积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty} f'(x)dx$ 都收敛，则 $x\to+\infty$ 时 $f(x)\to 0$

证明 (1) 只要证对 $\forall\{x_n\}$，$x_n\to+\infty$ 恒有 $f(x_n)$ 收敛

由 $\int_a^{+\infty} f'(x)dx$ 收敛，根据 Cauchy 准则，$\forall\varepsilon>0$，$\exists A>a$.

当 $x_1,x_2>A$ 时，恒有 $\left|\int_{x_1}^{x_2} f'(x)dx\right| = |f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$. 说明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在

于是 $\{f(x_n)\}$ 为 Cauchy 序列，从而收敛

(2) 令 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$，若 $a>0$，则 $\exists M>0$，当 $x>M$ 时，

有 $f(x)>\frac{a}{2}$

故 $\int_A^{2A} f(x)dx > \frac{a}{2}A \to +\infty$（当 $A\to+\infty$）时.

与 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛矛盾，从而 $a<0$ 也同理.

故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

补充二：设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，$xf(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调下降，求证 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)\ln x=0$

证明：首先证明 $xf(x)$ 非负

若 $\exists x_1\geq a$. s.t. $x_1f(x_1)<0$，则当 $x_1<x_2$ 时，

~~由 $xf(x)\downarrow$，则 $x_1f(x_1)>x_2f(x_2)$~~

~~故 $f(x_2)<\frac{x_1}{x_2}f(x_1)<f(x_1)$ 从而 $f(x)\downarrow$ 到 $[x_1,+\infty)$~~

于是与 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛矛盾.

则当 ~~$x>x_1$ 时~~ $x\geq x_1$ 时

$xf(x)\leq x_1f(x_1)$

$f(x)\leq\frac{x_1f(x_1)}{x}$　即 $-f(x)\geq-\frac{x_1f(x_1)}{x}$ >0

与 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛矛盾.

由 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，知，对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists A>a$，当 $A''>A'>A$ 时，有

$$\int_{A'}^{A''} f(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

于是当 $x>A^2$ 时，

$$0 \le \frac{1}{2}x f(x)\ln x \le \int_{\sqrt{x}}^{x} t f(t)\cdot\frac{1}{t}dt = \int_{\sqrt{x}}^{x} f(t)dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

从而 $\lim\limits_{x\to+\infty} x f(x)\ln x = 0$

3. (注)

当被积函数不保号时，不能用比较判别法

例1：P110. $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin x}{x^p}\right)dx$ 在 $0<p\le\frac{1}{2}$ 时 ~~收敛~~ 发散。

而 $\ln\left(1+\frac{\sin x}{x^p}\right)\le\frac{\sin x}{x^p}$ 收敛，在 $p>0$ 时。

例2. P118. 3.(3) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}dx$

在

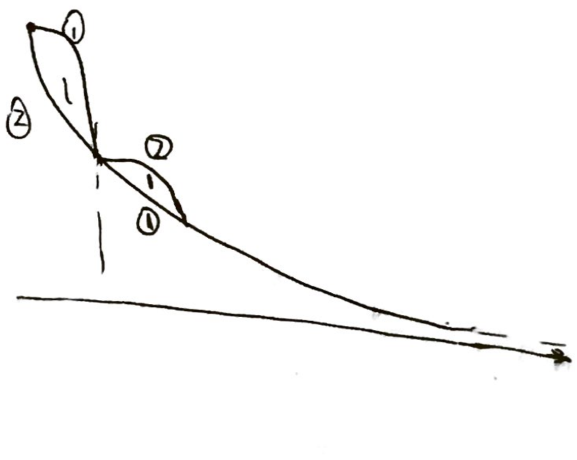
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}}{\frac{\sin x}{x^\alpha}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{x^\alpha+\sin x}=1$$

$\frac{\sin x}{x^\alpha}$ 在 $\alpha>0$ 时，都收敛

而 $\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}$ 在 $0<\alpha\le\frac{1}{2}$ 时，发散

于是比较判别法要求 $f(x)$，$g(x)$ 非负。

7.



18. (1) $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = n!$

令 $a_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} e^{-x}\,dx$$

$$= \frac{1}{n+1}\cdot a_{n+1}$$

即 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = n+1$

$a_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$

故 $a_n = n!$

19. 设函数 $g(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，$g(x)(x-a)^2$ 在 $(a,b]$ 上单调，并且 $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)(x-a)^2 = 0$ 证明瑕积分 $\int_a^b g(x)\sin\frac{1}{x-a}\,dx$ 收敛 (类比16(5))

分析：$g(x)\sin\frac{1}{x-a} = \cancel{g(x)}\cdot\dfrac{(\sin\frac{1}{x-a})\cdot(-\frac{1}{(x-a)^2})}{-\frac{1}{(x-a)^2}}\cdot g(x)$

$$= \sin\left(\frac{1}{x-a}\right)\cdot\left(-\frac{1}{(x-a)^2}\right)\cdot\left(-g(x)(x-a)^2\right)$$

Dirichlet 判别法.

21. $$\int_{\frac1n}^1 f(x)\,dx \le \frac{f(\frac1n)+f(\frac2n)+\cdots+f(\frac{n-1}{n})+f(\frac nn)}{n} - \frac{f(1)}{n}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\frac1n}^1 f(x)\,dx \le \lim\limits_{n\to\infty}\frac1n\sum\limits_{k=1}^n f(\frac kn)$

$\int_0^1 f(x)\,dx \le \lim\limits_{n\to\infty}\frac1n\sum\limits_{k=1}^n f(\frac kn)$

对任意n. 取 $\varepsilon<\frac1n$

则 $$\int_\varepsilon^1 f(x)\,dx \ge \frac{f(\frac1n)(1-n\varepsilon)+f(\frac2n)+\cdots+f(\frac nn)}{n}$$

$$= \frac{f(\frac1n)+f(\frac2n)+\cdots+f(\frac nn)}{n} - \varepsilon f(\tfrac1n)$$

令 $\varepsilon\to 0$. 即 $\int_0^1 f(x)\,dx \ge \frac{f(\frac1n)+\cdots+f(\frac nn)}{n}$.

再令 $n\to+\infty$. 即得.