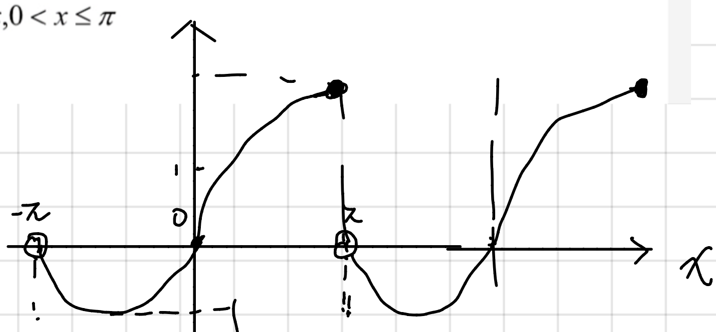
08-09 数学分析2.

1（15 分）求周期为 2π 的函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x,-\pi<x\le 0,\\ x+\sin x,0<x\le\pi\end{cases}$ 的 Fourier 级数并讨论它的收敛性。



① f(x) 可以延拓成以 2π 为周期.

② $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\sin x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin x\,dx$

$=\frac{\pi}{2}$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\sin x)\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin x\cos nx\,dx$

$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin x\cos nx\,dx$

$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cdot\frac{1}{\pi}$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin x\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin nx\,dx$

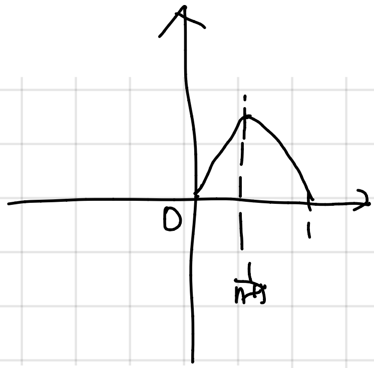
$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx$

$=\begin{cases}2, & n=1\\ \frac{(-1)^{n+1}}{n}, & n>1\end{cases}$

f(x) 的 Fourier 级数为 $\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos nx+2\sin x+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin nx$

③ f(x) 分段单调，在 $(-\pi,\pi)$ 上收敛于 f(x).

2（15 分）试求函数列 $f_n(x)=x(1-x)^n\,(n=1,2,\ldots)$ 的极限函数，并讨论该函数列在[0,1]上是否一致收敛。



$x\in[0,1]$ 时, $f_n(x)\to 0$

$f_n'(x)=(1-x)^n+x\cdot n(1-x)^{n-1}(-1)=(1-x)^{n-1}[(1-x)-nx]=(1-x)^{n-1}\cdot[1-(n+1)x]$

$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-0|=\sup_{x\in[0,1]}f_n(x)=f_n\left(\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\to 0\ (n\to\infty)$

从而由最值判别法，一致收敛.

3（15 分）试求函数 $f(x)=\ln^2(1+x)$ 在 $x=0$ 附近的 Taylor 展式，并讨论级数的收敛半径和收敛区域。

级数.

$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot x^n$, $|x|<1$ 时绝对收敛

作 Cauchy 乘积

$\ln^2(1+x)=x^2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n\right)$

$=x^2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n\cdot x^n}{(k+1)\cdot(n-k+1)}\right)$

$=x^2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n-k+1}\right)\frac{1}{n+2}\right]$

$=x^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\cdot(-1)^n}{n+2}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\right)\cdot x^n$

$=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}\cdot x^{n+1}$, $|x|<1$

$a_n=2\frac{(-1)^n}{n}\cdot\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right\}$

则 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{2}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)}=1$

收敛半径为 1

$x=1$ 时 收敛

$x=-1$ 时 发散

(见往年期中试卷).

4（15 分）设 $u_n(x)(n=1,2,...)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛。证明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 也在 $[0,1]$ 上一致收敛。

证：由 $\sum u_n(x)$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛

从而对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，当 $m>n>N$ 时，对 $\forall x\in(0,1)$，有 $\left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ (*)

由于 $u_k(x)$ 关于 x 在 $[0,1]$ 上连续，从而令 (*) 中 $x\to 0$ 和 $x\to 1$，可得

$\left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(1)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$，$\left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(0)\right|<\varepsilon$

从而对 $\forall x\in[0,1]$，有 $\left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(x)\right|<\varepsilon$，即 $\sum u_n(x)$ 也在 $[0,1]$ 上一致收敛.

5（15 分）设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，在一个周期上黎曼可积，$\left|\frac{f(x)}{x}\right|<1(x\neq 0)$，证明 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $(x=0)$ 处收敛到 0。

证：由 Dini 定理 P264-265，

令 $\varphi(t)=f(t)+f(-t)$

则只需证 $\exists\delta>0$，使得 $\int_0^{\delta}\frac{|\varphi(t)|}{t}dt<+\infty$ 即可

只有 $t=0$ 可能是瑕点.

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta'=\frac{\varepsilon}{2}>0$，当 $0<\delta_1<\delta_2<\delta'$ 时

$$\left|\int_{\delta_1}^{\delta_2}\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right|dt\right|\le\int_{\delta_1}^{\delta_2}\frac{|f(t)|}{t}dt+\int_{\delta_1}^{\delta_2}\frac{|f(-t)|}{t}dt$$

$$\le 2(\delta_2-\delta_1)<2\delta'=\varepsilon.$$

于是 $\int_0^{\delta}\frac{|\varphi(t)|}{t}dt<+\infty.$

6（15 分）设 $u_n(x)(n=1,2,\ldots)$ 在[0,1]上非负、连续，且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在[0,1]收敛到 $U(x)$，证明 $U(x)$ 在[0,1]上能取到最小值。 可以推广．比如 $u_n(x)$ 非正，$U(x)$ 取最大值．

证：令 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ 为级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的前 n 项和．

由 $u_k(x)\geq 0$，则 $S_1(x)\leq S_2(x)\leq\cdots\leq S_n(x)\leq\cdots$

又 $S_n(x)\to U(x)$，$x\in[0,1]$，则 $u_1(x)=S_1(x)\leq U(x)$，$x\in[0,1]$

又 $u_1(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，从而有下界 m．于是 $U(x)\geq m$．$\forall x\in[0,1]$

令 $\mu=\inf_{x\in[0,1]} U(x)$

若 $U(x)$ 在 $[0,1]$ 上达不到下确界 μ，则由定义，存在 $\exists\{x_n\}\subset[0,1]$ .st

$$\lim_{n\to\infty} U(x_n)=\mu$$

又 $\{x_n\}$ 是有界数列，从而 $\exists\{x_{n_k}\}$ 有极限，满足 $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k}=x_0\in[0,1]$

由假设 $U(x_0)>\mu$，从而 $\exists\mu_1$．$U(x_0)>\mu_1>\mu$

因为 $\lim_{n\to\infty} S_n(x_0)=U(x_0)$，从而 $\exists n_1$，$S_{n_1}(x_0)>\mu_1$

又 $S_{n_1}(x)$ 连续，从而 $\exists\delta>0$，当 $x\in U(x_0,\delta)\cap[0,1]$ 时，有 $S_{n_1}(x)>\mu_1$

又 $x_{n_k}\to x_0\ (k\to\infty)$，对上述 $\delta>0$，$\exists K>0$，当 $k>K$ 时，$|x_0-x_{n_k}|<\delta$．于是 $S_{n_1}(x_{n_k})>\mu_1$

从而 $U(x_{n_k})\geq S_{n_1}(x_{n_k})>\mu_1$

$\mu=\lim_{k\to\infty} U(x_{n_k})\geq\mu_1$ 这与 $\mu_1<\mu$ 矛盾．

7（10 分）考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n!\pi x)$ 证明

函数项级数的收敛域不一定是由若干区间组成

收敛域 E 在 $(-\infty,+\infty)$ 中稠密，但 E 无内点，且 $e\in E$．

（1） 在任何区间(a,b)内都内存在收敛点

（2） 存在无理点 x 使得级数收敛

（3） 在任何区间(a,b)内都内存在无理点使得级数发散

证：(1) $\forall(a,b)$ 中，$\exists$ 有理数 $\frac{m_0}{n_0}$，$n,m\in\mathbb{Z}$．$n_0\neq 0$

于是 $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(n!\pi\frac{m_0}{n_0})=\sum_{n=1}^{n_0-1}\sin(n!\pi\frac{m_0}{n_0})+\sum_{n=n_0}^{+\infty}\sin(n!\pi\frac{m_0}{n_0})=\sum_{n=1}^{n_0-1}\sin(n!\pi\frac{m_0}{n_0})+\sum_{n=n_0}^{+\infty}\sin(m_0\cdot\frac{n!}{n_0}\pi)$

$m_0\cdot\frac{n!}{n_0}\in\mathbb{Z}$ 当 $n\geq n_0$ 时．从而收敛．

(2)．证明 $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(n!\pi e)$ 收敛

$e=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!}$，$n!e=n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\cdots\right)=\underbrace{\sum_{k=0}^{n-2}\frac{n!}{k!}}_{b_n}+n+1+\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdots(n+k)}}_{c_n}$

b_n 为偶数．

$\sin(n!\pi e)=(-1)^{n+1}\sin(\pi c_n)$

$c_{n+1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\cdots(n+k+1)}\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdots(n+k)}=c_n$

且 $c_n\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^k}=\frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n}$ 于是 $c_n\downarrow 0$ $\frac{1}{n+1}\leq c_n\leq\frac{1}{n}$

$\pi c_n\leq\frac{\pi}{n}\leq\frac{\pi}{2}\ (n\geq 2)$

于是 $\sin(\pi c_n)\downarrow 0$ 交错级数收敛．

(3)．取 $x=2e$，则 $\lim_{n\to\infty} n\cdot\sin(n!\cdot 2\pi e)=\lim_{n\to\infty} n\cdot\sin(2\pi c_n)$

$=\lim_{n\to\infty} n\cdot 2\pi c_n\cdot\frac{\sin(2\pi c_n)}{2\pi c_n}=2\pi$．于是 $x=2e$ 处不收敛．

$a<2e+x_0<b$

$a-2e<x_0<b-2e$ x_0 为有理数．

$\sin(n!\pi 2e+n!\pi x_0)$

$=\sin(n!\pi\cdot 2e)$ (n 充分大)

* **例 5.2.15** 设函数序列 $f_0(x), f_1(x), \cdots$ 在区间 I 上有定义，且满足

i) $|f_0(x)| \leqslant M$;

ii) $\sum_{n=0}^{m} |f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leqslant M, m = 0,1,2,\cdots$，其中 M 是常数.

试证：如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n f_n(x)$ 必在区间 I 上一致收敛.

证 因 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 收敛，故 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，当 $n > N$ 时，

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k\right| < \varepsilon \quad (\forall p \in \mathbf{N}). \tag{1}$$

记 $S_i = \sum_{k=n+1}^{n+i} b_k$，于是 $|S_i| < \varepsilon (i = 1,2,\cdots)$. (2)

于是
$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k f_k(x)\right| \\
&= |S_1 f_{n+1} + (S_2 - S_1) f_{n+2} + \cdots + (S_p - S_{p-1}) f_{n+p}| \\
&= |S_1 (f_{n+1} - f_{n+2}) + \cdots + S_{p-1}(f_{n+p-1} - f_{n+p}) + S_p f_{n+p}| \\
&\leqslant |S_1||f_{n+1} - f_{n+2}| + \cdots + |S_{p-1}||f_{n+p-1} - f_{n+p}| \\
&\qquad + |S_p||f_{n+p}| \\
&\leqslant \varepsilon \left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |f_k - f_{k+1}| + |f_{n+p}|\right). \quad (\text{因(2)式})
\end{aligned}$$

因为 $\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |f_k - f_{k+1}| \leqslant \sum_{k=0}^{n+p-1} |f_k - f_{k+1}| \leqslant M$，(条件 ii))

$$\begin{aligned}
|f_{n+p}| &= |f_0 - f_0 + f_1 - f_1 + \cdots + f_{n+p-1} - f_{n+p-1} + f_{n+p}| \\
&\leqslant |f_0| + |f_0 - f_1| + \cdots + |f_{n+p-1} - f_{n+p}| \leqslant 2M \\
&\qquad (\text{条件 i), ii)}).
\end{aligned}$$

所以 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k f_k(x)\right| < \varepsilon \cdot 3M \quad (\forall p \in \mathbf{N})$.

故 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k f_k(x)$ 在 I 上一致收敛.

例 5.1.7 试证明下列命题：

(1) 设 $a_n>0(n=0,1,2,\cdots)$，$S_n=\sum_{i=0}^{n}a_i$. 若有

$$\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=0,$$

则 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R=1$.

(2) 设 $a_n>0(n\in\mathbf{N})$，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径是 1，则 $I=\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n\left(S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k\right)$ 的收敛半径也是 1.

证明 (1) 由 $a_n/S_n\to0(n\to\infty)$ 可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n}=0.$$

即 $S_{n-1}/S_n\to1(n\to\infty)$，从而有 $\underbrace{\sqrt[n]{S_n}}_{①}\to1(n\to\infty)$. 因为 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{S_n}=1$，所以该幂级数的收敛半径 $R\geqslant1$. 此外，由 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 的发散性可知，$R=1$.

(2) (i) 因为 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{S_n}\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=1$，所以 I 的收敛半径小于等于 1.

(ii) 由等式 $\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n$ 可知，当 $|x|<1$ 时 I 收敛. 从而知 I 的收敛半径必须大于等于 1.

综合以上所述 $R=1$.

(stolze 定理).

① $\sqrt[n]{S_n}\to1 \Leftarrow \frac{\ln S_n}{n}\to0 \Leftarrow \frac{\ln S_{n+1}-\ln S_n}{(n+1)-n}=\ln\frac{S_{n+1}}{S_n}\to0$

$\Leftarrow \frac{S_{n+1}}{S_n}\to1$