数学分析习题课 2

2017.09.25

1 上次作业中的问题

(1) 大家作业纸上除了作业，还要写下姓名和学号；

(2) 有些题目，我给你打了对号，并不意味着你写的一定可以拿到满分；

(3) 很多人在确界的题目中直接给出了答案，没有一点过程，这样以后是要扣分的，还有人写很显然，所以不想写过程；

(4) 证明两个集合 $A = B$, 我们需要证明 $A \subset B$ 和 $B \subset A$ 同时成立。要掌握集合运算的定义：

$\cup_{n=1}^{\infty} A_n := \{x : \exists n_0 \geq 1, s.t.\ x \in A_{n_0}\}$;

$\cap_{n=1}^{\infty} A_n := \{x : \forall n \geq 1, s.t.\ x \in A_n\}$;

$A \setminus B = A \cap B^c$;

$(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \cap_{n=1}^{\infty} A_n^c$;

$(\cap_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \cup_{n=1}^{\infty} A_n^c$;

(5) 在叙述有界无界的定义时，请大家严格按照书上的写法，或者我在黑板上的写法。在证明上下确界的时候，也请严格按照定义来证，证明满足定义中的两个条件。

2 序列的极限

序列就是按照一定顺序排列的一列数，这里的一列通常是下标为 $0, 1, 2, \cdots$，即可数个下标，这里的可数就可以理解为有自然数个，我们称之为一列数，

注意有理数就有可数多个。我们今后还会遇到随机过程的概念 $\{X_t, t \geq 0\}$，这里 $t \geq 0$ 就是不可数个，可以理解为有实数那么多个下标，我们称之为一族随机变量。
序列极限的直观含义就是就是当 n 越来越大的时候，序列和某一个常数的距离越来越接近，那么我们通常都是用什么来衡量这个距离的呢？比如我们在高中经常会遇到的例子就是比较小明和小华的成绩，比如语文，数学，英语和物理四门功课。那么对这四门成绩求平均值就是衡量每个人的成绩平均水平。那么用什么衡量这两个人的成绩浮动呢？就是方差，方差越大，成绩越不稳定。回忆方差的定义，你就会发现它和极限其实有很多相似的地方。既然是为了表达距离越来越小，我们自然要定义什么叫接近。

定义 1 *设 $\{x_n\}$ 是一个序列。若存在常数 $a \in \mathbb{R}$, 使得 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时，有 $|x_n - a| < \epsilon$, 则称该序列是收敛的，并且称 a 为该序列的极限。若不存在这样的 a, 则称该序列是发散的。发散相应数学的表达在课本 34 页，需要仔细体会收敛与发散的区别。*

(1) 可以思考下数列收敛的等价定义，比如把 ϵ 换成 $\frac{1}{m}$, 怎么表述呢？

(2) N 和 ϵ 的关系, 以 $\frac{1}{n}$ 为例说明。

我们在按照定义求解数列极限的时候，通常是在固定 ϵ 下，把 n 当做未知数来解，从而确定 N 的值。而一般情况下很难求出 n 的显式表达，此时我们就要进行放缩，考虑 $|x_n - a| < b_n$（b_n 要是无穷小量），例如 $\frac{2^n}{n!}$。

2.1 几种常见的极限

(1) 多项式除以多项式；

(2) 指数形式 $\{a^n, n \geq 1\}$;

(3) $a^{\frac{1}{n}}, 0 < a < 1\ and\ a \geq 1; n^{\frac{1}{n}}$;

(4) $2^n, n^k, n!$ 收敛速度对比。

2.2 无穷小量和无穷大量

定义 2 *设 x_n 是一个序列。若 $x_n \to 0 (n \to \infty)$, 则称序列 $\{x_n\}$ 为无穷小量，记为 $x_n = o(1)(n \to \infty)$.*

定理 1 设 x_n 是一个序列.

(1) $\{x_n\}$ 是无穷小量的充分必要条件是 $\{|x_n|\}$ 是无穷小量;

(2) 若 $\{x_n\}$ 是无穷小量，M 是一个常数，则 $\{Mx_n\}$ 是无穷小量; $\{a_n\}$ 是有界序列，则 $\{a_nx_n\}$ 也是无穷小量;

(3) $\{x_n\}$ 极限是 a 的充要条件是 $\{x_n - a\}$ 是无穷小量。

定义 3 设 x_n 是一个序列。若 $\forall M > 0, \exists N$，当 $n > N$ 时，有 $x_n > M$, 则称 $\{x_n\}$ 是正无穷大量，记为 $\lim_{n\to\infty} = +\infty$, 也称 $\{x_n\}$ 有广义极限. 若 $\forall M > 0, \exists N$，当 $n > N$ 时，有 $x_n < -M$, 则称 $\{x_n\}$ 是负无穷大量，记为 $\lim_{n\to\infty} = -\infty$. 若 $\{|x_n|\}$ 是正无穷大量，则称 $\{x_n\}$ 为无穷大量，记为 $\lim_{n\to\infty} = \infty$.

3 序列极限的性质

(1) 若一个数列 $\{x_n\}$ 是有界的，则记为 $x_n = O(1)$;

(2) 当改变一个序列的有限多项时，不改变其收敛性;

(3) 收敛序列的极限是唯一的;

(4) 收敛数列是不是一定是单调的，或者从某一项之后开始单调? 举例说明 $(-1)^n \frac{1}{n}$;

(5) 无界数列是不是一定是无穷大量?

(6) 收敛序列是有界的; 反之不成立，举例说明;

(7) 极限的保序性，四则运算，夹逼收敛定理.

4 习题

例 2.2.4，3(5),5,6(3),14(1)(2)(3),15.