4.2 求导数的方法

定理4.2.1 设函数$f(x)$和$g(x)$都在x处可导，则下列各式在x处成立.

(1) $(f(x)\pm g(x))' = f'(x)\pm g'(x)$

(2) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(3) $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

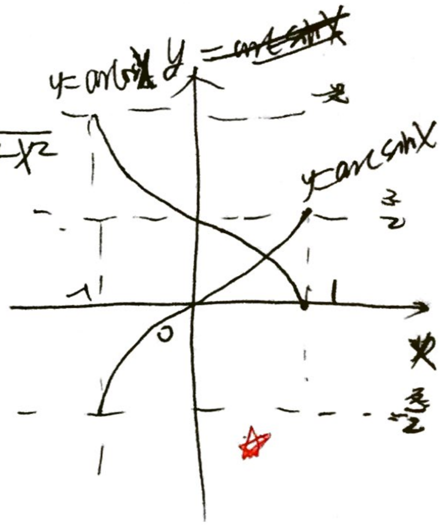
定理4.2.2 设函数$y=f(x)$在(a,b)内严格单调，并且令 $\alpha=\min\{f(a+0), f(b-0)\}$，$\beta=\max\{f(a+0), f(b-0)\}$. 如果$f(x)$在$(a,b)$内可导且导数$f'(x)\neq 0$，则它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在(α,β)内可导，而且有 $$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{f'(x)}$$

例 $y=\arcsin x$ $\quad x=\sin y$

$$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ★ , $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ★



定理4.2.3 设函数$y=f(u)$在$U(u_0,\delta_0)$内有定义，函数$u=g(x)$在$U(x_0,\eta_0)$内有定义，且$u_0=g(x_0)$. 若$f'(u_0)$与$g'(x_0)$都存在，则复合函数$F(x)=f(g(x))$在点x_0可导，且 $F'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$

链锁法则：$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{dy}{dx}$.

思考：(1) 圆的面积与周长、体积与面积的关系.

(2) x^x 求导

4.1 导数

定义4.1.1 设函数 $y=f(x)$ 在 $U(x_0, \delta_0)$ 内有定义，若极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称 $f(x)$ 在 x_0 处可导.

(1) 求解导数 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

(2) 三个极限 (i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\dfrac{1}{\ln a}$ $(a>1$ 且 $a\neq 1)$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu$.

(3) 常用导数.

① $f(x)=C$，$f'(x)=0$

② $f(x)=\sqrt{x}$，$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

③ $f(x)=x^\alpha$，$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$

④ $f(x)=a^x\ (a>0)$，$f'(x)=a^x\ln a$

⑤ $f(x)=\log_a x$，$f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$

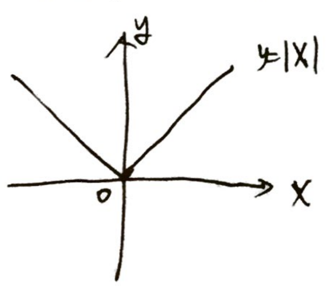
⑥ $f(x)=\sin x$，$f'(x)=\cos x$

⑦ $f(x)=\cos x$，$f'(x)=-\sin x$

定义4.1.2 设函数 $y=f(x)$ 在 $U^+(x_0, \delta)$ 内有定义，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$ 存在，则称 $f(x)$ 在 x_0 处右可导.

定理4.1.1 若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，则它在 x_0 处连续。反之不成立.



0处连续，但不可导.

5. (1) 当 $x_0=1$ 时. 取 $|\Delta x|<\frac{1}{2}$

则 $$\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|(1-\Delta x)^2(2-\Delta x)^3}{\Delta x}=\begin{cases}(1-\Delta x)^2(2-\Delta x)^3, & \Delta x>0\\ -(1-\Delta x)^2(2-\Delta x)^3 & \Delta x<0\end{cases}$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=8$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=-8$, 故 $x_0=1$ 不可导.

当 $x_0=2$ 时, 取 $|\Delta x|<\frac{1}{2}$

$$\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{(1+\Delta x)\Delta x^2(1-\Delta x)^3}{\Delta x}=\Delta x(1+\Delta x)(1-\Delta x)^3\to 0\quad(\Delta x\to 0)\text{时}.$$

于是 $x_0=2$ 是可导点

当 $x_0=3$ 时 取 $|\Delta x|<\frac{1}{2}$

$$\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\frac{(2+\Delta x)(1+\Delta x)^2\Delta x^3}{\Delta x}\to 0\quad(\Delta x\to 0).$$

于是 $x_0=3$ 是可导点

(2) 同理讨论.

6. 解. 由于 $f'(0)$ 存在. 即 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$

则对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $0<x<\delta$ 时, 有 $\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)\right|<\varepsilon$

即 $$f'(0)-\varepsilon<\frac{f(x)-f(0)}{x}<f'(0)+\varepsilon$$

$$x(f'(0)-\varepsilon)<f(x)-f(0)<x(f'(0)+\varepsilon)$$

$\exists N$ 当 $n\geq N$ 时, $0<\frac{1}{n}<\delta$

故 $$f\left(\tfrac{1}{n^2}\right)-f(0)+f\left(\tfrac{2}{n^2}\right)-f(0)+\cdots+f\left(\tfrac{n}{n^2}\right)-f(0)$$

$$>\frac{1}{n^2}(f'(0)-\varepsilon)+\frac{2}{n^2}(f'(0)-\varepsilon)+\cdots+\frac{n}{n^2}(f'(0)-\varepsilon)$$

$$=\cancel{\frac{n+1}{2n}f'(0)-\frac{n+1}{2n}}\quad\frac{n+1}{2n}(f'(0)-\varepsilon)$$

又 $$f\left(\tfrac{1}{n^2}\right)-f(0)+\cdots+f\left(\tfrac{n}{n^2}\right)-f(0)<\frac{n+1}{2n}(f'(0)+\varepsilon)$$

故 $$\left|\frac{2n}{n+1}\left[f\left(\tfrac{1}{n^2}\right)+f\left(\tfrac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\tfrac{n}{n^2}\right)-nf(0)\right]-f'(0)\right|<\varepsilon$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}\left[f\left(\tfrac{1}{n^2}\right)+f\left(\tfrac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\tfrac{n}{n^2}\right)-nf(0)\right]=f'(0)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[f\left(\tfrac{1}{n^2}\right)+f\left(\tfrac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\tfrac{n}{n^2}\right)-nf(0)\right]=\frac{1}{2}f'(0)$$

7. (1) $f(x)=\sin x$, $f'(0)=1$, $f(0)=0$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{2}{n^2}+\cdots+\sin\frac{n}{n^2}\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[f(\frac{1}{n^2})+f(\frac{1}{n^2})+\cdots+f(\frac{n}{n^2})-nf(0)\right]$

$=\frac{1}{2}f'(0)=\frac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\sum_{k=1}^{n}\log(1+\frac{k}{n^2})}$

$f(x)=\log(1+x)$ $f(0)=0$, $f'(0)=1$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[f(\frac{1}{n^2})+f(\frac{2}{n^2})+\cdots+f(\frac{n}{n^2})-nf(0)\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\log(1+\frac{1}{n^2})+\log(1+\frac{2}{n^2})+\cdots+\log(1+\frac{n}{n^2})\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\log(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})=\frac{1}{2}f'(0)=\frac{1}{2}.$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})=e^{\frac{1}{2}}$

8. 证明: $P_n(M)=0$, ~~设 N 为 $P_n(x)=0$ 的第二大实根~~

且当 $x>M$ 时. $P_n(x)>0$

~~$N<x<M$ 时. $P_n(x)<0$~~

由于 $P_n(x)$ 为多项式. 则 $P_n'(M)$ 存在.

从而又 $P_n'(M)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{P_n(M+\Delta x)-P_n(M)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{P_n(M+\Delta x)}{\Delta x}\geq 0.$

9. 解: $f(a)=0$

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|\varphi(a+\Delta x)}{\Delta x}=\begin{cases}\varphi(a+\Delta x), & \Delta x>0\\ -\varphi(a+\Delta x) & \Delta x<0\end{cases}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\varphi(a+\Delta x)=\varphi(a)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}-\varphi(a+\Delta x)=-\varphi(a)$$

若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导. 则只要 $\varphi(a)=0$.

18. $y=f(x)\sin ax \le f(x)$

$y=f(x)\sin ax \ge -f(x)$

故 $y=f(x)\sin ax$ 夹在两条振幅曲线 $y=\pm f(x)$ 之间

有交点的地方 $\sin ax=1$ 而点为 $ax=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$ax=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

故 $x_k=\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{a}$，$x_k=\dfrac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{a}$

$y'=f'(x)\sin ax+af(x)\cos ax$

当 $ax=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 时，$\sin ax=1$，$\cos ax=0$，$y'=f'(x)$

当 $ax=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 时，$\sin ax=-1$，$\cos ax=0$，$y'=-f'(x)$

20.(1). $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$

$y=\arcsin u$，$u=\sqrt{1-x^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2}}=-\frac{x}{|x|}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

补充习题.

1、Riemann 函数 $R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, & \text{当 } x=\frac{p}{q}\ (q>0)\text{. } p, q \text{ 互质} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$

在 $[0,1]$ 上处处不可微.

证明：因为 Riemann 函数在有理点不连续，则 $R(x)$ 在有理点上不可微，现只须证明无理点的情况.

设 $x_0\in(0,1)$ 为任一无理点.

则取 $x_n=x_0+\frac{1}{n}$ n 充分大，s.t. $x_n\in(0,1)$. $\forall n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R(x_n)-R(x_0)}{x_n-x_0}=0$$

同时，因为 x_0 是无理数，可用无限不循环小数表示 $x_0=0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots$

截取前 n 位小数，令 $x_n'=0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$

则 $\{x_n'\}$ 是趋向 x_0 的有理数列，$\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ 有无穷多项不为 0，记第一个不为 0 的下标 N

当 $n>N$ 时，$R(x_n')=R(0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)\ge\frac{1}{10^n}$

故 $\left|\dfrac{R(x_n')-R(x_0)}{x_n'-x_0}\right|=\dfrac{R(0.\alpha_1\cdots\alpha_n)}{0.00\cdots0\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\cdots}\ge1$ 矛盾. 从而无理数也不可导.

2、设 $P(x)=x$，$q(x)=1-x$，$f(x)$ 为多项式，$f(x)\geq P(x)$，$f(x)\geq q(x)$ $\forall x\in(-\infty,\infty)$.

试证 $f(\frac{1}{2})>\frac{1}{2}$.

证明. $f(\frac{1}{2})\geq P(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

若 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$.

则 $x>\frac{1}{2}$ 时. $\dfrac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}\geq\dfrac{x-\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}=1$

$x<\frac{1}{2}$ 时. $\dfrac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}\leq\dfrac{q(x)-\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}=\dfrac{1-x-\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}=-1$

故 f 在 $x=\frac{1}{2}$ 处不可微，与 f 是多项式矛盾.

3. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，$f(a)=f(b)$ 且在开区间 (a,b) 内有连续的右导数

$$f_+'(x)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\qquad a<x<b$$

试证：有一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f_+'(\xi)=0$

证明：只要证明 $\exists\alpha,\beta\in(a,b)$. 分别有 $f_+'(\alpha)\leq0$，$f_+'(\beta)\geq0$，那么由介值定理.

便可知 $\exists\xi\in(a,b)$. s.t $f_+'(\xi)=0$

由于 f 在 $[a,b]$ 上连续. 则必有最大值，最小值，又 $f(a)=f(b)$，则不妨设最大值在内部取得. 设 α 是 f 的最大值点. 于是

$$f_+'(\alpha)=\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\leq0$$

任取一点 c. $a<c<\alpha$. 由于 f 在 $[c,\alpha]$ 上连续，f 在 $[c,\alpha]$ 上必有一点 $\beta<\alpha$ 达到最小值. 于是

$$f_+'(\beta)=\lim_{x\to\beta^+}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\geq0$$