数学分析习题课 4

2017.10.16

1 几个基本定理的回顾

定理 1 (确界存在定理) 非空有上界的实数集必有上确界; 非空有下界的实数集必有下确界。

例 1: 设 A 是有上界的数集, $\beta = sup A$. 证明: 存在 $\{a_n\}$, 使得 $a_n \in A$, 而且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \beta$.

定理 2 (单调收敛原理) 单调有界序列必收敛.

上节课我们已经用这个定理证明并求解了很多序列的极限,大家应该熟练 掌握这个定理的应用条件和基本步骤。

定理 3 (闭区间套定理) 设 $\{[a_n,b_n]\}$ 是一列闭区间, 并满足:

- (1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], n = 1, 2, \dots;$
- $(2) \lim_{n \to \infty} (b_n a_n) = 0,$

则存在唯一的一点 $c \in \mathbb{R}$, 使得 $c \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots$.

我们其实已经很自然地接触过这个闭区间套定理。例 2: (习题 19) 设 $0 < a_1 < a_2$, 令 $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, 证明序列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的极限存在且相等。

定理 4 (有限覆盖定理) 设 [a,b] 是一个闭区间, $\{E_{\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 [a,b] 的任意一个开覆盖,则必存在 $\{E_{\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的一个子集构成的 [a,b] 的一个有限覆盖。

定理 5 (波尔查诺-威尔斯特拉斯定理)任何有界序列必有收敛的子列。

2 上下极限 2

还是要特别注意这些定理的成立条件,都是在实数域中。例如波尔查诺-威尔斯特拉斯定理在有理数域中的反例。

例 3: $a_1 = 1, a_2 = 1.4, a_3 = 1.41, \dots, b_n = a_n + \frac{1}{10^{n-1}}, 则 b_n, a_n$ 都是以 $\sqrt{2}$ 为极限,不在有理数中。将二者进行相间插值,则形成的新序列的任何子列都不收敛。

定义 1 设 $\{x_n\}$ 是一个序列, 若 $\forall \epsilon > 0, \exists N, \exists n, m > N$ 时, 有 $|x_n - x_m| < \epsilon$, 则称 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列。

定理 6 (Cauchy 收敛准则) 序列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是它是一个 Cauchy 序列。

在应用 Cauchy 收敛准则的时候,很多同学都有误区,上次交的作业里发现了很多问题,见上次作业习题 27.

还有就是有关于 e 极限的序列变化, 例如习题 20.

2 上下极限

设 $\{x_n\}$ 是有界序列,令

$$l_n = inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots\},$$

 $h_n = sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots\}$

则 $\{l_n\}$ 是单调递增的, $\{h_n\}$ 是单调递减的,且有界。那么有有界收敛定理可以知道:

 $l = \lim_{n \to \infty} l_n = \sup_n \inf_k x_{n+k} := \lim \inf_{n \to \infty} x_n.$ $h = \lim_{n \to \infty} h_n = \inf_n \sup_k x_{n+k} := \lim \sup_{n \to \infty} x_n.$

定理 7 设 $\{x_n\}$ 是一有界序列, h 是一实数, 则下列三个命题等价:

- (1) $h \in \{x_n\}$ 的上极限;
- (2) $\forall \epsilon > 0, \exists N,$ 当 n > N 时,有 $x_n < h + \epsilon$,而且对 $\forall K, \exists n_k > K$,使得 $x_{n_k} > h \epsilon$;
- (3) 存在以 h 为极限的子序列,且任何收敛的其他子列的极限都不超过 h;

2 上下极限 3

定理 8 (1) 有界序列由互不相同的数组成,则上极限是最大聚点,下极限 是最小聚点;

- (3) $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 的充要条件是它的上下极限都是 a;