2. 求下列函数序列 $\{f_n(x)\}$ 的极限函数, 并讨论在给定的区间上是否一致收敛:

(1) $f_n(x) = x(1-x)^n$, $x \in [0,1]$.

(2) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

(3) $f_n(x) = n^2e^{-nx^2}$, $x \in [a, +\infty)$, 这里 $a > 0$.

(4) $f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}$, $x \in [0,1]$.

(5) $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n$, $x \in [0,1]$.

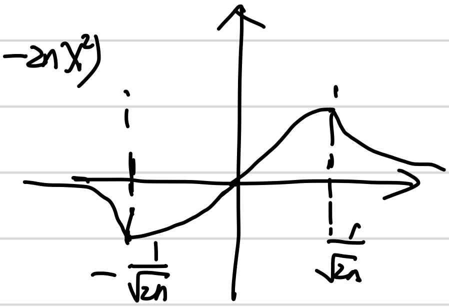
(6) $f_n(x) = \sin\dfrac{x}{n^n}$: (a) $x \in [a,b]$; (b) $x \in (-\infty, +\infty)$.

(7) $f_n(x) = \dfrac{\sin n^n x}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

(8) $f_n(x) = (\sin x)^{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, $x \in [0, \pi]$.

(2) 对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$

$f_n'(x) = ne^{-nx^2} + nxe^{-nx^2}(-2nx) = e^{-nx^2}n(1-2nx^2)$



故 $|f_n(x)-0| = |f_n(x)| \le f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$

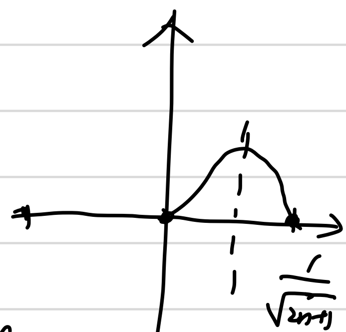
$= \sqrt{\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}}$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)} |f_n(x)-0| = +\infty$

从而 $f_n(x)$ 不一致收敛到 0

(5). $f_n(x)=0$ 在 $x=0,1$ 时

故只需考虑 $0<x<1$ 时. $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$



$f_n'(x) = n^2(1-x^2)^n + n^2x \cdot n(1-x^2)^{n-1}(-2x)$

$= n^2(1-x^2)^{n-1}[(1-x^2) - 2nx^2]$

$= n^2(1-x^2)^{n-1}(1-(2n+1)x^2)$

$\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)-0| = \left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)\right| = n^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$

$\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n = \left[\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^{-(2n+1)} \left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \to e^{-\frac{1}{2}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)-0| = +\infty$ 从而不一致收敛.

(6) (a) 对 $\forall x\in[a,b]$，$\sin\frac{x}{n^n}\to 0\ (n\to+\infty)$

而 $\left|\sin\frac{x}{n^n}-0\right| = \left|\sin\frac{x}{n^n}\right| \le \frac{|x|}{n^n} \le \frac{|a|+|b|}{n^n}$

考虑 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$，由 $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{1}{n}=0$

则由柯西判别法 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ 收敛.

从而由魏尔斯特拉斯M判别法知 $\sin\frac{x}{n^n}$ 在$[a,b]$一致收敛.

(b) $\sup_{x\in R}|f_n(x)-0| = \sup_{x\in R}\left|\sin\frac{x}{n^n}\right| = 1$

从而 $\sin\frac{x}{n^n}$ 在$(-\infty,+\infty)$上不一致收敛.

(7). $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$

$\sup_{x\in R}|f_n(x)-0| = \sup_{x\in R}\frac{|\sin n^2x|}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}$

于是 $\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in R}|f_n(x)-0| = 0$ 则由~~最值~~判别法

可知其一致收敛.

(8) 当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时. $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$

当 $x\in[0,\pi]\setminus\frac{\pi}{2}$，$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ $f(x)=\begin{cases}1, & x=\frac{\pi}{2}\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$

$\sup_{x\in[0,\pi]}|f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[0,\pi]\setminus\frac{\pi}{2}}|f_n(x)| = \sup_{x\in[0,\pi]\setminus\frac{\pi}{2}}\left|(\sin x)^{n^\alpha}\right| = 1$

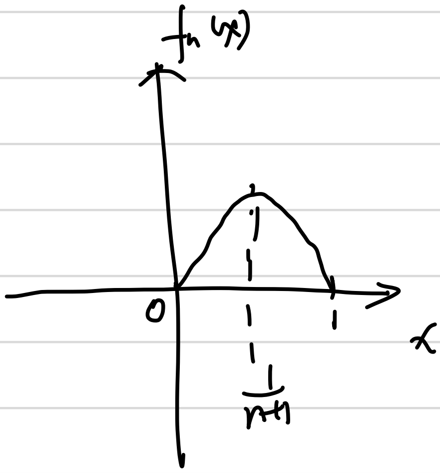
从而不一致收敛.

3、考虑一致收敛性.

(5) $\{f_n(x)=n^\alpha x(1-x)^n\}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $x\in[0,1]$;

(6) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$, $\alpha>0$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

(5). $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=0$



$$f_n'(x)=n^\alpha(1-x)^n+n^\alpha x\cdot n(1-x)^{n-1}(-1)$$
$$=n^\alpha(1-x)^{n-1}[(1-x)-nx]$$
$$=n^\alpha(1-x)^{n-1}[1-(n+1)x]$$

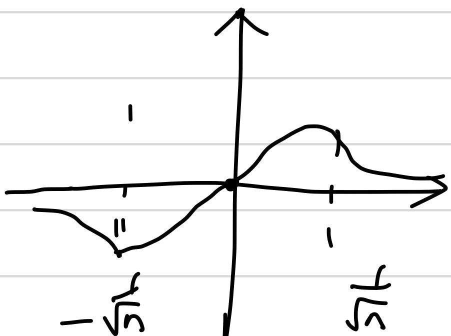
$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-0|=\sup_{x\in[0,1]}f_n(x)=f_n\left(\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=n^\alpha\frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$
$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right]^{-1}\to\frac{1}{e}\quad(n\to+\infty)$$

从而当 $\alpha<1$ 时 $f_n(x)\rightrightarrows 0$

当 $\alpha\geq 1$ 时. $f_n(x)$不一致收敛到0.

(6). $u_n(x)=\frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$ $\quad u_n(x)\to 0\quad(n\to+\infty)$

$$u_n'(x)=\frac{n^\alpha(1-nx^2)}{[n^\alpha(1+nx^2)]^2}$$



$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|u_n(x)|\leq u_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{2n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

故当 $\alpha+\frac{1}{2}>1$ 即 $\alpha>\frac{1}{2}$ 时 由魏尔斯特拉斯M判别法知其一致收敛.

取 $\varepsilon_0=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^\alpha}$

对 $\forall N$, $\exists\ 2N>N+1>N$, 和 $x'=N^{-\alpha}$

则 $\left|\sum_{k=N+1}^{2N}u_k\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\right|\geq N\cdot u_{2N}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$

$$=N\cdot\frac{\frac{1}{N^{\alpha}}}{(2N)^{\alpha}\left(1+2N\frac{1}{N^{2\alpha}}\right)}=\frac{1}{2^{\alpha}}\cdot\frac{1}{N^{2\alpha-1}+2}\quad (*)$$

当 $0<\alpha\le\frac{1}{2}$ 时. $0\le N^{2\alpha-1}\le 1$

从而 $(*)\ge\frac{1}{3\cdot 2^{\alpha}}$

从而不一致收敛

谢惠民书上的几个例题.

例题 14.1.2 绝对一致收敛的函数项级数的一致收敛性不一定能够用 Weierstrass 判别法来判定: 观察非负函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, 其中对 $n=1,2,\cdots$ 令

$$u_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1}\leqslant x<\frac{1}{n},\\ 0, & x \text{ 为区间 } [0,1] \text{ 中的其他值.}\end{cases}$$

容易看出, 对于区间 $[0,1]$ 中的每个 x, 在级数的无限项中至多只有一项不是 0, 因此级数处处收敛. 又可以看出对余项的估计 $R_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\leqslant\frac{1}{n+1}$ 在 $[0,1]$ 上一致成立, 因此级数在 $[0,1]$ 上一致收敛. 但是从 $\sup\limits_{x\in[0,1]}u_n(x)=\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$ 和调和级数发散可知, 用 Weierstrass 判别法一定不成功. □

注: (1) Weier-strass 判别法只是充分条件.

(2) 要构造 $\sup\limits_{x\in I}|u_n(x)|\le M_n$. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}M_n$ 不收敛

但是 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 一致收敛

(3) $|S_n(x)-S(x)|=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}u_k(x)\le\frac{1}{n+1}\quad\forall x\in[0,1]$

从而一致收敛.

但 $\sup\limits_{x\in[0,1]}u_n(x)=\frac{1}{n}$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

例题 14.1.3 设对每个 n, 函数 $u_n(x)$ 在 $x=c$ 处左连续, 又已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(c)$ 发散. 证明: 对任意正数 $\delta>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $(c-\delta,c)$ 上必不一致收敛.

证 用反证法. 设有 $\delta>0$, 使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $(c-\delta,c)$ 上一致收敛, 这就是 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,N>0$, 当 $n\geqslant N$ 时, 对每个正整数 p 和每个 $x\in(c-\delta,c)$, 成立

$$|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon. \tag{14.1}$$

由题设, $u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)$ 在 $x=c$ 左连续, 在 (14.1) 中令 $x\to c^-$, 得到

$$|u_{n+1}(c)+\cdots+u_{n+p}(c)|\leqslant\varepsilon.$$

由数项级数的 Cauchy 收敛准则知道, 这与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(c)$ 发散的条件相矛盾. □

同书上例10.3.1，例10.3.1′

例题 14.1.6 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 的收敛域, 并讨论其一致收敛性.

解 (1) 先求收敛域. 当 $x=0$ 时级数显然收敛. 当 $x\neq 0$ 时, 观察通项的绝对值:

$$\left|n\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\right| = n|x|^n\left|\left(1+\frac{1}{nx}\right)^n\right| \sim n|x|^n e^{\frac{1}{x}},$$

因而原级数当 $|x|<1$ 时收敛, 当 $|x|\geqslant 1$ 时发散, 级数的收敛域是 $(-1,1)$.

(2) 函数项级数一致收敛的一个必要条件是其通项一致收敛于 0. 但本题的级数通项不满足这个条件. 这用对角线判别法就可以知道: 对每个正整数 n, 取 $x_n=1-\dfrac{1}{n}\in(-1,1)$, 则就有

或者用14.1.3的结论，反证法.

$$n\left(x_n+\frac{1}{n}\right)^n = n\to+\infty.$$

因此所论级数在 $(-1,1)$ 上不一致收敛. □

(1) $x=0$ 时. $\sum n\frac{1}{n^n}$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n\frac{1}{n^n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\frac{1}{n}=0$

由Cauchy判别法收敛

(2) 若有 $\sum n(x+\frac{1}{n})^n$ 在 $(-1,1)$ 一致收敛，则必有

$n(x+\frac{1}{n})^n \rightrightarrows 0$ $\quad \sup\limits_{x\in(-1,1)}\left|n(x+\frac{1}{n})^n\right| = n(1+\frac{1}{n})^n$

$\to +\infty \ (n\to+\infty)$

例题 14.1.4 (Bendixon 判别法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 为 $[a,b]$ 上的可微函数项级数, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 的部分和函数列在 $[a,b]$ 上一致有界, 证明: 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛, 则必在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证 由题设, 存在正常数 C, 使得对每个正整数 n 和每个 $x \in [a,b]$, 同时成立不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k'(x)\right| \leqslant C.$$

对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取区间 $[a,b]$ 的等距分划 $\{x_0, x_1, \cdots, x_m\}$, 其中 m 充分大, 使分划的细度 $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{m} < \dfrac{\varepsilon}{4C}$.

由于函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 处处收敛, 因此从 Cauchy 收敛准则知, 存在 N, 使 $n > N$ 时, 对任意正整数 p 和分划的每个分点 x_i, 同时成立

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_i)\right| < \frac{\varepsilon}{2},\ i = 0, 1, \cdots, m.$$

现在对于任意的 $x \in [a,b]$, 不妨设 $x \in [x_{i-1}, x_i]$, 就可以作出估计:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_i) + \sum_{k=n+1}^{n+p} (u_k(x) - u_k(x_i))\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_i)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k'(\xi_i)\right| \cdot |x - x_i| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + 2C|x - x_i| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

其中在 $[x, x_i]$ 上对 $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x) - u_k(x_i)]$ 用微分中值定理, $\xi_i \in (x, x_i)$. 这表明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Cauchy 一致收敛准则, 从而在 $[a,b]$ 上一致收敛. □

例题 14.1.7 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛的充分必要条件是该闭区间不含 2π 的整倍数点.

(1) 证明 $[0,2\pi]$ 上不一致收敛

对 $\forall N$, $\exists\ 2N > N+1 > N$ 和 $x' = \frac{1}{2N}$

则 $\left|\sum_{k=N+1}^{2N}\frac{\sin kx'}{k}\right| = \sum_{k=N+1}^{2N}\frac{\sin\frac{k}{2N}}{k} \geq \left(\sin\frac{1}{2}\right)\sum_{k=N+1}^{2N}\frac{1}{k}$

$\geq \left(\sin\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2N}\cdot N = \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}$

从而 $[0,2\pi]$ 上不一致收敛.

(2) $[\delta, 2\pi-\delta]$, $\delta>0$ 上一致收敛.

$|S_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right| = \left|\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\sin kx\sin\frac{x}{2}\right|$

$= \left|\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right]\right|$

$= \left|\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$

而 $\frac{1}{n} \rightrightarrows 0$ 单调递减

投由Dirichlet判别法, $[\delta, 2\pi-\delta]$上一致收敛.

7. 设连续函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛到连续函数 $f(x)$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无零点. 证明：存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上也没有零点.

证明：不妨设 $f(x)>0$，$\forall x\in[a,b]$，则 $\exists$ 最小值点 x_0.

由 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$，$x\in[a,b]$

则 $\frac{f(x_0)}{2}>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，对一切 $x\in[a,b]$.

有 $|f_n(x)-f(x)|<\frac{f(x_0)}{2}$

则 $f_n(x)>f(x)-\frac{f(x_0)}{2}\geqslant\frac{f(x_0)}{2}$，$\forall x\in[a,b]$.

于是此时 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上也没有零点.