日期	页码	题目
4月24日	8	7
5月8日	7	23
	13	10
5月15日	3	例5.1.7
5月22日	5	10
	7	13
5月29日	Fourier级数部分	

例 5.2.6 若 $f_n(x)$在$[a,b]$上可积，$n=1,2,\cdots$，且 $f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$上都可积，

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|^2\mathrm{d}x=0,$$

设

$$h(x)=\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t, h_n(x)=\int_a^x f_n(t)g(t)\mathrm{d}t,$$

则在$[a,b]$上 $h_n(x)$一致收敛于 $h(x)$.(东北师范大学)

证 $|h(x)-h_n(x)|=\left|\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f_n(t)g(t)\mathrm{d}t\right|$

$$=\left|\int_a^x (f(t)-f_n(t))g(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\int_a^x |f(t)-f_n(t)||g(t)|\mathrm{d}t \quad \text{(利用 Cauchy 不等式)}$$

$$\leqslant\left(\int_a^x |f(t)-f_n(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^x |g(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left(\int_a^b |f(t)-f_n(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b |g(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\to 0 \quad (\text{当 } n\to\infty \text{时}).$$

所以 $n\to+\infty$时，$h_n(x)\rightrightarrows h(x)$于$[a,b]$上.

例 5.2.12 假设

1) $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续;

2) $x\neq 0$时有$|f(x)|<|x|$;

3) $f_1(x)=f(x), f_2(x)=f(f_1(x)), \cdots, f_n(x)=f(f_{n-1}(x)), \cdots$

试证:$f_n(x)$在$[-A,A]$上一致收敛(其中 A 为正常数).(南京大学,吉林大学)

证 因 $x\neq 0$ 时有$0\leqslant|f(x)|<|x|$,故令 $x\to 0$ 取极限(已知 $f(x)$ 连续)知 $0\leqslant f(0)\leqslant 0$. $f(0)=0$. 从而由条件 2),在$[-A,A](A>0)$上恒有$|f(x)|\leqslant|x|$.

由此,$\forall\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<A$),当 $x\in[-\varepsilon,\varepsilon]$时有$|f(x)|\leqslant|x|\leqslant\varepsilon$;在$[-A,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,A]$上,$\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|<1$ 连续,且有最大值 q:$0<q<1$. 于是$|f(x)|\leqslant q|x|\leqslant qA$. 总之在$[-A,A]$上恒有

$$|f(x)|\leqslant\max\{\varepsilon,qA\}.$$

$\forall x\in[-A,A]$,若$|f(x)|\leqslant\varepsilon$,则$|f_2(x)|=|f(f(x))|\leqslant|f(x)|\leqslant\varepsilon$. 若$|f(x)|\in[\varepsilon,A]$,则$|f_2(x)|=|f(f(x))|\leqslant q|f(x)|\leqslant q^2A$,所以总有$|f_2(x)|\leqslant\max\{\varepsilon,q^2A\}$. 同理,由$|f_{n-1}(x)|\leqslant\max\{\varepsilon,q^{n-1}A\}$可推出$|f_n(x)|\leqslant\max\{\varepsilon,q^nA\}$. 故此式对一切 n 成立. 由于 $n\to+\infty$时,$q^nA\to 0$,对 $\varepsilon>0$,$\exists N>0$,$n>N$ 时,$q^nA<\varepsilon$,所以

$$|f_n(x)|\leqslant\max\{\varepsilon,q^nA\}=\varepsilon.$$ 证毕.

例 5.2.23 假设 $b>0, a_1, a_2, \cdots$ 均为常数，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，试证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \dfrac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{-t} dt$ 在 $[0,b]$ 上一致收敛.

证 1° $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，自然关于 x 一致.

2° $0 \leqslant \dfrac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{-t} dt \leqslant \dfrac{1}{n!}\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = 1$①$(\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in [0,b])$

即 $\dfrac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{-t} dt$ 一致有界.

3° 当 $n>b$ 时，$\forall x \in [0,b]$，

$$\frac{1}{(n+1)!}\int_0^x t^{n+1} e^{-t} dt = \frac{1}{n!}\int_0^x \frac{t}{n+1} \cdot t^n e^{-t} dt \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{-t} dt,$$

即 $\dfrac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{-t} dt$ 关于 n 单调.

根据 Abel 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \dfrac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{-t} dt$ 在 $[0,b]$ 上一致收敛.

$$A_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$$

$$A_n = -e^{-t} t^n \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} n t^{n-1} dt$$

$$= n \cdot A_{n-1}$$

*例 5.2.55　设 $f_n(x)$在$[a,b]$上可积($n=1,2,\cdots$)且在$[a,b]$上 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$(当 $n\to\infty$时),试证 $f(x)$在$[a,b]$上可积.(天津大学)

分析　f可积的充分必要条件是:$\forall\varepsilon>0\exists[a,b]$的一个分划 T,使得 $\sum\limits_{i=0}^{k-1}\omega_i^f\Delta x_i<\varepsilon$.已知 f_n可积,所以对 f_n可找到这种分划 T.又因 n充分大时,f_n可以任意逼近 f(关于 $x\in[a,b]$一致).因此,取充分大的 n,对 f_n取分划 T,然后以此分划作为 f的分划即可.

证　因 $n\to\infty$时,$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$(关于 $x\in[a,b]$),故$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,当 $n>N$时,对于一切 $x\in[a,b]$,恒有

$$|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

又因 f_n在$[a,b]$上可积,对此 $\varepsilon>0,\exists[a,b]$的一个分划 $T:a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b$,使得

$$\sum_{i=0}^{k-1}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}.$$

其中
$$\omega_i=\sup_{x'_i,x''_i\in[x_{i-1},x_i]}|f_n(x'_i)-f_n(x''_i)|.$$

但是$\forall x'_i,x''_i\in[x_{i-1},x_i]$有

$$\begin{aligned}&|f(x'_i)-f(x''_i)|\\ \leqslant&|f(x'_i)-f_n(x'_i)|+|f_n(x'_i)-f_n(x''_i)|+|f_n(x''_i)-f(x''_i)|\\ \leqslant&\frac{\varepsilon}{4(b-a)}+\omega_i+\frac{\varepsilon}{4(b-a)}=\frac{\varepsilon}{2(b-a)}+\omega_i\end{aligned}$$

所以
$$\omega_i^f\equiv\sup_{x'_i,x''_i\in[x_{i-1},x_i]}|f(x'_i)-f(x''_i)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)}+\omega_i$$

于此
$$\sum_{i=0}^{k-1}\omega_i^f\Delta x_i\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i=0}^{k-1}\Delta x_i+\sum_{i=0}^{k-1}\omega_i\Delta x_i\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

证毕.

☆**例 5.3.35** 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无穷次可微并且满足:

(a) 存在 $M>0$,使得 $|f^{(k)}(x)|\leqslant M[\forall x\in(-\infty,+\infty),$ $k=0,1,2,\cdots]$;

(b) $$f\left(\frac{1}{2^n}\right)=0\quad(n=1,2,\cdots).$$

证明:在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $f(x)\equiv 0$.(广西大学)

证 1° 因为各阶导数一致有界,所以 $(-\infty,+\infty)$ 内处处有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{1}$$

$$\left(\text{因}\,|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}\to 0(\text{当 } n\to\infty).\right)$$

2° 由 $f\left(\frac{1}{2^n}\right)=0\quad(n=1,2,\cdots)$ 知,$f(0)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{2^n}\right)=0$,

$$f'(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{2^n}\right)-f(0)}{\frac{1}{2^n}}=0.$$

据 Rolle 定理,$\exists\,\xi_i^{(1)}:\frac{1}{2}>\xi_1^{(1)}>\frac{1}{2^2}>\xi_2^{(1)}>\frac{1}{2^3}>\cdots>\frac{1}{2^n}>\xi_n^{(1)}>$ $\frac{1}{2^{n+1}}>\cdots$ 使得 $f'(\xi_i^{(1)})=0$,从而 $\xi_n^{(1)}\to 0(n\to\infty$ 时),

$$f''(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f'(\xi_n^{(1)})-f'(0)}{\xi_n^{(1)}}=0,$$

类似可证,当 $f^{(k)}(x)$ 在 $\xi_1^{(k)}>\xi_2^{(k)}>\cdots>\xi_n^{(k)}>\cdots$ $(\xi_n^{(k)}\to 0)$ 点处有 $f^{(k)}(\xi_n^{(k)})=0$,且 $f^{(k)}(0)=0$,便可推出 $f^{(k+1)}(x)$ 亦然.

于是 $n=0,1,2,\cdots$ 恒有 $f^{(n)}(0)=0$,从而

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\equiv 0\quad(-\infty<x<+\infty).$$

注 条件(a)[各阶导数一致有界]不可缺少,否则命题可以不成立.如 $f(x)=\begin{cases}e^{-x^{-2}}\sin\dfrac{\pi}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

例 5.4.5 设 $f(x)$是以 2π 为周期的函数,满足 α 阶 Hölder 条件(亦称 α 阶的 Lipschitz 条件):

$$|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|^{\alpha}\quad(0<\alpha\leqslant 1).$$

证明: $a_n=O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right),b_n=O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right)$ (当 $n\to\infty$时).

证

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x \tag{1}$$

$$\left(令\ x=t+\frac{\pi}{n}\right)\qquad =\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}}f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\cos(nt+\pi)\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\cos nt\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\cos nx\mathrm{d}x. \tag{2}$$

(1)、(2)平均得

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right]\cos nx\mathrm{d}x.$$

$$|a_n|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right||\cos nx|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}L\cdot\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos nx|\mathrm{d}x\leqslant L\cdot\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}.$$

因此$|a_n|=O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right)$.类似可证$|b_n|=O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right)$.

☆**例 5.4.11** 1) 将周期为 2π 的函数

$$f(x)=\frac{1}{4}x(2\pi-x),x\in[0,2\pi]$$

展开为 Fourier 级数,并由此求出 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

2) 通过 Fourier 级数的逐项积分求出 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

(复旦大学)

解 1) $a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}x(2\pi-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\pi^2$,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}x(2\pi-x)\cos nx\mathrm{d}x=-\frac{1}{n^2},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}x(2\pi-x)\sin nx\mathrm{d}x=0$$

$$(n=1,2,\cdots),$$

且 $f(x)=\frac{1}{4}x(2\pi-x)$在$[0,2\pi]$上处处可导,$f(0+0)=f(2\pi-0)$,根据收敛定理有

$$\frac{1}{4}x(2\pi-x)=\frac{1}{6}\pi^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx\quad(\text{当 }x\in[0,2\pi]).\quad(1)$$

令 $x=0$ 可得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

2) 将(1)常数项移至左端,根据 Fourier 级数逐项积分的定理有

$$\int_0^x\left[\frac{1}{4}t(2\pi-t)-\frac{1}{6}\pi^2\right]\mathrm{d}t=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^x\cos nt\mathrm{d}t,$$

即
$$\frac{1}{6}\pi^2x-\frac{1}{4}\pi x^2+\frac{x^3}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin nx.$$

此式为左端函数的 Fourier 展开式.同理继续逐项积分两次,得

$$-\frac{1}{36}\pi^2x^3+\frac{1}{48}\pi x^4-\frac{x^5}{240}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\left(\frac{\sin nx}{n}-x\right),x\in[0,2\pi].$$

令 $x=2\pi$ 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{90}\pi^4.$$