15. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，满足：

$$\int_0^1 f(x)x^n \mathrm{d}x = 0, \quad n = 0,1,2,\cdots.$$

证明：在 $[0,1]$ 上，有 $f(x)\equiv 0$.

证明：由题设知，对任一多项式 $Q(x)$，有 $\int_0^1 Q(x)f(x)dx=0$.

又 f 是 $[0,1]$ 上的连续函数，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 多项式 $P(x)$，s.t. $|P(x)-f(x)|<\varepsilon$，对 $\forall x\in[0,1]$ 成立.

从而
$$\begin{aligned}\int_0^1 f^2(x)dx &= \int_0^1 f^2(x)dx - \int_0^1 f(x)P(x)dx\\ &= \int_0^1 f(x)(f(x)-P(x))dx\\ &\le \int_0^1 |f(x)|\cdot|f(x)-P(x)|dx\\ &\le \varepsilon\cdot\int_0^1 |f(x)|dx\end{aligned}$$

从而由 ε 的任意性可知，$\int_0^1 f^2(x)dx=0 \Rightarrow f\equiv 0$

注：将条件改为 $\int_0^1 f(x)x^n dx=0 \quad \forall n\ge n_0$，相应的结论也是对的。

$\int_0^1 x^{n-n_0}\cdot x^{n_0}f(x)dx=0 \Rightarrow x^{n_0}f(x)\equiv 0 \Rightarrow f(x)\equiv 0$.

17. 设函数 $f(x)$ 在一个无穷区间上可被多项式逼近，证明 $f(x)$ 必是一个多项式.

证明：设无穷区间为 I，又 $f(x)$ 在 I 上可被多项式逼近，则 $\exists$ 多项式列 $\{P_n(x)\}$ s.t. $P_n(x)\rightrightarrows f(x)$ 于 I 上

即 $\exists N$，对 $\forall n,m\ge N$，$\forall x\in I$，有 $|P_n(x)-P_m(x)|<1$，又 $P_n(x)-P_m(x)$ 是多项式，则只能为常数，从而 $\exists\{a_n\}$ $(n>N)$ 满足 $P_n(x)=P_{n_0}(x)+a_n$，$\{a_n\}$ 有界，则可抽取有一个收敛子列，不妨设 $a_n\to a$ $(n\to\infty)$. 从而

$f(x)=P_{n_0}(x)+a$

若和x相关，则会趋于无穷.

18. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可被多项式逼近，证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续.

证明：由 $f(x)$ 在 (a,b) 内可被多项式逼近，则 $\exists\{P_n(x)\}$，s.t. $P_n(x)\rightrightarrows f(x)$，$x\in(a,b)$

即对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$ 当 $n,m>N$ 时，对 $\forall x\in(a,b)$，有 $|P_n(x)-P_m(x)|<\varepsilon$，令 $x\to b^-$

有 $|P_n(b)-P_m(b)|\le\varepsilon$，从而 $\{P_n(b)\}$ 是 Cauchy 序列，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(b)$ 存在

令 $f(b)=\lim\limits_{n\to\infty}P_n(b)$，同理令 $f(a)=\lim\limits_{n\to\infty}P_n(a)$，由定理10.4.1的证明可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而一致连续.

连续性被保存.

背景信息

具体问题：抛一枚质地均匀的硬币50次，出现20次正面的概率？ $C_{50}^{20}\left(\frac12\right)^{20}\cdot\left(\frac12\right)^{30}$

抽象：每次试验成功的概率为p，重复试验n次，成功k次的概率？ $C_n^k\cdot p^k(1-p)^{n-k}$

记成功的次数为X，则 $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.

① $\sum\limits_{k=0}^{n}P(X=k)=1$ （总的概率为1），$\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=[p+(1-p)]^n=1$

② 数学期望：$EX=\sum\limits_{k=0}^{n}k\cdot C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\sum\limits_{k=1}^{n}nC_{n-1}^{k-1}p^{k-1}\cdot p(1-p)^{n-k}=np\sum\limits_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}=np$

③ 二阶矩：$EX^2=\sum\limits_{k=0}^{n}k^2\cdot C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\sum\limits_{k=1}^{n}(k-1+1)kC_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

$=\sum\limits_{k=1}^{n}k(k-1)C_n^k p^k(1-p)^{n-k}+np=n(n-1)p^2\sum\limits_{k=2}^{n}C_{n-2}^{k-2}p^{k-2}(1-p)^{n-k}+np$

$=n(n-1)p^2+np$

(1) $\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}x^k(1-x)^{n-k}=1;$ ① 概率和

(2) $\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)x^k(1-x)^{n-k}=0;$ ② 一阶矩相关

(3) $\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}.$ ③ 二阶矩相关

20. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 对每个正整数 n, 定义

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}.$$

证明 $B_n(f,x)\rightrightarrows f(x)$ $(x\in[0,1])$.

证明: $B_n(f,x)-f(x)=\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}-\sum_{k=0}^{n}f(x)\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

$=\sum_{k=0}^{n}[f(\frac{k}{n})-f(x)]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，从而一致连续，即对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x',x''\in[0,1]$，$|x'-x''|<\delta$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$

则 $|B_n(f,x)-f(x)|\le\sum_{k=0}^{n}|f(\frac{k}{n})-f(x)|\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

$=\sum_{k:|\frac{k}{n}-x|<\delta}|f(\frac{k}{n})-f(x)|\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k:|\frac{k}{n}-x|\ge\delta}|f(x)-f(\frac{k}{n})|\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

$\le\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k:|\frac{k}{n}-x|\ge\delta}|f(x)-f(\frac{k}{n})|\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

$=\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{k:|\frac{k}{n}-x|\ge\delta}|f(x)-f(\frac{k}{n})|\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

下面考虑 $\sum_{k:|\frac{k}{n}-x|\ge\delta}|f(x)-f(\frac{k}{n})|\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ 的估计，$|f|\le M$.

$\sum_{k:|\frac{k}{n}-x|\ge\delta}|f(x)-f(\frac{k}{n})|\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\le 2M\cdot\sum_{k:|\frac{k}{n}-x|\ge\delta}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\le 2M\cdot\sum_{k:|\frac{k}{n}-x|\ge\delta}\binom{n}{k}\frac{(\frac{k}{n}-x)^2}{\delta^2}x^k(1-x)^{n-k}$

$\le\frac{2M}{\delta^2}\cdot\frac{x(1-x)}{n}\le\frac{M}{2n\delta^2}$

取 $N\ge\frac{M}{\varepsilon\delta^2}$，则 $n>N$ 时，

$\sum_{k:|\frac{k}{n}-x|\ge\delta}|f(x)-f(\frac{k}{n})|\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\le\frac{\varepsilon}{2}$

于是 $B_n(f,x)\rightrightarrows f(x)$. 于 $[0,1]$.

15 题推广：

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且满足 $\int_a^b x^n f(x)dx=0$，$(n=0,1,2,\cdots)$ 证明 $f(x)=0$ 几乎处处.

证明：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\ g(x)\in C[a,b]$. s.t. $\int_a^b|f(x)-g(x)|dx<\varepsilon$

对于 g 是连续函数，$\exists$ 多项式 $P(x)$, s.t. $|P(x)-g(x)|<\varepsilon$. $\forall x\in[a,b]$

从而 $\int_a^b|f(x)|\cdot|P(x)-g(x)|dx\le\varepsilon\cdot\int_a^b|f(x)|dx$

从而 $\int_a^b f^2(x)dx=\int_a^b[f^2(x)-f(x)P(x)]dx\le\int_a^b|f(x)|\,|f(x)-P(x)|dx$

$\le M\int_a^b|f(x)-P(x)|dx\le M\int_a^b|f(x)-g(x)|dx+M\int_a^b|g(x)-P(x)|dx$

$<M\varepsilon+M\varepsilon\cdot(b-a)$

从而 f 几乎处处为 0.