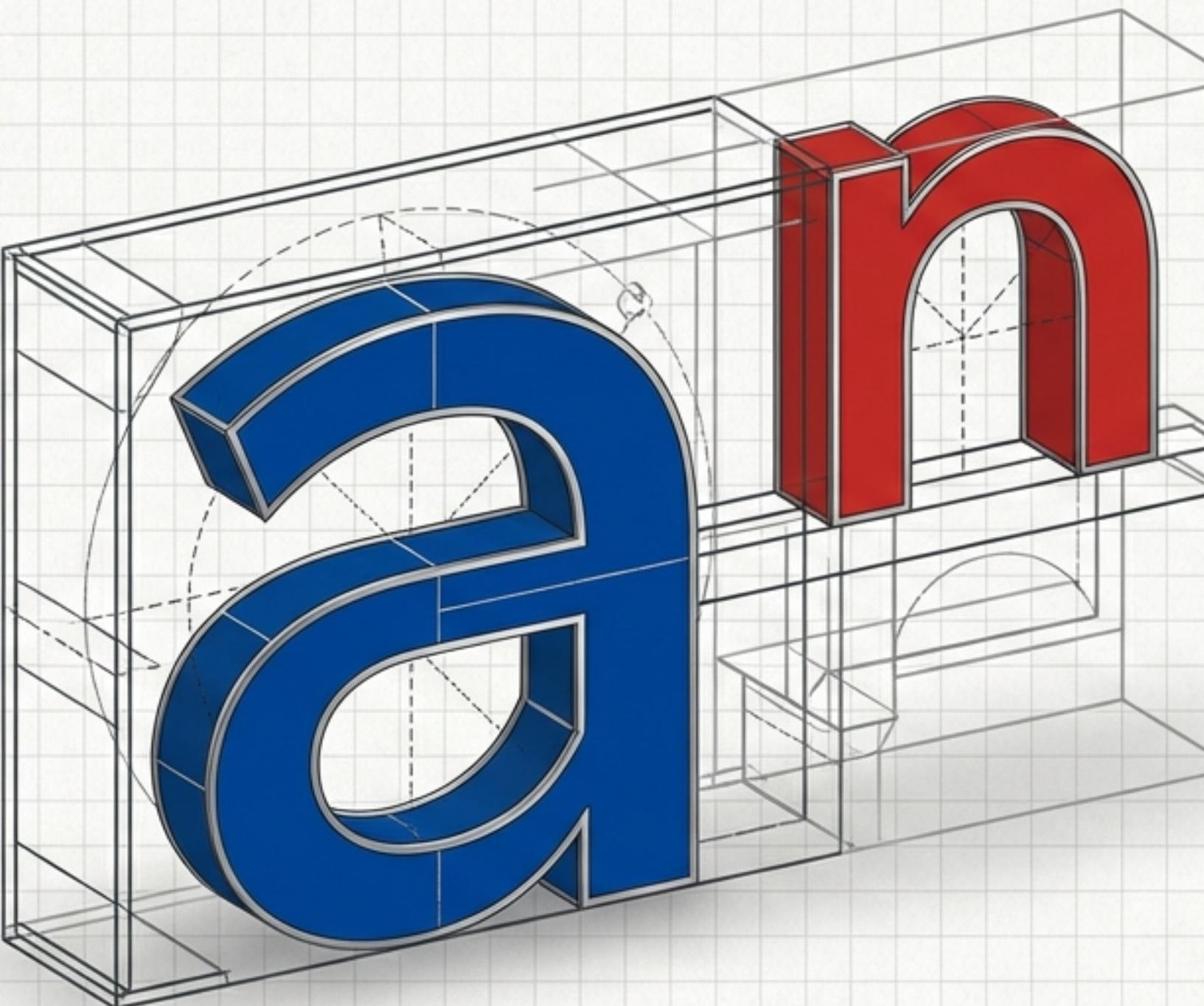


Le Proprietà delle Potenze: La Guida Definitiva

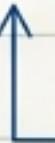
Dalla Definizione alla Padronanza, un Passo alla Volta.



Le Fondamenta: Che cos'è una Potenza?

La **potenza** è una moltiplicazione ripetuta di fattori uguali. È un modo elegante e compatto per scrivere calcoli lunghi.

Base - il numero che viene moltiplicato per se stesso.



a^n



Esponente - indica quante volte la base compare come fattore.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ volte}}$$

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

La base è **2**, l'esponente è **4**, la potenza (il risultato) è **16**.

Attenzione: Il Primo Errore da Non Commettere Mai

La potenza non è mai la moltiplicazione della base per l'esponente.

$$2^4 = 2 \times 4 = 8$$

ERRORE GRAVISSIMO

La Verità

La potenza è la moltiplicazione della base **per se stessa**, tante volte quanto indicato dall'esponente.

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

Le Regole del Gioco: I Casi Particolari

Prima di scoprire le proprietà che semplificano i calcoli, dobbiamo stabilire quattro regole fondamentali che valgono sempre.
Padroneggiare queste eccezioni è il primo passo verso la maestria.

$$a^1 \quad a^0 \rightarrow 1 \quad 1^n \quad 0^n \rightarrow 0$$

Le Regole per gli Esponenti: 1 e 0

Esponente 1

Qualsiasi numero elevato a 1 è uguale a se stesso.

$$a^1 = a$$

$$7^1 = 7$$

Esponente 0

Qualsiasi numero (diverso da zero) elevato a 0 è uguale a 1.

$$a^0 = 1 \text{ (con } a \neq 0\text{)}$$

$$5^0 = 1$$

Le Regole per le Basi: 1 e 0

Base 1

1 elevato a qualsiasi esponente è sempre 1.

$$1^n = 1$$

$$1^{100} = 1$$

Base 0

0 elevato a qualsiasi esponente positivo è 0.

$$0^n = 0 \text{ (con } n > 0\text{)}$$

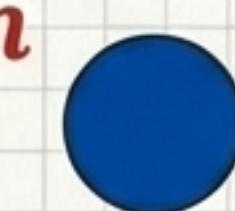
$$0^5 = 0$$

Il Cuore del Sistema: Le 5 Proprietà Fondamentali

Ora che le fondamenta sono solide, possiamo costruire. Le proprietà sono gli schemi che ci permettono di manipolare le potenze con agilità e precisione, trasformando problemi complessi in soluzioni semplici.



Operazioni con la **Stessa Base**



Operazioni con lo **Stesso Esponente**



La **Potenza di Potenza**

STESSA BASE

1. Prodotto di potenze con la stessa base

La Regola: $b^n \cdot b^m = b^{n+m}$

La Logica: Si **sommano** gli esponenti.

L'Esempio: $2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$

La Dimostrazione (per capire il perché):

$$2^2 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \longrightarrow = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$$

STESSA BASE

2. Quoziente di potenze con la stessa base

La Regola: $b^n : b^m = b^{n-m}$

La Logica: Si sottraggono gli esponenti.

L'Esempio: $9^8 : 9^6 = 9^{8-6} = 9^2 = 81$

La Dimostrazione (per capire il perché):

$$\frac{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9}{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9} \rightarrow = 9 \cdot 9 = 9^2$$

STESO ESPONENTE

3. Prodotto di potenze con lo stesso esponente

La Regola: $b^e \cdot c^e = (b \cdot c)^e$

La Logica: Si moltiplicano le basi. (Prima si esegue il calcolo, poi si eleva).

L'Esempio: $2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3 = 1000$

La Dimostrazione (per capire il perché):

$$\begin{aligned} 2^3 \cdot 5^3 &= (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) \\ &= (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = 10^3 \end{aligned}$$


STESO ESPONENTE

4. Quoziente di potenze con lo stesso esponente

La Regola: $b^e : c^e = (b : c)^e$

La Logica: Si **dividono** le basi.

L'Esempio: $10^5 : 5^5 = (10 : 5)^5 = 2^5 = 32$

La Dimostrazione (per capire il perché):

$$\frac{10^5}{5^5} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}$$

$$= \left(\frac{10}{5}\right) \cdot \left(\frac{10}{5}\right) \cdot \left(\frac{10}{5}\right) \cdot \left(\frac{10}{5}\right) \cdot \left(\frac{10}{5}\right) = 2^5$$

5. Potenza di una potenza

La Regola: $(b^m)^n = b^{m \cdot n}$

La Logica: Si moltiplicano gli esponenti.

L’Esempio: $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$

La Dimostrazione (per capire il perché):

Metodo 1 (Espansione):

extra (2^2) term to replicate three times

$$(2^2)^3 = (2^2) \cdot (2^2) \cdot (2^2)$$

$$= (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = 2^6$$

Metodo 2 (Uso della Proprietà 1):

$$(2^2)^3 = 2^{2+2+2}$$

$$2^{2+2+2} = 2^{3 \times 2} = 2^6$$

↑ adding the same number
3 times is multiplication

La Zona Pericolosa: Errori Comuni da Evitare

Conoscere le proprietà è solo metà del lavoro. La vera padronanza deriva dal sapere quando NON usarle e dal riconoscere le trappole più comuni. Presta la massima attenzione.



Quando le Proprietà NON si Applicano

Errore: Somma di potenze

$$2^3 + 2^4 \neq 2^7$$



La Verità:

Non esiste una proprietà per la somma! Si deve calcolare il valore di ogni potenza e poi sommare.

Calcolo Corretto:

$$8 + 16 = 24$$

Errore: Basi e esponenti diversi

$$2^3 \times 3^2 \neq 6^5$$



La Verità:

Se base ed esponente sono entrambi diversi, non si può applicare nessuna proprietà!

Calcolo Corretto:

$$8 \times 9 = 72$$

Confusioni Tipiche e Come Superarle

Errore 1: Confondere le operazioni

Prodotto
(stessa base)



SOMMA
esponenti
($2^3 \cdot 2^4 = 2^7$)

Potenza
di potenza



MOLTIPLICAZIONE
esponenti
($(2^3)^4 = 2^{12}$)

Trappola comune:

$(3^2)^4 = 3^8$, non 3^6

Errore 2: L'esponente zero

La regola è $a^0 = 1$.

Errori comuni:

$5^0 = 0$

$5^0 = 5$

$5^0 = 1$

Lo Schema Riepilogativo: La Tua Mappa delle Potenze

STESSA BASE

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

STESO ESPONENTE

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

I Casi Particolari

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1$$

$$1^n = 1$$

$$0^n = 0$$

POTENZA DI POTENZA

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

Ricorda: Nessuna proprietà per la somma o la sottrazione!