Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

T^*	akzeptiertes Alphabet
λ	leere Schaltfolge
$<_p$	lexikographische Ordnung

1 Grundbegriffe

- $t \in T$: Transition aus der Menge aller Transitionen
- $s \in S$: Stelle aus der Menge aller Stellen
- $(x, y) \in F$: Kannte aus der Menge aller Flussrelationen (Kanten)
- W : Gewichtungs-Funktion
- $W(x, y)$: Kanntengewicht (Gewicht auf den Pfeilen)
- ${}^{\bullet}x = \{y \mid (y, x) \in F\}$ Der Vorbereich von x
  Sprich: Vorbereich von x ist y mit der Eigenschaft: Kannte von y nach x ist Element aller Flussrelationen (Pfeile)
- $x^{\bullet} = \{y \mid (x, y) \in F\}$ Der NAchbereich von x
  Sprich: Nachbereich von x ist y mit der Eigenschaft: Kannte von x nach y ist Element aller Flussrelationen (Pfeile)
- $M : S \mapsto \mathbb{N}$ Markierung
  Eine Markierung M ist eine Menge von Stellen abgebildet auf $\mathbb{N}$

2 Definitionen

2.1 Definition 2.2 (aktivierte Transition)

$t \in T$ ist aktiviert unter Markierung M, $M\left[t\right\rangle$, falls $\forall s \in S : W(s,t) \leq M(s)$
Sprich: Transition t ist aktiviert unter Markierung M, falls für alle Stellen aus der Menge S gilt, dass das Kanntengewicht der Kannte von s nach t kleiner oder gleich Anzahl der Marken auf Stelle s ($M(s)$) ist.

2.2 Definition 2.3 (Schaltfolge)

Sei $w \in$ akzeptiertes Alphabet (T^*) : $M\left[w\right\rangle$ bzw. $M\left[w\right\rangle M'$ falls:

- $w =$ leere Schaltfolge (λ) (und $M = M'$)
- $w = w't$ mit $t \in T$, $M\left[w'\right\rangle M''\left[t'\right\rangle$ (und $M''\left[t\right\rangle M'$)

$FS(N) = \{w \in \mathrm{T}^* |\ M_N\left[w\right\rangle\}$ Menge der Schaltfolgen von N (firing sequence)
$w \in T^\omega$ unendliche Schaltfolge (falls alle endlichen Präfixe von w Schaltfolgen sind)

2.3 Definition 2.21

2.3.1 tot

t heißt tot unter M, falls $\forall M' \in \left[M\right\rangle : \neg M'\left[t\right\rangle$
t heißt tot, falls t tot unter M_N.
M heißt tot, falls alle Transitionen tot unter M sind.

2.3.2 lebendig

t heißt lebendig unter M, falls t unter keiner von M erreichbaren Markierung M' tot ist:
$\forall M' \in [M\rangle\, \exists M'' \in [M'\rangle : M''\, [t\rangle$
M heißt lebendig, wenn alle t unter M lebendig sind.
t heißt lebendig, falls t lebendig unter M_N.
N heißt lebendig, falls alle Transitionen lebendig sind.
Eine Transition t eines Netzes N ist

- 0-lebendig, wenn sie niemals schalten kann.
- 1-lebendig, wenn sie mindestens einmal schalten kann.
- 2-lebendig, wenn es für jedes $n \in N$ eine Schaltfolge gibt, in der t mindestens n-mal schaltet.
- 3-lebendig, wenn es eine unendliche Schaltfolge gibt, in der t unendlich oft schaltet.
- 4-lebendig, wenn es von jeder erreichbaren Markierung aus eine Schaltfolge mit t gibt.

2.3.3 Identifikation von S-Invarianten

S-Invarianten Sind nützlich um Situationen zu untersuchen bei denen es zu Konflikten kommen kann. z.B. reader writer Prozess. Hier ist zu beachten, dass lesen und schreiben nicht gleichzeitig geschehen dürfen. Dass dies sichergestellt werden kann dürfen zu keinem Zeitpunkt die Marken auf der Stelle für die Zugriffsrechte ausrechen, dass nach dem Starten eines Schreibprozess sofort der Leseprozess geschalten werden kann. Das kann nur der Fall sein, wenn jede Marke auch wirklich verbraucht wird und immer nur soviele Marken auf die Stellen gelegt werden wie auch verbraucht werden. Gleiches gilt auch für den Leseprozess. Hier dürfen jedoch mehrere Leseprozesse hintereinander gestartet werden. Auch hier gilt: Alle Leseprozesse müssen erst beendet werden, dass ein Schreibprozess gestartet werden darf.

S-Invarianten:

- Inzidenzmatrix aufstellen $s1..sn, t1...tm$
- gleiche Stellen in den s-Zeilen finden die Null ergeben $\rightarrow y1...yn$

Satz 3.4

Ist keine Transition in N tot (oder N gar lebendig) und y ein ganzzahliger Vektor mit $y^T * M = y^T * M_N$ für alle $M \in [M_N >$, dann ist y eine S-Invariante.

Identifikation von T-Invarianten

- Spalten der Inzidenzmatrix

Definition 3.2 (S-Invarianten überdeckt)

N heisst von S-Invarianten überdeckt, wenn N eine positive S-Invariante besitzt. (positiv: $\forall y(s) > 0$)

Satz 3.5 (beschränkt, sicher)

Ist $s \in S$ und y eine nicht-negative S-Invariante mit $y(s) > 0$, dann ist s - auch bei geänderter Anfangsmarkierung M_0 - beschränkt. Ist $y^T * M_0 = 1$, so ist s sicher unter M_0.

Satz 3.10 (T-Invarianten überdeckt)

wenn N bei einer Anfangsmarkierung M lebendig und beschränkt ist, dann ist N von T-Invarianten überdekt.

Siphon

$R \subseteq S$ ist ein Siphon (deadlock, Tube), falls ${}^\bullet R \subseteq R^\bullet$

Falle

$R \subseteq S$ ist eine Falle, falls $R^\bullet \subseteq^\bullet R$

Satz von Commoner

Sei N ein EFC-Netz ohne isolierte Stellen.
N ist lebendig $\Leftrightarrow$ Jeder nichtleere Siphon enthält eine markierte Falle.

3 Lemmata

3.1 Dicksons Lemma (5.3)

Sei $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von erweiterten Markierungen. Dann existiert eine (unendliche) schwach monotone Teilfolge $(M_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$, d.h. $\forall j \in \mathbb{N}$ gilt $i_j < i_{j+1}$ und $M_{ij} <= M_{ij} + 1$.

3.2 Königs Lemma (5.5)

Sei (V,E) ein unendlicher, lokal endlicher gerichteter Graph, so dass zu einem $v_0 \in V$ für alle $v \in V$ ein $v_0 v$-Weg existiert. Dann existiert ein unendlicher Weg $v_0 v_1 ...$

3.3 Lemma 6.3

N habe keine isolierten Stellen, und $R \neq \emptyset$ sei ein Siphon. Dann ist $R^\bullet \neq \emptyset$

3.4 Lemma 6.9

1. Die Vereinigung von Siphons (Fallen) ist ein(e) Siphon (Falle).

2. Jedes $R \subseteq S$ enthält eine größte (d.h. eindeutige maximale) Falle

3.5 Lemma 6.10

lexikographische Ordnung ($<_p$) ist wohlgegründet, d.h. es gibt keine unendliche echt absteigende Kette ($M_1 >_p M_2 >_p M_3 ...$)

3.6 Lemma 6.11

Sei N ein EFC-Netz (extended free choice), $R \subseteq S$ und Q die maximale (d.h. größte) Falle in R. Dann gibt es eine Ordnung P von R Q, so dass für alle Markierungen M, unter denen Q unmarkiert ist, gilt:
$[(\exists t \in R^{\bullet} : M\,[t\rangle) \vee (R$ ist Siphon $\wedge \exists t \in R^{\bullet}$: t ist nicht tot unter M)] $\Rightarrow [\exists M' \in [M\rangle : M' <_p M]$ und Q ist unmarkiert unter M'.

4 Übungen

4.1 Übung 1

Aufgabe 1

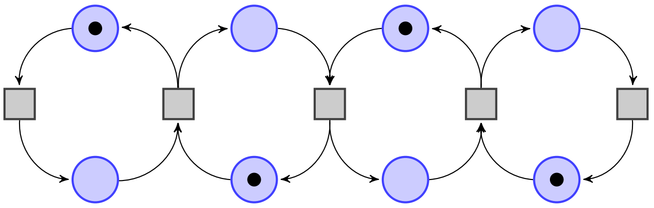


Abbildung 4.1: Lösung 1

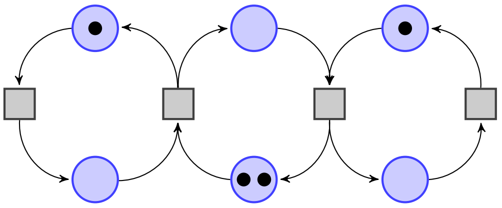


Abbildung 4.2: Lösung 2

Aufgabe 2

a)

$n = 0 : M(1, 0, 0) \in M_N$
$n = 1 : M(1, 0, 1)$
Erreichbar mit:
$M_N\,[a\rangle\, M'\,[b\rangle\, M(1, 0, 1) = M_N\,[(ab)\rangle\, M(1, 0, 1)\ w = (a, b)$
$n = n : M_N\,[(ab)^n\rangle\, M(1, 0, n)$

b)

Erreichbare Markierungen sind:
$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 0, n), (1, 0, (n + 1))$
$(1, 0, 0)\,[(ab)\rangle\,(1, 0, 1)$
$(1, 0, 0)\,[(ab)^n\rangle\,(1, 0, n)$
$(1, 0, 0)\,[(ab)^{n+1}\rangle\,(1, 0, (n + 1))$
$(1, 0, 0)\,[(ab)\rangle\,(1, 0, 1)\,[(c\rangle\,(0, 0, (n - 1))$
$(1, 0, 0)\,[(ab)^n c\rangle\,(0, 0, n)$

d

$R = (1, 0, n), (0, 1, (n + 1)), (0, 0, n) \mid n \in \mathbb{N} \subseteq [M_N\rangle$
$R \supseteq [M_N\rangle$
Behauptung: $M_N\,[w\rangle\,M \Rightarrow M \in R$ Induktion über w

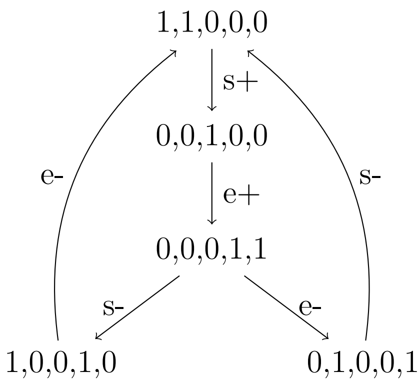
Beweis:

- $w = \lambda : M = M_N \in R$✓
- $w = w't : M_N\,[w'\rangle\,M'\,[t\rangle\,M$ Nach Induktion $M' \in R$✓
- $M' = (1, 0, n) : t = a : M = (0, 1, (n + 1)) \in R$ ✓

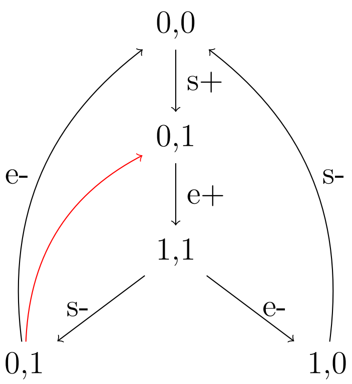
$t = c \wedge n >= 1 : M = (0, 0, (n - 1)) \in R$ ✓
$M' = (0, 1, (n + 1)) : t = b : M = (1, 0, (n + 1)) \in R$✓
$M' = (0, 0, n) : \neg\exists t$ ↯

Aufgabe 3

Alle Markierungen:



Alle Codes:



Es besteht ein Konflikt. Zu vermeiden wäre der Konflikt mit einer zusätzlichen Stelle im Code.
Der STG ist jedoch konsistent, da nie s+, e+, s- oder e- zweimal hintereinander oder s+ und s- bzw e+ und e- sofort hintereinander ausgeführt werden.

4.2 Übung 2

Aufgabe 2

a)

Behauptung:
$M_{N'} = M_N + \delta M \qquad \Rightarrow FS(N) <= FS(N')$
Beweis:
$M_N\, [w\rangle\, M' \qquad \Leftarrow w \in FS(N)$
$M_N + \delta M\, [w\rangle\, M'_N + \delta M \qquad \Rightarrow w \in FS(N')$
Nach 2.7.
$M_{N'}\, [w\rangle\, M'_N + \delta M$

b)

$s' = S - \{s_0\}\,, W' = W\, |_{S-\{s_0\}}, M_{N'} = M_N\, |_{S-\{s_0\}}$
$M_N\, [w\rangle\, M \Rightarrow M_{N'}\, [w\rangle\, M' \wedge M' = M\, |_S - \{s_0\}$
Induktionsanfang:
$w = \lambda : \quad M_N\, [w\rangle\, M \Rightarrow M_N = M$
$\qquad M_{N'}\, [w\rangle\, M' \Rightarrow M_{N'} = M\, |_S - \{s_0\}$
Induktionsschritt:
$w = w't : \quad M_N\, [w'\rangle\, M''$
$\qquad M_{N'[w'\rangle} M''' \wedge M''' = M''\, |_S - \{s_0\}$ nach Induktion
Die Markierungen sind die Selben. Das 2.Netz hat lediglich eine Stelle weniger
Zu zeigen: $M''\, [t\rangle\, M \Rightarrow M'''\, [t\rangle\, M' \wedge M' = M\, |_S - \{s_0\}$

4.3 Übung 3

Aufgabe 1

Schalten von 0 Transitionen:
$M_N\,[\lambda\rangle\,M \qquad\qquad M_N = M = 1,2,1$
Schalten von 1 Transition:
Schalten von a b oder c:
$(1,2,1)\,[a\rangle\,(0,1,1)$
$(1,2,1)\,[b\rangle\,(1,1,0)$
$(1,2,1)\,[c\rangle\,(1,2,0)$
$(1,2,1)\,[d\rangle\,(1,1,2)$
Da es sich um eine Halbordnung handelt muss jedes Element einer Markierung mit den anderen Elementen der anderen Markierungen verglichen werden. Daraus resultiert, dass es sich bei $(1,1,2)$ und $(1,2,1)$ um maximale Markierungen handelt.

4.4 Übung 4

Aufgabe 1

N_1 :	ist lebendig
	ist verklemmungsfrei
N_2 :	ist nicht tot
	ist nicht verklemmungsfrei
N_3 :	ist lebendig
	ist nicht verklemmungsfrei
N_4 :	ist lebendig
	ist nicht verklemmungsfrei
N_5 :	ist tot
	ist nicht verklemmungsfrei

Aufgabe 2

Es gibt keine lebendige Markierung

Aufgabe 4

$r_1(r_2e_2L_2)^\omega$

schwach fair, da e_1 nicht fair behandelt wird

e_2 ist zwar unendlich oft aktiviert aber auch unendlich oft deaktiviert.

stark fair:

r_1 und l_1 sind nie aktiviert ($\Rightarrow$ können sich nicht beschweren, tun nichts zur Sache)

S-Invariante $\Rightarrow$ r_1 leer l_1 immer leer

$r_2e_2l_2$: e_1 wird nicht stark fair behandelt.,

4.5 Übung 5

Aufgabe 1

a)

Suchen der S-Invarianten:
Inzidenzmatrix:

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
 & e_1 & e_2 & r_1 & r_2 & l_1 & l_2 & g_1 & g_2 \\
\hline
req_1 & -1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
req_2 & 0 & -1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
c_1 & +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
c_2 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
tok_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & +1 \\
tok_2 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 & -1 \\
nc_1 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\
nc_2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 & 0 & 0
\end{array}
$$

Auf Null kommen:
$y_1 = \left(c_1 + c_2 + tok_1 + tok_2\right)$
$y_2 = \left(c_1 + nc_1 + req_1\right)$
$y_3 = \left(c_2 + nc_2 + req_2\right)$
Es genügt zu zeigen, dass, wenn $M(c_1) = 1$ $M(c_2) = 0$
darum wähle y_1:
Effekt von e_1: $+1, 0, -1, 0 = 0$ symmetrisch zu e_2
Effekt von l_1: $-1, 0, 0, +1 = 0$ symmetrisch zu l_2
Effekt von g_1: $0, 0, -1, +1 = 0$ symmetrisch zu g_2

b)

Das Netz gilt als sicher, wenn gilt: $y^T M_N = 1$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 = 1$$

Selbige Rechnung für y_2 und y_3 durchführen

$\Rightarrow$ Das Netz ist damit sicher.

c)

Alle r_1		
Annahme:		$v r_1 w \; e_1 \notin w$
Nach r_1:		$M(req) = 1$ wegen $y_2 \Rightarrow M(c_1) = M(nc_1) = 0$
Fälle:	i)	$req_1 + nc_2 + tok_1$: e_1 darf nicht schalten
		$r_2 \Rightarrow$ ii) r_2 schaltet wegen Maximalität
	ii)	$req_1 + req_2 + tok_1$: nur e_1 aktiv
		(wegen Annahme Maximailtät müsste schalten $\lightning$)
	iii)	$req_1 + nc_2 + tok_2$: r_2 aktiv $\Rightarrow$ iv) g_2 aktiv $\Rightarrow$ i)
	iv)	$req_1 + req_2 + tok_2$: e_2 aktiv $\Rightarrow$ v)
	v)	$req_1 + c_2$: l_2 aktiv $\Rightarrow$ i)

$\Rightarrow$ keine Maximale

stark fair $\Rightarrow$ ist schwach fair $\Rightarrow$ ist maximal

Aufgabe 2

$M_N(s_0) = 0$ nach t_1 tot

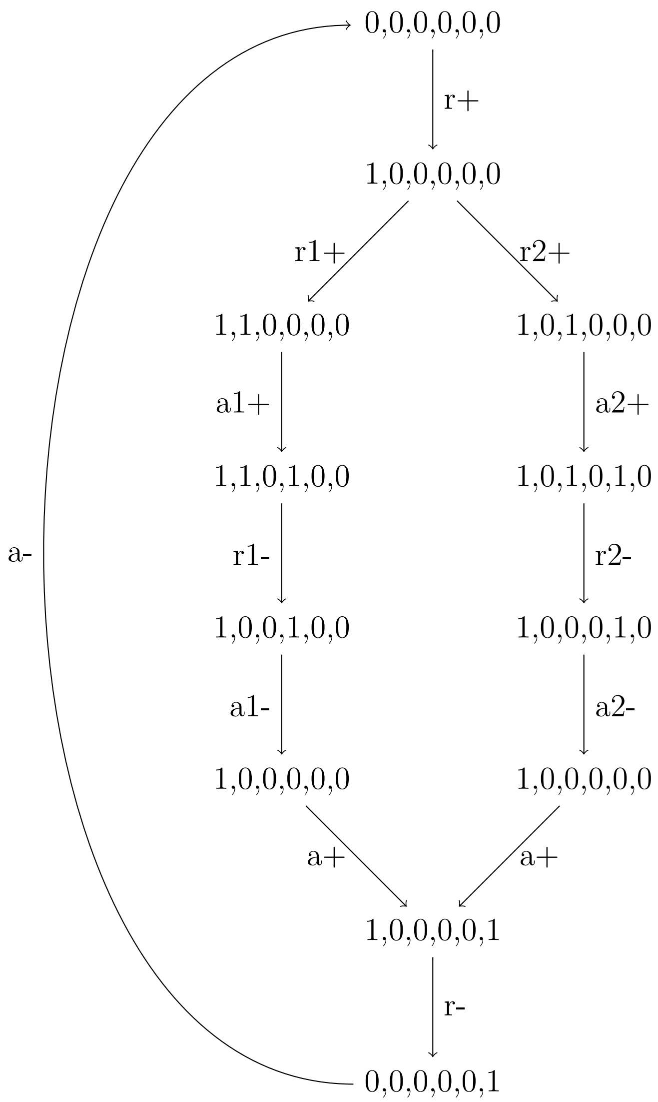
$M_N(s_0) = 1$ $(t_1 t_3 t_2 t_4)^\omega$ lebendig

$M_N(s_0) > 1$ $(t_1 t_3 t_2 t_3) \rightarrow tot$

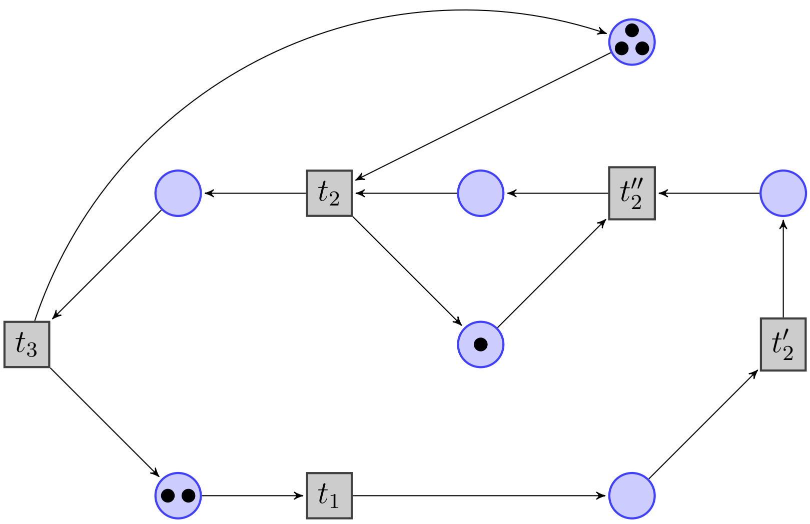
4.6 Übung 6

Aufgabe 1

Markierungsaufbau: r r1 r2 a1 a2 a



Aufgabe 2



S-Invarianten:

wenn bei s eine Marke liegt, liest und schreibt kein anderer Prozess.

$z + l + 3s + 2s_2 + s1 = 3$

ursprünglich $z + l + 3s = 3$

wenn auf s mindestens eine Marke liegt $\Rightarrow 3 \Rightarrow$ alle anderen 0

Beweis:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} t_2' & t_2'' & t_2 & t_3 & t_5 & t_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3s \\ 2s_2 \\ s_1 \\ z \\ l \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Die Summen unter allen Transitionen ergibt 0

Aufgabe 3

S-Invarianten:

$y_1 = s_0 + s_1 = n$

$y_2 = s_5 + s_6 = 1$

$y_3 = s_2 + s_3 + s_4 = 1$

Effekte auf

$y1$: t_3: $-1 + 1 = 0$

t_4: $+1 - 1 = 0$

$y2$: t_1: $+1 - 1 = 0$

t_2: $-1 + 1 = 0$

$y3$: t_1: $-1 + 1 + 0 = 0$

t_2: $0 + 1 - 1 = 0$

t_3: $0 - 1 + 1 = 0$

t_4: $+1 - 1 + 0 = 0$

Aufgabe 4

a)

0-lebendig = tot

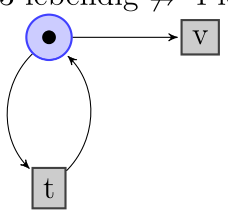
4-lebendig $\Rightarrow$ 3-lebendig $\Rightarrow$ 2-lebendig $\Rightarrow$ 1-lebendig

$\neg$3-lebendig $\Rightarrow$ $\neg$4-legendig

$\neg$3-lebendig $\Rightarrow$ Schaltfolgen beinhalten endlich viele t's

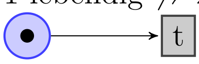
$\Rightarrow$ irgendwann kann t nicht mehr schalten $\lightning$ 4-lebendig $\Rightarrow$ $\neg$4-lebendig

3-lebendig $\not\Rightarrow$ 4-lebendig



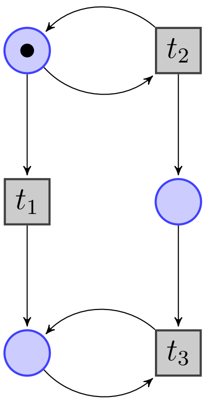
ist zwar 3-lebendig jedoch nicht aus jeder erreichbaren Markierung ist t schaltbar, da v ein Verbraucher ist $\Rightarrow$ Marke weg!

1-lebendig $\not\Rightarrow$ 2-lebendig



1x schalten ja; jedoch $n = 2 \lightning$

2-lebendig n-mal schalten ja jedoch nicht unendlich oft



42 mal aufbauen; danach 42 mal abbauen,

b)

ist 0-lebendig dann auch N' 0-lebendig? ja

1-lebendig: ja

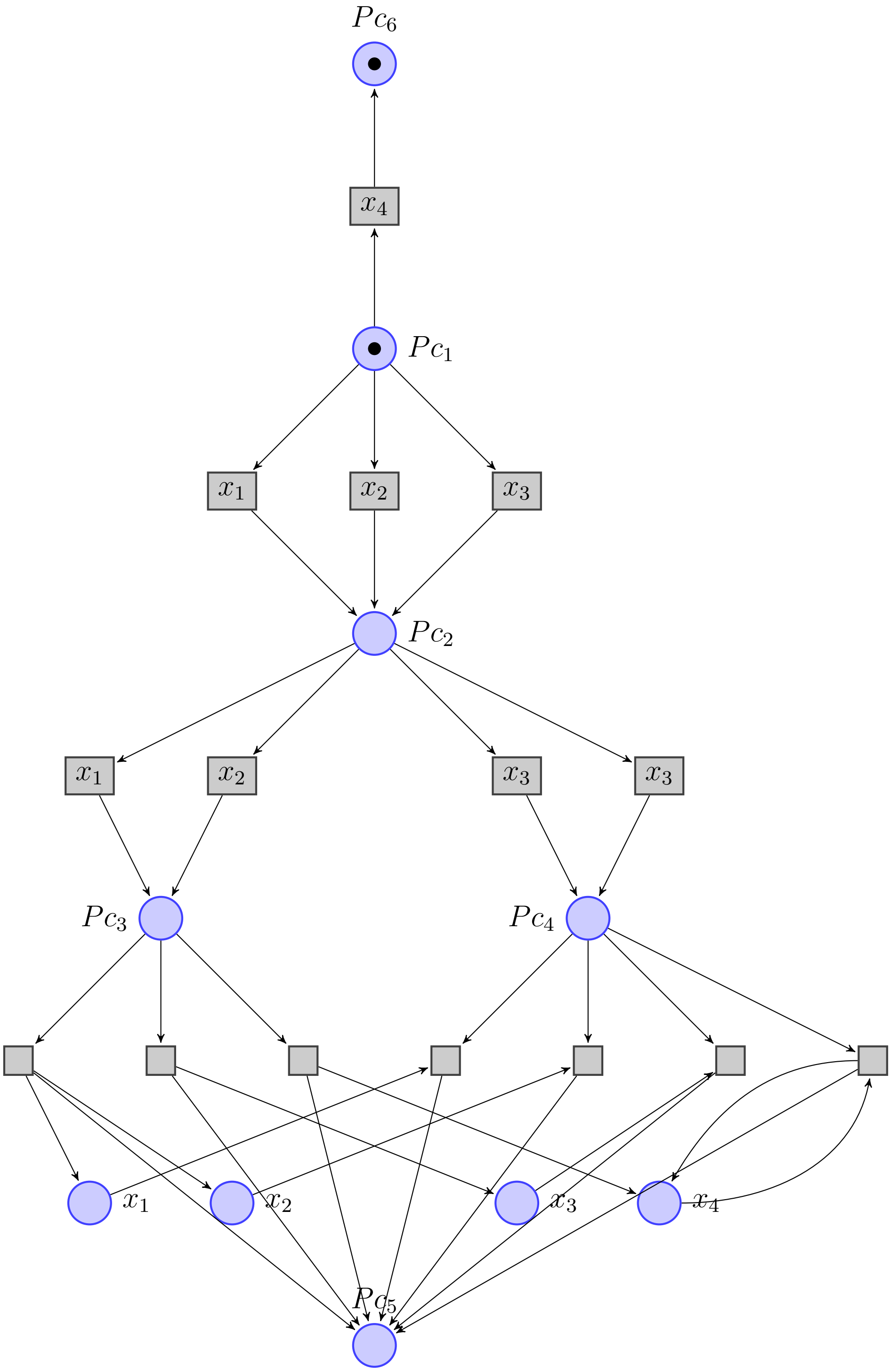
2-lebendig: ja

3-lebendig: ja

4-lebendig: nein

4.7 Übung 7

Aufgabe 1



OH MANN!!!

Aufgabe 2

a)

Satz 4.5 Transitionen können sehen ob eine andere geschalten hat wenn dazwischen eine Stelle ist die eine Marke beinhaltet.