



WEST BENGAL STATE UNIVERSITY

B.Sc. General PART-II Examinations, 2016

MATHEMATICS-GENERAL

PAPER-MTMG-II

Time Allotted: 3 Hours

Full Marks: 100

*The figures in the margin indicate full marks.
Candidates should answer in their own words
and adhere to the word limit as practicable.*

*প্রান্তিক সীমার মধ্যস্থ সংখ্যাটি পূর্ণ মান নির্দেশ করে।
পরীক্ষার্থীরা যথা সম্ভব নিজের ভাষায় নির্দিষ্ট শব্দসীমার
মধ্যে উত্তর করিবেন।*

Group-A

বিভাগ-ক

[Full Marks-25]

Answer Question No. 1 and any two from the rest:

১ নং প্রশ্ন ও অন্য যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন:

1. (a) Three sets A , B and C be such that $A - B = \{2, 4, 6\}$ and $A - C = \{2, 3, 5\}$. 2
Find $A - (B \cup C)$.

A , B ও C তিনটি সেটের জন্য $A - B = \{2, 4, 6\}$ এবং $A - C = \{2, 3, 5\}$, $A - (B \cup C)$ নির্ণয় করুন।

Or / অথবা

Prove or disprove that $A \times B = B \times A$, for any two non-empty sets A and B . 2
Here $A \times B$ denotes Cartesian product of two sets A and B .

যে-কোন দুটি অসূন্য সেট A ও B এর জন্য, $A \times B = B \times A$ এর সত্যতা যাচাই করুন।
এখানে $A \times B$ হল A ও B এর কার্ভেশিয় গুনফল।

- (b) Let $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ be define by $f(x)=x^2$, for all $x \in \mathbb{R}$. Is f bijective mapping? Where \mathbb{R} and \mathbb{R}^+ are sets of real numbers and positive real numbers.

3

ধরাযাক $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ চিত্রনটি $f(x)=x^2$ রূপে সমস্ত $x \in \mathbb{R}$ -এর জন্য সজ্জায়িত যেখানে \mathbb{R} ও \mathbb{R}^+ হল যথাক্রমে বাস্তব সংখ্যার ও ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট হয়। f চিত্রনটি কি এক-এক উপরিচিত্রন?

2. (a) Prove that $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$. Where A, B, C are non-empty sets and $A \times B$ denotes Cartesian product of two sets A and B .

3

যে-কোন তিনটি অশূন্য সেট A, B, C এর জন্য প্রমাণ করুন $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$ | এখানে $A \times B$ হল A ও B সেটের কার্ভেশিয় গুনফল।

- (b) Give an example with verification of mapping which is neither injective nor surjective.

4

এক-এক ও উপরিচিত্রন হবে না এমন একটি চিত্রনের ব্যাখ্যাসহ উদাহরণ দিন।

- (c) If $f: X \rightarrow Y$ and $A \subseteq X, B \subseteq Y$, prove that $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

3

যদি $f: X \rightarrow Y$ ও $A \subseteq X, B \subseteq Y$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

3. (a) Prove that (G, \cdot) , where $G = \{x: x^4 = 1\}$ forms an abelian group.

4

প্রমাণ করুন যে, (G, \cdot) একটি অ্যাবেল দল। যেখানে $G = \{x: x^4 = 1\}$ |

- (b) Prove that intersection of two sub-group of a group (G, \circ) is a sub-group of (G, \circ) .

3

প্রমাণ করুন একটি দল (G, \circ) দুটি উপদলের intersection ঐ দল (G, \circ) -এর একটি উপদল হবে।

- (c) Prove that a group (G, \circ) is abelian if and only if for all $a, b \in G, (a \circ b)^{-1} = a^{-1} \circ b^{-1}$.

3

প্রমাণ করুন যে, যদি (G, \circ) দলটি abelian হয় তবে যে-কোন $a, b \in G$ -এর জন্য $(a \circ b)^{-1} = a^{-1} \circ b^{-1}$ হবে এবং উল্টোদিক থেকে যদি যে-কোন $a, b \in G$ এর জন্য $(a \circ b)^{-1} = a^{-1} \circ b^{-1}$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে, (G, \circ) একটি abelian দল।

4. (a) Let $P(X)$ be the power set of the non-empty set X . For any $A, B \in P(X)$, define $A + B = (A \cup B) - (A \cap B)$ and $A \cdot B = A \cap B$; then show that $(P(X), +, \cdot)$ is a ring. 6

ধরা যাক $P(X)$ হল একটি অশূন্য সেট X -এর power set, যে-কোন $A, B \in P(X)$ -এর জন্যে $A + B = (A \cup B) - (A \cap B)$ এবং $A \cdot B = A \cap B$ রূপে সংজ্ঞায়িত হলে দেখান যে $(P(X), +, \cdot)$ একটি মন্ডল।

- (b) Show that a ring $(R, +, \cdot)$ is commutative if for any $a, b \in R$, $(a + b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2$. 4

যে-কোন $a, b \in R$ -এর জন্যে যদি $(a + b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2$ হয়, তবে দেখান যে $(R, +, \cdot)$ মন্ডলটি একটি commutative মন্ডল হবে।

5. (a) Let A be an invertible matrix. If λ be one root of the characteristic equation of A , then prove that $\frac{1}{\lambda}$ is a root of the characteristic equation of A^{-1} . 4

ধরাযাক A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্সের অস্তিত্ব বর্তমান। A ম্যাট্রিক্সের characteristic সমীকরনের একটি বীজ- λ হলে প্রমাণ করুন যে A^{-1} ম্যাট্রিক্সের characteristic সমীকরনের বীজ হবে $\frac{1}{\lambda}$ ।

- (b) Prove that $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ is a subspace of the vector space \mathbb{R}^3 , where \mathbb{R}^3 is three dimensional real vector space. 3

প্রমাণ করুন যে $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ হল ত্রিমাত্রিক বাস্তব ভেক্টর দেশ \mathbb{R}^3 -এর একটি উপদেশ।

- (c) If $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ be a basis of three dimensional real vector space \mathbb{R}^3 , prove that $\{\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha\}$ is another basis of \mathbb{R}^3 . 3

ত্রিমাত্রিক বাস্তব ভেক্টর দেশ \mathbb{R}^3 -এর ভিত্তি $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ হলে প্রমাণ করুন যে $\{\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha\}$ ও একটি \mathbb{R}^3 -এর ভিত্তি হবে।

Group-B

বিভাগ-খ

[Full Marks-20]

Answer Question No. 6 and any two from the rest:

৬ নং প্রশ্ন ও অন্য যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন:

6. Answer any two questions from the following:

2×2 = 4

নিম্নলিখিত যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন:

- (a) Find the angles between x -axis and the straight line through $(1, 2, 3)$ and $(2, 3, 4)$.

 x -অক্ষ এবং $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$ বিন্দুগামী সরলরেখার মধ্যে কোণ গুলি নির্ণয় করুন।

- (b) Find the perpendicular distance between two parallel planes $x + 2y + z + 6 = 0$ and $2x + 4y + 2z - 9 = 0$.

 $x + 2y + z + 6 = 0$ এবং $2x + 4y + 2z - 9 = 0$ দুটি সমান্তরাল সমতলের মধ্যে লম্ব দূরত্ব নির্ণয় করুন।

- (c) Show that the plane $x + y - 2z + 4 = 0$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

দেখান যে $x + y - 2z + 4 = 0$ সমতলটি $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ গোলককে স্পর্শ করে।

7. (a) The projection of a line segment on the axes are 2, 3, 6 units. Show that its

4

length is 7 units and its direction cosines are $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}$.

একটি রেখাংশের স্থানাঙ্ক অক্ষত্রয়ের উপর ছায়ার দৈর্ঘ্য 2, 3, 6 একক। দেখান যে ঐ রেখাংশের

দৈর্ঘ্য 7 একক এবং ঐ রেখাংশের কোসাইন দিগন্ত গুলির মান $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}$.

- (b) If the three lines whose direction cosines are $l_i, m_i, n_i, i = 1, 2, 3$ are coplanar, prove that

4

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 0.$$

তিনটি সরল রেখা যাদের কোসাইন দিগন্তগুলি $l_i, m_i, n_i; i = 1, 2, 3$ সমতলীয় হলে প্রমাণ করুন।

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 0.$$

8. (a) Find the equation of the plane parallel to y -axis and passing through the points $(1, 0, 2)$ and $(2, 1, -3)$.

4

y -অক্ষের সমান্তরাল ও $(1, 0, 2), (2, 1, -3)$ বিন্দুগামী সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

- (b) Find the image of the point $(1, -2, 3)$ with respect to the plane $2x - 3y + 3z + 3 = 0$.

4

$2x - 3y + 3z + 3 = 0$ সমতলের সাপেক্ষে $(1, -2, 3)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব নির্ণয় করুন।

9. (a) Find the equation of the plane which bisects the line joining the points $(1, 2, 3)$ and $(3, 4, 5)$ at right angles and show that it makes equal intercepts on the axes.

4

$(1, 2, 3)$ ও $(3, 4, 5)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখাংশের মধ্যবিন্দুগামী ও ঐ রেখার লম্ব সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করুন এবং দেখান যে সমতলটি অক্ষগুলিকে সমান-সমান দৈর্ঘ্যেছেদ করেছে।

- (b) Find the distance of the point $(-2, 3, -4)$ from the straight line $\frac{x+2}{3} = \frac{2y+3}{4} = \frac{3z+4}{5}$ measured parallel to the plane $4x + 12y - 3z + 1 = 0$.

4

$4x + 12y - 3z + 1 = 0$ সমতল বরাবর $(-2, 3, -4)$ বিন্দু থেকে $\frac{x+2}{3} = \frac{2y+3}{4} = \frac{3z+4}{5}$

সরলরেখার দূরত্ব নির্ণয় করুন।

- 10.(a) Find the centre and radius of the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $x + 2y + 2z + 9 = 0$. 4

$x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $x + 2y + 2z + 9 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

- (b) A plane passes through a fixed point (α, β, γ) and cuts the coordinate axes at A, B, C . Prove that the locus of the centre of the sphere $OABC$ is given by 4

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} = 2.$$

(α, β, γ) বিন্দুগামী সমতল অক্ষগুলিকে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করুন

$$OABC \text{ গোলকের কেন্দ্রের সঞ্চার পথের সমীকরণ } \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} = 2 \mid$$

Group-C

বিভাগ-গ

[Full Marks-25]

Answer Question No. 11 and any two from the rest:

১১ নং প্রশ্ন ও অন্য যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন:

- 11.(a) Answer any one question from the following: 2×1 = 2

নিম্নলিখিত যে-কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন:

- (i) Prove that the sequence $\{x_n\}$ where $x_n = (-1)^n$ is not convergent.

$x_n = (-1)^n$ হলে দেখান যে অনুক্রমটি অভিসারী নয়।

- (ii) Find the domain of definition of the function $f(x) = \sqrt{8 + 2x - 3x^2}$.

$f(x) = \sqrt{8 + 2x - 3x^2}$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞাক্ষেত্রটি নির্ণয় করুন।

- (iii) Verify Rolle's theorem for the function $f(x) = x^2 - 5x + 6$ in the interval $1 \leq x \leq 4$.

$1 \leq x \leq 4$ অন্তরালে $f(x) = x^2 - 5x + 6$ অপেক্ষকটির সাপেক্ষে Rolle's-এর উপপাদ্যটির সত্যতা যাচাই করুন।

(b) Answer any *one* question from the following:

3×1 = 3

নিম্নলিখিত যে-কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন:

(i) Define limit of a sequence and hence establish that $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1}{3n^2 + 1} = \frac{1}{3}$.

একটি অনুক্রমের সীমার সংজ্ঞা দিন। এবং এর সাহায্যে প্রমাণ করুন যে $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1}{3n^2 + 1} = \frac{1}{3}$.

(ii) Let a function $f(x)$ be defined as $f(x) = \frac{|x|}{x}$, when $x \neq 0$
 $= -1$, when $x = 0$

Discuss about the continuity of $f(x)$ at $x = 0$.

একটি অপেক্ষক, $f(x)$ কে $f(x) = \frac{|x|}{x}$, যখন, $x \neq 0$
 $= -1$ যখন, $x = 0$

এই ভাবে সংজ্ঞাত করা হলে, $x = 0$ বিন্দুতে অপেক্ষকটি সম্ভব কিনা বিচার করুন।

(iii) Find the value of $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos x}{x \sin x}$.

মান নির্ণয় করুন: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos x}{x \sin x}$.

12.(a) Use Cauchy's criterion to prove that $\{x_n\}$ converges when

4

$$x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

$x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ হলে Cauchy's criterion-এর সাহায্যে দেখান যে $\{x_n\}$ অনুক্রমটি অভিসারী।

- (b) Test the convergence of the series $\frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + \frac{4^2}{2^4} + \dots + \frac{n^2}{2^n} + \dots$ 2

$$\frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + \frac{4^2}{2^4} + \dots + \frac{n^2}{2^n} + \dots \text{ শ্রেণীটির অভিসারিত্ব পরীক্ষা করুন।}$$

- (c) Using Raabe's test prove that the series $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \dots$ converges. 4

Raabe's Test -এর সাহায্যে প্রমাণ করুন যে $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \dots$ শ্রেণীটি অভিসারী।

- 13.(a) Find the value of $\lim_{x \rightarrow 0} (x^{2 \sin x})$. 2

মান নির্ণয় করুন $\lim_{x \rightarrow 0} (x^{2 \sin x})$.

- (b) State and prove Lagrange's Mean Value Theorem. 4

Lagrange's Mean Value উপপাদ্যটি বিবৃত করে প্রমাণ করুন।

- (c) Expand $\log_e(1+x)$ in powers of x when $x > -1$. 4

$\log_e(1+x)$ অপেক্ষকটিকে x -এর ঘাতের সাপেক্ষে বিস্তার করুন।

- 14.(a) Determine the asymptotes of $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 + 2xy + 2y^2 - 3x + y = 0$. 4

$x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 + 2xy + 2y^2 - 3x + y = 0$ বক্ররেখাটির স্পর্শপ্রবন সরলরেখা নির্ণয় করুন।

- (b) Find the envelope of the parabola $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$. Where, $ab = k^2$, a and b being variable parameters. 3

$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ অধিবৃত্ত গোষ্ঠীর পরিস্পর্শক নির্ণয় করুন যেখানে পরিবর্তনশীল প্রাচল a এবং b উভয়ে $ab = k^2$ সম্পর্ক দ্বারা যুক্ত।

- (c) Examine for the existence of maxima or minima of the function 3

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + (x + y + 1)^2.$$

$f(x, y) = x^2 + y^2 + (x + y + 1)^2$ অপেক্ষকটির চরম বা অবম মানের অস্তিত্ব পরীক্ষা করুন।

- 15.(a) Find the minimum value of $x^2 + y^2 + z^2$, subject to the condition $2x + 3y + 5z = 0$. 4

$2x + 3y + 5z = 0$ শর্ত সাপেক্ষে, $x^2 + y^2 + z^2$ অপেক্ষকটির অবম মান নির্ণয় করুন।

- (b) Determine the existence and nature of the double points on the curve $(x-2)^2 = y(y-1)^2$. 3

$(x-2)^2 = y(y-1)^2$ বক্রের উপর অবস্থিত দ্বি-বিন্দুর অস্তিত্ব বিচার করুন। ঐ দ্বি-বিন্দুর প্রকৃতি ও নির্ণয় করুন।

- (c) Find the range of values of x for which the values of $2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ decreases as x increases. 3

x -এর মানের সেই বিস্তার নির্ণয় করুন যেখানে x -এর মানের বৃদ্ধি হলে $2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ -এর মান হ্রাস পায়।

Group-D

বিভাগ-ঘ

[Full Marks-20]

Answer Question No. 16 and any *two* from the rest:

১৬ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন:

16. Answer any *two* questions from the following: $2 \times 2 = 4$

নিম্নলিখিত যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন:

- (a) Examine the convergence of $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$.

$\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ -এর অভিসারিত্ব পরীক্ষা করুন।

(b) Evaluate: $\int_0^1 \int_0^2 x^2 y^2 dx dy$.

মান নির্ণয় করুন: $\int_0^1 \int_0^2 x^2 y^2 dx dy$.

(c) Prove that $B(l, m) = B(m, l)$.

প্রমাণ করুন $B(l, m) = B(m, l)$.

(d) From the relation $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, calculate $\Gamma(5)$.

$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ সম্পর্ক থেকে $\Gamma(5)$ এর মান নির্ণয় করুন।

17.(a) Apply μ -test to examine the convergence of $\int_0^\infty \frac{x dx}{(1+x)^3}$.

μ -পরীক্ষা প্রয়োগ করে $\int_0^\infty \frac{x dx}{(1+x)^3}$ -এর অভিসারিত্ব পরীক্ষা করুন।

(b) Show that $\int_0^\infty e^{-x^4} x^2 dx \times \int_0^\infty e^{-x^4} dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$.

দেখান যে, $\int_0^\infty e^{-x^4} x^2 dx \times \int_0^\infty e^{-x^4} dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$.

18.(a) Express $\int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \cos^6 \theta d\theta$ as a Beta function and hence evaluate it.

$\int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \cos^6 \theta d\theta$ কে Beta অপেক্ষকরূপে প্রকাশ করুন এবং অতঃপর সেটির মান নির্ণয় করুন।

(b) Evaluate: $\iint xy(x+y) dx dy$ over the region bounded by the ellipse $y = x^2$ and the line $y = x$.

$y = x^2$ অধিবৃত্ত ও $y = x$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রে $\iint xy(x+y) dx dy$ -এর মান নির্ণয় করুন।

- 19.(a) Find the area enclosed by the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. 4

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

- (b) Find the total length of the astroid $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$). 4

$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$) বক্ররেখাটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

- 20.(a) Find the volume of the solid generated by revolving the cardioide $r = a(1 - \cos \theta)$ about the initial line. 4

$r = a(1 - \cos \theta)$ ঘূর্ণায়মান cardioide দ্বারা উৎপন্ন solid টির আয়তন নির্ণয় করুন।

- (b) Using Beta function prove that $\int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3\pi}{16}$. 4

Beta -অপেক্ষকটি প্রয়োগ করে প্রমাণ করুন $\int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3\pi}{16}$ ।

Group-E

বিভাগ-ঙ

[Full Marks-10]

21. Answer any one question from the following: 2×1 = 2

নিম্নলিখিত যে-কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন:

- (a) Find the orthogonal trajectories of the family of straight lines $y = mx$, where m is a parameter.

$y = mx$ সরলরেখা গোষ্ঠীর লম্ব-সঙ্ক্ষেপ পথসমূহ নির্ণয় করুন। (যেখানে m প্রাচল)

- (b) Find the complementary function of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = 10 \sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = 10 \sin x \text{ অবকল সমীকরণটির পূরক অপেক্ষক নির্ণয় করুন।}$$

- (c) Find the particular integral of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = xe^{-x}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = xe^{-x} \text{ অবকল সমীকরণটির বিশেষ সমাকল নির্ণয় করুন।}$$

- 22.(a) Answer any two questions from the following:

4×2 = 8

নিম্নলিখিত যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন:

- (a) Solve:
- $(D^2 - 4D + 4)y = x^3 e^{2x}$

$$\text{সমাধান করুন : } (D^2 - 4D + 4)y = x^3 e^{2x}$$

- (b) Solve:
- $(x^2 D^2 - 2)y = x^2 + \frac{1}{x}.$

$$\text{সমাধান করুন } (x^2 D^2 - 2)y = x^2 + \frac{1}{x}$$

- (c) Solve:
- $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sin 2x$
- , when
- $x = 0$
- ,
- $y = 0$
- and
- $\frac{dy}{dx} = 0.$

$$\text{সমাধান করুন } \frac{d^2y}{dx^2} + y = \sin 2x, \text{ প্রদত্ত } x = 0, y = 0 \text{ এবং } \frac{dy}{dx} = 0.$$

- (d) Find the orthogonal trajectories of the Cardioide
- $r = a(1 - \cos \theta)$
- , where
- a
- is the parameter.

Cardioide $r = a(1 - \cos \theta)$ (যেখানে a প্রাচল)-এর লম্ব প্রক্ষেপ পথ সমূহ নির্ণয় করুন।



WEST BENGAL STATE UNIVERSITY

B.Sc. General PART-II Examinations, 2016

MATHEMATICS-GENERAL

PAPER-MTMG-III

Time Allotted: 3 Hours

Full Marks: 100

*The figures in the margin indicate full marks.
Candidates should answer in their own words
and adhere to the word limit as practicable.*

প্রান্তিক সীমার মধ্যস্থ সংখ্যাটি পূর্ণ মান নির্দেশ করে।
পরীক্ষার্থীরা যথা সম্ভব নিজের ভাষায় নির্দিষ্ট শব্দসীমার
মধ্যে উত্তর করিবেন।

Answer Group A and B compulsorily and any one group from group C, D and E

Group-A

বিভাগ-ক

[Full Marks-20]

Answer Question No. 1 and any two questions from the rest.

১নং প্রশ্ন ও অন্য যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

1. Answer any two questions from the following:

2×2 = 4

নিম্নলিখিত যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন:

(a) If the value of $e = 2.71828$ is replaced by 2.71934 then what is the percentage error?

যদি $e = 2.71828$ -এর মান 2.71934 দ্বারা পরিবর্তিত হয় তবে শতকরা ত্রুটি কত হইবে?

(b) Prove that the operators E and Δ follow commutative law of multiplication.

প্রমাণ করো E এবং Δ অপারেটর দ্বয় গুণের বিনিময় সূত্রকে মেনে চলে।

(c) If $f(-2) = f(3) = 7$ and $f(0) = 1$ find $f(10)$.

যদি $f(-2) = f(3) = 7$ এবং $f(0) = 1$ হয় তবে $f(10)$ -এর মান নির্ণয় করো।

(d) Show that $\Delta^4 y_0 = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$.

দেখাও যে, $\Delta^4 y_0 = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$.

2. (a) Find by suitable interpolation formula, the value of $\log 4.515$ from the following data:

6

উপযুক্ত অন্তঃ মান সূত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত ফলাফল থেকে $\log 4.515$ -এর মান নির্ণয় করো:

$\log 4.51 = 0.6542$, $\log 4.52 = 0.6551$, $\log 4.53 = 0.6561$, $\log 4.54 = 0.6571$,
 $\log 4.55 = 0.6580$.

(b) State Newton's backward interpolation formula with its remainder term.

2

নিউটনের পশ্চাদবর্তী অন্তঃ মান সূত্রটি অবশিষ্ট পদসহ বিবৃত করুন।

3. Evaluate the integral $\int_0^1 (4x - 3x^2) dx$ taking 10 sub intervals by Trapezoidal rule. Compute the exact value and find the relative error in your result.

6+1+1

10টি উপবিস্তারে ভাগ করে $\int_0^1 (4x - 3x^2) dx$ সমাকলনটি Trapezoidal rule-এর সাহায্যে নির্ণয় করুন। সমাকলনটির সঠিক মান নির্ণয় করুন এবং প্রাপ্ত ফলের আপেক্ষিক ত্রুটি নির্ণয় করুন।

4. Using Newton-Raphson method, find the real root of the equation $x^3 - 8x - 4 = 0$ correct up to four significant figures. Give a geometrical significance of the method.

Newton-Raphson-এর সূত্র প্রয়োগ করে $x^3 - 8x - 4 = 0$ সমীকরণের বাস্তব বীজটির আসন্ন মান চার সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত নির্ণয় করুন। পদ্ধতিটির জ্যামিতিক তাৎপর্য দিন।

5. (a) Find a real root of the equation $x^3 - 4x - 9 = 0$ between 2 and 3 correct up to two significant figures by the method of bisection. 6

সমদ্বিখণ্ডন পদ্ধতিতে দুটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত সঠিক রাখিয়া $x^3 - 4x - 9 = 0$ সমীকরণের 2 ও 3-এর মধ্যবর্তী একটি বাস্তব বীজ নির্ণয় করুন।

- (b) With usual meanings, show that $E^{-1} \equiv I - \nabla$. 2

প্রচলিত অর্থে প্রমাণ করুন $E^{-1} \equiv I - \nabla$ ।

Group-B

বিভাগ-খ

[Full Marks-40]

Answer Question No. 6 and any two questions from the rest.

৬নং প্রশ্ন ও অন্য যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

6. Answer any four questions from the following: 2×4 = 8

নিম্নলিখিত যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন:

- (a) Define extreme point of a convex set.

একটি উত্তল সেটের প্রান্তিক বিন্দুর সংজ্ঞা দিন।

- (b) Find the basic feasible solutions of the system of equations.

নীচের সমীকরণতন্ত্রের মৌলিক কার্যকর সমাধানগুলি নির্ণয় করুন।

$$x_1 + 2x_3 = 1$$

$$x_2 + x_3 = 4$$

- (c) Show that the set $S = \left\{ \frac{x}{|x|} \leq 2 \right\}$ is a convex set.

দেখাও যে $S = \left\{ \frac{x}{|x|} \leq 2 \right\}$ একটি উত্তল সেট।

- (d) A hyperplane is given by $x + 2y + 3z = 9$. In which half space the points (1, 2, 3) and (0, 1, -3) lie?

$x + 2y + 3z = 9$ একটি Hyper plane। (1, 2, 3) এবং (0, 1, -3) বিন্দুদ্বয় উহার কোন কোন অর্ধে অবস্থিত?

- (e) State the fundamental theorem of duality.

দ্বৈত সমস্যার মৌলিক উপপাদ্যটি বিবৃত করুন।

- (f) Find graphically the feasible space for the LPP.

লেখচিত্রের সাহায্যে নিম্নে প্রদত্ত LPP-এর কার্যকর দেশ নির্দেশ করুন।

$$\text{Maximize } z = 2x_1 + 5x_2$$

$$\text{Subject to } x_1 + x_2 \leq 6$$

$$\text{and } 0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 3$$

- (g) Find the initial basic feasible solution of the following transportation problem given below by Matrix-Minima method.

Matrix-Minima পদ্ধতি প্রয়োগ করে নীচের পরিবহন সমস্যাটির একটি প্রাথমিক মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করুন।

	D ₁	D ₂	D ₃	
O ₁	9	7	4	20
O ₂	2	9	8	15
	10	15	10	

7. (a) An agricultural firm has 180 tons of nitrogen fertilizers, 250 tons of phosphate and 220 tons of potash. It sells 3:3:4 mixtures of these substances at a profit of Rs. 15 per ton and 2:4:2 mixtures at a profit of Rs. 12 per ton respectively. Formulate the problem as an L.P.P to obtain minimum profit.

একটি কৃষি প্রতিষ্ঠানে 180 টন নাইট্রোজেন, 250 টন ফসফেট ও 220 টন পটাশ সার মজুত আছে। এই প্রতিষ্ঠান প্রতি টনে 15 টাকা লাভ রেখে সারগুলি যথাক্রমে 3:3:4 অনুপাতে মিশিয়ে বিক্রি করতে পারে। আবার প্রতি টনে 12 টাকা লাভ রেখে সারগুলি 2:4:2 অনুপাতে মিশিয়েও বিক্রি করতে পারে। একটি রৈখিক প্রোগ্রাম বিধি সমস্যা রচনা করুন যাতে সর্বোচ্চ লাভ নির্ণয় করা যায়।

- (b) Prove that the set of all feasible solutions to an L.P.P $Ax = b, x \geq 0$ is a closed convex set. 8

প্রমাণ করুন যে $Ax = b, x \geq 0$ রৈখিক প্রোগ্রাম বিধি সমস্যার সকল কার্যকর সমাধানের সেটটি একটি বন্ধ উত্তল সেট।

8. (a) Solve graphically the following L.P.P: 8

লেখচিত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রাম বিধি সমস্যার সমাধান করুন:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Subject to, } & 2x_1 + 7x_2 \geq 22 \\ & x_1 + x_2 \geq 6 \\ & 5x_1 + x_2 \geq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

- (b) Solve the following L.P.P by simplex method: 8

Simplex পদ্ধতির সাহায্যে নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রাম বিধি সমস্যার সমাধান করুন।

$$\begin{aligned} \text{Maximize } & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{Subject to, } & x_1 - 5x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ & x_1 + x_2 = 10 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

- 9 .(a) Write down the dual of the following primal problem. 8

নিম্নলিখিত L.P.P টির দ্বৈত সমস্যাটি লিখুন।

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & z = x_1 + 3x_2 \\ \text{Subject to, } & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 - x_2 \geq -1 \\ & x_1 + 2x_2 = 5, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \text{ Unrestricted in sign.} \end{aligned}$$

- (b) Find the optimal solution and the corresponding cost of the transportation in the following transportation problem. 8

নিম্নলিখিত পরিবহন সমস্যাটির সর্বাপেক্ষা অনুকূল সমাধান এবং অনুরূপ অনুকূল পরিবহন খরচ নির্ণয় করুন।

	D ₁	D ₂	D ₃	a _j
O ₁	3	2	5	
O ₂	9	1	2	
O ₃	4	3	1	
b _j				

- 10.(a) Find the optimal assignment and the corresponding optimal cost from the following cost matrix. 8

নীচের মূল্য ম্যাট্রিক্স হইতে চরম আরোপ এবং সংশ্লিষ্ট চরম মূল্য নির্ণয় করুন।

	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅
J ₁	3	8	2	10	3
J ₂	8	7	2	9	7
J ₃	6	4	2	7	5
J ₄	8	4	2	3	5
J ₅	9	10	6	9	10

- (b) Solve the following L.P.P by Charnes' Big M-method. 8

Charnes' Big M পদ্ধতির সাহায্যে নিম্নলিখিত প্রোগ্রাম সমস্যাটির সমাধান করুন।

$$\text{Maximize, } z = 2x_1 - 3x_2$$

$$\text{Subject to } -x_1 + x_2 \geq -2$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 46$$

$$7x_1 + 2x_2 \geq 32$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Group-C

বিভাগ-গ

[Full Marks-40]

Answer Question No. 11 and any *two* questions from the rest.

১১নং প্রশ্ন ও অন্য যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

11. Answer any *four* questions from the following:

2×4 = 8

নিম্নলিখিত যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন:

- (a) A particle moving in a straight line has the following relation between the velocity v and the distance x from the origin O:

$$v = \sqrt{\mu - x^2}, \mu > 0. \text{ Show that the motion is S.H.M.}$$

একটি বস্তুকণা সরলরেখায় গতিশীল এবং মূলবিন্দু O থেকে x দূরত্বে v গতিবেগ প্রদত্ত হয়

$$v = \sqrt{\mu - x^2}, \mu > 0 \text{ দ্বারা। দেখান যে, গতিটি হয় সরল সমঞ্জস্য গতি (S.H.M.)।}$$

- (b) If a point P moves in a curve so that the tangential and normal accelerations are equal, prove that the velocity varies as e^{ψ} , when ψ has usual meaning.

একটি বিন্দু P একটি বক্রের উপর এরাপে গতিশীল যে স্পর্শক ও অভিলম্ব বরাবর ত্বরণ সমান হয়। প্রমাণ করুন যে গতিবেগ e^{ψ} -এর সঙ্গে সরলভেদে আছে যেখানে ψ প্রতীকটি প্রচলিত অর্থে ব্যবহৃত হয়েছে।

- (c) State the principles of conservation of linear momentum.

রৈখিক ভরবেগের নিত্যতার সূত্রটি বিবৃত করুন।

- (d) Show that in a central orbit, the angular momentum is always conserved.

দেখাও যে কেন্দ্রীয় কক্ষ পথে কৌণিক ভরবেগ সর্বদা সংরক্ষিত হয়।

- (e) What is impulsive force? How is it measured?

ঘাত বল কি? কিভাবে তা পরিমাপ করা হয়?

- (f) Show that the change in kinetic energy of a body is equal to the work done by the forces acting on it.

দেখাও যে-কোন বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বল দ্বারা নির্দিষ্ট যে কাজ করা হয় তা তার গতিশক্তির পার্থক্যের সমান।

- (g) From what height must a heavy elastic ball be dropped on the floor so that rebounding once it will reach a height of 8 metre? (Let $e = \frac{1}{2}$)

কত উচ্চতা থেকে একটি ভারী স্থিতিস্থাপক বলকে মাটিতে ফেললে সেটি একবার লাফিয়ে ৪ মিটার উচ্চতায় উঠতে পারবে? ($e = \frac{1}{2}$ ধরুন)

- 12.(a) A particle of mass m moves in a straight line under an attractive force mn^2x towards a fixed point on the line when at a distance x from it. If it be projected with a velocity v towards the centre of force from an initial distance a from it, prove that it reaches the centre of force after a time

$$\frac{1}{n} \tan^{-1} \frac{na}{v}.$$

সরলরেখায় গতিশীল m ভর বিশিষ্ট একটি কণার ওপর ঐ সরলরেখাে একটি স্থির বিন্দু অভিমুখী আকর্ষক বল mn^2x , যেখানে স্থির বিন্দু থেকে কণাটির দূরত্ব x । ঐ কেন্দ্রবিন্দু থেকে a দূরত্বে কণাটি v বেগে বিন্দুটির দিকে প্রক্ষিপ্ত হলে দেখান যে কেন্দ্রবিন্দুতে পৌঁছোতে কণাটির সময় লাগবে

$$\frac{1}{n} \tan^{-1} \frac{na}{v}.$$

- (b) A particle moves with a central acceleration $\mu \div (\text{distance})^2$. It is projected with velocity V at a distance R . Show that its path is rectangular hyperbola

$$\text{if the angle of projection is } \sin^{-1} \left[\mu / \left\{ VR \left(V^2 - \frac{2\mu}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \right].$$

কোন কণা $\mu \div (\text{দূরত্ব})^2$ এই কেন্দ্রীয় ত্বরণ দ্বারা গতিশীল। কণাটিকে R দূরত্ব থেকে V গতিবেগে

$$\text{উৎক্ষেপ করা হয়েছে। প্রক্ষেপ কোন } \sin^{-1} \left[\mu / \left\{ VR \left(V^2 - \frac{2\mu}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \right] \text{ হলে দেখান যে কণাটির}$$

গতিপথ একটি সমপরাবৃত্ত হবে।

- 13.(a) Write down the equations of motion of a particle moving in a central orbit under a central force P and deduce the differential equation in the form

8

$$\frac{h^2}{p^3} \frac{dp}{dr} = P; \text{ symbols having usual meaning.}$$

কেন্দ্রীয় বল P -এর অধীনে কেন্দ্রীয় কক্ষপথে গতিশীল একটি কণার গতির সমীকরণ লিখুন এবং

প্রমাণ করুন যে $\frac{h^2}{p^3} \frac{dp}{dr} = P$; প্রতীকগুলি প্রচলিত অর্থে ব্যবহৃত হয়েছে।

- (b) A particle moves under a central repulsive force $m\mu \div (\text{distance})^3$ and is projected from an apse at a distance ' a ' with a velocity v . Show that the equation to the path is $r \cos p\theta = a$ and the angle described in time ' t ' is

8

$$\frac{1}{p} \tan^{-1} \left(\frac{pvt}{a} \right) \text{ where } p^2 = \frac{a^2 v^2 + \mu}{a^2 v^2}.$$

একটি বস্তুকণার ওপর একটি কেন্দ্রীয় বিকর্ষী বল $m\mu \div (\text{দূরত্ব})^3$ ক্রিয়াশীল। বস্তুকণাটিকে a দূরত্বে অবস্থিত apse থেকে v বেগে ফেপন করা হল। প্রমাণ করুন যে বস্তুকণার গতিপথের সমীকরণ হবে $r \cos p\theta = a$ এবং ঐ কণাটি t সময়ে কেন্দ্রে যে কোন উৎপন্ন করে তা হবে

$$\frac{1}{p} \tan^{-1} \left(\frac{pvt}{a} \right), \text{ যেখানে } p^2 = \frac{a^2 v^2 + \mu}{a^2 v^2}।$$

- 14.(a) T_1 and T_2 are periods of vertical oscillations of two different weights suspended by an elastic string. If c_1 and c_2 be the statical extensions due to these weights and g the acceleration due to gravity, show that

8

$$g = \frac{4\pi^2(c_1 - c_2)}{T_1^2 - T_2^2}$$

একটি স্থিতিস্থাপক দড়ির দ্বারা দুটি বিভিন্ন ওজন ঝোলালে T_1 এবং T_2 দুটি উল্লম্ব দোলনের পর্যায়কাল পাওয়া যায়। ঐ দুটি ওজনের ফলে যদি দড়িটির দৈর্ঘ্য c_1 এবং c_2 প্রসারিত হয় তবে

দেখান যে $g = \frac{4\pi^2(c_1 - c_2)}{T_1^2 - T_2^2}$, যেখানে g হল অভিকর্ষজ ত্বরণ।

- (b) Define escape velocity. Find an approximate expression for it.

8

মুক্তিবেগের সংজ্ঞা লিখুন। এর একটি আসন্ন অভিব্যক্তি নির্ণয় করুন।

- 15.(a) If v_1, v_2 are the linear velocity of a planet when it is respectively nearest and furthest from the sun, prove that $(1-e)v_1 = (1+e)v_2$, when e is the eccentricity of the orbit of the planet.

যদি v_1 এবং v_2 একটি গ্রহের রৈখিক বেগ হয় যখন গ্রহটির সূর্য থেকে দূরত্ব সর্ব নিম্ন এবং সর্বোচ্চ, তবে প্রমাণ করুন $(1-e)v_1 = (1+e)v_2$, যেখানে e হল গ্রহটির কক্ষ পথের উৎকেন্দ্রতা।

- (b) A particle describes the path $r^4 = a^4 \cos 4\theta$ under a force which is always directed to pole. Find the law of force.

কোন কণা $r^4 = a^4 \cos 4\theta$ পথে এমন বলের অধীনে গতিশীল যা সর্বদাই মেরু অভিমুখী। বলের সূত্রটি নির্ণয় করুন।

Group-D

বিভাগ-ঘ

[Full Marks-40]

Answer Question No. 16 and any two questions from the rest.

১৬ নং প্রশ্ন ও অন্য যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

16. Answer any four questions from the following:

নিম্নলিখিত যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন:

- (a) Define 'event space', 'random experiment' and hence give the definition of probability of an event A in the event space S connected with the random experiment E .

2×4 = 8

ঘটনাদেশ ও সম্ভাবনাভিত্তিক পরীক্ষণের সংজ্ঞা দিন। উহা হইতে সম্ভাবনা ভিত্তিক পরীক্ষণ E -র সহিত যুক্ত ঘটনাদেশ S -এ একটি ঘটনা A -র ঘটিবার সম্ভাবনার সংজ্ঞা দিন।

- (b) A fair coin is tossed 5 times. What is the probability of getting at least one 'head'?

একটি স্বাভাবিক মুদ্রাকে 5 বার টস করা হইল। অন্ততঃ একটি হেড পড়িবার সম্ভাবনা কত?

- (c) If $f(x) = ke^{-x}$ ($0 \leq x \leq \infty$) be the probability density function of a continuous random variable x , find k .

যদি কোন অন্তত সম্ভাব্য চল x -এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক $f(x) = ke^{-x}$ ($0 \leq x \leq \infty$) হয় তবে k -এর মান নির্ণয় করুন।

- (d) If A and B are two independent events then show that \bar{A} and \bar{B} are also independent.

যদি A ও B দুটি নিরপেক্ষ ঘটনা হয় তবে প্রমাণ করুন যে \bar{A} ও \bar{B} নিরপেক্ষ হবে।

- (e) Given $\text{Cov}(x, y) = 10$, $r = 0.4$ and $\sigma_y = 5$, then find σ_x .

প্রদত্ত $\text{Cov}(x, y) = 10$, $r = 0.4$ এবং $\sigma_y = 5$, σ_x -এর মান নির্ণয় করুন।

- (f) If the second and third central moments of a distribution are 4 and 10 respectively, find the skewness of the distribution.

কোন পরিসংখ্যা বিভাজনের দ্বিতীয় ও তৃতীয় কেন্দ্রীয় moment যথাক্রমে 4 ও 10 এর skewness নির্ণয় করুন।

- (g) Define 'Parameter' and 'Statistic'.

Parameter ও Statistic-এর সংজ্ঞা দিন।

- 17.(a) State and prove Bayes' theorem.

8

Bayes' উপপাদ্য বিবৃত করুন এবং প্রমাণ করুন।

- (b) Find the probability of getting an even number on the first or a total of 8 in a single throw of two dice.

8

দুটি ছক্কা একবার করে নিক্ষেপ করলে প্রথমটিতে জোড় সংখ্যা অথবা মোট 8 পড়বার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

- 18.(a) Prove that the correlation coefficient r between two variables x and y lies between -1 and $+1$.

8

প্রমাণ করুন যে x ও y চলরাশিদ্বয়ের অনুবন্ধ সহগ r , -1 ও $+1$ -এর মধ্যবর্তী হয়।

- (b) A random sample of 100 articles taken from a batch of 2000 articles shows that the average diameter of the articles = 0.354 with S.D = 0.048. Find 95% confidence interval for the average diameter of this batch of 2000 articles. (Assume normal distribution; given $P[-1.96 \leq z \leq 1.96] = 0.95$ where z is $N(0, 1)$).

2000 টি দ্রব্যের একটি দল থেকে উদ্দেশ্যহীনভাবে 100টি দ্রব্যের একটি নমুনা নেওয়া হল। এদের গড় ব্যাস 0.354 এবং S.D = 0.048। এই 2000টি দ্রব্যের দলের গড় ব্যাসের 95% confidence বিস্তার নির্ণয় করুন।

(মনে করুন NORMAL বিভাজন এবং $P[-1.96 \leq z \leq 1.96] = 0.95$ এবং $N(0, 1)$)।

- 19.(a) The random variable X has the distribution given by

$$P(X = k) = 2^{-k}, k = 1, 2, \dots$$

Show that $E(X) = \text{Var}(X) = 2$.

রানডম চল X -এর বিভাজন নীচে দেওয়া হল:

$$P(X = k) = 2^{-k}, k = 1, 2, \dots$$

দেখান যে, $E(X) = \text{Var}(X) = 2$ ।

- (b) Determine the trend using 4 year moving average method from the following data:

নীচের তথ্য প্রেনীর ক্ষেত্রে 4 বর্ষীয় গতিশীল গড় নির্ণয় করুন:

Year (বৎসর)	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
Yearly Sale (বাৎসরিক বিক্রয়) (Rs. 0000)	3.6	4.3	4.3	3.4	4.4	5.4	3.4	2.4

- 20.(a) Find x from the following, given that the ratio between Laspeyre's and Paasche's index number is 28:27.

x -এর মান নির্ণয় করুন সেখানে Laspeyre's এবং Paasche's-এর সূচকের অনুপাত 28:27।

Commodities	Base year		Current year	
	Price (Rs.)	Quantity	Price (Rs.)	Quantity
A	1	10	2	5
B	1	5	x	2

(b) For what value of k the function,

$$f(x) = kx(1-x^2), 0 \leq x \leq 1$$

$$= 0, \text{ elsewhere}$$

will satisfy the condition of probability density function. Find the mean and mode of this distribution.

k -এর কোন মানের জন্য নিম্নলিখিত অপেক্ষকটি সম্ভাব্য ঘনত্ব অপেক্ষক হইবার শর্তটি সিদ্ধ করিবে?

$$f(x) = kx(1-x^2), 0 \leq x \leq 1$$

$$= 0, \text{ অন্যত্র}$$

এই নিবশেনটির গড় ও সংখ্যাগরিষ্ঠ মান নির্ণয় করুন।

Group-E

বিভাগ-ঙ

[Full Marks-40]

[Throughout the entire group, Δ stands for the difference operator, E stands for the shift operator and $y'(x)$ stands for $\frac{dy}{dx}$.]

[সমগ্র বিভাগে Δ = পার্থক্য অপারেটর E = শিফট অপারেটর ও $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ বুঝবেন।]

Answer Question No. 21 and any two questions from the rest.

21 নং প্রশ্ন এবং অবশিষ্ট প্রশ্নগুলি থেকে যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

21. Answer any four questions from the following:

নিম্নলিখিত যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন:

(a) Show that $\Delta^2(\log x) = \log \left[1 - \frac{1}{(x-1)^2} \right]$, taking difference interval unity.

পার্থক্য অন্তরাল একক ধরিয়া দেখান যে $\Delta^2(\log x) = \log \left[1 - \frac{1}{(x-1)^2} \right]$ ।

(b) Show that $\left(\frac{\Delta}{E}\right) \sin 2x = 2 \cos(2x - h) \sin h$.

দেখান যে $\left(\frac{\Delta}{E}\right) \sin 2x = 2 \cos(2x - h) \sin h$ ।

(c) Obtain the difference equation from the relation

$u_x = A3^x + B(-5)^x$, when A and B are parameters.

$u_x = A3^x + B(-5)^x$ যেখানে A ও B হল প্যারামিটার, সম্পর্ক থেকে অন্তর সমীকরণ নির্ণয় করুন।

(d) Examine if the curve $y(x) = \frac{\sin nx}{n^2}$, when n is sufficiently large and $y_1(x) = 0$ and $[0, \pi]$ are close in the sense of first order proximity or not.

বক্ররেখা $y(x) = \frac{\sin nx}{n^2}$ যেখানে n যথেষ্ট বৃহৎ এবং $y_1(x) = 0$, $[0, \pi]$ এই অন্তরালে এইরূপে বক্ররেখা দুইটি প্রথম ঘাত proximity অর্থে সন্নিহিত কিনা পরীক্ষা করুন।

(e) Write down the Euler's equation for an extremum of a functional.

$$V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx; y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1.$$

উপরোক্ত functional টির চরম মানের জন্য Euler-এর সমীকরণটি লিখুন।

(f) Show that the functional $V[y(x)] = \int_a^b [y'(x) + y(x)] dx$ is linear.

দেখান যে $V[y(x)] = \int_a^b [y'(x) + y(x)] dx$ টি রৈখিক।

(g) If $y = cx + c^2$, show that $y = x\Delta y + (\Delta y)^2$.

যদি $y = cx + c^2$, দেখান যে $y = x\Delta y + (\Delta y)^2$ ।

22.(a) Solve: $u_{x+2} + u_{x+1} - 12u_x = 5^x, x \geq 1$.

6

সমাধান করুন $u_{x+2} + u_{x+1} - 12u_x = 5^x, x \geq 1$ ।

(b) Find the extremal of the functional

5

$$V[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx; y(a) = A, y(b) = B.$$

$V[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx; y(a) = A, y(b) = B$ এই functional টির extremal নির্ণয় করুন।

(c) Find u_x if $u_1 = 8, u_2 = 200$ and $u_x = 63u_{x-2} - 2u_{x-1}$.

5

$u_1 = 8, u_2 = 200$ এবং $u_x = 63u_{x-2} - 2u_{x-1}$ হলে u_x বার করুন।

23.(a) State and prove the problem of Brachistochrone.

2+8

Brachistochrone সমস্যাটি বিবৃত করুন এবং প্রমাণ করুন।

(b) Find the solution of the equation $u_{x+4} + u_x = 0$.

6

$u_{x+4} + u_x = 0$ সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় করুন।

24.(a) Solve the difference equation $(E^2 - 11E + 30)u_x = x3^x$.

5

অন্তর সমীকরণ সমাধান করুন: $(E^2 - 11E + 30)u_x = x3^x$.

(b) Find the extremal of the isoperimetric problem

6

$$V[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + x^2) dx \text{ given that } \int_0^1 y^2 dx = 2, y(0) = 0, y(1) = 0.$$

Isoperimetric সমস্যাটির extremal নির্ণয় করুন:

$$V[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + x^2) dx; \text{ দেওয়া আছে } \int_0^1 y^2 dx = 2, y(0) = 0, y(1) = 0$$

- (c) Test for an expression of the functional

5

নিম্নলিখিত Functional-এর একটি extremum-এর জন্য পরীক্ষা করুন।

$$V[y(x)] = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2 y') dx, \quad y(0) = 2, \quad y(1) = 1.$$

- 25.(a) Find the area that maximizes the area enclosed by a rectangle of fixed perimeter.

6

স্থির পরিসীমায়ুক্ত আয়তক্ষেত্রের যে ক্ষেত্রফল সেটিকে চরমতম মান দেয় তা নির্ণয় করুন।

- (b) If
- $y_n = n(n-1)(n-2)(n-3)$
- , then find
- $\Delta^4 y_n$
- .

5

যদি $y_n = n(n-1)(n-2)(n-3)$ হয় তাহলে $\Delta^4 y_n$ -এর মান নির্ণয় করুন।

- (c) Show that: (দেখাও যে):
- $\Delta^{-1} \sin ax = \frac{-\cos(ax - \frac{a}{2})}{2 \sin \frac{a}{2}}$
- .

5