Конечные структуры в примерах

Садыков Нурлан

15 августа 2023 г.

Глава 1

Кубик Рубика

1.1 Где здесь группа?

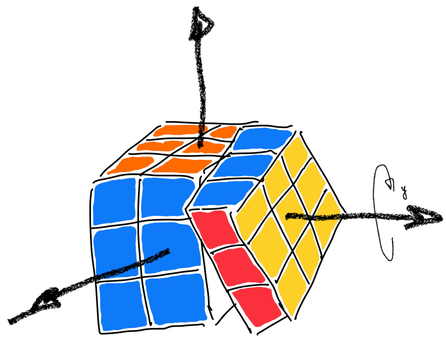

Рис. 1.1: Движение желтой грани y

Под вращением грани понимаем ее поворот на 90° по часовой стрелке относительно остальной части кубика.

Любые промежуточные состояния применения слова к кубику не обязаны давать собранный вариант.

Обозначим вращения граней кубика в соответствии с цветом центрального стикера на грани. Это удобно потому, что вращения граней всегда оставляют центральные стикеры на месте. Будем обозначать эти вращения цветами соответствующих граней: o-оранжевый, b-синий, r-красный, y-желтый, w-белый, g-зеленый. Вращения граней кубика рубика являются образующими свободной группы. Любое слово в этой группе можно применить как инструкцию к кубику рубика. Будем считать слово тривиальным, если после его применения к собранному кубику, мы снова получим собранный кубик. Например, очевидно, что $b^4 = bbbb = e$ то есть вращение относительно синей грани четыре раза — тривиальное слово, поскольку снова дает правильную сборку.

Для определенности будем считать, что мы применяем слова к кубику слева направо. То есть слово oby это сперва повернуть оранжевую грань на 90°, потом синюю и только потом желтую.

1.2 Кодировка состояния кубика

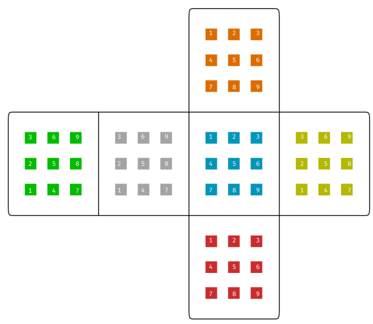

Рис. 1.2: Индексация стикеров на развертке

Каждое действие переставляет стикеры на кубике Рубика, значит группа действий на кубике может быть описана как подгруппа группы перестановок. Чтобы явно определить перестановку по какому-либо состоянию нужно ввести кодировку.

Для удобства мы будем обозначать элементы цветом и индексом, например, b_5 будет обозначать центральный синий стиркер. Индексы на каждой грани определяются в соответствии с рисунком 1.2.

Как только мы ввели кодировку, можем проследить какой стикер стоит на какой позиции. И уже отсюда можем вытащить перестановки.

1.2.1 Неполная кодировка

Если цветам приписать такие векторы $o = (0,\,0,\,1)$, $b = (1,\,0,\,0)$, $y = (0,\,1,\,0)$, $w = (0,\,-1,0)$, $g = (-1,\,0,\,0)$, $r = (0,\,0,\,-1)$, то можно определить начальную координату каждого маленького кубика в кубике Рубика как сумму цветов входящих в маленький кубик. Так можно было ввести кодировку состояния кубика Рубика, но она получится неполной. Чтобы убедиться в этом достаточно посмотреть на слово $\alpha = oywgbrowygbr$. Если его применить к начальному состоянию, вершинная кодировка покажет тривиальную перестановку, но мы не получим начальное состояние. Так происходит потому, что это слово меняет ориентацию некоторых кубов на границах двух цветов. Слово $\alpha^2 = e$ уже будет тривиальным.

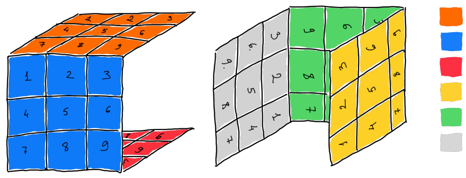

Рис. 1.3: Разрез кубика на две ленты с нумерациями.

Неполную перестановку можно использовать, чтобы упростить задачу поиска разложения на слова. Поскольку эта группа содержит всего 20 элементов некоторые задачи можно будет решить перебором.

3-циклы Можно найти представления в виде слов всех 3-циклов в неполной кодировке. Схема поиска следующая.

Трюк 1: Разложение цикла в произведение пермутаций

$$(a_0\ a_1\ a_2\ \cdots\ a_k) = (a_0\ a_1)\,(a_0\ a_2)\,\cdots\,(a_0\ a_k)$$

Трюк 2: Объединение двух не коммутриющих пермутаций в 3-цикл

$$(a\ b)\,(a\ c) = (a\ b\ c)$$

Трюк 3: Объединение двух коммутриющих пермутаций в 3-циклы

$$(a\ b)\,(c\ d) = (a\ b)\,(b\ c)\,(b\ c)\,(c\ d) = (a\ c\ b)\,(b\ d\ c)$$

Среди всех слов длины 5 сформируем множество слов W_5 чья степень делится на 5 и множество слов W_7 чья степень делится на 7. Теперь для каждой пары $(u, w) \in (W_5, W_7)$ можно проверить что слова $(uw)^2$ и $(wu)^2$ дают 3-цикл.

Такой перебор не даст всех 3-циклов из S_{20}, однако можно решить дополнительную задачу просчитав все произведения найденных 3-циклов и в целом это даст оставшуюся часть искомых перестановок.

Если разложить перестановку над кубиком Рубика в произведение пермутаций, то в случае если этих пермутаций получилось четное количество мы можем представить перестановку в виде произведения 3-циклов. Для перестановки с нечетным количеством пермутаций, можно подкрутить кубик Рубика по произвольной грани, например по синей, тем самым к перестановке добавится три пермутации и мы уже сможем создать представление на 3-циклах.

Поскольку мы знаем слова которыми выражаются 3-циклы, то мы можем выразить полностью всю перестановку в виде слова. Тем не менее, такое слово может не собрать кубик Рубика поскольку скудная кодировка не может справиться со словами типа $\alpha = oywgbrowygbr$.

1.3 the Plan

Для полного решения задачи можно воспользоваться таким фактом, что любое слово в неполной кодировке, которым описывается 3-цикл, в третьей степени даст подкрутку граней на кубике, но сами грани останутся на местах. Так соберутся списки действий подкручивающих ребра и вершины в нужные позиции.

Итоговое слово решающее кубик Рубика таким образом будет очень большим. Вероятно его длина превысит 200 символов. Поэтому нужно будет искать варианты упрощения слов.