课程学习笔记

作者： S.Y. Chen

时间： November 12, 2022

Victory won’t come to us unless we go to it.

目录

第一章 力学基本原理

1.1 单粒子力学原理

定理 1.1 (单粒子守恒原理)

线动量守恒：若合力 $\boldsymbol{F}=0$, 即 $\dot{\boldsymbol{p}}=0$，则线动量 $\boldsymbol{p}$ 守恒。

考虑一个单粒子运动，其位置矢量表示为 $\boldsymbol{r}$，对应的速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{1.1}$$

粒子质量为 m，则其动量定义为：

$$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v} \tag{1.2}$$

其方向与速度方向一致。由于粒子可能与外部物体或场发生相互作用，因此粒子会受到外部力的作用，粒子所受到的合力可以写为;

$$\boldsymbol{F}=\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\dot{\boldsymbol{p}}=\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) \tag{1.3}$$

在质量守恒的情况下，上式可写为：

$$\boldsymbol{F}=m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}m\boldsymbol{a} \tag{1.4}$$

其中 $\boldsymbol{a}$ 为粒子的矢量加速度，其定义为

$$\boldsymbol{a}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \tag{1.5}$$

此运动方程仅为二阶微分方程，假设 $\boldsymbol{F}$ 并不依赖于高阶微分项。

定义 1.1 (惯性系 (伽利略系))

在惯性系中，对于不受合外力影响的物体将保持相对静止或匀速直线运动，其时间是均匀流逝的，空间也是均匀且各向同性的。此参考系使方程(1.3)成立。

定理 1.2 (角动量守恒原理)

若一物体的总扭矩 $\boldsymbol{N}=0$，即角动量 $\boldsymbol{L}$ 对时间的一次微分项 $\dot{\boldsymbol{L}}=0$，则粒子的角动量 $\boldsymbol{L}$ 守恒，也就是总角动量 $\boldsymbol{L}$ 不随时间变化。

若粒子绕某一点 O 旋转，其与点 O 的径矢为 $\boldsymbol{r}$，动量为 $\boldsymbol{p}$，可定义其角动量为

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \tag{1.6}$$

类似公式(1.3)，定义该粒子关于某一点的<u>力矩</u>为

$$\boldsymbol{N}=\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{v}\times(m\boldsymbol{v})+\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{r}\times\frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \tag{1.7}$$

显然，我们可以得到力矩与角动量之间的关系为:

$$\boldsymbol{N} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \dot{\boldsymbol{L}} \tag{1.8}$$

笔记 需要注意的是，$\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 都依赖于点 O。

定理 1.3 (能量守恒原理)

若作用在一个粒子上的力是保守的，那么这个粒子的总能量 (总动能 + 势能) $T+V$ 是守恒的。

考虑一个粒子在外力 $\boldsymbol{F}$ 作用下从点 1 到点 2 所做的功。

$$W_{12} = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} \tag{1.9}$$

若质量为常量 (若无特殊说明，第一部分中质量皆为常数)，则方程(1.9)可约化为:

$$\int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = m\int \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\boldsymbol{v}dt = \frac{m}{2}\int \frac{d}{dt}(v^2)dt = \frac{m}{2}\int \frac{d(v^2)}{dt} \tag{1.10}$$

因此，我们有

$$W_{12} = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) \tag{1.11}$$

其中，标量 $mv^2/2$ 表示该粒子的动能，并用 T 标记，则上式可改写为

$$W_{12} = T_2 - T_1 \tag{1.12}$$

上式表示在外力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，粒子从位置 1 到位置 2 的动能变化。

笔记 力场保守，也就是该力场下使粒子从点 1 沿任意路径运动到点 2，其所作功 W_{12} 不变；换种说法，若力场保守，则粒子从起点出发沿任意闭合路径在运动回起点，所作功为 0，即满足下式

$$\oint \boldsymbol{f} d\boldsymbol{s} = 0 \tag{1.13}$$

可类比于重力场，我们在不考虑其他外力的作用下，一个物体从地面运动到楼顶在回到地面，重力对它是不做功的。

W_{12} 与路径无关的的充要条件是该粒子受力为某一标量坐标函数的梯度:

$$\boldsymbol{F} = -\nabla V(\boldsymbol{r}) \tag{1.14}$$

其中，V 就是所谓的势，或者称为势能。若 W_{12} 与路径无关，仅与两个终点有关，那么它对路径的微分应该表现为一个常量，这个常量应该可以由 $-V$ 对路径的微分进行确定，或该常量与路径微分的标积等于 $-V$ 的微分:

$$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = -dV \quad \text{or} \quad F_s = \frac{\partial V}{\partial s}$$

上式与方程(1.14)是一致的。

笔记 注意到式(1.14)，方程左边加入任意一个常量其结果不变，因此可以知道，零势能面是可以任意确定的。

对于一个守恒的系统，从点 1 到点 2 的所作的功可用势能之差表示，如下：

$$W_{12} = V_2 - V_1 \tag{1.15}$$

由式(1.12)和(1.15)可得如下关系：

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{1.16}$$

上式表示，在一个守恒体系下，系统在某一点出的动能与势能之和等于某一常数。

1.2 约束

约束的分类：

1. 完整约束 (holonomic)：其具有以下形式

$$f(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n, t) = 0 \tag{1.17}$$

例如刚体，刚体系统中每个点之间的距离是固定的，有如下形式：

$$(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0$$

此形式的方程就是具有完整约束的约束方程。

2. 非完整约束 (nonholonomic)，无法将约束形式写为方程(1.17)的形式，例如在空心球内的气体运动：

$$\boldsymbol{r} - a^2 = 0$$

此外，还可根据约束中是否包含时间来进行划分，约束中显示的包含时间则将此约束类型称为非恒稳约束 (rheonomous)，约束中不包含时间则为恒稳约束 (scleronomous)。

此外，约束也可能带来一些问题，如下：

1. 受约束方程的影响，粒子坐标不再独立，而这会使每个粒子的运动方程发生联系；
2. 在很多问题的求解中需要知道约束力，而这往往是未知的。

下面介绍一下广义坐标：我们需要先了解一下什么是自由度。在笛卡尔坐标系中，描述一个自由粒子的确切位置可用 (x, y, z) 三个坐标来标定，这三个坐标之间无关联关系，我们成这个粒子具有三个自由度；此时，我们再考虑一个具有 N 个自由粒子的系统，此时每个粒子都有一套独立的坐标 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \cdots (x_n, y_n, z_n)$ 一共 $3N$ 个独立坐标来标定整个系统的状态，则我们称这个系统具有 $3N$ 个自由度。现在，我们对这个系统施加 k 个完整约束，则对整个系统有 k 个约束方程，对这些方程进行联立则可消掉 k 个自由度，则整个系统只剩下 $3N - k$ 个独立变量，我们将其称为此系统的 $3N - k$ 个自由度，我们用 $q_1, q_2, \cdots, q_{3N-k}$ 来表示，则每个粒子的坐标可以表示为：

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_1(q_1, q_2, \cdots, q_{3N-k})$$
$$\cdots$$
$$\boldsymbol{r}_N = \boldsymbol{r}_N(q_1, q_2, \cdots, q_{3N-k})$$

上式称为从 $\boldsymbol{r}_i$ 到 q_i 的转换方程。

笔记 广义坐标一般与三维笛卡尔坐标是不一样的，他们不一定正交，只是互不相关的一些量而已。

1.3 虚位移，虚功原理和达朗贝尔原理

虚位移 (virtual displacement)，也称无穷小位移 (infinitesimal displacement)： 在某一时刻 t，物体在约束条件下发生的任意无穷小位移。虚位移与实际发生的位移是不一样的，它是物体在受约束情况下可能发生的任何一种无穷小位移，但实际并没发生，而实际位移则是物体真实产生的位移，一般只有一种。举个例子，若一个物体被约束在 Oxy 平面上运动，则其虚位移如下：

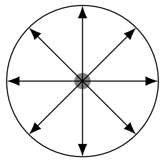

图 1.1: 虚位移 $\delta \boldsymbol{r}$ 的图像，此时约束力垂直平面向里。

虚功原理： 为推导此原理，我们假设系统处于平衡状态，也就是作用在系统中每一粒子的合力 $\boldsymbol{F}_i = 0$，因此，系统中每一点的虚功 (合外力在虚位移上所做的功) 为 0，即 $\boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$。对系统中所有粒子的虚功取和，我们同样应该由

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{1.18}$$

系统中某一粒子的合力由作用力 $\boldsymbol{F}_i^{(a)}$ 和约束力 $\boldsymbol{f}_i$，对此，式(1.18)可化为：

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i^{(a)} \cdot + \sum_i \boldsymbol{f}_i \cdot \delta i = 0 \tag{1.19}$$

现在，我们仅考虑净虚功为 0 的情况，也就是约束力对所有虚位移所作功之和为 0 的情况：比如一个物体被约束在某一平面，那么约束力与该平面垂直，而虚位移只能与该平面相切，此时的虚功便为 0。在这种情况下，式(1.19)左边第二项变为 0，进一步，我们可以知道其作用力在虚位移上所作的功也为 0：

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i^a \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{1.20}$$

式(1.20)就是所谓的虚功原理。由于 $\boldsymbol{r}_i$ 受约束作用，它们并不独立，因此我们一般有 $\boldsymbol{F}_i^{(a)} \neq 0$，因此，在具体计算时，我们需要将上述虚位移转化为相互独立的广义坐标 q_i 空间进行计算。

笔记 若一个粒子被约束在某一平面且存在摩擦，由于约束力总与虚位移垂直，某一时刻的物体在虚位移上所作的虚功仍为 0；但是，物体在真实位移上所作功 (并不特指约束力所作功) 不一定为 0，因为摩擦力会作功。

达朗贝尔原理 (D'Alembert's principle)：上述虚功原理只适合用于系统平衡的情况，当系统处于运动中时，需要使用达朗贝尔原理进行计算。一般的，运动方程为：

$$\boldsymbol{F}_i = \dot{\boldsymbol{p}}_i$$

可将上式重新写为：

$$\boldsymbol{F}_i - \dot{\boldsymbol{p}} = 0$$

上式 $\boldsymbol{f}_i$ 表示作用在一个粒子上的合外力，减去 $\dot{\boldsymbol{p}}$ 后整个式子变为了 0，我们将 $-\dot{\boldsymbol{p}}$ 称为“相反的有效力”，它与合外力共同作用使此粒子处于平衡态。将上式代入式(1.18)，并遍历所有粒子，我们有：

$$\sum_i (\boldsymbol{F}_i - \dot{\boldsymbol{p}}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{1.21}$$

同时，我们按式(1.20)将合力分解为作用力和粒子间作用力，得到

$$\sum_i (\boldsymbol{F}_i^{(a)} - \dot{\boldsymbol{P}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i + \sum_i \boldsymbol{f}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0)$$

同样，我们只在讨论约束力所作虚功为 0 的情况，则上式最后可以化为：

$$\sum_i (\boldsymbol{F}_i^{(a)} - \dot{\boldsymbol{p}}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{1.22}$$

称(1.22)为达朗贝尔原理 (D'Alembert's principle)。现在，我们知道，当约束力所作虚功为 0 时，合外力所作功与物体运动加速度产生的所谓“相反有效力”所作功相等，此处，我们可以将上标 $^{(a)}$ 去掉。

广义坐标下的达朗贝尔原理：为方便求解动力学问题，我们需要将达朗贝尔原理用广义坐标来表示。我们将 $\boldsymbol{r}_i$ 转换为广义坐标 qj(假设有 n 个独立坐标)，其变换方程为：

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_n, t)$$

这样，$\boldsymbol{r}_i$ 对应的速度可以表示为：

$$\boldsymbol{v}_i \equiv \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

类似地，我们可以得到虚位移 $\delta \boldsymbol{r}_i$ 的表示：

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

笔记 虚位移是在某一时刻下物体可能发生的任意无穷小的位移，因此它只是广义坐标的函数，而不包含时间的变化 δt。此外，我们在讨论虚位移时确实也只应该将其当成广义坐标的函数，应该排除其包含时间，因此当约束力随时间变化时，虚位移与约束力应当是相互垂直的。

下面需要引出广义力的概念：在广义坐标下，$\boldsymbol{F}_i$ 表示为

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{i,j} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j \tag{1.23}$$

其中，Q_j 就是所谓的广义力，其形式为

$$Q_j = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \tag{1.24}$$

笔记 广义坐标 q 单位不一定为长度，同样地，广义力 Q 的单位也一定为力的单位，但必须保证他们的乘积具有功的单位。如 q 表示转动的角度 $d\theta$ 而 Q 表示力矩 N_j，他们的乘积 $N_j d\theta$ 则具有功的单位。

第二章 中心力问题

2.1 位力定理

第三章 刚体运动的动能

3.1 刚体的独立坐标

刚体系统具有 N 个粒子，这些粒子间的相对位置是确定的，也就是说对于任意两个粒子 i 和 j，其相对距离满足

$$r_{ij} = c_{ij} \tag{3.1}$$

其中 c_{ij} 是一个常数。这是 N 粒子刚体系统满足的约束方程。确定这样一个系统的空间状态，我们需要确定 N 个粒子的自由度，整个系统总共就有 $3N$ 个自由度，这是非常复杂的，而上式所确定的约束方程总共有 $\dfrac{N(N-1)}{2}$ 个，对于很大的 N 来说，这远远大于了系统的所有粒子的自由度数目，因此上述的约束方程并不是完全独立的。

在确定整个刚体系统的空间位置前，我们先考虑如何确定一个点在空间中的位置。对于空间中一个点 4 的位置，我们可以先确定空间中不同直线上的三个点 1、2、3 的位置，并且确切地知道点 4 相对于这三个点的距离时，我们就可以唯一确定点 4 的位置。现在考虑多粒子系统的刚体系统，我们可以知道任意一点 i 相对于 1、2、3 的距离 c_{i1}、c_{i2}、c_{i3}，这样，我们基于这三个点就可以确定刚体内其余所有点的位置，也就确定了这个刚体的空间位置。

现在，我们已经把整个刚体的空间位置由 N 个点的自由度约化成了确定 3 个点的自由度问题，下面来定出这 3 个点所需要的自由度个数。首先，我们知道了刚体内所有点的约束条件为式(3.1)，从而知道这三个点具有确定的相对距离为

$$r_{12} = c_{12}, \quad r_{13} = c_{13}, \quad r_{23} = c_{23}$$

我们确定点 1 需要三个自由度；点 2 在以点 1 为球心，r_{12} 为半径的球面上，因此我们只需要知道点 2 的两个自由度便可以确定其位置；在确定前两个点的位置后，点 3 位于点 1 和点 2 为球心，r_{13} 和 r_{23} 为半径的球面相交所构成的圆上，因此，我们只需要确定其中一个自由度就可以知道点 3 的确定位置。综上，我们总共需要确定 $3+2+1=6$ 个自由度便可以最终定下三个点的具体空间位置，再根据刚体内点的约束关系，就可以确定好整个系统的空间位置。

相对坐标系统： 空间中有一套 Cartesian 坐标系统，刚体处于这个坐标系统中，称为 unprimed 坐标系统，单位矢量为 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}$；在刚体内部建立另一套 Cartesian 坐标系统，刚体内部的粒子用此坐标系统来标记，称为 primed 坐标系统，其单位矢量为 $\mathbf{i}'$、$\mathbf{j}'$ 和 $\mathbf{k}'$。