课程学习笔记

作者：S.Y. Chen

时间：November 9, 2022

Victory won’t come to us unless we go to it.

目录

第一章 波函数和薛定谔方程

按哥本哈根学派的

第二章 角动量理论

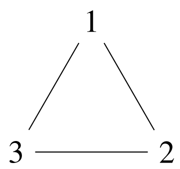
2.1 角动量

角动量算符 角动量算符满足的的充要条件如下

定理 2.1 (角动量算符的充要条件)

$$J_k^\dagger = J_k,\ k = 1, 2, 3, \quad [J_i, J_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} J_k \tag{2.1}$$

其中，ϵ_{ijk} 是反对称的三维 Levi-Civita 排序符号。其有如下性质：1. 若有两个指标相同，则 $\epsilon_{ijk} = 0$；2. 若三个指标两两不等，按循环排序，即如下图所示的排序时，有 $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 0$；3. 剩下的排序将使排序符号为 -1。



角动量算符的本征态和本征值 角动量 $\boldsymbol{J}$ 的本征态和本征值如下

$$\boldsymbol{J}^2|j\ m\rangle = j(j+1)\hbar^2|j\ m\rangle \tag{2.2}$$

$$J_z|j\ m\rangle = m\hbar|j\ m\rangle \tag{2.3}$$

其正交性和归一性为

$$\langle j'\ m'|j\ m\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}, \quad m = -j,\ -j+1,\ \cdots, j-1,\ j\ . \tag{2.4}$$

此外，我们定义角动量的梯度算符

$$J_\pm = J_x \pm iJ_y \tag{2.5}$$

满足对易式

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z, \quad [J_\pm, J_z] = \mp\hbar J_\pm \tag{2.6}$$

梯度算符作用到本征态上的效果为

$$\begin{aligned} J_\pm|j\ m\rangle &= \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm)1}|j\ m\pm 1\rangle \\ &= \hbar\sqrt{(j\pm m+1)(j\mp m)}|j\ m\pm 1\rangle \end{aligned} \tag{2.7}$$

对于单粒子在希尔伯特空间中的抽象角动量本征态 $|j\ m\rangle$ 的坐标表示通常为球谐函数。

角动量

2.2 角动量耦合

2.2.1 自旋-轨道耦合

自旋轨道耦合

2.2.2 两角动量耦合

考虑两个完全对易的角动量 $\boldsymbol{J}_1$ 和 $\boldsymbol{J}_2$，也就是说这两个角动量分别属于两个不同的粒子，或者是一个粒子的自旋角动量和轨道角动量。

2.2.3 Clebsch-Gordan 系数和 3-j 符号

第三章 正则量子化方法

第四章 量子谐振子

4.1

第五章 三维空间的量子力学问题

5.1 径向解

中心势场问题中的径向方程写为如下形式:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left\{\frac{2mr^2}{\hbar^2}[E-V(r)]\right\}=l(l+1) \tag{5.1}$$

束缚态下的体系能量呈现分立谱,以下只考虑束缚态情况。

为求解方程(5.1),作函数代换以方便求解:

$$R(r)=\frac{u(r)}{r} \tag{5.2}$$

这样,我们可以得到如下关系:

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dr}&=\frac{d}{dr}\left(\frac{u(r)}{r}\right)=\frac{r(du/dr)-u}{r^2}\\ \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)&=\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}-u\right)=r\frac{d^2u}{dr^2}\end{aligned} \tag{5.3}$$

将式(5.2)、(5.3)代入式(5.1),得到关于 $u(r)$ 的方程,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dr^2}+\left[V(r)+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u=Eu \tag{5.4}$$

这个方程与一维薛定谔方程类似,不过势能项有所改变,其中的 $\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}$ 类似与经典力学中的离心作用,称为离心项。

下面在谐振子势阱下对其进行求解。

5.1.1 谐振子势下的径向方程求解

径向上的球形谐振子势表示为:

$$V=\frac{1}{2}\omega^2r^2$$