

Réalisation d'un modem de fréquence selon la recommandation V21 de l'Union Internationale des Télécommunications (UIT)

Crico Ruben Augereau Robin Groupe E-F

Département Sciences du Numérique - Première année $2022\mbox{-}2023$

Table des matières

1	Intr	roduction	3
2	Mo (2.1	dem de fréquence Construction du signal modulé en fréquence	3 3 3 4
3	Car	nal de transmission; bruit additif, blanc et Gaussien	6
4	Dér 4.1 4.2 4.3 4.4 4.5	Synthèse du filtre passe-bas	6 6 7 8 9
5	Dér 5.1	Contexte de synchronisation idéale	11 11 12 13 13 14 15
6	Cor	nclusion	15
\mathbf{T}	able	e des figures	
	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	Comparaison de $NRZ(t)$ et $NRZ_{estime}(t)$ à travers le filtre passe-haut Démodulation FSK. Synchronisation supposée idéale	3 4 4 6 7 7 8 9 9 10 11 13

1 Introduction

L'objectif de ce projet était de réaliser sous Matlab un modem capable de transformer une information numérique à transmettre en un signal susceptible de se propager sur le support physique à traverser entre l'émetteur et le récepteur (modulation) et, d'autre part, de retrouver, à partir du signal abimé par le lien physique de communication, l'information binaire transmise (démodulation).

2 Modem de fréquence

2.1 Construction du signal modulé en fréquence

La première étape du projet consiste à réaliser la modulation de fréquence, i.e. transformer l'information binaire à transmettre en un signal modulé en fréquence (exemple sur la figure 1).

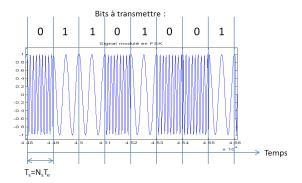


FIGURE 1 – Signal modulé en fréquence

Le signal modulé en fréquence x(t) est généré de la manière suivante :

$$x(t) = (1 - NRZ(t)) \times \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) + NRZ(t) \times \cos(2\pi F_1 t + \phi_1)$$
 (1)

où NRZ(t) est un signal de type NRZ polaire formé à partir de la suite de bits à transmettre en codant les 0 et les 1 par des niveaux 0 et 1 de durée T_s secondes. ϕ_0 et ϕ_1 sont des variables aléatoires indépendantes uniformément réparties sur $[0, 2\pi]$ qui peuvent Ître obtenues sous matlab en utilisant rand*2*pi.

2.1.1 Génération du signal NRZ

Le signal NRZ est un signal aléatoire constitués de de 0 ou 1 dont les niveaux durent $T_s = n_s \times T_e$. Pour n_p périodes, le signal NRZ sera constitué de $n_s n_p$ mesures réparties toutes les T_e .

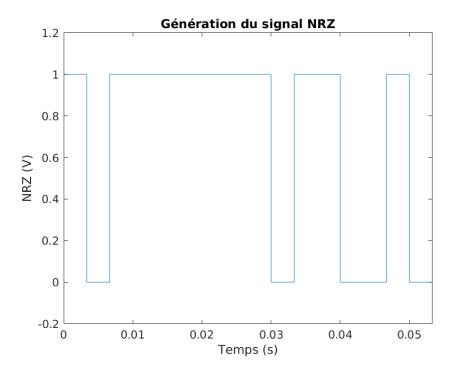


FIGURE 2 – Signal NRZ temporel

2.1.2 Génération du signal modulé en fréquence

En appliquant l'équation 1, on obtient :

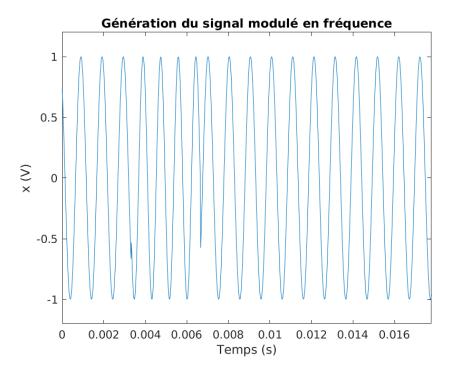


FIGURE 3 – Signal temporel modulé en fréquence $\boldsymbol{x}(t)$

2.1.3 Calcule théorique de la densité spectrale de puissance du signal modulé en fréquence

Cherchons à calculer (théoriquement) la densité spectrale de puissance du signal modulé en fréquence x(t) en fonction de celle du signal NRZ(t) que l'on notera $S_{NRZ}(f)$.

Soit $R_x(\tau)$ la fonction d'autocorrélation du signal x(t). A t fixé, x(t) dépend de NRZ(t), de Φ_0 et de Φ_1 qui sont des variables aléatoires (Φ_0 et Φ_1 suivent des lois uniformes et continues sur $[0,2\pi]$). NRZ(t) suit une loi uniforme et discrète sur $\{0,1\}$ donc NRZ est un signal aléatoire stationnaire. Ainsi x est un signal aléatoire stationnaire et on a à t fixé:

$$R_x(\tau) = E[x(t)x^*(t-\tau)] = E_{NRZ(t),\Phi_0,\Phi_1}[x(t)x^*(t-\tau)] = E_{NRZ(t)}[E_{\Phi_0,\Phi_1}[x(t)x^*(t-\tau)|NRZ(t)]]$$
 Or

$$E_{\Phi_0,\Phi_1}[x(t)x^*(t-\tau)|NRZ(t)] = E_{\Phi_0}[E_{\Phi_1}[x(t)x^*(t-\tau)|NRZ(t),\Phi_0]]$$

D'autre part,

$$x(t)x^{*}(t-\tau) = [(1 - NRZ(t))cos(2\pi F_{0}t + \Phi_{0}) + NRZ(t)cos(2\pi F_{1}t + \Phi_{1})] \times [((1 - NRZ(t-\tau))cos(2\pi F_{0}t + \Phi_{0}) + NRZ(t-\tau)cos(2\pi F_{1}(t-\tau) + \Phi_{1})]$$

En utilisant le développement de cette expression et en utilisant que $E_{\theta}[\cos(2\pi ft + \theta)] = 0$ si θ suit une loi uniforme et continue sur $[0, 2\pi]$, on obtient après simplifications :

$$E_{\Phi_1}[x(t)x^*(t-\tau)|NRZ(t),\Phi_0] = (1 - NRZ(t))(1 - NRZ(t-\tau)) \cdot \frac{1}{2} \cdot cos(2\pi F_0 \tau)$$

$$+NRZ(t)NRZ(t-\tau)cos(2\pi F_1t+\Phi_1)cos(2\pi F_1(t-\tau)+\Phi_1)$$

Donc

$$E_{\Phi_0,\Phi_1}[x(t)x^*(t-\tau)|NRZ(t)] = (1-NRZ(t))(1-NRZ(t-\tau)).\frac{1}{2}.cos(2\pi F_0\tau) + NRZ(t)NRZ(t-\tau)\frac{1}{2}cos(2\pi F_1\tau)$$

En développant le produit du premier terme de la somme, on obtient alors :

$$R_x(\tau) = E_{NRZ(t)}[E_{\Phi_0,\Phi_1}[x(t)x^*(t-\tau)|NRZ(t)]]$$
(2)

$$= \left[1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + R_{NRZ}(\tau)\right] \frac{1}{2} cos(2\pi F_0 \tau) + R_{NRZ}(\tau) \frac{1}{2} cos(2\pi F_1 \tau)$$
(3)

car
$$E[NRZ(t)] = E[NRZ(t-\tau)] = 0 * \frac{1}{2} + 1 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
.

Ainsi,

$$S_x(f) = TF[R_x(\tau)](f) = S_{NRZ}(f) * \frac{1}{4}(\delta(f - F_0) + \delta(f + F_0) + S_{NRZ}(f) * \frac{1}{4}(\delta(f - F_1) + \delta(f + F_1)) + S_{NRZ}(f) * \frac{1}{4}(\delta(f - F_0) + \delta(f + F_0)) + S_{N$$

Finalement,
$$S_x(f) = \frac{1}{4}[S_{NRZ}(f - F_0) + S_{NRZ}(f + F_0) + S_{NRZ}(f - F_1) + S_{NRZ}(f + F_1)]$$

3 Canal de transmission; bruit additif, blanc et Gaussien

Nous allons considérer que le canal de propagation ajoute au signal émis un bruit que l'on suppose blanc et Gaussien et qui modélise les perturbations introduites.

La puissance du bruit Gaussien à ajouter devra Ítre déduite du rapport signal sur bruit (SNR : Signal to Noise Ratio) souhaité pour la transmission donné en dB :

$$SNR_{dB} = 10\log_{10}\frac{P_x}{P_b}$$

où P_x représente la puissance du signal modulé en fréquence et P_b la puissance du bruit ajouté.

4 Démodulation par filtrage

La figure 4 présente le récepteur implanté pour retrouver, à partir du signal modulé en fréquence bruité, le message binaire envoyé.

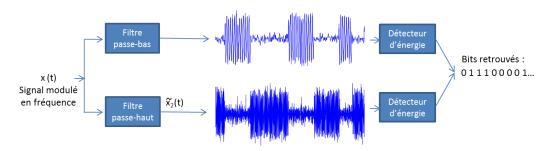


FIGURE 4 – Démodulation par filtrage.

Un filtre passe-bas permet de filtrer les morceaux de cosinus à la fréquence $F_0 = 6000$ Hz, tandis qu'un filtre passe-haut permet de filtrer les morceaux de cosinus à la fréquence $F_1 = 2000$ Hz. Une détection d'énergie réalisée tous les T_s secondes permet de récupérer, à partir des signaux filtrés, les bits 0 et 1 transmis.

4.1 Synthèse du filtre passe-bas

Afin de réaliser un filtre passe-bas, nous avons calculé la réponse impulsionelle d'un filtre passe bas notée h(t).

On a $h(t) = TF^{-1}(\Pi_{2f_c}(f)) = 2f_c \operatorname{sinc}(\pi 2f_c t)$.

Remarque: Pour calculer sinc sous Matlab, il est important de noter que la fonction sinc inclut déjà le facteur π .

On peut ensuite utiliser le module *filter* avec la réponse impulsionnelle précédente.

4.2 Synthèse du filtre passe-haut

La réponse en fréquence d'un filtre passe-haut idéal est donné par : $H_{PH}(\hat{f}) = 1 - H_{PB}(\hat{f})$, où $H_{PB}(\hat{f})$ représente la réponse en fréquence du filtre passe-bas idéal de mÎme fréquence de coupure et $\hat{f} = \frac{f}{f_e}$ la fréquence normalisée. En passant en représentation temporelle par Transformée de Fourier inverse, on obtient :

$$h_{PH}(t) = \delta(t) - h_{PB}(t)$$

4.3 Résultats obtenus avec un ordre des filtres de 61

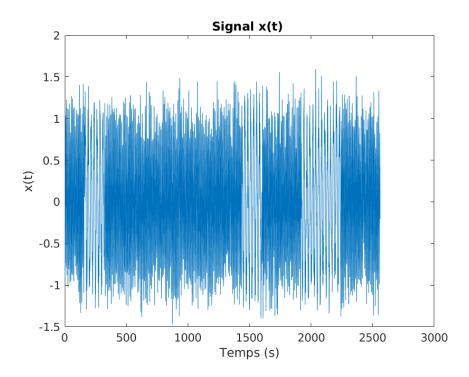


FIGURE 5 – Signal x(t) non filtré

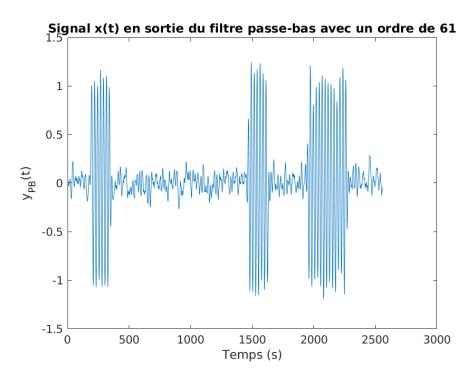


Figure 6 – Signal temporel en sortie du filtre passe-bas

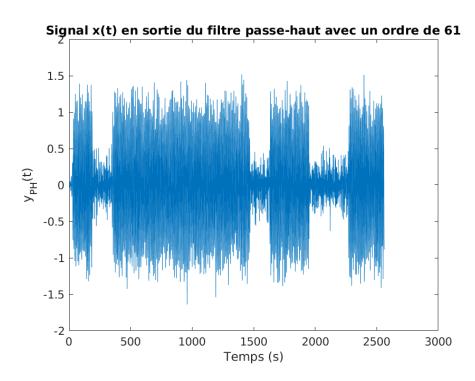


Figure 7 – Signal temporel en sortie du filtre passe-haut

4.4 Modification de l'ordre des filtres

Lorsque l'ordre varie, on observe un retard temporel du signal en sortie des filtres de

$$\tau = \frac{(\text{ordre} - 1)}{2} T_e$$

Afin d'obtenir un signal de sortie identique peu importe l'ordre, on ajoute à la fin du tableau (contenant le signal à filtrer sous forme numérique) $\frac{(\text{ordre}-1)}{2}$ zéros. Ainsi, le signal va pouvoir se "décaler" temporellement.

Ensuite, en sortie du filtre, il suffit de supprimer les $\frac{(\text{ordre}-1)}{2}$ premières valeurs du tableau contenant les valeurs discrètes du signal filtré.

En implémentant cette méthode sous Matlab, on observe sur les figures 8 et 9 que le décalage observé sur la figure 6 a disparu.

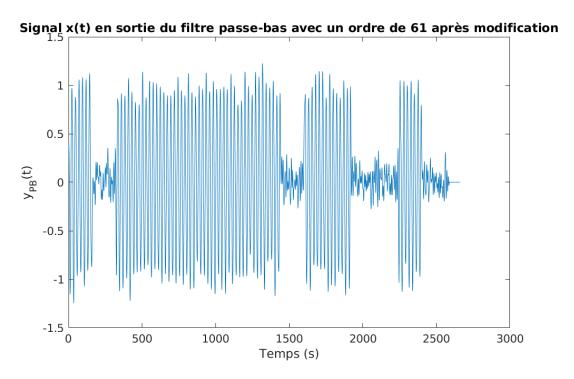


FIGURE 8 - Signal temporel en sortie du filtre passe-bas avec un ordre de 61

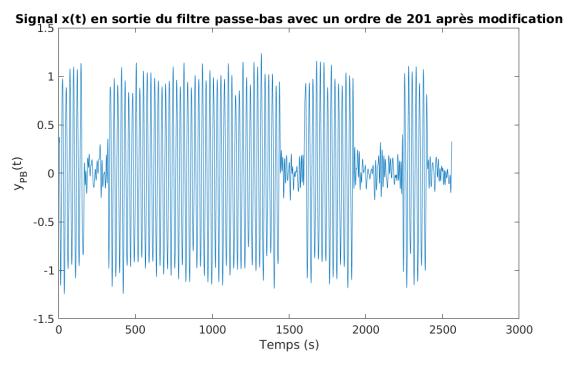


Figure 9 – Signal temporel en sortie du filtre passe-bas avec un ordre de 201

4.5 Utilisation des fréquences de la recommandation V21

En s'adaptant à la recommandation V21, on pose $F_0 = 1180$ Hz et $F_1 = 980$ Hz. En comparant les signaux NRZ(t) et $NRZ_{estime}(t)$, on constate des différences sur certains bits. On définit alors le taux de bits erronés : $\gamma = \frac{\text{nombre de bits erronés}}{\text{nombre de bits total}}$. En utilisant le principe de détection d'énergie appliqué aux signaux de sortie des filtres passe-haut et passe-bas, on obtient les résultats suivants :

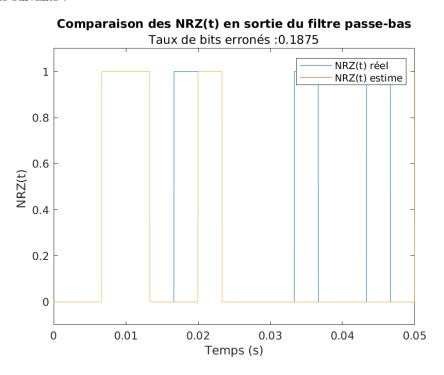


FIGURE 10 – Comparaison de NRZ(t) et $NRZ_{estime}(t)$ à travers le filtre passe-bas

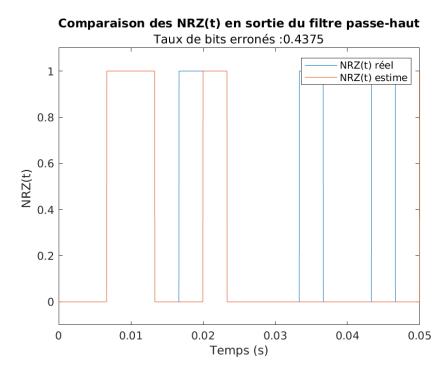


FIGURE 11 – Comparaison de NRZ(t) et $NRZ_{estime}(t)$ à travers le filtre passe-haut

Les taux affichés sont significatifs mais s'expliquent par un SNR faible (≈ 10).

Il n'est pas possible de modifier les caractéristiques des filtres pour retrouver un taux binaire nul lorsqu'il n'y a aucun bruit (ou un rapport signal sur bruit suffisament élevé). En effet, dans le cadre de la norme V21, F_0 et F_1 sont très proches et cela implique d'avoir des filtres passe-haut et passe-bas avec une fréquence de coupure quasi identique. De plus, il n'est pas possible de réaliser dans la vraie vie des filtres parfaits comme ceux simulés numériquement.

C'est pourquoi nous nous intéréssons dans la suite à un nouveau de type de démodulation : la démodulation FSK (Frequency Shift Keying ou Modulation par décalage de fréquence).

5 Démodulateur de fréquence adapté à la norme V21

5.1 Contexte de synchronisation idéale

La figure 12 présente le récepteur implanté afin de retrouver, dans un contexte de synchronisation idéale, le message binaire envoyé à partir du signal modulé en fréquence suivant la recommandation V21.

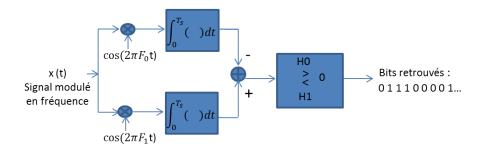


FIGURE 12 – Démodulation FSK. Synchronisation supposée idéale.

5.1.1 Principe de fonctionnement de ce récepteur

En utilisant l'équation 1, on obtient :

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) & \text{si } NRZ(t) = 0\\ \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) & \text{si } NRZ(t) = 1 \end{cases}$$
(4)

Dans le cas où NRZ(t) = 0, la différence des signaux opérée devient alors :

$$\Delta = \int_0^{T_s} x(t) \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) dt - \int_0^{T_s} x(t) \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) dt$$

Or d'après 7,

$$\Delta = \int_0^{T_s} \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) dt - \int_0^{T_s} \cos^2(2\pi F_0 t + \phi_0) dt$$
 (5)

On calcule d'abord le second terme :

$$I_{0,0} = \int_0^{T_s} \cos^2(2\pi F_0 t + \phi_0) dt = \frac{T_s}{2} + \frac{\sin(4\pi F_0 T_s + 2\phi_0) - \sin(2\phi_0)}{8\pi F_0}$$

Ensuite le premier terme :

$$I_{0,1} = \int_0^{T_s} \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) dt = \frac{\sin(2\pi (F_0 + F_1)T_S + (\phi_0 + \phi_1)) - \sin(\phi_0 + \phi_1)}{4\pi (F_0 + F_1)} + \frac{\sin(2\pi (F_1 - F_0)T_S + (\phi_1 - \phi_0)) - \sin(\phi_1 - \phi_0)}{4\pi (F_1 - F_0)}$$

Or on sait que $F_0 = 1180Hz$, $F_1 = 980Hz$, $F_0 + F_1 = 2160Hz$ et $|F_1 - F_0| = 200Hz$ Donc $\sin(4\pi F_0 T_1 + 2\phi_0) - \sin(2\phi_0)$

$$\left| \frac{\sin(4\pi F_0 T_s + 2\phi_0) - \sin(2\phi_0)}{8\pi F_0} \right| \le \frac{2}{8\pi F_0} \approx 0$$

et

$$\mid \frac{\sin(2\pi(F_0 + F_1)T_S + (\phi_0 + \phi_1)) - \sin(\phi_0 + \phi_1)}{4\pi(F_0 + F_1)} \mid \le \frac{2}{4\pi(F_0 + F_1)} \approx 0$$

Ainsi $\Delta = I_{0,1} - I_{0,0} \approx -\frac{T_s}{2} < 0$. On nomme $\Delta = H_0$.

Par symétrie, $H_1 = I_{1,1} - I_{0,1} \approx \frac{T_s}{2} > 0$

Ainsi, sur chaque période T_s , il suffit de calculer cette différence et de regarder son signe :

$$\forall k, \forall t \in [kT_s; (k+1)T_s], NRZ_estime(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta_k > 0 \\ 0 & \text{si } \Delta_k < 0 \end{cases}$$
 (6)

avec Δ_k la différence des intégrales dont les bornes sont kT_s et (k+1)Ts.

Remarque: Pour estimer les intégrales sous Matlab, nous avons utilisé la méthode des rectangles permettant de se ramener à une somme discrète :

$$\int_{(k-1)T_s}^{kT_s} f(t)dt \approx \sum_{i=1}^{N_s} f(t_i).(t_{i+1} - t_i)$$

Avec $t_i = (k-1)T_s + i\frac{T_s}{N_s}$ et donc $t_{i+1} - t_i = \frac{T_s}{N_s} = T_e$. Ainsi

$$\int_{(k-1)T_s}^{kT_s} f(t)dt \approx \left[\sum_{i=1}^{N_s} f((k-1)T_s + iT_e)\right]T_e$$

Donc en Matlab :

$$\int_{(k-1)T_s}^{kT_s} f(t)dt \approx sum(f(k-1)N_s + 1: kN_s)) * T_e$$

5.1.2 Résultats obtenus

On obtient un taux de bits erronés nul.

5.2 Gestion d'une erreur de synchronisation de phase porteuse

Le problème de la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur est un problème important lorsque l'on réalise une transmission. Les deux doivent Ître parfaitement synchronisés en temps et en fréquence pour que le démodulateur implanté précédemment fonctionne, ce qui en pratique n'est bien entendu pas possible. Afin que le modem puisse continuer à fonctionner en présence d'une erreur de phase porteuse, celui-ci doit Ître modifié. La figure 13 présente un démodulateur permettant de s'affranchir de problèmes de synchronisation de phase entre les oscillateurs d'émission et de réception.

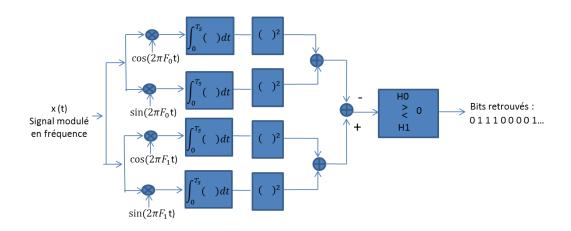


FIGURE 13 – Démodulation FSK - Gestion d'une erreur de phase porteuse.

5.2.1 Impact d'une erreur de phase porteuse sur le modem implanté précédemment

En posant cette fois:

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi F_0 t + \theta_0) & \text{si } NRZ(t) = 0\\ \cos(2\pi F_1 t + \theta_1) & \text{si } NRZ(t) = 1 \end{cases}$$
 (7)

On obtient:

$$H_0 \approx -\cos(\theta_0 - \Phi_0).\frac{T_s}{2}$$

et

$$H_1 \approx cos(\theta_1 - \Phi_1).\frac{T_s}{2}$$

On ne contrôle plus le signe des deux approximations puisque le signe du cosinus dépend du déphasage (non nul cette fois) entre x et les cosinus en réception. Il est donc possible que le démodulateur précedemment implanté fournisse un taux de bits erronés élevés.

5.2.2 Principe de fonctionnement de cette nouvelle version du modem de fréquence

De la même façon que dans le contexte de synchronisation idéale, on définit :

$$-I_{\cos,i,j} = \int_0^{T_s} \cos(2\pi F_i t + \theta_i) \cos(2\pi F_j t + \theta_j) dt$$

$$I_{\sin,i,j} = \int_0^{T_s} \cos(2\pi F_i t + \theta_i) \sin(2\pi F_j t + \theta_j) dt$$

En suivant la figure 13, dans le cas NRZ(t) = 0, on obtient pour la différence des deux sommes au carré d'intégrales :

$$\delta = (I_{cos,0.1}^2 + I_{sin,0.1}^2) - (I_{cos,0.0}^2 + I_{sin,0.0}^2)$$

On pose donc:

$$-H_0^{nv} = (I_{cos,0,1}^2 + I_{sin,0,1}^2) - (I_{cos,0,0}^2 + I_{sin,0,0}^2)$$

$$-- \ H_1^{nv} = (I_{cos,1,1}^2 + I_{sin,1,1}^2) - (I_{cos,1,0}^2 + I_{sin,1,0}^2)$$

Approximations numériques (argument similaire à celui utilisé dans le démodulateur précédent) :

$$I_{cos,i,i} = \frac{T_s}{2}\cos(\phi_i - \theta_i) + \frac{\sin(4\pi F_0 T_s + \theta_i + \phi_i) - \sin(\phi_i - \theta_i)}{8\pi F_0} \approx \frac{T_s}{2}\cos(\phi_i - \theta_i)$$

$$I_{sin,i,i} = \frac{T_s}{2}\sin(\phi_i - \theta_i) + \frac{\cos(\phi_i - \theta_i) - \cos(4\pi F_0 T_s + \theta_i + \phi_i)}{8\pi F_0} \approx \frac{T_s}{2}\sin(\phi_i - \theta_i)$$

$$I_{cos,1,0} = \frac{\sin(2\pi(F_1 + F_0)T_s + \theta_0 + \phi_1) - \sin(\phi_1 + \theta_0)}{4\pi(F_1 + F_0)} + \frac{\sin(2\pi(F_1 - F_0)T_s - \theta_0 + \phi_1) - \sin(\phi_1 - \theta_0)}{4\pi(F_1 - F_0)} \approx 0$$

$$I_{sin,1,0} = \frac{\cos(\phi_0 + \theta_1) - \cos(2\pi(F_1 + F_0)T_s + \theta_1 - \phi_0)}{4\pi(F_1 + F_0)} + \frac{\cos(\phi_0 + \theta_1) - \cos(2\pi(F_1 - F_0)T_s + \theta_1 - \phi_0)}{4\pi(F_1 - F_0)} \approx 0$$

$$I_{cos,0,1} = \frac{\sin(2\pi(F_1 + F_0)T_s + \theta_1 + \phi_0) - \sin(\phi_0 + \theta_1)}{4\pi(F_1 + F_0)} + \frac{\sin(2\pi(F_0 - F_1)T_s - \theta_1 + \phi_0) - \sin(\phi_0 - \theta_1)}{4\pi(F_0 - F_1)} \approx 0$$

$$I_{sin,0,1} = \frac{\cos(\phi_1 + \theta_0) - \cos(2\pi(F_1 + F_0)T_s + \theta_0 - \phi_1)}{4\pi(F_1 + F_0)} + \frac{\cos(\phi_1 + \theta_0) - \cos(2\pi(F_0 - F_1)T_s + \theta_0 - \phi_1)}{4\pi(F_0 - F_1)} \approx 0$$

Ainsi
$$-H_0^{nv} \approx -\frac{T_s^2}{4} [\cos(\Phi_0 - \theta_0)^2 + \sin(\Phi_0 - \theta_0)^2] = -\frac{T_s^2}{4}$$

$$-H_1^{nv} \approx \frac{T_s^2}{4} [\cos(\Phi_1 - \theta_1)^2 + \sin(\Phi_1 - \theta_1)^2] = \frac{T_s^2}{4}$$

Ainsi, pour chaque période T_s , il suffit de calculer cette différence et de regarder son signe :

$$\forall k, \forall t \in [kT_s; (k+1)T_s], NRZ_estime(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta_k > 0 \\ 0 & \text{si } \delta_k < 0 \end{cases}$$
 (8)

avec δ_k la différence des intégrales dont les bornes sont kT_s et (k+1)Ts.

Finalement, ce second démodulateur permet de retrouver l'information même s'il existe une erreur de phase entre les cosinus d'émission et les cosinus et sinus de réception car les approximations de H_0^{nv} et de H_1^{nv} ne dépendent pas des phases des cosinus en émission. Pour tout déphasage, l'une des approximations est strictement positive, l'autre strictement négative. Le critère de détermination d'un bit est donc indépendant du déphasage (contrairement au démodulateur précédent).

5.2.3 Résultats obtenus

On obtient un taux de bits erronés nul.

5.2.4 Application à l'image mystère

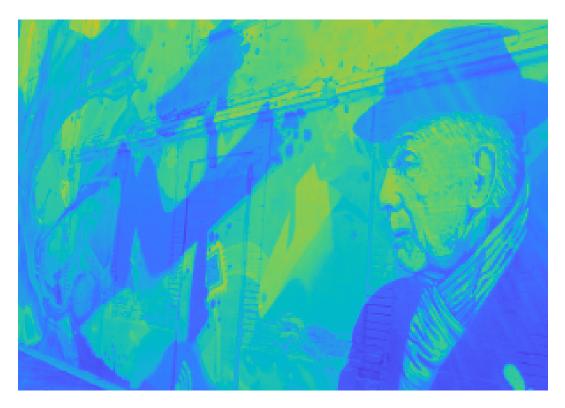


FIGURE 14 – Image obtenue après traitement par le le démodulateur aux fréquences de la norme V21 avec gesiton de l'erreur de synchronisation de phase porteuse

6 Conclusion

Tout d'abord, nous avons implanté un modem simpliste par filtrage passe-haut et passe-bas. Cependant, dans le cadre de la norme V21, il n'était dans ce cas pas possible de modifier les filtres afin de permettre de retrouver l'information transmise même si aucun bruit n'a été ajouté au signal lors de la transmission. Ainsi, nous avons amélioré la partie de ce premier modem centrée sur la démodulation. Ce second démodulateur était efficace pour retrouver l'information transmise dans le cas où les cosinus en émission (ceux utilisés dans la phase de modulation) ont des phases égales à celles utilisées dans ce démodulateur. Dans le cas où les cosinus sont déphasés, la qualité des résultats de la démodulation est aléatoire (car elle dépend des valeurs des déphasages, qui dépendent elles-même des phases des cosinus en émission). Par conséquent, nous avions besoin d'un démodulateur permettant de gérer une erreur de synchronisation de phase porteuse. Nous en avons donc implanté un dont le critère de détermination d'un bit est indépendant du déphasage.