SCC0202 – Algoritmos e Estruturas de Dados I

Introdução a Árvores

Prof.: Dr. Rudinei Goularte
(rudinei@icmc.usp.br)
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC
Sala 4-229

Conteúdo

- Introdução
- Fundamentos e Terminologia
- Representações Gráficas
- Exercícios

Introdução

- Estrutura de listas: organização linear dos dados, onde sua propriedade básica é a relação sequencial mantida entre seus elementos
- Estrutura de árvores: organização dos dados de forma não-linear mantendo um relacionamento hierárquico entre seus elementos

Listas Lineares

TAluno
Nome Curso Departamento ...

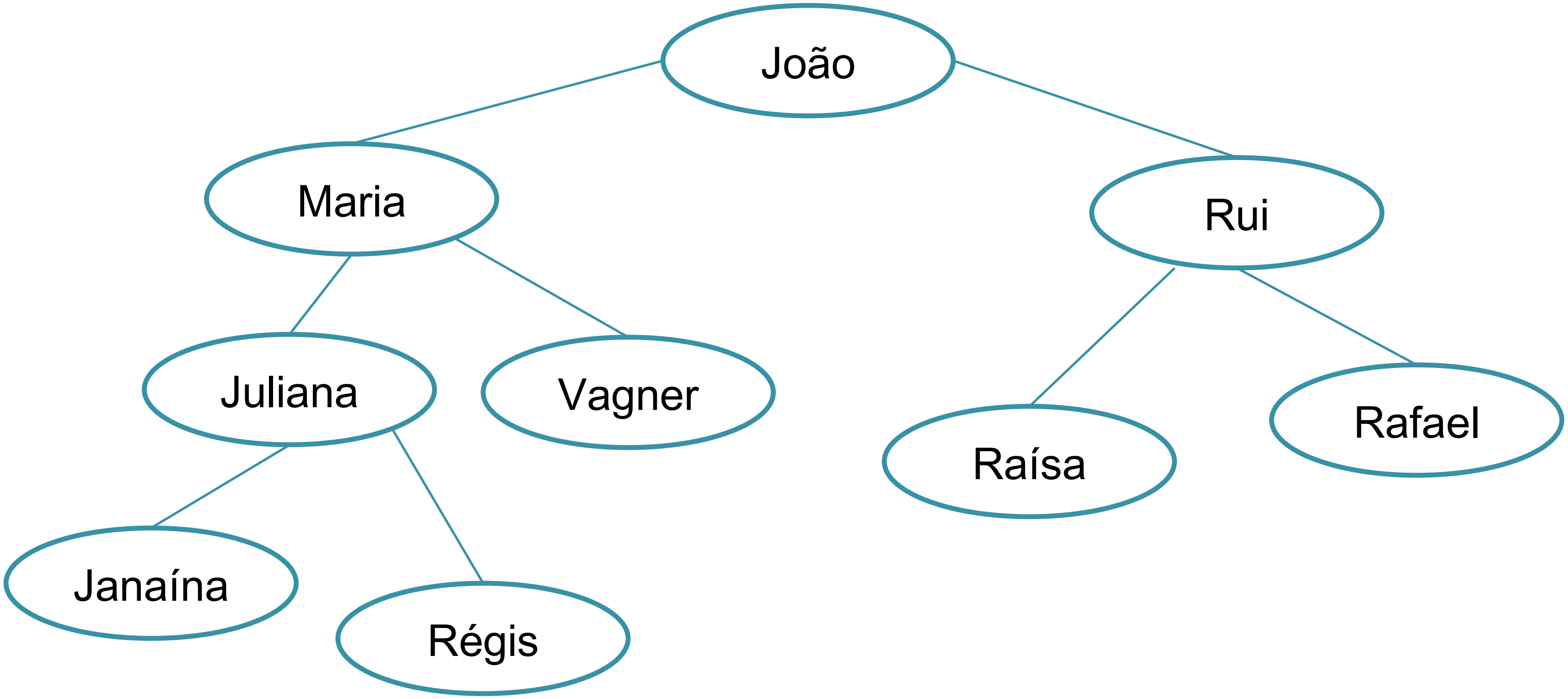
A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	...	An

- Complexidade de tempo para os problemas
  - Listar os alunos do departamento Dx? O(n)
  - Listar os alunos do curso Cx? O(n)
  - Idade média dos alunos do curso Cx? O(n)
  - Ordenar por Curso e, dentro de cada Curso, por Nome? ??

Estrutura de árvore: exemplos

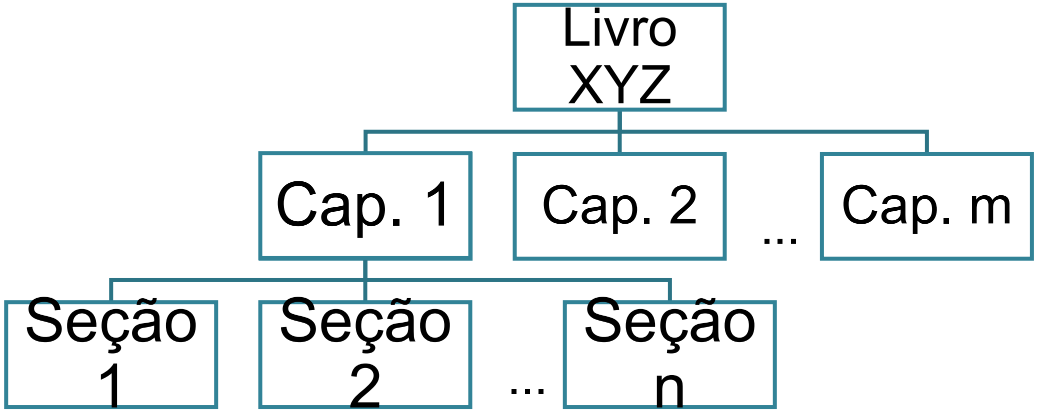
- Algumas situações onde é necessária um representação baseada na relação hierárquica entre os elementos
  - Árvores genealógicas
  - Organização de um livro
  - Representação da estrutura organizacional de uma instituição

Estrutura de árvore: exemplo de árvore genealógica



Estrutura de árvore: exemplo de organização de um livro

1. Livro XYZ
   1. 1 Cap. 1
      1.1.1 Seção 1
      1.1.2 Seção 2
      ...
      1.1.n Seção n
   1.2 Cap. 2
   ...
   1.m Cap. m



- Qual a complexidade?
  - Chegar a seção x do capítulo l...

Justificativas/vantagens

- Representatividade no relacionamento entre os dados
- Facilidades na manipulação computacional dos dados
- Utilizando essa abordagem para representar a Estrutura Organizacional da USP, teríamos maior facilidade na extração de informações como
  - Total de professores de um departamento
  - Total de salário dos funcionários de setor específico
  - Os diretores de cada centro/unidade
  - Entre outras...

Justificativas/vantagens

- Observe que para extrair informações específicas de uma determinada ramificação da árvore não é necessário o percurso por toda a estrutura de informação, uma vez que o relacionamento entre os dados nos permite uma consulta seletiva em regiões específicas da árvore!
  - Isso implica: possibilidade de unir vantagem da implementação encadeada com busca binária (em árvores binárias)!!

Definição

- Uma árvore enraizada T é um conjunto finito de elementos denominados **nós** ou vértices tais que
  - $T = \emptyset$, a árvore é dita vazia
  - $T = \{r\} \cup \{T_1\} \cup \{T_2\} \cup \{T_3\} \cup \ldots \cup \{T_n\}$
- Um nó especial da árvore, r, é chamado de **raiz** da árvore
- Os restantes constituem um único conjunto vazio ou são divididos em $n \geq 1$ conjuntos disjuntos não vazios, $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$, as **subárvores** de r, cada qual por sua vez uma árvore

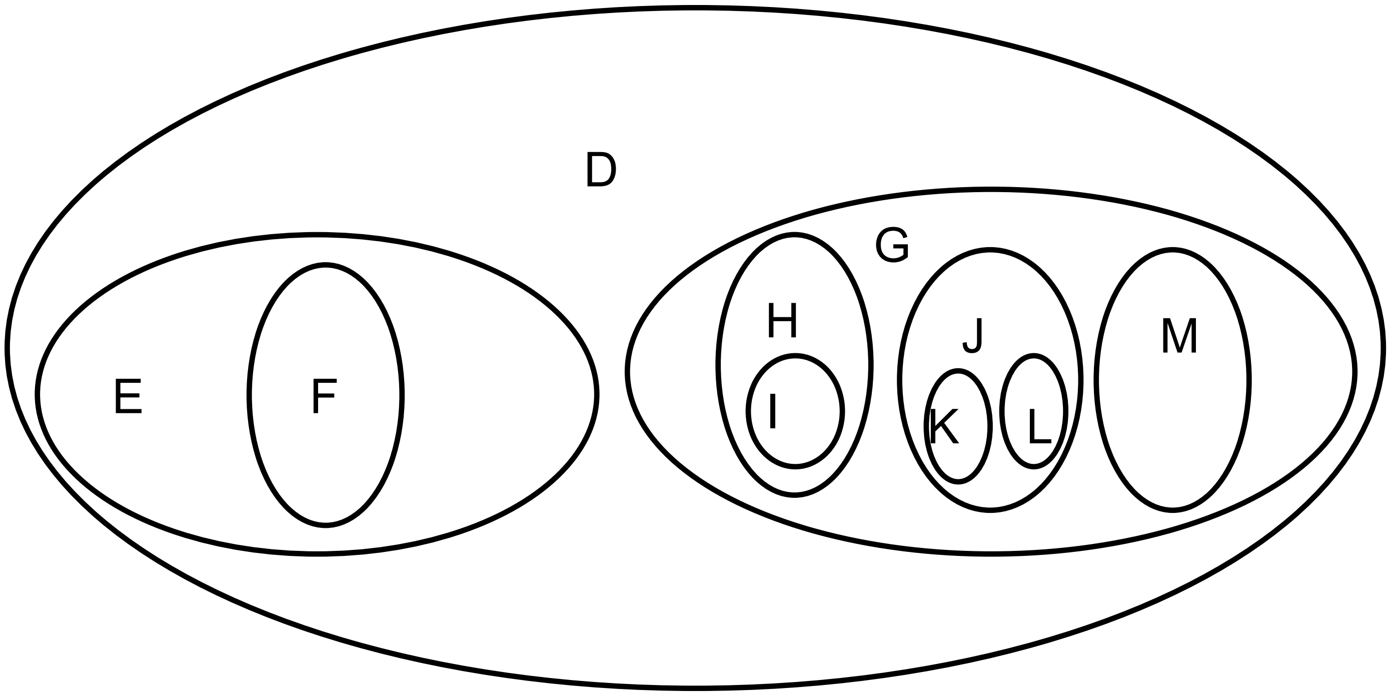
Definição

- Assim para denotar uma árvore *T* usamos
- $T = \{T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n\}$, com r a raiz da árvore e T_v a subárvore *T* com raiz em v
- Note que a definição apresentada é recursiva!

Representações gráficas para árvores

- A estrutura de árvore pode ser representada graficamente de diversas maneiras, dentre elas temos
  - conjuntos aninhados
  - indentação
  - grafos, sendo esta última a mais utilizada

Representação em conjuntos aninhados



Representação com indentação

D

.........E

.... F

.........G

.... H

.... I

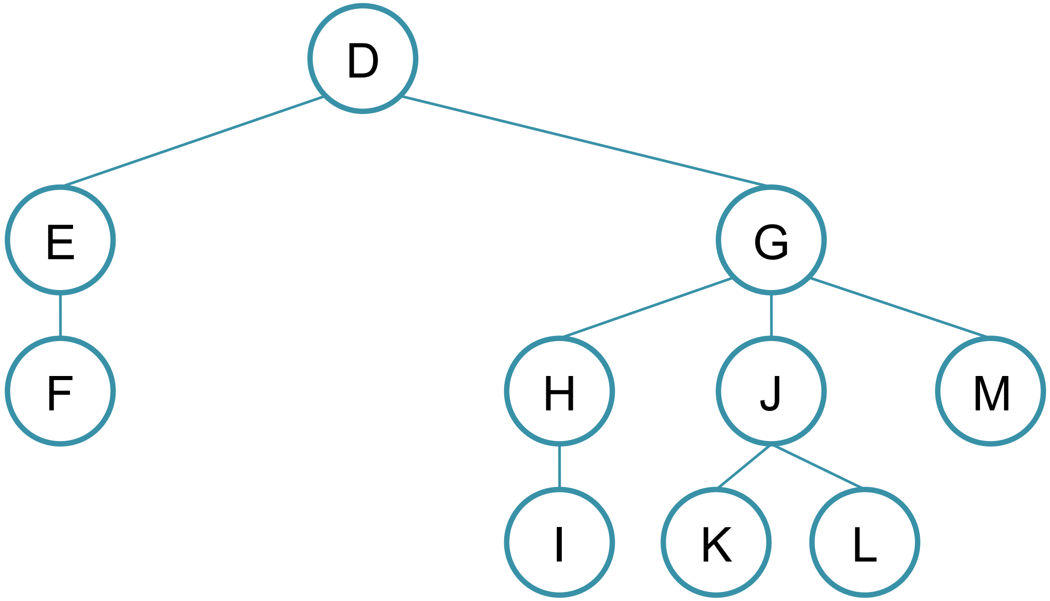
.... J

.... K

.... L

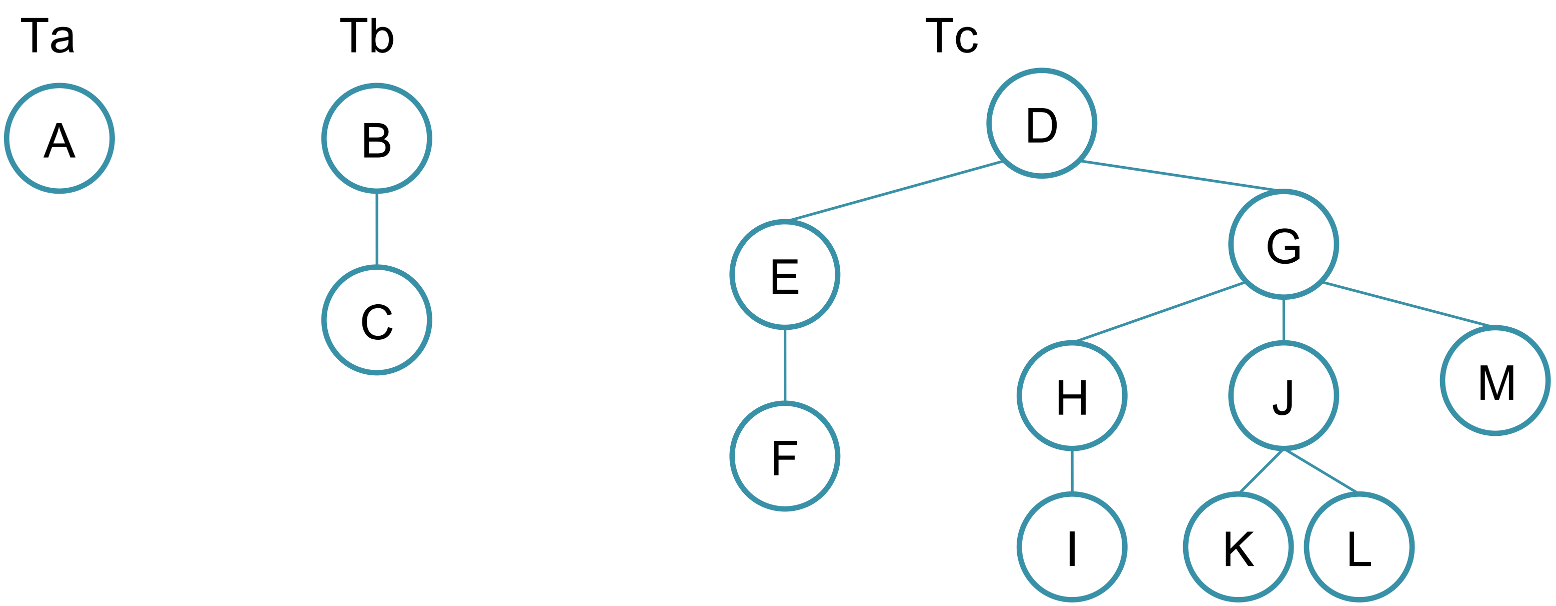
.... M

Representação utilizando grafos



Representação Aninhada

- Exemplo
  - Ta = {A}
  - Tb = {B, {C}}
  - Tc = {D, {E, {F}}, {G, {H, {I}}, {J, {K}, {L}}, {M}}}



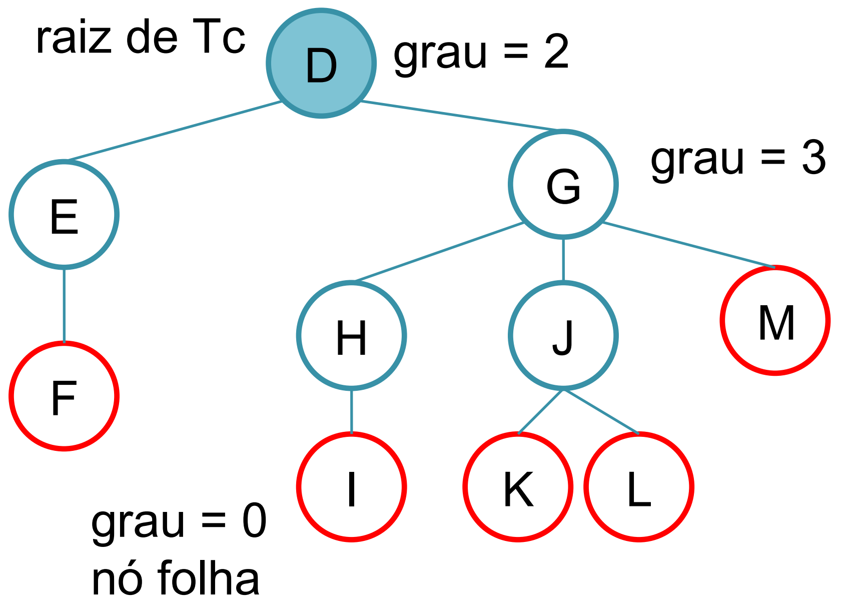
Representação Aninhada

- Exercícios
  - $T_d = \{2, \{1\}, \{3\}\}$
  - $T_e = \{4, \{2, \{1\}, \{3\}\}, \{6, \{5\}, \{7\}\}\}$
  - T_f = {Joao, {Daniel, {Andres}, {Fernanda}}, {Maria, {Marcos}, {Rafael}}}

Terminologias

- Considerando a árvore Tc e a definição dada de árvores anteriormente vejamos algumas terminologias básicas
  - O **grau de um nó** é o número de sub-árvores relacionadas àquele nó. Por exemplo: em Tc o grau do nó D é 2, de G é 3 e dos nós K, L, I, F e M é 0 (zero)
  - Nós com grau igual a zero não possuem sub-árvores, portanto são chamados **nós folhas ou terminais**
  - Se cada nó de uma árvore possui um grau máximo e todos os nós possuem o mesmo grau máximo, podemos definir este grau como o **grau da árvore**

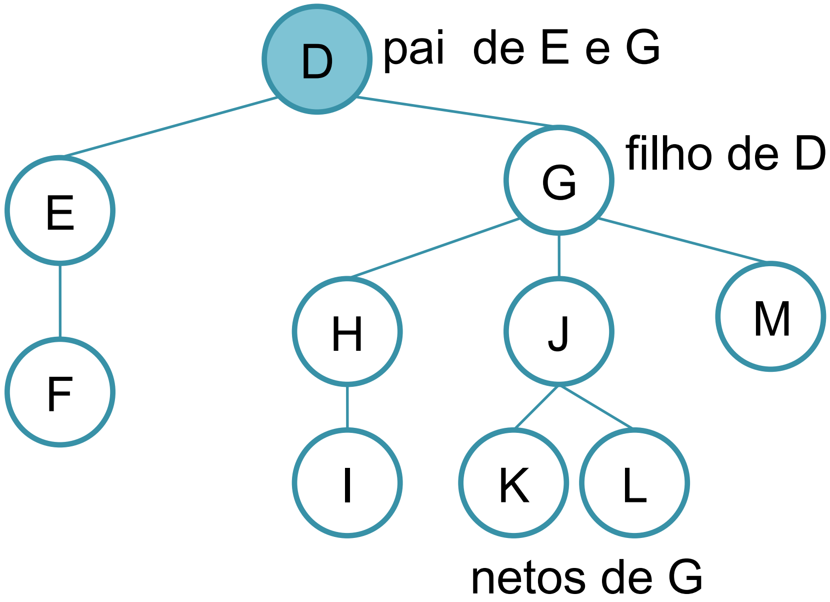
Terminologias



Terminologias

- Para identificar os nós na estrutura, usamos denominações da relação hierárquica existente em uma árvore genealógica
  - Cada raiz *ri* da sub-árvore *Ti* é chamada **filho** de *r*. O termo **neto** é usado de forma análoga
  - O nó raiz *r* da árvore *T* é o **pai** de todas as raízes r_i das sub-árvores T_i. O termo **avô** é definido de forma análoga
  - Duas raízes r_i e r_j das sub-árvores T_i e T_j de *T* são ditas **irmãs**

Terminologias

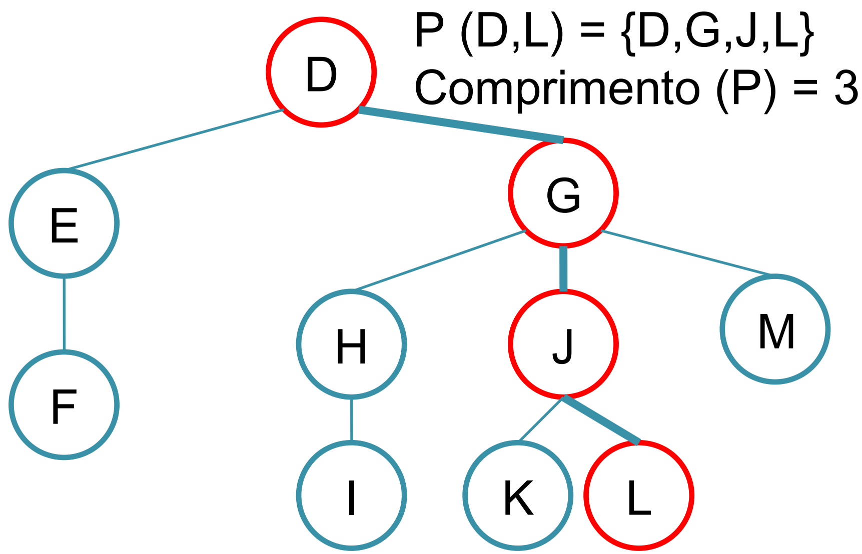


Definição

- Outras definições importantes são obtidas a partir da distância de um nó em relação aos outros nós da árvore
  - **Caminho**: sequência não vazia de nós,

    $P = \{r_1, r_2, . . . , r_k\}$, onde o i-ésimo nó r_i da sequência é pai de r_{i+1}
  - **Comprimento**: tomando a definição de caminho, o comprimento de um caminho P é igual a k - 1

Definição



Terminologia

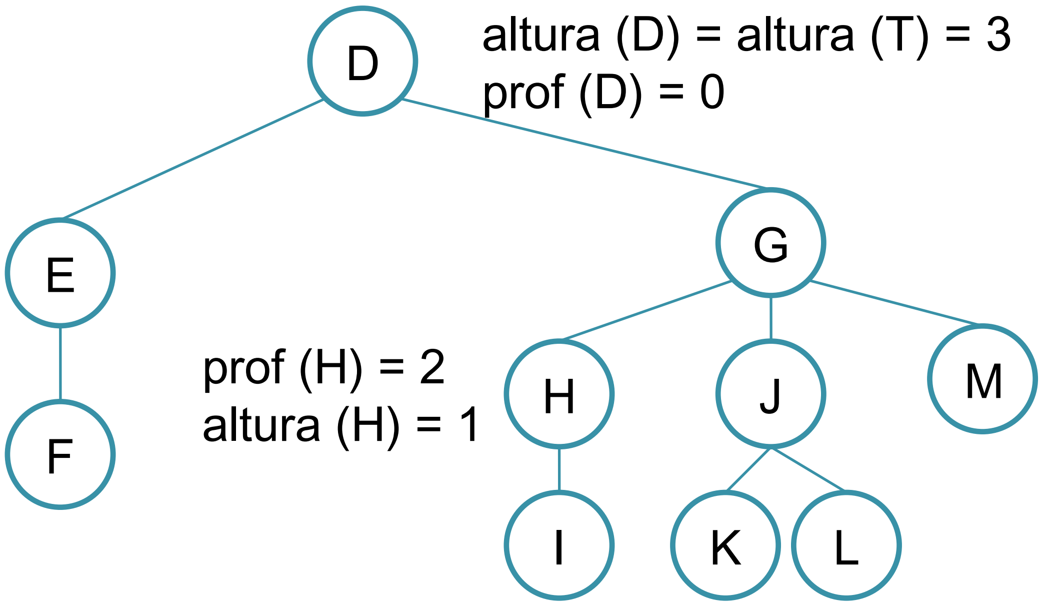
- **Altura de um nó**: a altura de um nó r_i é o comprimento do caminho mais longo do nó r_i a uma folha
  - As folhas têm altura 0 (zero)

- **Altura de uma árvore**: é igual a altura da raiz *r* de *T*

- **Profundidade**: a profundidade de um nó r_i de uma árvore *T* é o comprimento do único caminho em *T* entre a raiz *r* e o nó r_i
  - Qual é a maior profundidade entre todos os nós de uma árvore?

- **Nível**: um conjunto de nós com a mesma profundidade é denominado nível da árvore
  - A raiz está no nível 0 (zero)

Terminologia



Terminologia

- **Ascendência e descendência**: considerando dois nós r_i e r_j , o nó r_i é um ancestral de r_j se existe um caminho em T de r_i a r_j , tal que, o comprimento de P entre r_i e r_j seja diferente de 0 (zero)
  - De forma análoga se define o **descendente** de um nó

Exercícios

1. Considere a seguinte árvore:

   $$T_e = \{a, \{b, \{c, \{d\}\}, \{e, \{f\}, \{g\}\}\}, \{h, \{i\}\}\}$$

   - Obtenha as representações por conjunto, indentação e grafos
   - Encontre o grau, altura e profundidade de cada nó
   - Encontre todos os caminhos possíveis a partir da raiz com seus respectivos comprimentos

- Material baseado nos originais produzidos pelos professores:
  - Gustavo E. de A. P. A. Batista
  - Fernando V. Paulovich
  - Maria das Graças Volpe Nunes
- Referências (material parcialmente baseado em):

  - SZWARCFITER, J. L.; MARKENZON, L. Estruturas de Dados e seus Algoritmos, Livros Técnicos e Científicos, 1994.
  - TENEMBAUM, A.M., e outros Data Structures Using C, Prentice-Hall, 1990.
