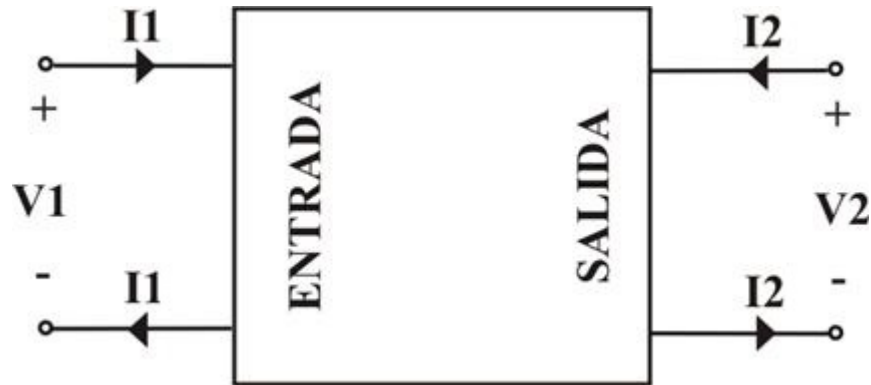


1 Introducción y objetivos

En este trabajo práctico, se analiza el comportamiento de un cuadripolo tipo “II” y uno tipo “ T ” en función de sus parámetros característicos. En primer lugar se realizan las mediciones apropiadas para cada cuadripolo por separado, y luego en configuración de serie, paralelo y cascada. Luego se calculan los parámetros apropiados de cada configuración para comparar con los que resultan desde el punto de vista teórico. Por último se toma solo uno de los cuadripolos para realizar un análisis de máxima transferencia a una carga resistiva pura.

2 Configuraciones de ensayo

Para los diferentes ensayos, se realizaron las siguientes conexiones:



Donde la entrada es la puerta 1 (P1) y la salida es la puerta 2 (P2).

- Conectando la fuente por P1, con P2 a circuito abierto.
- Conectando la fuente por P1, con P2 en cortocircuito.
- Conectando la fuente por P2, con P1 a circuito abierto.
- Conectando la fuente por P2, con P1 en cortocircuito.

3 Ecuaciones paramétricas

Tomando las tensiones y sentidos de corrientes indicados en la sección anterior, se plantean las ecuaciones para los parámetros con los que se trabaja.

- Parámetros de Impedancia (Z)

$$\begin{cases} V_1 = I_1 Z_{11} + I_2 Z_{12} \\ V_2 = I_1 Z_{21} + I_2 Z_{22} \end{cases}$$

- Parámetros de Admitancia (Y)

$$\begin{cases} I_1 = V_1 Y_{11} + V_2 Y_{12} \\ I_2 = V_1 Y_{21} + V_2 Y_{22} \end{cases}$$

- Parámetros de Transmisión (T)

$$\begin{cases} V_1 = V_2 A - I_2 B \\ I_1 = V_2 C - I_2 D \end{cases}$$

4 Valores medidos

En las siguientes tablas se muestran los valores medidos para las diferentes configuraciones mencionadas. Para la realización de las mediciones se ajustó la fuente de alimentación a un valor de 10V.

Cuadripolo "A" - 9606 (II)				
	$V_1(V)$	$V_2(V)$	$I_1(mA)$	$I_2(mA)$
$V_1 = 0$	0	9.8	75	45
$V_2 = 0$	9.8	0	50	75
$I_1 = 0$	6.68	9.8	0	23
$I_2 = 0$	9.8	7.31	25	0

Cuadripolo "B" - 9607 (T)				
	$V_1(V)$	$V_2(V)$	$I_1(mA)$	$I_2(mA)$
$V_1 = 0$	0	9.8	22.3	27.5
$V_2 = 0$	9.8	0	35	23.3
$I_1 = 0$	6.75	9.8	0	12.5
$I_2 = 0$	9.8	8.46	15.5	0

Cuadripolo "A" y "B" en serie				
	$V_1(V)$	$V_2(V)$	$I_1(mA)$	$I_2(mA)$
$I_1 = 0$	6.8	9.8	0	10
$I_2 = 0$	9.8	8.33	12	0

Cuadripolo "A" y "B" en paralelo				
	$V_1(V)$	$V_2(V)$	$I_1(mA)$	$I_2(mA)$
$V_1 = 0$	0	9.8	96	127.5
$V_2 = 0$	9.8	0	147.5	95.6

Cuadripolo "A" y "B" en cascada				
	$V_1(V)$	$V_2(V)$	$I_1(mA)$	$I_2(mA)$
$V_2 = 0$	9.8	0	72.5	13.4
$I_2 = 0$	9.8	5.62	65	0

Cuadripolo "B" y "A" en cascada				
	$V_1(V)$	$V_2(V)$	$I_1(mA)$	$I_2(mA)$
$V_2 = 0$	9.8	0	31	12.2
$I_2 = 0$	9.8	2.14	27.5	0

5 Cálculo de parámetros

A partir de las mediciones obtenidas se procede a calcular los parámetros característicos de cada cuadripolo, en Z (parámetros impedancia), Y (parámetros admitancia) y T (parámetros transmisión). Se indican los parámetros de los cuadripolos "II" ó " T ", con los subíndices "A" y "B" respectivamente.

- Parámetros de Impedancia (Z)

$$[Z_A] = \begin{bmatrix} 392 & 290.4 \\ 292.4 & 426 \end{bmatrix}; [Z_B] = \begin{bmatrix} 632.26 & 540 \\ 546 & 784 \end{bmatrix};$$

$$\text{Para los cuadripolos en serie: } [Z_{SERIE}] = \begin{bmatrix} 817 & 680 \\ 694 & 980 \end{bmatrix}$$

- Parámetros de Admitancia (Y)

$$[Y_A] = \begin{bmatrix} 0.0051 & -0.0076 \\ -0.0076 & 0.0046 \end{bmatrix}; [Y_B] = \begin{bmatrix} 0.0036 & -0.0023 \\ -0.0024 & 0.0028 \end{bmatrix};$$

$$\text{Para los cuadripolos en paralelo: } [Y_{PARALELO}] = \begin{bmatrix} 0.015 & -0.0098 \\ -0.0098 & 0.013 \end{bmatrix}$$

- Parámetros de Transmisión (T)

$$[T_A] = \begin{bmatrix} 1.34 & 130.7 \\ 0.0034 & 0.67 \end{bmatrix}; [T_B] = \begin{bmatrix} 1.16 & 420.6 \\ 0.0018 & 1.5 \end{bmatrix}$$

Para los cuadripolos en cascada:

$$\text{Cascada "A - B": } [T_{A-B}] = \begin{bmatrix} 1.74 & 731.34 \\ 0.011 & 5.41 \end{bmatrix}; \text{Cascada "B - A": } [T_{B-A}] = \begin{bmatrix} 4.58 & 803.3 \\ 0.013 & 2.54 \end{bmatrix}$$

6 Equivalencia de parámetros

A partir de los valores medidos se calculan, mediante las fórmulas que los relacionan, los parámetros Y y T en función de los Z obtenidos de las mediciones

- Cálculo de $[Z]$ a partir de la inversa de $[Y]$:

$$[Z_A] = \begin{bmatrix} 392 & 290.4 \\ 292.4 & 426 \end{bmatrix} \Rightarrow [Y_A]^{-1} = [Z_A] = \begin{bmatrix} 134 & 221.57 \\ 221.57 & 148.6 \end{bmatrix}$$

$$[Z_B] = \begin{bmatrix} 632.26 & 540 \\ 546 & 784 \end{bmatrix} \Rightarrow [Y_B]^{-1} = [Z_B] = \begin{bmatrix} 614.03 & 504.3 \\ 526.3 & 789.47 \end{bmatrix}$$

- Cálculo de $[T]$ a partir de las ecuaciones para conversión desde $[Z]$:

$$[T_A] = \begin{bmatrix} 1.34 & 130.7 \\ 0.0034 & 0.67 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{\Delta Z}{Z_{21}} \\ \frac{1}{Z_{21}} & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{bmatrix} = [T_A] = \begin{bmatrix} 1.34 & 280.7 \\ 0.0034 & 1.45 \end{bmatrix}$$

$$[T_B] = \begin{bmatrix} 1.16 & 420.6 \\ 0.0018 & 1.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{\Delta Z}{Z_{21}} \\ \frac{1}{Z_{21}} & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{bmatrix} = [T_B] = \begin{bmatrix} 1.16 & 367.9 \\ 0.0018 & 1.43 \end{bmatrix}$$

- Cálculo de $[Z_{SERIE}]$ a partir de la suma $[Z_A] + [Z_B]$:

$$[Z_{SERIE}]_{MEDIDO} = \begin{bmatrix} 817 & 680 \\ 694 & 980 \end{bmatrix} \approx [Z_{SERIE}] = [Z_A] + [Z_B] = \begin{bmatrix} 1024.26 & 830.4 \\ 838.4 & 1210 \end{bmatrix}$$

- Cálculo de $[Y_{PARALELO}]$ a partir de la suma $[Y_A] + [Y_B]$:

$$[Y_{PARALELO}]_{MEDIDO} = \begin{bmatrix} 0.015 & -0.0098 \\ -0.0098 & 0.013 \end{bmatrix} \approx [Y_{PARALELO}] = [Y_A] + [Y_B] = \begin{bmatrix} 0.0087 & -0.0099 \\ -0.01 & 0.0074 \end{bmatrix}$$

- Cálculo de los cuadripolos en cascada a partir del producto matricial:

$$[T_{A-B}]_{MEDIDO} = \begin{bmatrix} 1.74 & 731.34 \\ 0.011 & 5.41 \end{bmatrix} \approx [T_{A-B}] = [T_A] \times [T_B] = \begin{bmatrix} 1.79 & 759.6 \\ 0.005 & 2.44 \end{bmatrix}$$

$$[T_{B-A}]_{MEDIDO} = \begin{bmatrix} 4.58 & 803.3 \\ 0.013 & 2.54 \end{bmatrix} \approx [T_{B-A}] = [T_B] \times [T_A] = \begin{bmatrix} 2.98 & 433.4 \\ 0.007 & 1.24 \end{bmatrix}$$

7 Análisis de máxima transferencia de potencia

Para el análisis de máxima transferencia de potencia hacia una carga resistiva, se eligió usar el cuadripolo tipo “II”. Midiendo los parámetros V_2 a circuito abierto e I_2 en cortocircuito se obtuvo:

Cuadripolo “A” - 9606 (II)		
$V_2(V_{TH})$	$I_2(I_N)$	$R_{TH}=\frac{V_2}{I_2}$
7.28V	80.4mA	90.55 Ω

Se conectó el cuadripolo como se indica en la figura, con un potenciómetro a la salida, para poder determinar en forma experimental dicho valor de R_L para el que se da la máxima transferencia de potencia.

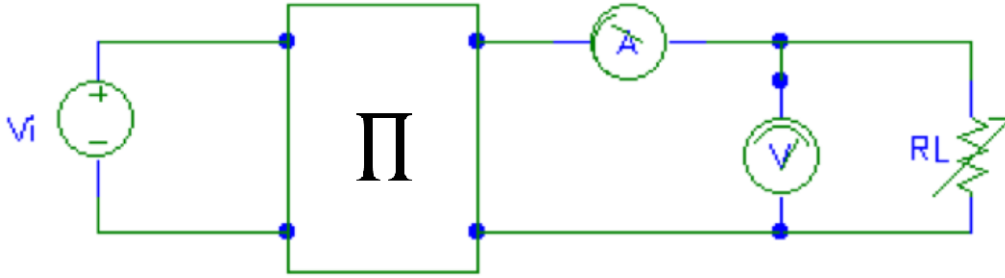


Figura 1: Conexión del cuadripolo e instrumentos.

A partir de las mediciones realizadas, se obtuvieron los siguientes valores de potencia al variar R_L :

$V_2[V]$	$I_2[mA]$	$R_L[\Omega]$	$P[mW]$
5.2	25	208	130
4.8	27.5	174.55	132
4.5	30	150	135
4.2	32.5	129.33	136.5
4	35	114.29	140
3.9	37.5	104	146.25
3.7	40	92.5	148
3.5	42.5	82.35	148.75
3.45	43	80.23	146.62
3.2	45	71.11	144
3	47.5	63.16	142.5
2.8	50	56	140
2.5	52.5	47.62	131.25
2.2	55	40	120

Se realizó luego, la curva de transferencia de potencia en función de R_L para dichos valores:

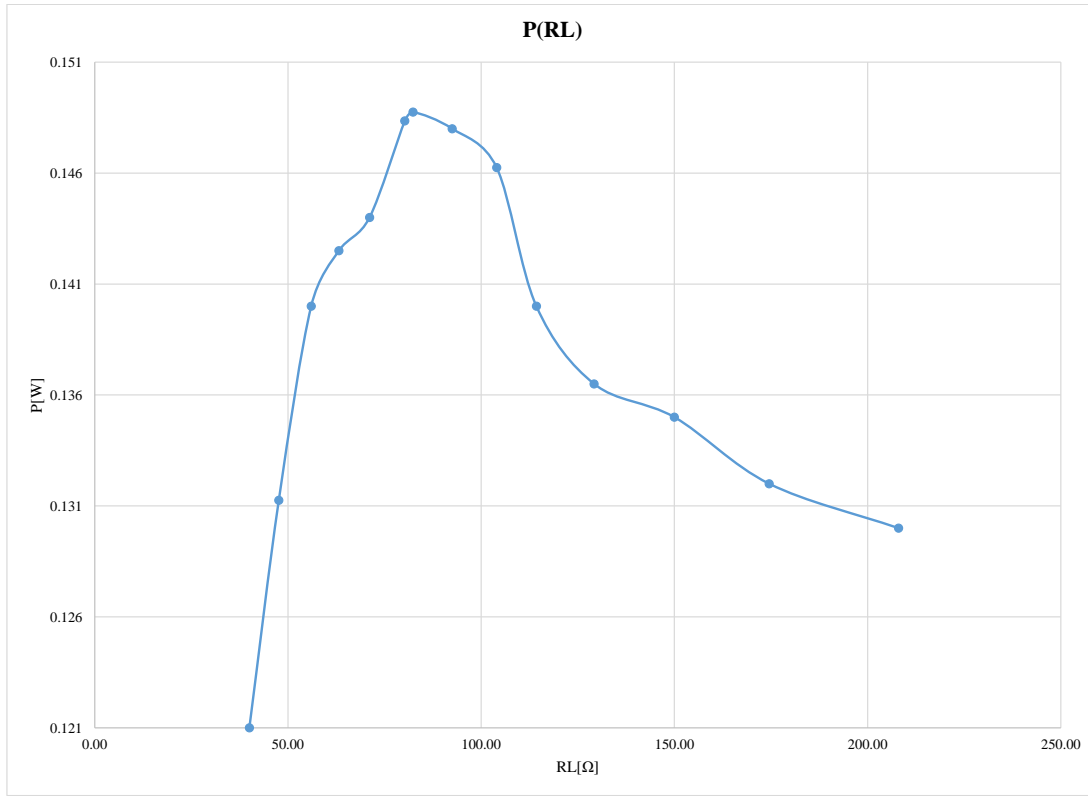


Figura 2: Curva de potencia obtenida, tomando las ordenadas a partir del mínimo valor para mayor claridad.

De los datos obtenidos se extrajo que, experimentalmente el valor de la resistencia que permite la máxima transferencia de potencia es $R_L = 82.35 \Omega$.

8 Conclusiones y observaciones

Para la primer parte, en base a la equivalencia de parámetros calculada, se comparó con los valores calculados por mediciones. De esto resultó que, para los parámetros Z , la inversa de sus respectivos parámetros Y resultó aproximadamente igual para el cuadripolo “T”, no así con el cuadripolo “II”, donde surgen diferencias considerables en los cuatro valores de la matriz. Se supone que esto puede deberse a algún error en los ensayos realizados para dicho cuadripolo, o que para ese tipo de cuadripolo por los valores que poseen sus resistencias, los ensayos se vean afectados por un aporte de caída de tensión considerable en la resistencia interna de la fuente de alimentación. Esto también se ve reflejado en los casos siguientes:

En la equivalencia de parámetros T , se observa una situación similar a la anterior, donde el cálculo de los parámetros T a partir de las ecuaciones de conversión con los parámetros Z , resulta aproximadamente igual para el cuadripolo “T”, no así con el cuadripolo “II”, donde se observan diferencias considerables en los valores de B y D, mientras que A y C muestran valores que son aproximadamente iguales a los que resultan de las mediciones.

En la equivalencia del caso serie, a partir de la suma de las matrices de parámetros Z de ambos cuadripolos, en la resultante se observa que dicha matriz $[Z_A] + [Z_B]$, es diferente a la $[Z_{SERIE}]_{MEDIDO}$, en particular se observa que los cuatro valores muestran una misma diferencia cada uno con los de la matriz resultante de la suma.

En la equivalencia del caso paralelo, a partir de sumar las matrices de parámetros Y de ambos cuadripolos, se observa también una diferencia entre los valores que surgen de hacer $[Y_A] + [Y_B]$ y la $[Y_{PARALELO}]_{MEDIDO}$.

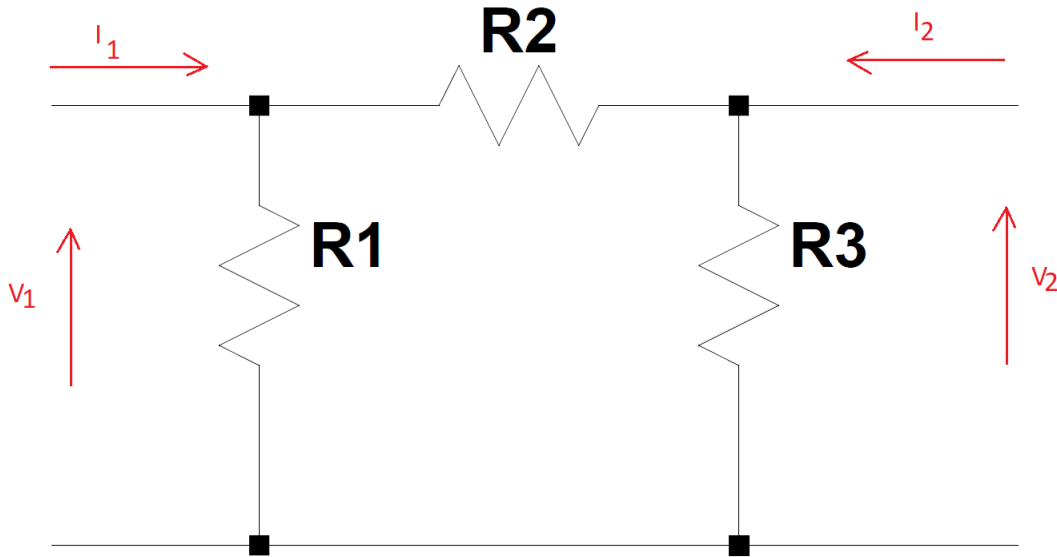
Para este caso se observan diferencias considerables en un factor de aproximadamente 0.5 en los valores de la diagonal, es decir en la Y_{11} y la Y_{22} resultantes, mientras que los Y_{12} y Y_{21} muestran valores aproximadamente idénticos a los que surgen de las mediciones del paralelo.

Finalmente, en el caso de los cuadripolos en cascada, se observan situaciones un poco diferentes. En el caso cascada “ $\Pi - T$ ”, resultan similares los valores de $[T_{A-B}]_{MEDIDO}$ de la primer columna (A y B) a los obtenidos en la primer columna de realizar el producto matricial $[T_A] \times [T_B]$, mientras que los de la segunda columna (C y D) muestran diferencias en un factor de aproximadamente 0.5. En el caso cascada “ $T - \Pi$ ”, se observa que son ahora todos los valores de la matriz $[T_{B-A}]_{MEDIDO}$ los que difieren en un factor de 0.5 respecto de los resultantes del producto matricial $[T_B] \times [T_A]$.

Para el análisis de máxima transferencia de potencia, se eligió (como se mencionó en la sección correspondiente) utilizar el cuadripolo tipo “ Π ”. Esto se debe a que es el que, midiendo V_2 con la salida a circuito abierto y midiendo I_2 con la salida en cortocircuito resulta una R_{TH} menor, dado que este es el valor de carga a conectar para el cual la fuente transfiere la máxima potencia. De comparar los valores de R_{TH} medido y estimado con la curva de potencia, se observa que los resultados son similares, donde surge que el obtenido por observación de la curva es un poco menor. Esto último puede deberse a que se requerirían tomar mayores valores cercanos al punto de máxima transferencia para conseguir una mejor aproximación al valor calculado por el cociente de $\frac{V_2}{I_2}$. Aunque, también puede surgir una diferencia por la lectura de I_2 , dado que la resistencia interna del mismo tiene un valor que es del orden de la R_{TH} que resulta del análisis de este caso.

9 Anexo: cálculos teóricos

Aquí se desarrollan las expresiones de cálculo de los parámetros correspondientes a cada cuadripolo Cuadripolo tipo “ Π ”:



Por cuestiones de simplicidad (al pasivar V_1 o V_2 se elimina una resistencia), para este cuadripolo conviene calcular sus parámetros $[Y]$:

Como el cuadripolo es recíproco (sólo se compone de componentes pasivos) $Y_{12} = Y_{21}$. Entonces se tiene:

$$Y_{11} = \frac{I_1}{V_1} |_{V_2=0} = Y_1 + Y_2$$

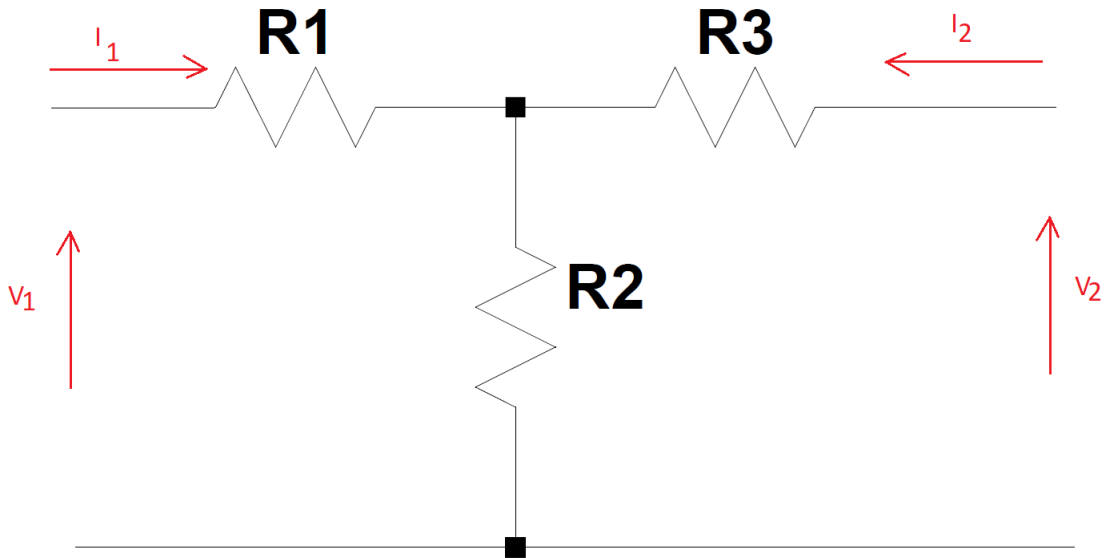
$$Y_{21} = Y_{12} = \frac{I_2}{V_1} |_{V_2=0} = -Y_2$$

$$Y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \big|_{V_1=0} = Y_2 + Y_3$$

Por ende:

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix}$$

Cuadripolo tipo “ T ”:



Para este cuadripolo, desde el análisis teórico conviene calcular los parámetros Z :

Como es recíproco $Z_{12} = Z_{21}$. Entonces se tiene:

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \big|_{I_2=0} = R_1 + R_2$$

$$Z_{12} = Z_{21} = \frac{V_1}{I_2} \big|_{I_1=0} = R_2$$

$$Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \big|_{I_1=0} = R_2 + R_3$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & R_2 \\ R_2 & R_2 + R_3 \end{bmatrix}$$