

1. Síntesis mediante modulación en frecuencia

Introducción teórica

La modulación en frecuencia esta dada por:

$$x(t) = A(t)\cos(2\pi f_c t + I(t)\cos(2\pi f_m t + \phi_m) + \phi_c)$$

Parámetros de la modulación en frecuencia:

- f_c = frecuencia de la señal portadora
- f_m = frecuencia de la señal modulante
- f_d = desviación de la frecuencia (respecto de la portadora)
- $I = \frac{f_d}{f_m}$ = índice de modulación

Por simple inspección se puede ver que si $I = 0$ la desviación de la frecuencia (f_d) debe ser 0 y por ende no hay modulación en frecuencia. Un caso más interesante es cuando I es mayor que 0, se puede observar que aparecen nuevas componentes espectrales lo que provoca que la energía de la señal sea redistribuida.

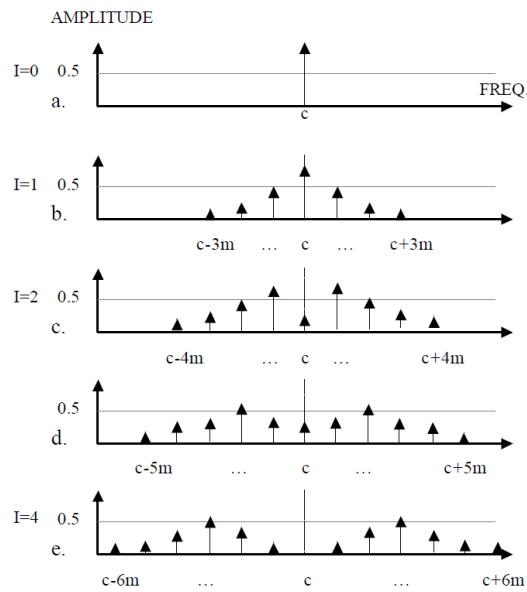


Figura 1: Nuevo contenido espectral con $I \neq 0$

Nota: en el gráfico $c = f_c$ y $m = f_m$

Las amplitudes de la portadora y las componentes laterales están dadas por las funciones de Bessel de primera especie y orden n -ésimo, donde el argumento de la función es el índice de modulación I ($J_n(I)$).

En general, $J_n(1)$ representa un coeficiente de escalamiento de amplitud:

$J_0(1) \leftarrow$ para la portadora

$J_1(1) \leftarrow$ para las primeras bandas laterales

$J_2(1) \leftarrow$ para las segundas bandas laterales

Y así sucesivamente. Mientras más grande sea el orden de la banda lateral se necesita más índice de modulación para que la misma tenga una amplitud significativa.

$$BW \approx 2(f_d + f_m)$$

Expresamos a $x(t)$ con funciones de Bessel

$$\begin{aligned} x(t) = A(t) \cdot \{ & J_0(I) \text{sen}(2\pi f_c t) \\ & + J_1(I) [\text{sen}(2\pi(f_c + f_m)t) - \text{sin}(2\pi(f_c - f_m)t)] \\ & + J_2(I) [\text{sen}(2\pi(f_c + 2f_m)t) + \text{sin}(2\pi(f_c - 2f_m)t)] \\ & \dots \\ & + J_n(I) [\text{sen}(2\pi(f_c + nf_m)t) \pm \text{sin}(2\pi(f_c - nf_m)t)] \} \end{aligned}$$

Se puede ver que las bandas laterales bajas de orden impar poseen un signo negativo. Además se sabe que para un $I > 2.5$ las funciones de Bessel produzcan coeficientes de escalamiento negativos para algunos componentes. En general se suelen ignorar los signos negativos en el espectro ya que solo indican una inversión de la fase de la frecuencia correspondiente. En la proxima sección se verá por qué en realidad sí son importantes esas inversiones de fase.

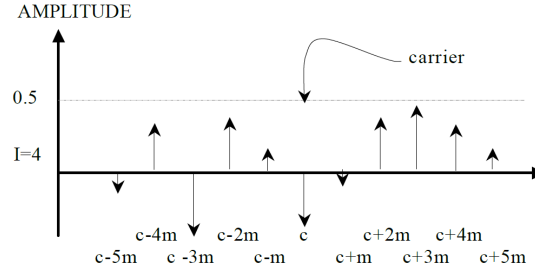


Figura 2: Espectro de ejemplo con $I=4$ e inversiones de fase

Frecuencias laterales reflejadas

La riqueza de la técnica de modulación en frecuencia yace en que el espectro ubicado en la parte negativa del dominio interfiere con la parte positiva dando lugar a una mezcla de componentes en ambas partes del espectro. La relación entre frecuencias f_c y f_m es la que da origen a un espectro armónico o uno inharmónico.

Espectro armónico e inharmónico

La relación entre frecuencias esta dada por

$$\frac{f_c}{f_m} = \frac{N_1}{N_2}$$

$$f_0 = \text{gcd}(f_c, f_m)$$

La posición de las frecuencias laterales en serie armónica puede ser determinada por las siguientes relaciones

$$k = N_1 + nN_2 \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

Donde k es el número de armónico y n es el orden de la frecuencia lateral. Excepto para $n=0$, k toma dos valores por cada orden.

A continuación dejamos unas generalizaciones útiles:

- La portadora es siempre el N_1 -ésimo armónico en la serie
- Si $N_2 = 1$ el espectro contiene todos los armónicos y el fundamental es la frecuencia de la modulante
- Si N_2 es un número par el espectro tiene solo armónicos impares
- Si $N_2 = 3$ cada tercer armónico no se encuentra más en la serie

El número de armónicos que tienen amplitud significativa dependen del índice de modulación.

Para relaciones entre frecuencias bajas e índices chicos donde $N_1 \neq 1$ la fundamental puede no estar presente en el espectro.

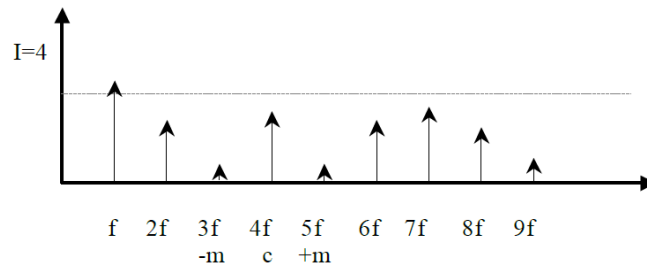


Figura 3: Espectro donde la relación $\frac{f_c}{f_m} = \frac{4}{1}$ (armónico) con $I=4$

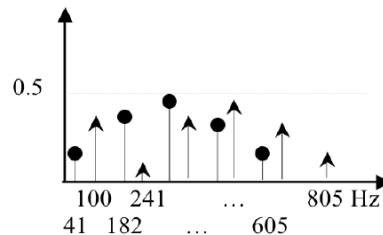


Figura 4: Espectro donde la relación $\frac{f_c}{f_m} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (inharmónico) con $I=4$

Resumen:

El espectro inharmónico se origina cuando el cociente $\frac{f_c}{f_m}$ da como resultado un número irracional.

El índice de modulación $\frac{f_d}{f_m}$ determina el número de componentes que van a tener amplitud significativa.

1.1. Espectro dinámico

La complejidad del espectro esta relacionada con el índice de modulación de forma tal que si el indice crece el bandwidth también crece. Entonces si pensamos en un índice de modulación que varía con el tiempo la evolución del bandwidth del espectro puede estar generalmente descrita por la forma de la función. No obstante, la evolución de cada componente es determinado por la forma de la función de Bessel correspondiente. Entonces, si el indice de modulación aumenta con el tiempo el bandwidth también lo hace, pero un componente del espectro va a crecer o decrecer en amplitud dependiendo de la pendiente de la función de Bessel en ese rango de índices.

1.2. Síntesis para instrumentos de viento

Para los instrumentos de viento:

$$\phi_m = \phi_c = -\frac{\pi}{2}$$

creo que o
berian ha
mas imag
nes con d
tintos I ya
que se vie
ne hablan
de I chico
sarasa

foto de m
dulacion e
tiempo

Resultando

$$x(t) = A(t) \cdot \text{sen}(2\pi f_c t + I(t) \cdot \text{sen}(2\pi f_m t))$$

1.2.1. Síntesis de clarinete

Para poder sintetizar un clarinete se establecieron los parámetros recomendados por la literatura

$$\frac{f_c}{f_m} = \frac{2}{3}$$

Las envolventes sugeridas por la bibliografía poseen la siguiente forma

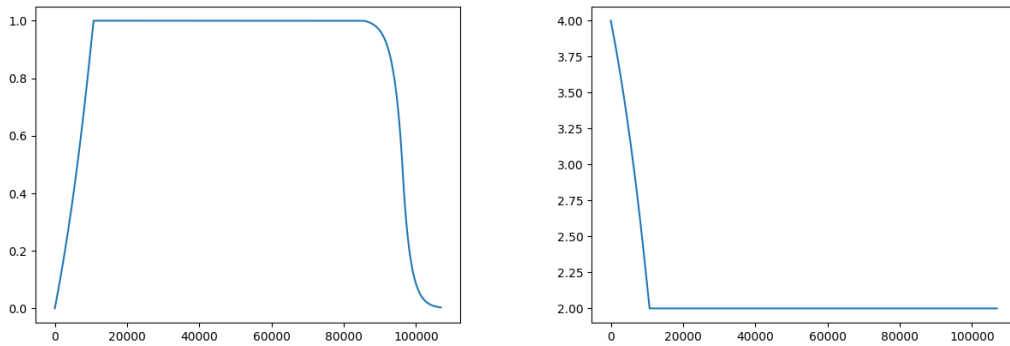


Figura 5: A(t) e I(t) respectivamente

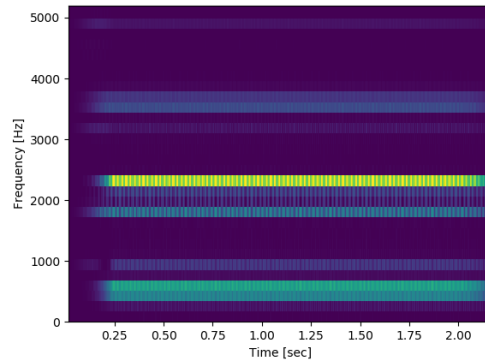


Figura 6: Espectrograma de la síntesis del clarinete a 440Hz (nota LA)

1.2.2. Síntesis de campana

Parámetros recomendados por la literatura para la síntesis:

$$\frac{f_c}{f_m} = \frac{2}{1}$$

Envolventes sugeridos:

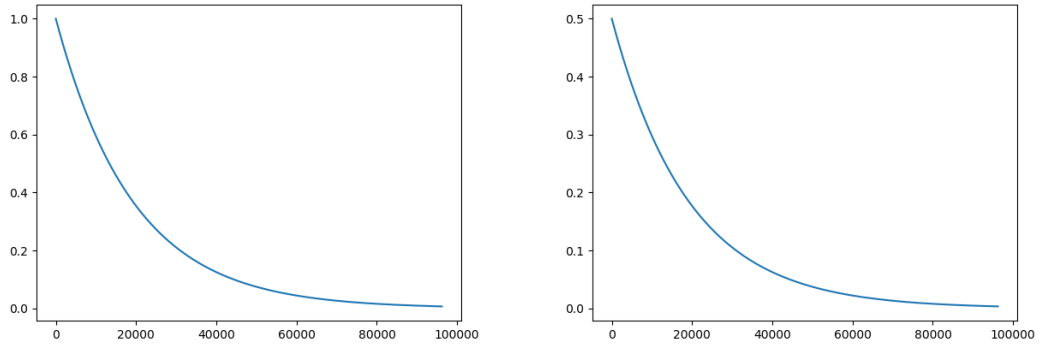


Figura 7: $A(t)$ e $I(t)$ respectivamente

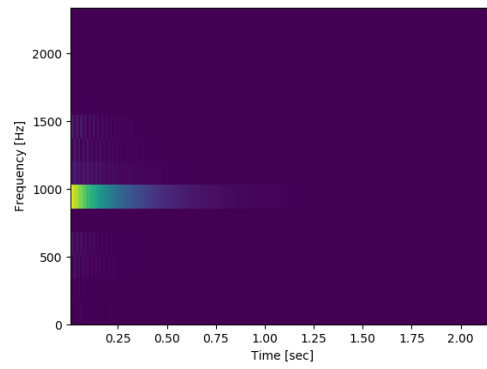


Figura 8: Espectrograma de la síntesis de la campana a 440Hz (nota LA)