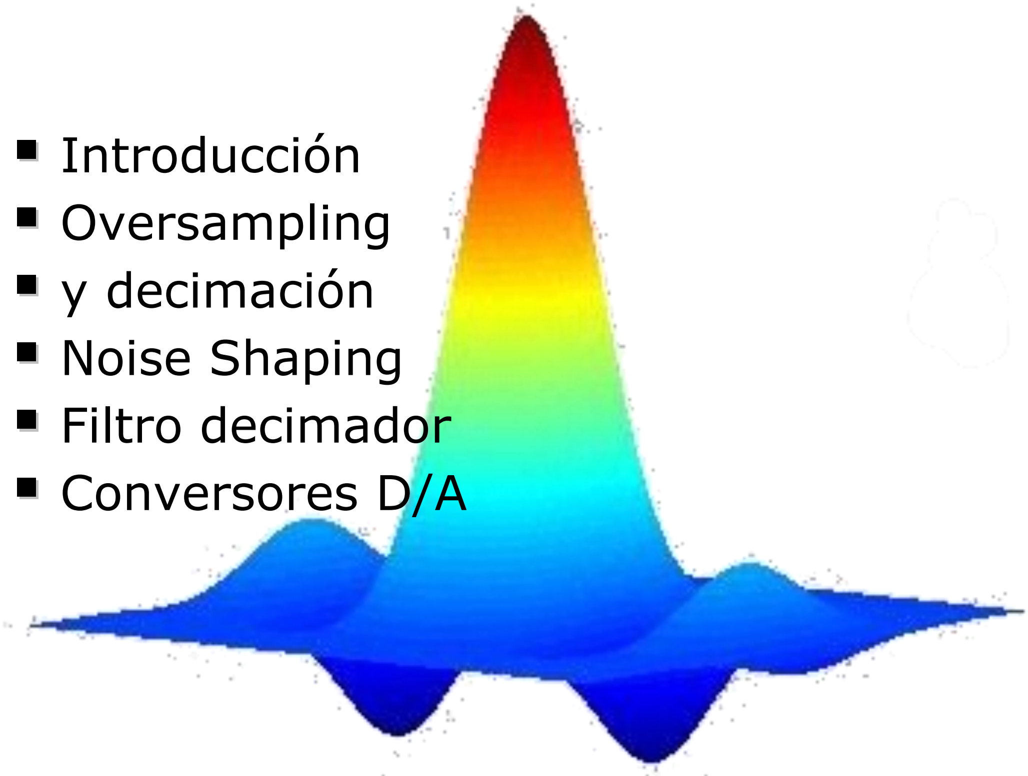
ITBA
INSTITUTO TECNOLOGICO DE BUENOS AIRES
· UNIVERSIDAD PRIVADA ·

Análisis de Señales y Sistemas Digitales

Conversores ΣΔ



- Introducción
- Oversampling
- y decimación
- Noise Shaping
- Filtro decimador
- Conversores D/A

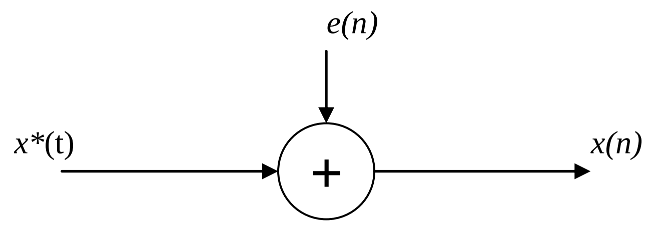
2012

Introducción

Cuando se trata de digitalizar señales cuya banda base no se extienda en un amplio rango de frecuencias, pero a su vez se requiera un excelente rango dinámico, el error de cuantización obtenido en los conversores clásicos no resulta suficiente. Señales con estas características no pueden sufrir deformaciones en el espectro debido a la cuantización. Un ejemplo típico, aunque no el único corresponde a señales de audio de alta calidad.
Un método alternativo para la conversión es empleando un proceso que combina muestreo a frecuencias muy superiores a la de Nyquist (oversampling) con conversión de baja resolución y posterior cambio de frecuencia de muestreo (decimación). Se denomina a esta tecnología conversión sigma-delta (ΣΔ), o indistintamente según literatura más nueva, delta-sigma (ΔΣ).
Analizaremos en detalle la necesidad de estos nuevos conversores, y la incidencia de los conceptos teóricos en su implementación.

Características del error de cuantización del conversor clásico

Todo conversor clásico A/D de n bits puede modelizarse por un cuantificador o sumador de ruido blanco.



$x(n) = e(n) + x^*(t)$

donde: $x^*(t)$: señal muestreada
$e(n)$: ruido de cuantización
$x(nT)$: señal digital

Para un conversor de n bits, habrá 2^{n-1} niveles de cuantización. Como vimos, la resolución del conversor está dada por el mínimo cambio en voltaje o corriente que puede observar a la salida del conversor.

$$V_q = q = \frac{V_{FS}}{2^n}$$ tensión de 1 LSB

V_{FS} : tensión a fondo de escala
n : número de bits
LSB : bit menos significativo
q : valor en tensión de un LSB

Si normalizamos $V_{FS} = 1 \Rightarrow q = 2^{-n}$.

Cuando el valor de una señal es alto comparado con q, el error de cuantización e(n) toma un valor aleatorio uniformemente distribuido en el intervalo [-q/2 , q/2] resultando una secuencia de ruido blanco estacionario sin correlación con la señal. Entonces la potencia de ruido promedio (variancia) será:

$$\sigma_e^{\,2} = \frac{1}{q}\int_{-q/s}^{q/2} e^2 de = \frac{1}{q}\left[\frac{q^3}{24}+\frac{q^3}{24}\right] = \frac{q^2}{12}$$

La relación señal a ruido, cuando se ingresa con una señal sinusoidal de amplitud máxima (V_{FS}/2) a un conversor de n bits nos quedará:

$$SNR_{dB} = 10\log\frac{P_S}{\sigma_e^2} = 10\log\frac{(V_{FS}/2)^2/2}{q^2/12} = 10\log\frac{V_{FS}^2/8}{V_{FS}^2\,2^{-2n}/12} = 10\log\left(\frac{3}{2}2^{2n}\right)$$

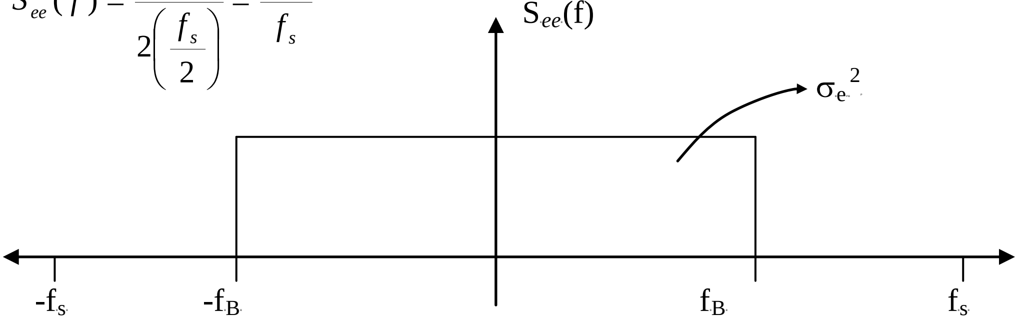
$$SNR_{dB} = (1.76 + 6.02n)\,dB$$

Este valor asume una señal determinística de entrada. Cuando se trata por ejemplo, de una secuencia aleatoria gaussiana de varianza σ_x^2, la relación señal a ruido quedará:

$$SNR_{dB} = 10\log\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = 10\log\frac{\sigma_x^2}{q^2/12} = 10\log\frac{\sigma_x^2}{V_{FS}^2\,2^{-2n}/12} = 6.02n + 16.81 - 20\log\left(\frac{V_{FS}}{\sigma_x}\right)$$

Debido a que la potencia de ruido se distribuye uniformemente en todo el rango de la señal (f_B), la densidad espectral de potencia de ruido, que en este caso es simplemente su nivel, S_{ee}(f) esta dado por:

$$S_{ee}(f) = \frac{\sigma_e^{\,2}}{2\left(\frac{f_s}{2}\right)} = \frac{\sigma_e^{\,2}}{f_s}$$



Estamos asumiendo que trabajamos a la frecuencia de Nyquist.

$$\boxed{S_{ee}(f) = \frac{q^2}{12\cdot f_s}}$$

Efectos del oversampling y la decimación

Se denomina oversampling al muestreo de una señal acotada en banda (f_B) a una frecuencia f_s muy superior a la de Nyquist (f_{Ny}), tal que

$f_s = L\ F_{Ny}$ (al menos $L = 64$).

Veremos como aprovechar este hecho para usar conversores de 1 bit.
La aparente pérdida de precisión se recupera nuevamente bajando la frecuencia de muestreo con un filtro digital pasabajos. Este proceso de promediación de L muestras se denomina decimación.

El oversampling y la decimación son los procesos que típicamente se usan para conversores A/D del tipo sigma-delta
El motivo principal del empleo de este método son las siguientes ventajas:

(1) Filtro antialiasing muy sencillo

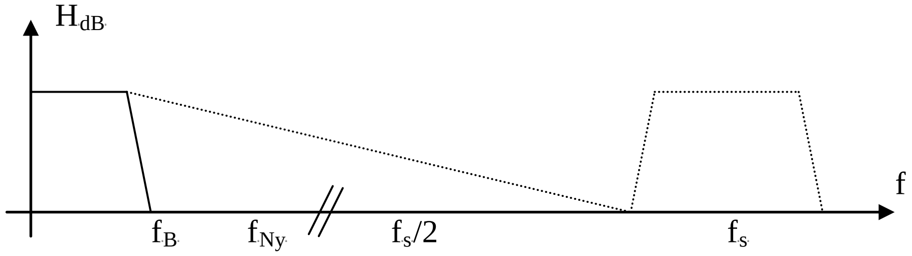
Ejemplo:

- Se desea acotar en banda una señal de audio de 0-20KHz
- Valores típicos de proceso de alta calidad : $F_{Ny} = 44KHz$
  $A_a = 96dB$

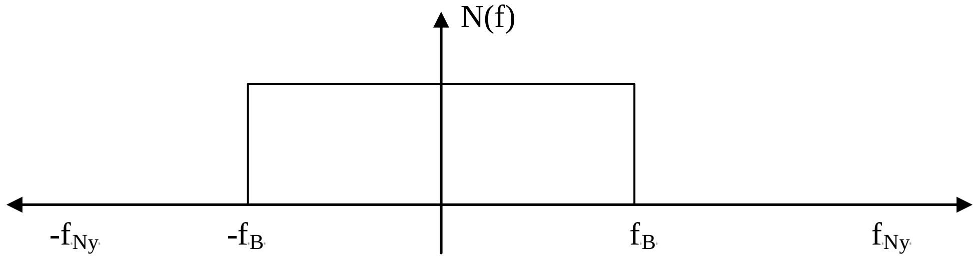
a) FAA previo a un A/D clásico
   Banda de transición [20KHz, 22KHz] Orden (Butterworth)
   Atenuación [0dB, 96dB] n = 116 !!!

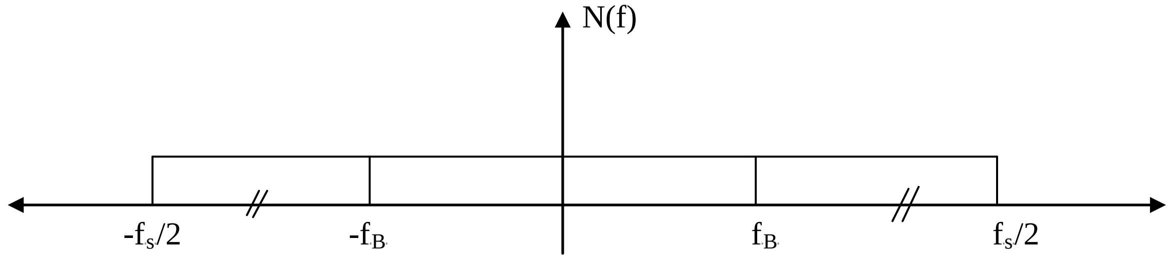
b) FAA previo al oversampling ($N = 64$; $f_s = 2{,}8MHz$)
   Banda de transición [20KHz, 1.4MHz] Orden posible (RC)
   Atenuación [0dB, 96dB] n = 1

Comparación de bandas de transición



(2) *Significativa reducción del nivel de ruido de cuantificación*





Vamos a probar esta ventaja:

Definimos

$L = \frac{f_{OS}}{f_S}$ Relación de Oversampling

Suponiendo que empleamos dos conversores clásicos con distinto numero de bits y distintas frecuencias de muestreo. El error de cuantización de cada uno será:

$q = V_{FS}\, 2^{-n}$ $\qquad q_{OS} = V_{FS}\, 2^{-n_{OS}}$

$\Delta n = n - n_{OS}$ (normalmente $\Delta n = n - 1$)

La potencia espectral promedio de cada uno es de distinto valor, pero responden a la misma fórmula:

$\sigma_{\varepsilon}{}^{2} = \frac{q^2}{12}$ $\qquad \sigma_{\varepsilon OS}{}^{2} = \frac{q_{OS}{}^{2}}{12}$

Como vimos, el espectro es constante, es decir la densidad espectral de potencia de cada uno puede igualarse a un mismo valor. De esta forma un conversor es equivalente al otro respecto al nivel de ruido que introduce:

$$S_{ee}(f) = cte \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\sigma_{\varepsilon}^{2}}{f_S} = \frac{\sigma_{\varepsilon OS}^{2}}{f_{OS}} \qquad\qquad \sigma_{\varepsilon}^{2} = \frac{\sigma_{\varepsilon OS}^{2}}{L}$$

Reemplazando

$$L = \frac{q_{OS}^{2}}{12} \cdot \frac{12}{q^2} = \frac{V_{FS}^2\, 2^{-2n_{OS}}}{V_{FS}^2\, 2^{-2n}} = 2^{2\Delta n}$$

$$\Delta n = 0.5 \cdot \log_2 L = 0.5 \frac{\ln L}{\ln 2}$$

p	L	4	8	16	32	64	128
0	**ΔB = 0.5 $\log_2$ L**	**1.0**	**1.5**	**2.0**	**2.5**	**3.0**	**3.5**
1	ΔB = 1.5 $\log_2$ L	2.1	3.6	5.1	6.6	8.1	9.6
2	ΔB = 2.5 $\log_2$ L	2.9	5.4	7.9	10.4	12.9	15.4
3	ΔB = 3.5 $\log_2$ L	3.5	7.0	10.5	14.0	17.5	21.0
4	ΔB = 4.5 $\log_2$ L	4.0	8.5	13.0	17.5	22.0	26.5
5	ΔB = 5.5 $\log_2$ L	4.5	10.0	15.5	21.0	26.5	32.0

El diagrama en bloques de este proceso se esquematiza así:

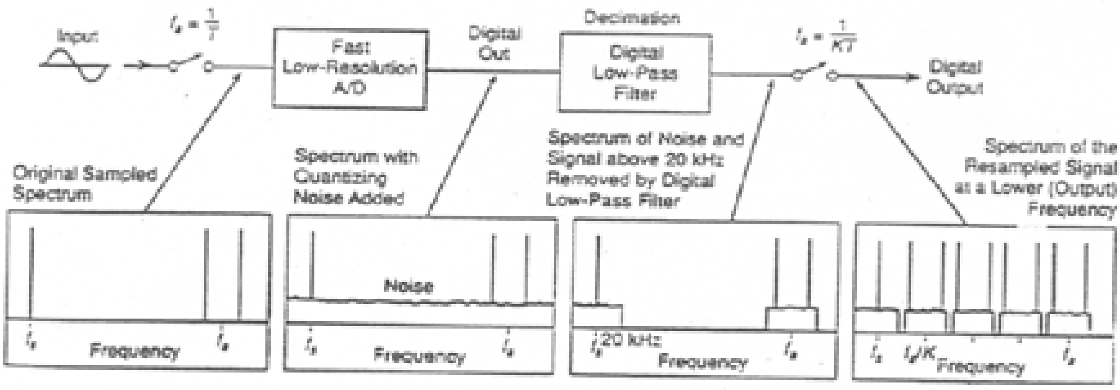


Diagram showing the theory of oversampling A/D conversion. *(From Adams)*

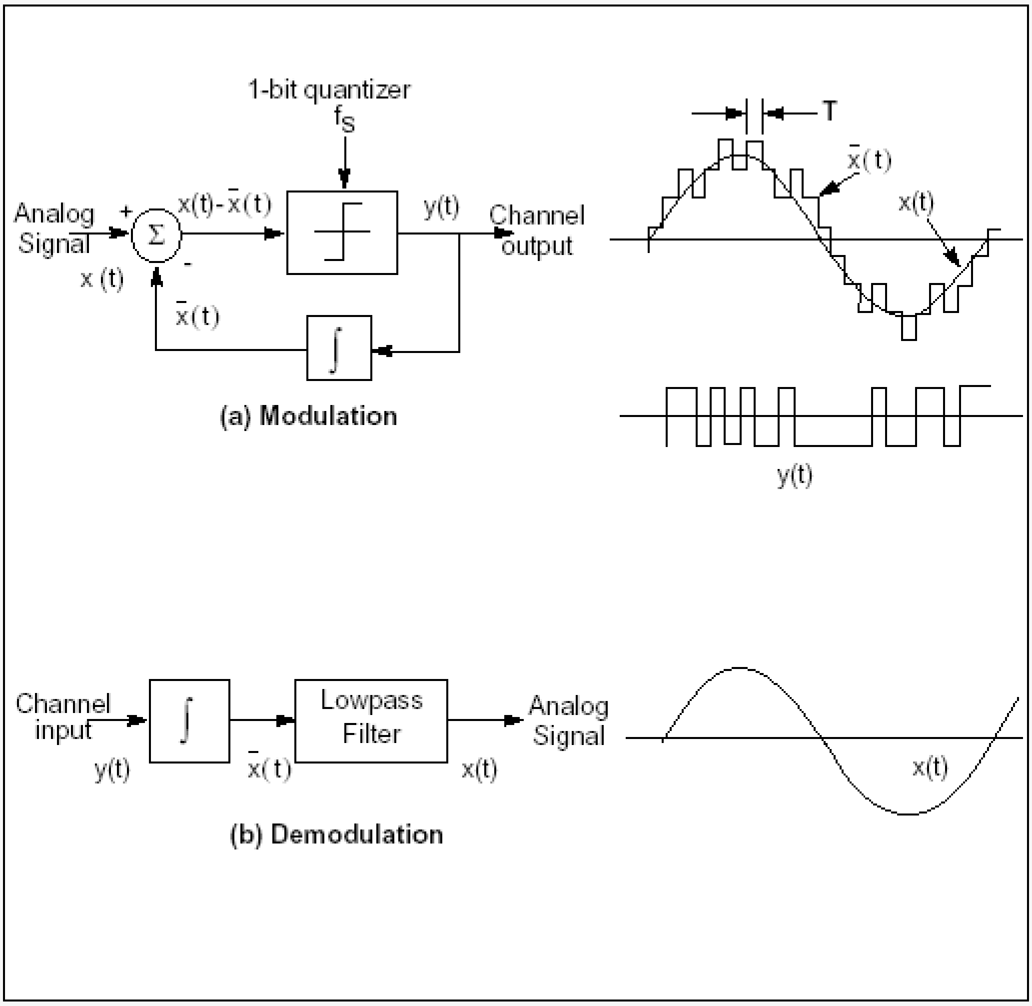
Podemos ver de la tabla que este procedimiento no alcanza para mejorar las condiciones de muestreo, ya que trabajar con pocos bits implicaría frecuencias de muestreo extremadamente altas.

Proceso que permite derivar un conversor A/D ΣΔ

Veremos la técnica de modulación ΣΔ como una derivación de la modulación delta Δ, que se aplica a conversores.

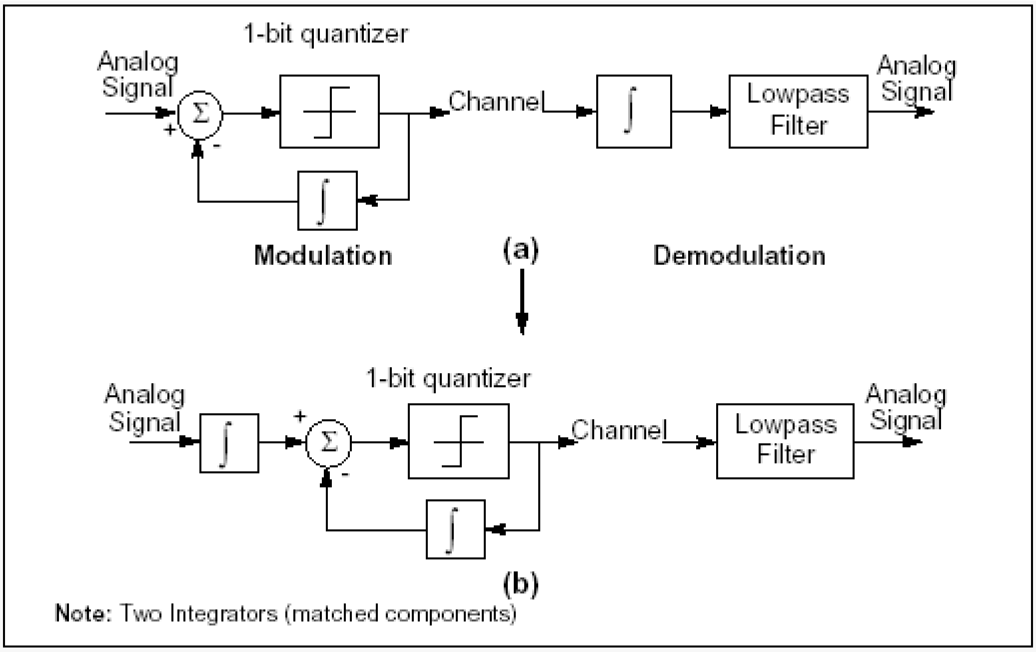
MODULACIÓN Y DEMODULACIÓN Δ

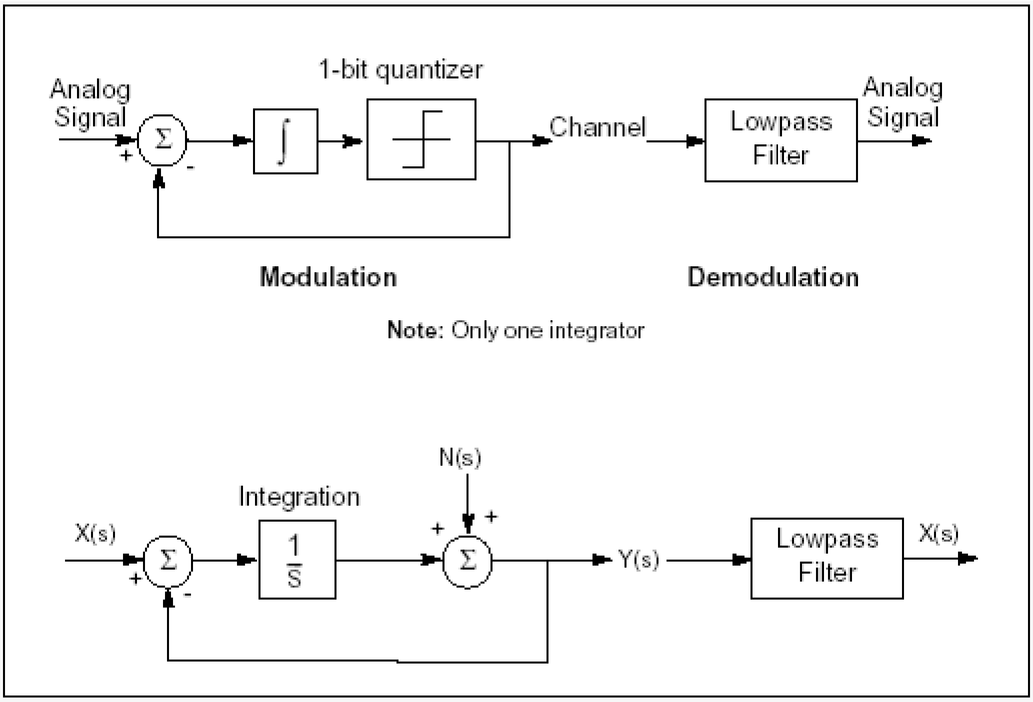
Se basa en la cuantización del cambio de la señal entre muestra y muestra. El integrador funciona como un predictor. Es decir que el error de predicción [diferencia entre la entrada x(t) y la salida del integrador $\overline{x}$(t)] es el valor cuantizado y(n). En el modelo se expresa la salida y(t), suponiendo dos valores de tensión binarios.
Para recuperar la señal de entrada que se pretendía transmitir, se suman (integran) esos errores y se recupera la señal mediante un filtro pasabajos. Este proceso constituye la demodulación.
La desventaja de este proceso es que el error entre la entrada y $\overline{x}$(t) se hace muy elevado cuando la señal tiene un gran ancho de banda.



MODULACIÓN ΣΔ

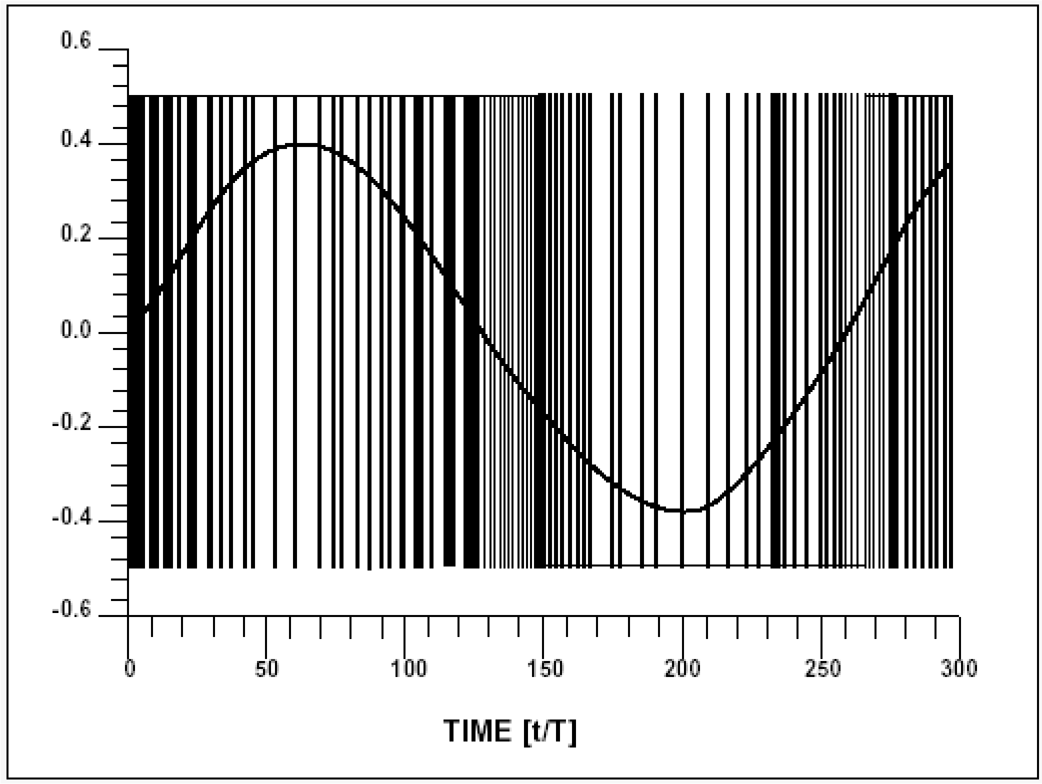
Analizando la modulación y la demodulación delta, y aprovechando la linealidad de los integradores, podemos realizar la siguiente operación:





El nombre ΣΔ deriva de colocar el integrador Σ delante del modulador Δ, de la primera figura. En la segunda, se invierten las ubicaciones. El nivel de ruido de cuantización, contrariamente al caso anterior, depende de la frecuencia. La relación señal / ruido entre la salida Y(s) y el ruido de cuantización N(s) tiene una característica pasa altos.

Ejemplo: Señal sinusoidal cuantizada en 1 bit, como se vería en el canal



¿Como podemos aceptar que tal diferencia entre la entrada y la salida cuantizada representan en realidad a la misma señal?
Veamos el siguiente desarrollo:

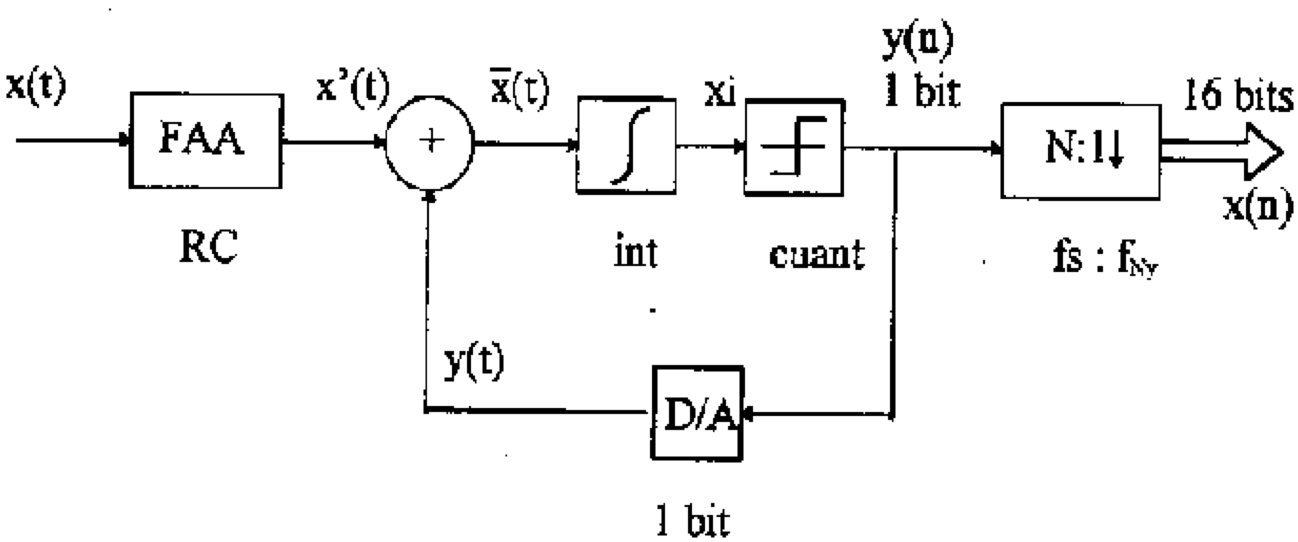


Diagrama de un sistema de conversión ΣΔ de 1º orden

Señales analógicas:

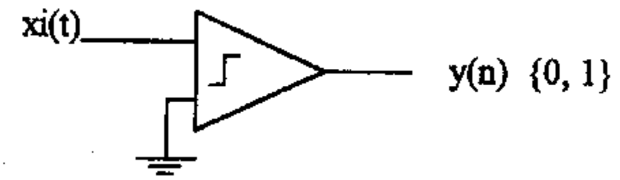
x(t) x’(t) $\bar{x}(t) = x'(t) - y(t)$

y(t) $xi(t) = \int \bar{x}(t)dt$

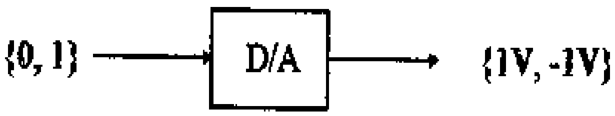
Señales digitales:

y(n): 1 bit, fs oversampleada
x(n): N bits, f_{Ny}

Cuantizador



Conversor D/A



Supongamos:

x’(t) = 0.6 V = cte
V_{FS} = 1 V
$f_{CLK} = f_S = L\ F_{Ny}$

	CLK	$\bar{x}$(t)V	xi(t)V	Y(n)	y(t)V	
x'(t) = 0	0	0	0	0	0	estado inicial
x'(t) = 0.6 V	1	0,6	0,6	1	1	
	2	-0,4	0,2	1	1	
	3	-0,4	-0,2	0	-1	Promedio 3/5 = 0,6 V
	4	1,6	1,4	1	1	(valor exacto)
	5	-0,4	1	1	1	
	6	-0,4	0,6	1	1	
	7	-0,4	0,2	1	1	Se repite el ciclo
	8	-0,4	-0,2	0	-1	
	9	1,6	1,4	1	1	
	10	-0,4	1	1	1	
	11	-0,4	0,6	1	1	

Para la decimación hasta n bits se toman 2^n muestras de y(n).

Efecto de filtrado del ruido (Noise shaping)

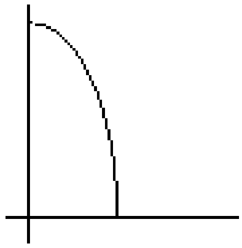
Según el modelo normalizado del modulador ΣΔ en el plano s

si N(s) = 0

$$Y(s) = [X(s) - Y(s)]\ \frac{1}{s}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}} = \frac{1}{s+1}$$

: lowpass filter

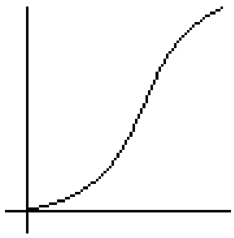


si X(s) = 0

$$Y(s) = -Y(s)\frac{1}{s} + N(s)$$

$$\frac{Y(s)}{N(s)} = \frac{1}{1+\frac{1}{s}} = \frac{s}{s+1}$$

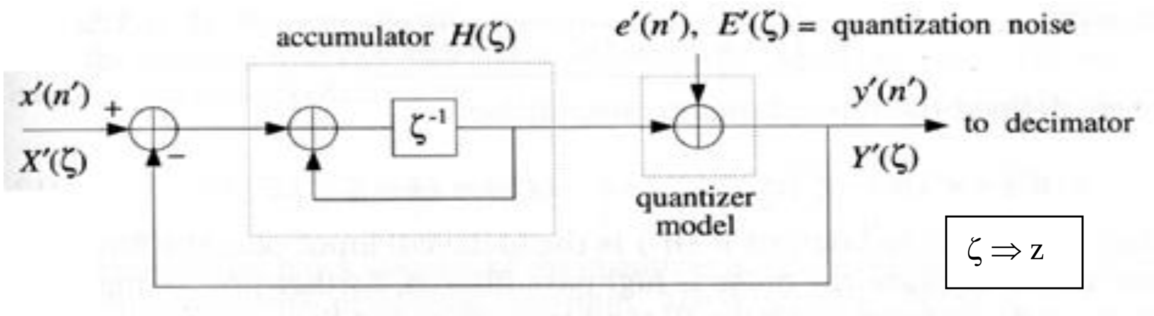
: highpass filter



Noise Shaping

Esta característica se interpreta como que si $f_b < f_c$, la señal no es afectada por el modulador, mientras que el ruido que queda en la banda de interés es de escasa influencia.

El modelo discreto podría representarse como:



Discrete-time model of first-order delta-sigma quantizer.

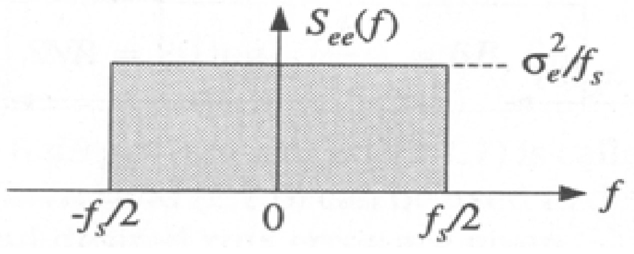
$$Y(z) = \frac{H_i(z)}{1+H_i(z)}X(z) + \frac{1}{1+H_i(z)}N(z)$$

En este caso de integrador forward obtenemos el ΣΔ de primer orden:

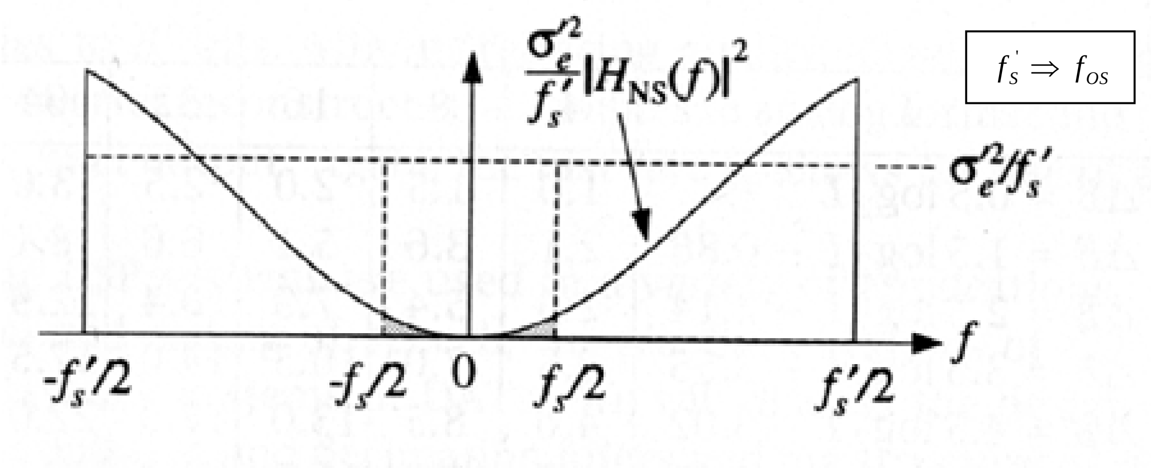
$$Y(z) = z^{-1}X(z) + (1-z^{-1})N(z)$$

Desarrollo de la relación entre el "noise shaping" y el "oversampling"

Habíamos visto la característica plana que normalmente tiene el ruido de cuantización

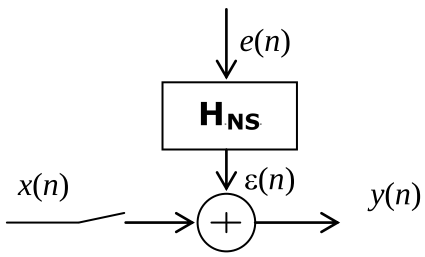


En cambio, si empleamos una etapa ΣΔ obtenemos



Spectrum of oversampling noise shaping quantizer.

$$y(n) = \varepsilon(n) + x(n)$$



donde $\varepsilon(n)$ no es blanco

$$S_\varepsilon(f) = |H_{NS}|^2 S_{ee}(f) = \frac{\sigma_{e_{OS}}^2}{f_{OS}} |H_{NS}|^2$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = \int_{f_a}^{f_b} \frac{\sigma_{e_{OS}}^2}{f_{OS}} |H_{NS}|^2 \, df$$

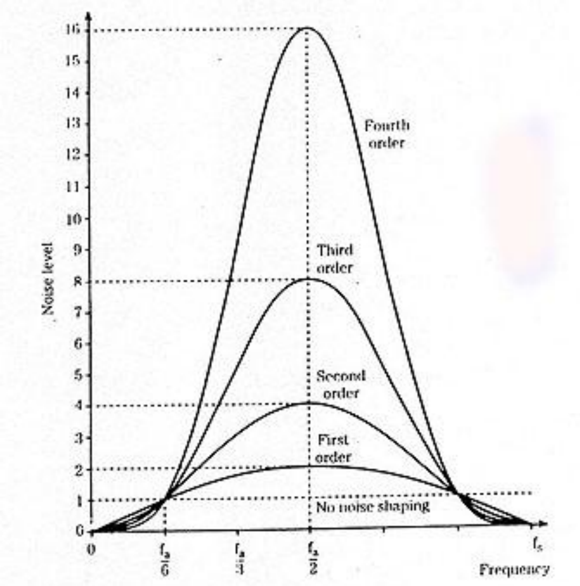
$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_{e_{OS}}^{\;2}}{f_{OS}} \int_{-\frac{f_s}{2}}^{\frac{f_s}{2}} \left| H_{NS}(f) \right|^2 df$$

Suponiendo que filtro digital equivalente sea

$$H_i(z) = (1 - z^{-1})^p$$

El módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia será:

$$\left| H_{NS}(f) \right|^2 = \left| 2\sin\left(\frac{\pi \cdot f}{f_{OS}}\right) \right|^{2p}$$



$$\Delta n = (p + 0.5) \cdot \log_2 L - 0.5 \cdot \log_2 \left(\frac{\pi^{2p}}{2p + 1} \right)$$

Esta expresión generaliza la tabla de la página 5 para un orden p dado.

Es interesante notar que la relación señal a ruido máxima mejora debido a la coloración del ruido.
Se puede probar que para un conversor de primer orden obtenemos:

$$SNR_{dB} = 6.02\,(n + 1.5\log_2 L) - 3.41$$

Segunda etapa de la conversión

Filtro decimador L:1↓

Realiza 3 tareas básicas:

(1) Remueve el ruido de cuantización fuera de la banda base. Es una forma de aumentar la resolución efectiva de la salida digital.
(2) Realiza la decimación, es decir reduce la frecuencia de muestreo a un valor cercano a la de Nyquist dando como resultado mayor precisión ⇨ aumenta el número de bits.
(3) Actúa como FAA para el ruido de cuantización (noise shaping) generado por el modulador.

En conversores para aplicaciones típicas de DSP, la conversión tiene dos etapas:

(a) Etapa ΣΔ de orden mayor

El hecho de colocar ΣΔ en cascada, acentúa la característica de noise shaping, disminuyendo a valores aceptables el ruido de cuantización en la banda base pero elevándolo en altas frecuencias.

(b) Filtro decimador de varias etapas

Para compensar las características de un ΣΔ de alto orden se colocan

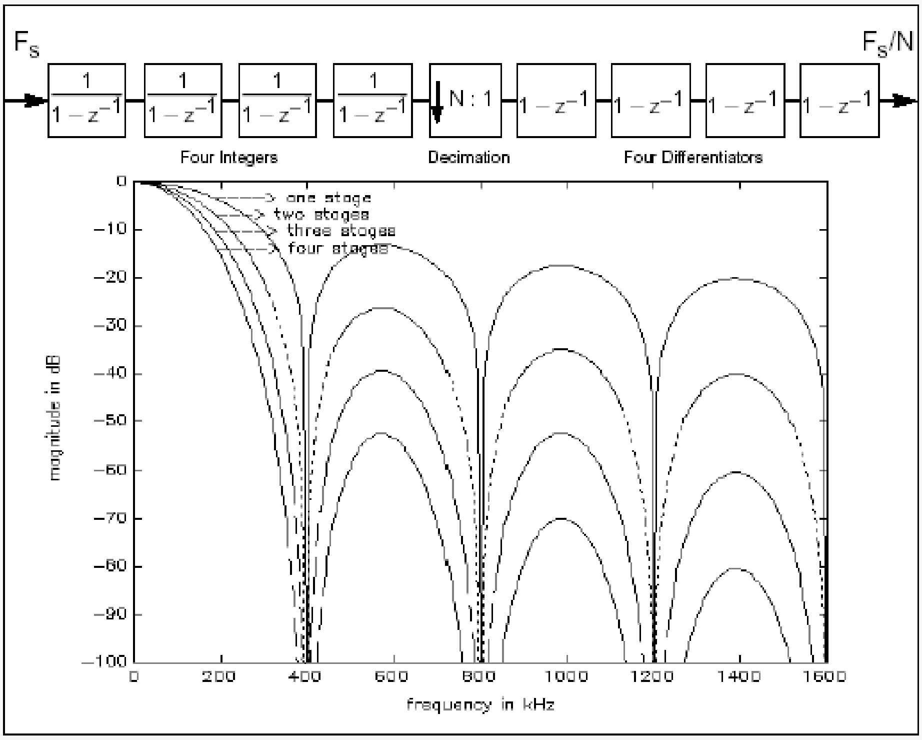
- Serie de filtros comb: no recursivo con coeficientes unitarios

    1. Puede trabajar a muy altas frecuencias en tiempo real
    2. Atenúa pero no permite eliminar ruido de cuantización introducido por el ΣΔ en forma efectiva

- FIR: No introduce distorsión de fase, pero con una característica de atenuación mucho más elevada.

Ejemplo

1ra Etapa: Filtro Comb
Esta etapa se conoce también como CIC (*Cascaded Integrator Comb*)

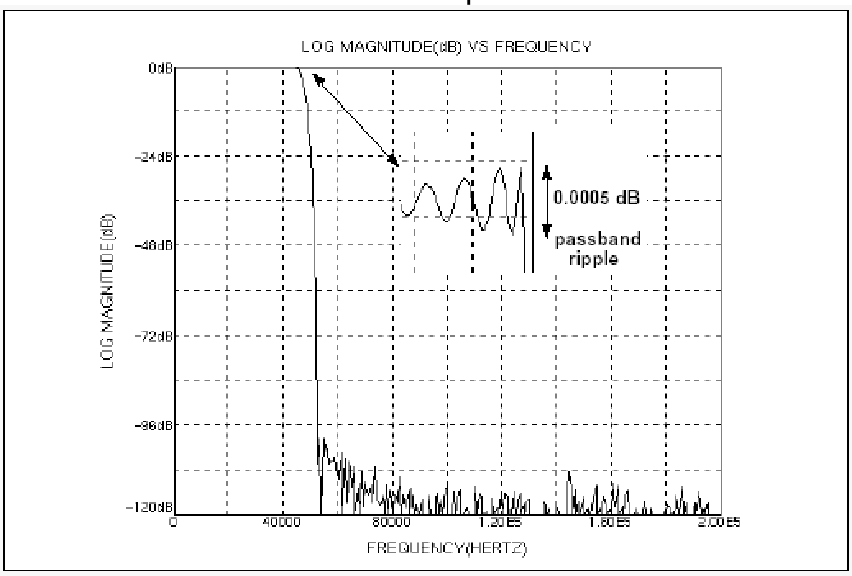


2da Etapa: Compensación

Los coeficientes de este filtro FIR se calculan para cumplir 3 objetivos:

a) Preservar la fase lineal
b) Obtener la atenuación requerida en banda atenuada (que implica un número elevado de coeficientes)
c) Compensar la atenuación que produjo el comb en banda de paso.

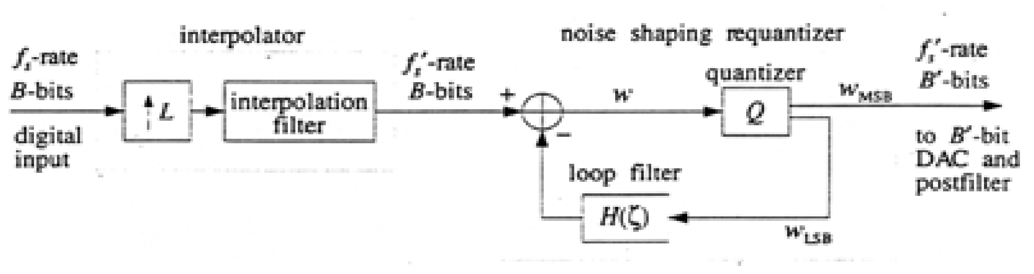
Filtro completo



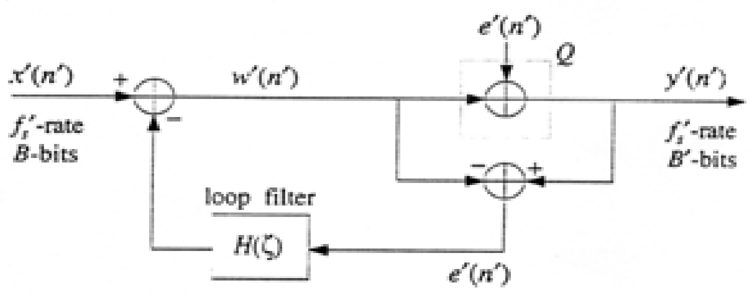
La implementación de filtros digitales multifrecuencia requiere el estudio de filtros polifásicos, que emplean bancos de filtros. Ese tema se verá más adelante.

Conversores D/A

Con la idea de aprovechar un modelo equivalente al presentado para los conversores A/D, vemos un diagrama en bloques del correspondiente D/A



Oversampled noise shaping requantizer for D/A conversion.



Noise shaping requantizer model.

Aunque lo primero es siempre aumentar la frecuencia de muestreo, en este caso se invierten las etapas. Primero debemos filtrar la señal que muestreamos a mayor frecuencia (interpolar), para luego eliminar el ruido cuantización que permitirá disminuir el número de bits. En esta última etapa empleamos el "noise shaper".

Resumiendo las etapas de conversión

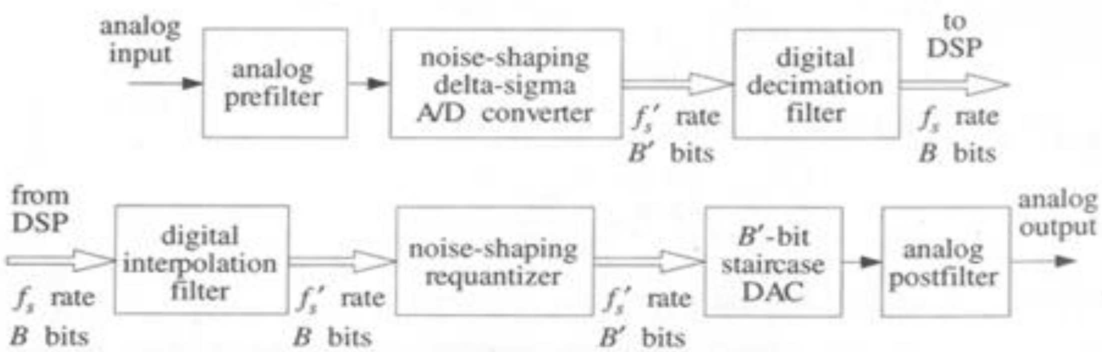
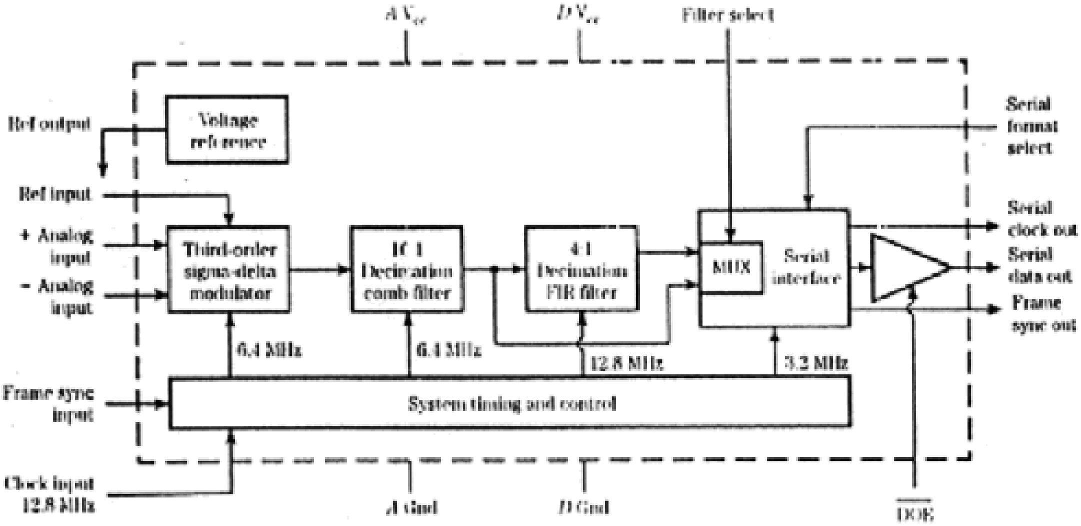


Diagrama interno del DSP56ADC16 de Motorola



Conversor ΣΔ de tercer orden por arquitectura MASH