1 Elección de f_p

Para determinar f_p, se buscó minimizar este valor a fin de filtrar la mayor cantidad de ruido posible, pero teniendo en cuenta también la necesidad de recuperar las señales originales. Se estudió, pues, el espectro de las señales que se utilizarían en la entrada, a saber: un seno en f_0 =500Hz, un $^3/_2$ seno en la misma frecuencia, y una exponencial decreciente de período 10s, así como una señal de AM.

La primera de estas señales, el seno, nos permite determinar que el filtro antialiasing debe dejar pasar al menos señales de 500Hz. Por otro lado, la señal de AM es:

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot \cos\left(2\pi \cdot 1.8 f_0 \cdot t\right) + \cos\left(2\pi \cdot 2 f_0 \cdot t\right) + \frac{1}{2} \cdot \cos\left(2\pi \cdot 2.2 f_0 \cdot t\right)$$

De esto sabemos que f_p debe ser al menos $2.2f_0 = 1.1$kHz. Para dejar un margen de error, consideramos por ahora que f_p debe ser al menos 1.5kHz.

En cuanto a la señal exponencial:

$$x(t) = e^{-|t|}, \quad -5 \leq t \leq 5$$

La frecuencia fundamental de la misma es 0.1Hz, con lo cual teniendo en cuenta la restricción anterior, sabemos que van a pasar más de 5000 de sus armónicos, con lo cual en principio esta señal no sería un problema. Para comprobar esta suposición, se obtuvieron los coeficientes de la serie exponencial de Fourier de esta función, resultando:

$$X_n = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - (-1)^n \cdot e^{-T/2}}{1 + \left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2}$$

Sabiendo que la potencia correspondiente al enésimo armónico es $2 \cdot |X_n|^2$ (salvo para $n = 0$, donde no se duplica el valor del coeficiente), se confirmó que la misma se hace absolutamente despreciable a partir del octavo armónico, hasta donde se encuentra más del 99% de la potencia. Por lo tanto, esta señal no impone restricciones al filtro antialiasing.

Considerando que incluso con una frecuencia 100 veces mayor, de 10Hz, se recuperan 50 armónicos y la señal se recupera de manera virtualmente completa (como se observa en la figura 1), se decidió trabajar esta frecuencia más rápida, a fin de no tener que esperar 10 segundos para medir un período.

En el caso del $^3/_2$ seno, la frecuencia fundamental es en cambio 500Hz, con lo cual por un filtro con $f_p = 1500$Hz pasaría la fundamental y los siguientes 2 armónicos. Para analizar el espectro en este caso se utilizó la serie trigonométrica de Fourier, obteniéndose:

$$a_0 = \frac{2}{3\pi}, \quad a_n = \frac{12}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{9 - 4n^2}\right), \quad b_n = 0$$

Se obtuvo, pues, que hasta 500Hz se tiene el 67% de la potencia, hasta 1kHz el 97%, y hasta 1.5kHz el 99%. Por lo tanto, siendo que con $f_p = 1.5$kHz se puede conservar más del 99% de la potencia de las 3 señales de entrada, se utilizó este valor, con el cual se recupera la señal tal como se observa en la figura 2.

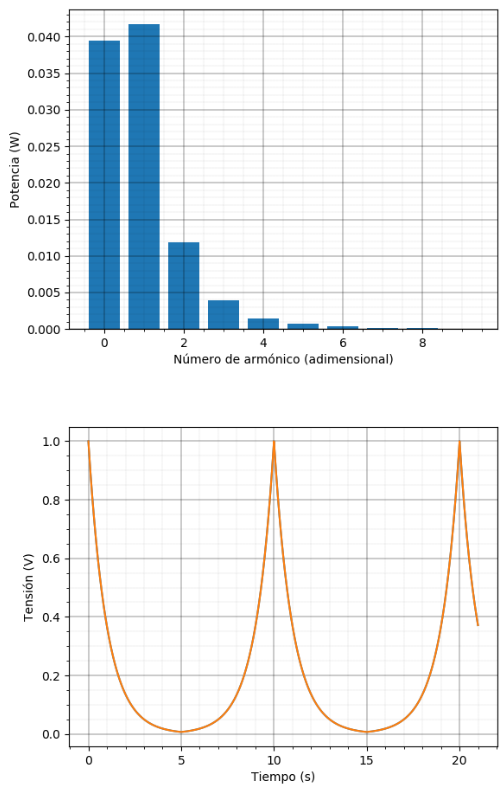

Figure 1: Potencia en función del número de armónico de la señal exponencial (izquierda), y señal reconstruida con 50 armónicos (derecha), superpuesta a la señal original (no llegan a distinguirse).

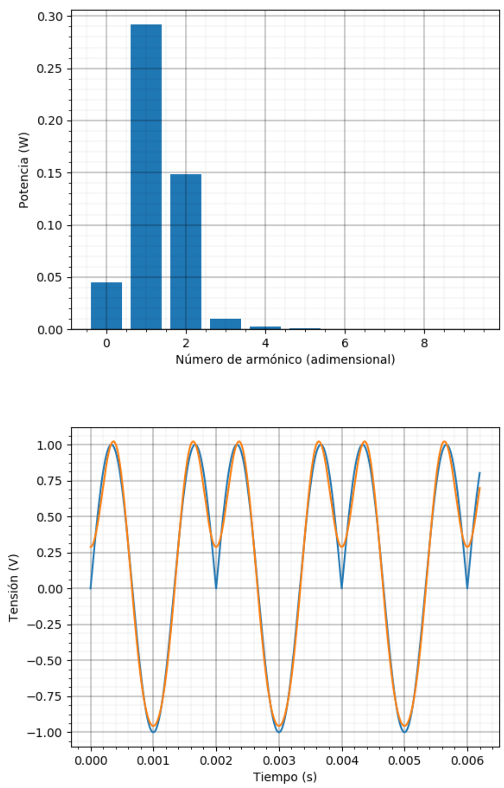

Figure 2: Potencia en función del número de armónico del $^{3}/_{2}$ (izquierda), y señal reconstruida con 3 armónicos incluyendo la fundamental (derecha, naranja), supuerpuesta a la señal original (azul).