

# (22.05) Análisis de señales y sistemas digitales – ITBA

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

**Copyright: Ing. Daniel Palombo 2008**

*Desde ApuntesITBA nos hemos tomado el trabajo de escanear y recopilar este material, con el afán de brindarles a los futuros ingenieros del ITBA los mejores recursos a la hora de estudiar.*

# Temas

## Introducción al procesamiento digital de señales

- Concepto de frecuencia en señales tiempo continuo y tiempo discreto
- Muestreo de señales analógicas
- Sample & Hold
- Sampling Titter
- Salida conversor D/A
- Muestreo de señales pasabanda

## Conversión A/D – D/A

- Conversores clásicos
- Conversores Ed
- Dither

## Procesamiento de señales multifrecuencia: Conversión de la frecuencia de muestreo

## Señales y sistemas el tiempo discreto

- Señales en tiempo discreto
- Sistemas en tiempo discreto

## Transformada Z

- Zona de convergencia de la transformada Z bilateral
- Función transferencia
- Transformada Z unilateral
- Métodos de convolución por bloques

## Transformada discreta de Fourier (DFT)

- La DFT como un banco de filtros
- Propiedades de la DFT
- Filtrado de señales mediante el uso de la DFT (FFT)
- Transformada rápida de Fourier (FFT)
- Resumen series y transformadas de Fourier

## Diseño de sistemas digitales: funciones transferencia

- Diseño de filtros digitales por polos y ceros
- Gráficas de respuesta en amplitud y fase

## Diseño de filtros IIR

### Circuitos con capacitores switcheados (SC)

Integrador con SC

Circuitos SC insensibles a las capacidades parásitas

Cascada de etapas de 2º orden

Filtros escalera (Leap frog)

## Diseño de filtros FIR

Filtros FIR de fase lineal

Métodos para el diseño de filtros FIR

Comparación entre filtros digitales IIR y FIR

## Grados de señal

## Implementación de sistemas digitales

Estructura para filtros IIR

Estructuras para filtros FIR

Estructura lattice

## Efectos de la cuantización

Representación de números

Ruido de redondeo

Sensibilidad de los coeficientes del filtro a la cuantización

# ASSD A

## Introducción al Procesamiento Digital de Señales

Cuando una SEÑAL atraviesa un SISTEMA que realiza una determinada operación sobre ella, se dice que la misma ha sido procesada. Dichas operaciones, como p. ej. el filtro, son llamadas PROCESAMIENTO DE SEÑALES.

Una señal puede ser procesada de dos formas: ANALÓGICAMENTE o DIGITALMENTE.

### Procesamiento Analógico



### Procesamiento Digital



En el Procesamiento Digital, las operaciones a realizar sobre la señal consisten en un nº de operaciones matemáticas especificadas por un programa, el cual representa la implementación del sistema por SOFTWARE. Otra posibilidad es implementar el sistema por HARDWARE (circuitos lógicos). En general se utiliza una combinación de ambos. El programa puede correrse en una computadora común o en un DIGITAL SIGNAL PROCESSOR (DSP), dedicado exclusivamente al procesamiento de señales y que realiza ciertas instrucciones comunes por hardware, resultando más rápido. El conjunto de reglas para implementar el sistema con un programa es llamado ALGORITMO.

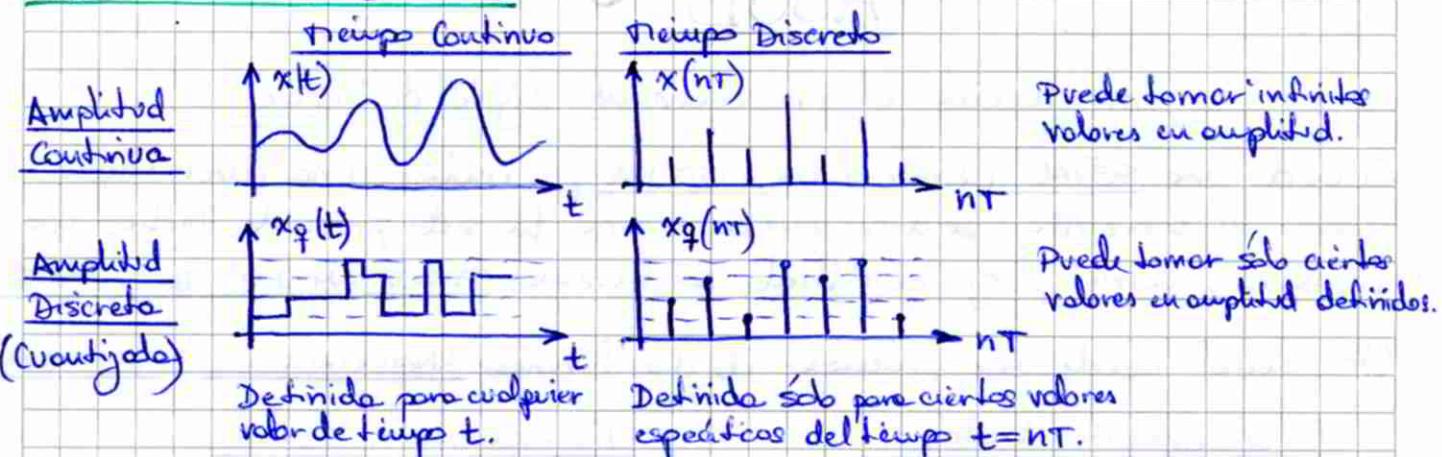
La señal analógica es limitada en banda por el FILTRO ANTI-ALIASING (FAA), para luego poder ser convertida a digital por el CONVERSOR A/D. Después de ser procesada, si se necesita devolverla en forma analógica, es convertida de este forma por el CONVERSOR D/A y recuperada por el FILTRO RECEPTOR (FR).

### Ventajas Digital vs Analógico

- No tiene problemas de envejecimiento (funciona o no)
- No varía los parámetros con la temperatura
- No depende de la dimensión
- No hay diferencias entre bús de fabricación
- Alta inmunidad al ruido
- No requiere ajustes
- Gran flexibilidad (se cambia el sistema cambiando un programa por otro).
- Rango dinámico variable según nº bits
- Posibilidad de implementar sistemas no lineales, variables en el tiempo e causales
- Almacenamiento Digital de datos sencillo.

### Desventajas Digital vs Analógico

- Velocidad limitada (todo depende de la frecuencia de muestreo)
- Diseño y realización de etapas pre y post procesamiento
- Diseño y testeo de software
- Código más complejo

Clasificación de Señales:

La señal  $x(t)$  será la señal análogica que ingrese al sistema, p.ej una señal de audio. La misma es convertida a una señal discreta en el tiempo seleccionando valores de la misma en ciertos instantes de tiempo equidistantes, separados un período  $T$ , proceso llamado MUESTREO. Luego se cuantizan sus valores convirtiendo la misma en una señal discreta en amplitud, proceso llamado CUANTIZACIÓN. La señal  $x_q(nt)$  obtenida, llamada digital, será con la que se opere en el DSP. Generalmente es llamada  $x(n)$ , omitiendo el período  $T$  y suponiéndolo como una normalización en frecuencia, quedando:

$$\begin{cases} T = 1s & \text{Período de Muestreo} \\ f_s = \frac{1}{T} = 1\text{Hz} & \text{Frecuencia de Muestreo} \\ W_s = 2\pi f_s = 2\pi \text{ rad/s} & \end{cases}$$

Para una frecuencia normalizada:

$$f = \frac{F}{f_s} = F \cdot T \quad ó \quad \omega = \frac{\Omega}{f_s} = \Omega \cdot T$$

$F, \Omega$ : Frecuencias Análogicas

$f, \omega$ : Frecuencias Normalizadas a T

Concepto de Frecuencia en señales Tiempo Continuo y Tiempo Discreto:

Señales Tiempo Continuo:  $x(t) = A \cos(\Omega_0 t + \theta) = \frac{A}{2} e^{j(\Omega_0 t + \theta)} + \frac{A}{2} e^{-j(\Omega_0 t + \theta)}$

- Periodicidad: Para cualquier valor fijo de frecuencia  $F_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi}$ ,  $x(t)$  es periódica de período  $T_0 = \frac{1}{F_0}$  tal que  $x(t+T_0) = x(t) \quad \forall t$

- Principio de Identidad: Señales Tiempo Continuo con frecuencias distintas son distintas entre ellas. O sea,  $A \cos(\Omega_0 t + \theta) \neq A \cos(\Omega_1 t + \theta) \Leftrightarrow \Omega_0 \neq \Omega_1$

- Principio de Continuidad: Si  $\Omega_0$  aumenta, aumenta el nº de períodos  $T_0$  que entran en un intervalo de tiempo  $\Delta t$  dado, aumentando la tasa de oscilaciones.

Señales Tiempo Discreto:  $x(n) = A \cos(W_0 n + \theta) = \frac{A}{2} e^{j(W_0 n + \theta)} + \frac{A}{2} e^{-j(W_0 n + \theta)}$

- Periodicidad: Una señal tiempo discreto cosinusoidal  $x(n)$  es periódica sólo si su frecuencia  $f_0 = \frac{W_0}{2\pi}$  es un número racional.



Por definición,  $x(n)$  es periódica de período  $N > 0$  si:  $x(n+N) = x(n) \forall n$ .

Por lo cual:  $\cos[2\pi f_0(N+n) + \theta] = \cos(2\pi f_0 n + \theta) \Leftrightarrow 2\pi f_0 N = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow f_0 = \frac{k}{N}$ , o sea es un nº racional (cociente de dos enteros).

Para hallar el período fundamental, se cancelan los factores comunes entre numerador y denominador de  $f_0$ , y se obtiene el denominador  $N$ . Cabe destacar que un pequeño cambio en la frecuencia puede producir un gran cambio en el período, p ej:  $f_1 = \frac{31}{60} \Rightarrow N_1=60$  y  $f_2 = \frac{30}{60} \Rightarrow N_2=2$

- Principio de Identidad: Señales en tiempo discreto con frecuencias  $W_0$  separadas por un múltiplo entero de  $2\pi$  son idénticas (AliAS).

Todos los cosinoides presentes en el rango  $-\pi \leq W_0 \leq \pi$  o  $-\frac{1}{2} \leq f_0 \leq \frac{1}{2}$  son distintos y únicos, mientras que cosinoides con frecuencias fuera de este rango serán un AliAS de una cosinoidal dentro de este rango.

- Principio de Continuidad: La máxima frecuencia que puede alcanzarse es  $W_0 = \pm \pi$ , ó  $f_0 = \pm \frac{1}{2}$ .

Puede observarse en la gráfica de una cosinoidal en tiempo discreto que la tasa de oscilación aumenta con  $W_0$  aumentando desde 0 hasta  $\pi$ , mientras que la misma decrece entre  $\pi$  y  $2\pi$ , haciéndose la señal constante para  $W_0=2\pi$ .

### Representación de una Señal Periódica en Tiempo Discreto por Serie de Fourier:

Siendo  $s(n) = e^{j W_0 n}$  con frecuencia  $f_0 = \frac{1}{N}$ , se define un conjunto de armónicos  $s_k(n) = e^{j k W_0 n}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  con frecuencia  $f_k = \frac{k}{N}$ . Como  $s_{k+N}(n) = s_k(n)$ , sólo hay  $N$  armónicos distintos dados por  $s_k(n)$ , por lo cual  $k$  llegaría hasta  $N-1$ .

Por lo cual una señal periódica  $x(n)$  con período  $N$  puede representarse como:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j \frac{2\pi k n}{N}}$$

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi k n}{N}}$$

Serie de Fourier en Tiempo Discreto (DTFS)

Dar un período de la señal periódica  $x(n)$  equivale a dar  $N$  muestras de la misma.

### Muestreo de Señales Analógicas:

Sea una señal analógica  $x_a(t)$ , la señal correspondiente al muestreo periódico e uniforme de  $x_a(t)$  está dada por:  $x(n) = x_a(nT)$ ,  $-\infty < n < \infty$ , donde  $T$  representa el Período de Muestreo y  $f_s = \frac{1}{T}$  la Frecuencia de Muestreo.

$$\text{Si } x_a(t) = A \cos(2\pi F_a t + \theta) \Rightarrow x(n) = A \cos\left(\frac{2\pi n F_a}{f_s} + \theta\right)$$

Por lo cual la relación entre las frecuencias analógica ( $F, \Omega$ ) y digital ( $f, w$ ) es:

$$f = \frac{F}{f_s} = F \cdot T \quad \text{y} \quad \Omega = \frac{\Omega}{f_s} = \Omega \cdot T \quad \text{quedando, como se estableció antes, una}$$

normalización en frecuencia para las frecuencias digitales, las cuales pueden conocerse sólo si se conoce la frecuencia de muestreo  $f_s$ . Por otro lado, conociendo los límites para las frecuencias en tiempo discreto, se llega a que las frecuencias de las cosinusoidales en tiempo continuo, al ser muestreadas a una frecuencia  $f_s$ , deben caer en el rango:

$$-\frac{f_s}{2} \leq F \leq \frac{f_s}{2} \quad \text{y} \quad -\pi f_s \leq \Omega \leq \pi f_s$$

Si la cosinusoidal en tiempo continuo no cae dentro de este rango, no podrá ser únicamente distinguible al ser muestreada al haber frecuencias ALIAS en tiempo discreto. Este problema es llamado ALIASING, y por ello se utiliza el FAA.

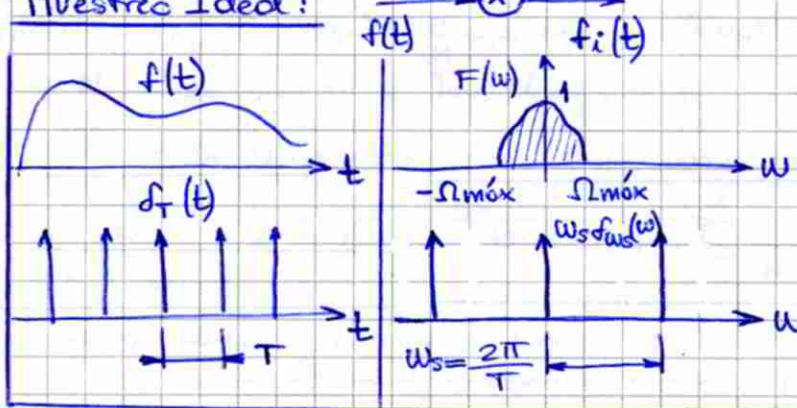
En cambio, si cae dentro de este rango, la relación entre  $f$  y  $F$  es uno a uno, y la señal analógica  $x_a(t)$  puede reconstruirse a partir de las muestras en tiempo discreto  $x(nT)$ .

### Teorema del Muestreo:

Si una señal  $f(t)$  está limitada en banda, es decir que no posee componentes más allá de una frecuencia  $F_{máx} = F_B$ , y es muestreada a una frecuencia  $f_s > 2F_{máx} = 2F_B$ , entonces  $f(t)$  puede ser RECUPERADA TOTALMENTE a partir de sus muestras. La frecuencia  $F_{Ny} = 2F_{máx}$  es llamada FRECUENCIA DE NYQUIST.

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t-nT) \quad f_s = \frac{1}{T} > F_{Ny}$$

Muestreo Ideal:

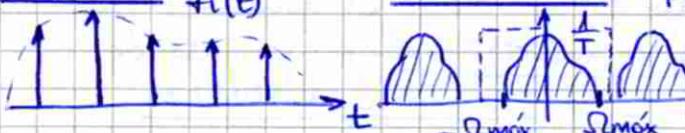


$$f(t) \leftrightarrow F(w)$$

$$f_T(t) \leftrightarrow w_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(w-nw_s)$$

$$f_i(t) = f(t) \cdot f_T(t) \leftrightarrow F_i(w)$$

Producto:  $f_i(t)$



Convolución:  $F_i(w)$

$$F_i(w) = \frac{1}{2\pi} [F(w) * w_s f_{ws}(w)]$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(w) * f(w-nw_s)$$

$$F_i(w) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(w-nw_s)$$

Si la frecuencia de muestreo es menor a la de Nyquist, los espectros se superponen y el ALIASING impide reconstruir bien la señal.

Recuperación: Filtro pasobajos ideal  $|H(j\omega)| = \begin{cases} T & \text{s: } |\omega| \leq \omega_B \\ 0 & \text{o: } |\omega| > \omega_B \end{cases}$  (FR)

La potencia original de la señal se redistribuyó en otros frecuencias al muestrear, por lo cual el filtro debe ganar para recuperar lo perdido.

$$F(\omega) = H(\omega) \cdot F_i(\omega) \leftrightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \operatorname{sinc}\left[\frac{\omega_s}{2}(t-nT)\right] \quad \text{si } \omega_s = 2\omega_B$$

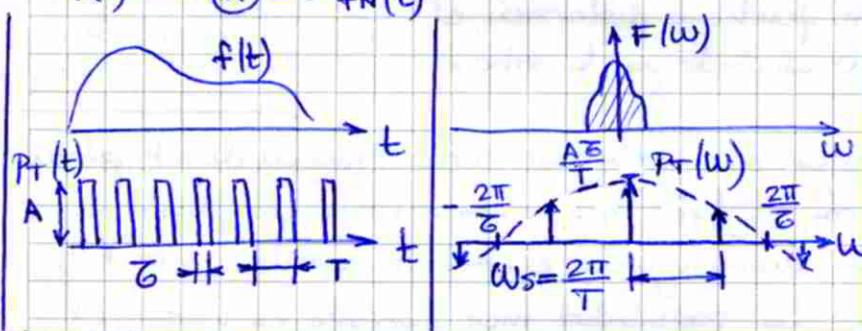
La autotransformada de Fourier del pasobajos ideal (pulsos en frecuencia, sinc en el tiempo) representa la función de interpolación que permite reconstruir exactamente la señal original  $f(t)$  a partir de las muestras. Pero, si la frecuencia de muestreo es más elevada, los espectros se encontrarán más separados en frecuencia y el filtro para recuperación será más sencillo.

### Muestreo Natural:

Como es imposible lograr en la práctica un tren de  $\delta$ , se utiliza un tren de pulsos  $\pi$  muy angostos. Por ser periódicos, su espectro tiene un tren de  $\delta$  y es útil para muestrear.

$$f(t) \xrightarrow{*} P_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi\left(\frac{t-nT}{\bar{T}}\right) \cdot A$$

$$\pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{s: } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{o: } \text{en otro caso} \end{cases}$$



$$f(t) \leftrightarrow F(w)$$

$$P_T(t) \leftrightarrow P_T(w) \quad \text{No depende de } w$$

$$P_T(w) = A \cdot \bar{T} \cdot \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\omega_s}{2\pi}\right) \delta(w-n\omega_s)$$

El ancho del lóbulo principal de la sinc es determinado por el ancho de los pulsos  $\bar{T}$ .

Producto:

$$f_N(t)$$

Convolución:

$$\xrightarrow{-\frac{2\pi}{\bar{T}}, \frac{2\pi}{\bar{T}}} \quad \frac{A\bar{T}}{T} F_N(w)$$

Atenuación indistorsión

$$f_N(t) = f(t) \cdot P_T(t) \leftrightarrow F_N(w)$$

$$F_N(w) = \frac{1}{2\pi} [F(w) * P_T(w)]$$

La recuperación ES ANÁLOGA AL CASO IDEAL, al ser el espectro de la señal muestreada centrado en  $w=0$  proporcional al original.

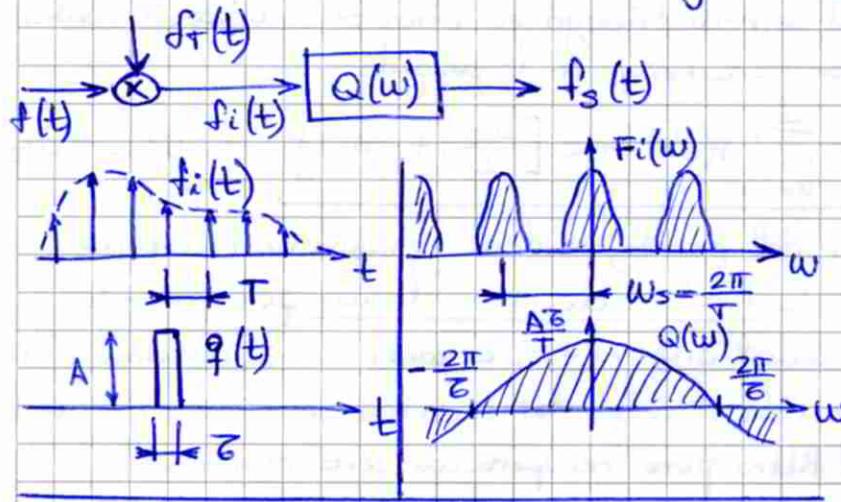
$$F_N(w) = \frac{A\bar{T}}{T} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\omega_s}{2\pi}\right) F(w-n\omega_s) \right]$$

El lóbulo central del espectro periódico tiene una mayor potencia que en el caso del muestreo ideal, y será aún mayor para mayor ancho del pulso  $\bar{T}$ , pero la idea se aleja del tren de  $\delta$ . Estos muestreos no es útil para cuantizar al haber varios valores de la señal por pulso (no se conoce cuál tomar).

NOTA

## Muestreo Instantáneo:

Para poder cuantificar cada muestra de la señal, el conversor requiere un cierto tiempo de procesamiento durante el cual dicha muestra debe permanecer constante. Por ello se utiliza este tipo de muestreo:

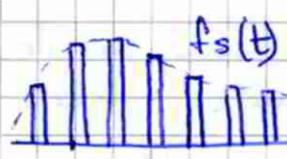


$Q(w)$  es un sistema cuya respuesta en frecuencia es una sinc, y cuya respuesta al impulso es un pulso de ancho  $T$ .

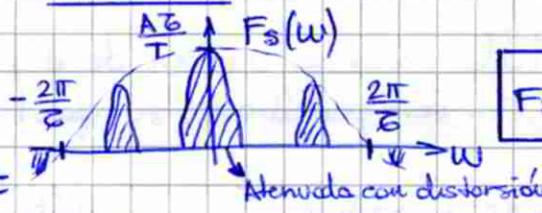
$$f_i(t) \Leftrightarrow F_i(w) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(w-nw_s)$$

$$g(t) \Leftrightarrow Q(w) = A \pi \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi w}{2\pi}\right)$$

Convolución:



Producto:



$$f_s(t) = f_i(t) * g(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_s(w) = F_i(w) \cdot Q(w)$$

$$F_s(w) = \frac{A\pi}{T} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi w}{2\pi}\right) F(w-nw_s) \right]$$

Depende de  $w$  (Distorsión)

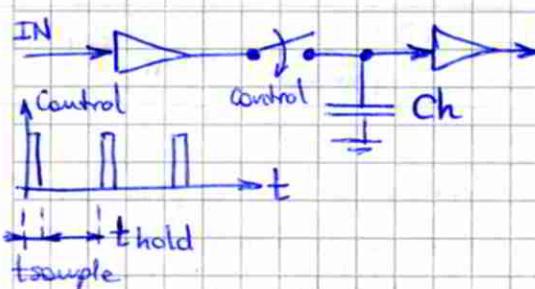
La señal NO PUEDE SER DIRECTAMENTE RECONSTRUIDA con un filtro pasa bajas ideal sin ninguna distorsión, al estar el espectro centrado en  $w=0$  afectado por la sinc.

Recordar que las ceros de la sinc se repiten cada  $w = \frac{2\pi}{T}$  ( $\Rightarrow f = \frac{1}{T}$ )

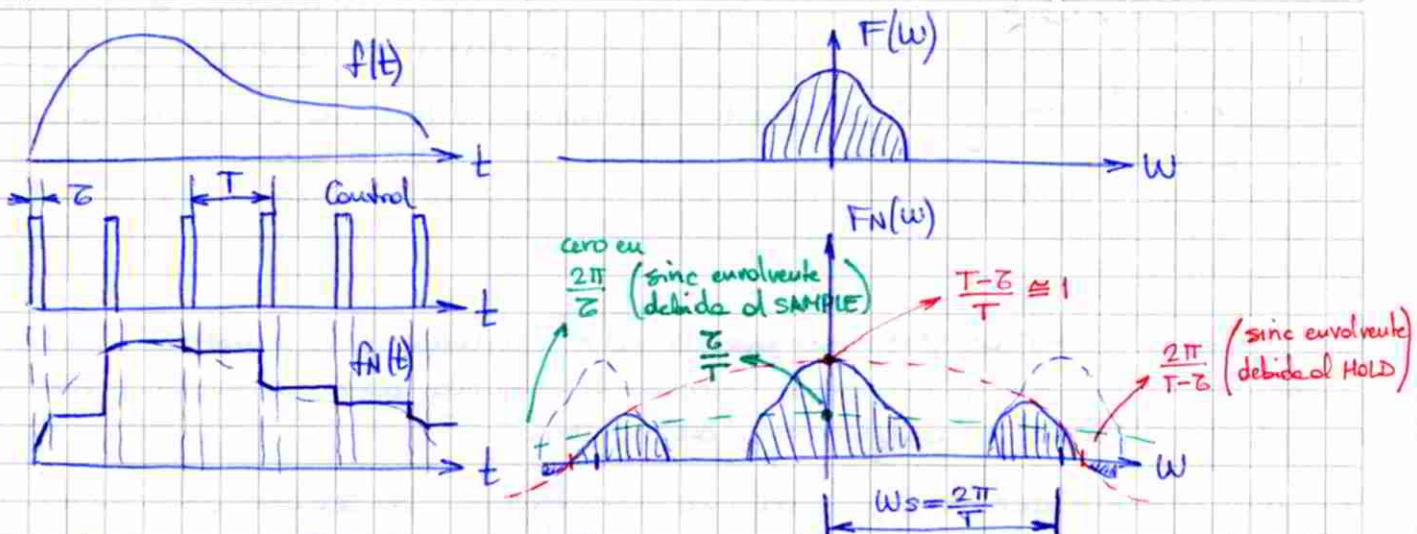
Para obtener la señal original debe utilizarse como función de interpolación un  $\operatorname{sinc}^{-1}$ , lo cual explicaría el filtro recuperador. Otra posibilidad es achicar el ancho del pulso  $\pi$ , disminuyendo el efecto de la sinc, pero hay una gran pérdida de potencia. La posibilidad más factible es hacer el filtro  $\operatorname{sinc}^{-1}$  digital, dentro del procesamiento digital de la señal.

## Sample & Hold:

El Sample & Hold es un dispositivo utilizado para realizar el muestreo instantáneo de una señal. La idea es obtener una muestra de la señal y conservarla durante todo el período de muestreo para darle tiempo al conversor A/D para procesar la muestra. Para ello hay 2 etapas:



- Una de muestreo Natural (SAMPLE), que finaliza luego de que el sistema sigue poniendo la señal.
- Otra de muestreo Instantáneo (HOLD), que sigue hasta el fin del período de la señal de control.

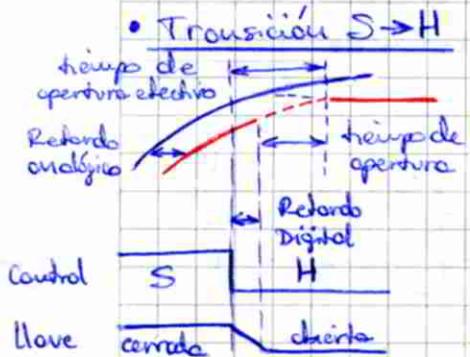


En el espectro, el resultado será la suma de los espectros resultantes de redondearle a la señal un muestreo natural de período  $G$ , y un muestreo instantáneo de período  $T-G$ . Como la sinc envolvente debida al primero tiene el máximo en un valor muy bajo (considerando  $t_{SAMPLE} = G \ll t_{HOLD} = T-G$ ), entonces predomina el efecto del muestreo instantáneo. Por ello habrá DISTORSIÓN.

Debe tenerse en cuenta que en realidad deben sumarse los espectros resultantes de muestreos naturales e instantáneos en forma COMPLEJA (real e imaginaria, con tiempo la fase). Sin embargo, como aproximación cualitativa y teniendo en cuenta la forma del diagrama de fase de la sinc, es válido sumar los módulos directamente (la sinc es real, sólo tiene cambios de signo luego de los ceros).

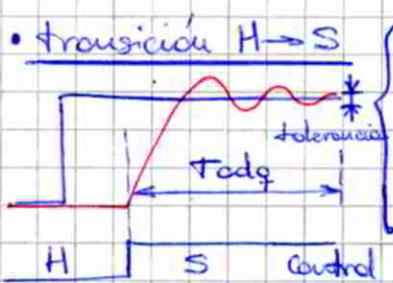
### Características No Ideales de los sistemas de Sample & Hold:

- Modo Sample
  - Tensión de offset: salida con entrada nula
  - Error de ganancia: cuando se apaga la unidad
  - Linealidad de ganancia
  - Ancho de banda
  - Setup Rate: depende del capacitor de hold Ch.



- Transición S → H
  - Tiempo de apertura: sólo afecta a la fase
  - Retardo digital: tiempo que demora la llave en responder a un cambio lógico
  - Retardo de apertura efectivo: visible al visualizar (suma dos anteriores)
  - Ruido de apertura: Afecta más frecuencia porque detener el control
  - transferencia de carga: se da a capacidades parásitas
  - Hold Step: salto de tensión observado en ch luego del inicio de transición. Se da a la transferencia de carga, y es MENOR a MAYOR ch
  - Tiempo de establecimiento de Hold

- Modo Hold
  - Corriente de pérdidas en ch: debido a pérdidas en dielectricos
  - Drop Rate: velocidad con la que se pierde la tensión en ch, y es MENOR a MAYOR ch (hasta cierto punto).
  - Feedthrough: indica nivel de señal de entrada que aparece clavada en el modo Hold (no hay un aislamiento perfecto)



Tiempo de Adquisición: Tiempo máximo necesario para adquirir nueva muestra, según cierto nivel de error, y es MENOR a  $f_{Ny}$ .

Error de muestra dinámico: diferencia entre señal de entrada y valor de la muestra, no constante ante variaciones bruscas de la entrada.

### Sampling Jitter:

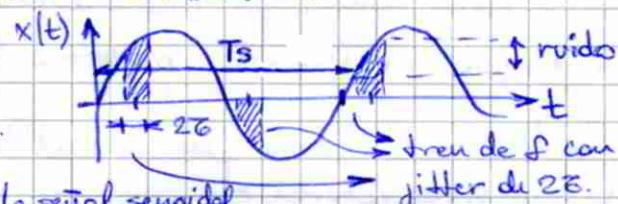
Se denomina jitter al ruido que aparece en el oscilador que muestra una señal entretiempo continuo, provocando que la frecuencia de muestreo no permanezca constante. Afecta a cualquier tipo de muestra.

Puede provenir del clock, o de una interferencia de señales analógicas ("crosstalk") como pueden ser las SOTHz de línea, y que pueden provocar que varíe el duty cycle de la señal de clock.

Para un jitter aleatorio de amplitud  $2\sigma$ , puede demostrarse que la relación señal-ruido de una senoidal muestreada con un tren de f es:

$$SNR = -14,2 \text{ dB} - 20 \log \left( \frac{\sigma}{T_s} \right) (\text{dB})$$

Es independiente de la amplitud de la senoidal.



### Sólida conversor D/A:

$T_s$ : período de la señal senoidal

Es importante tener en cuenta que la distorsión presente a la salida de un muestreo instantáneo puro o de un S/H debido al efecto de la sincronización será eliminada al convertir a la señal en digital (A/D), ya que en tiempo discreto los muestras de la señal no estarán afectadas por ningún tipo de pulso (será como si hubieran sido muestreados idealmente).

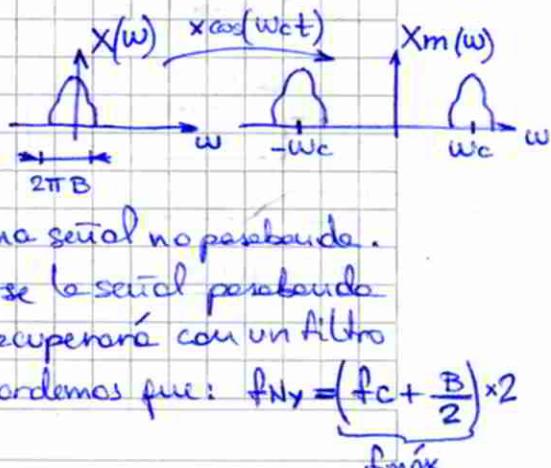
Sin embargo, luego del procesamiento la señal deberá ser convertida a analógica (D/A) nuevamente. Según el tipo de interpolación utilizada a la salida del conversor D/A habrá ruido causado por la sincronización. P ej., si las muestras son mantenidas fijas a la salida hasta que aparece una nueva, la señal será escalonada como si se tratase de un muestreo instantáneo (interpolación de ORDEN CERO).

### Muestreo de Señales Pasabanda:

Se denomina señal pasabanda aquella señal real cuyo espectro se encuentra contenido en una banda de frecuencias que no incluyen a  $f = 0 \text{ Hz}$ .

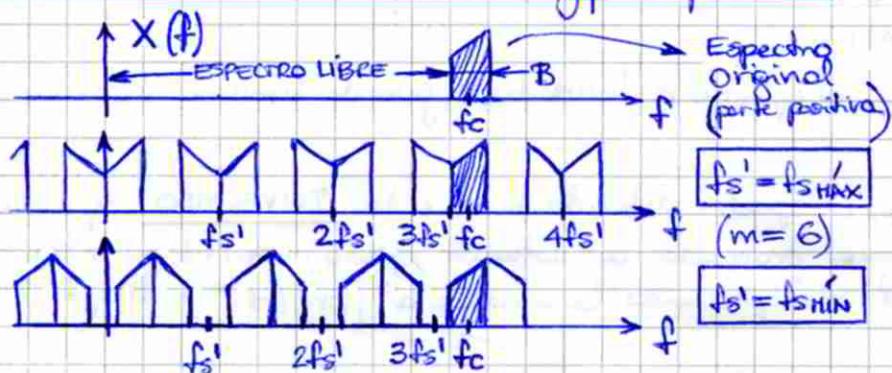
Pueden provenir, p ej., de una modulación en AM de una señal no pasabanda.

Si se satisfacen ciertas condiciones, puede muestrearse la señal pasabanda con una frecuencia  $f_s < f_{Ny}$ , y en general se la recuperará con un filtro pasabanda. Si  $f_c$  es la freq. central y  $B$  el BW, recordemos que:  $f_{Ny} = \left( f_c + \frac{B}{2} \right) \times 2$





### Frecuencia de muestreo subNyquist posibles:



Se desea muestrear la señal pasobanda  $x(t)$  con una  $f_s < f_{Ny}$ , lo que se llama muestreo Sub Nyquist.

Aparecerán el espectro original y repeticiones del mismo a freq. menores y mayores a la banda  $B$ .

Según el nº de repeticiones dadas del espectro pasobanda en el espectro libre, llamado "m", se obtiene un rango de valores posibles para  $f_s$  sin que haya aliasing:

$$(m+1)f_{s\min} = 2f_c + B \Rightarrow f_{s\min} = \frac{2f_c + B}{m+1} < f_s < \frac{2f_c - B}{m} = f_{s\max} \Leftrightarrow m \cdot f_{s\max} = 2f_c - B$$

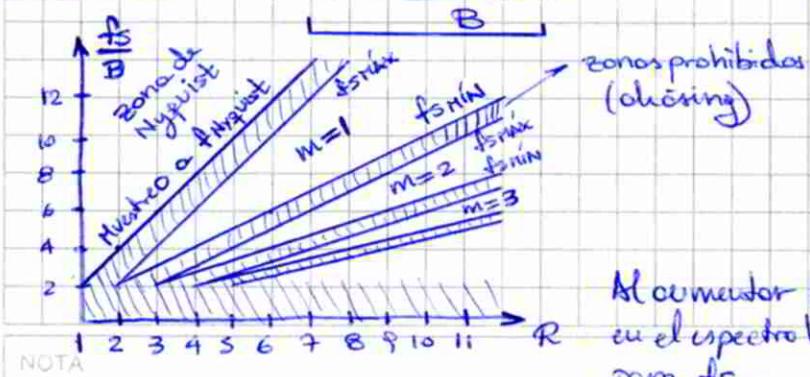
Espectro + Repeticiones      Rango total del espectro      (si  $m=0$ ,  $2f_c + B = f_{Ny} < f_s$ )      Repeticiones posibles      Rango total Espectro libre

Si  $f_{s\min} > f_{s\max}$ , entonces no hay  $f_s$  posible con "m" repeticiones del espectro sin que haya aliasing. Por otro lado, para optimizar siempre elegiremos la menor  $f_s$  tomando el mayor nº de repeticiones posible, pero esto trae algunos inconvenientes:

- Las repeticiones del espectro se encontrarán más cercanas, y esto dificultará las características del filtro pasobanda receptor necesario.
- Si se hace muestreo instantáneo o S&H, los ceros de la sinc envolvente se encontrarán a una frecuencia baja y habrá GRAN DISTORSIÓN.
- El clock puede presentar cierto nivel de jitter, y si se trabaja a la frecuencia mínima puede haber instantes con aliasing.
- El filtro anti aliasing utilizado es real, pasobanda de un orden determinado, y habrá un grado de aliasing mayor.

Por ello se suele trabajar a frecuencias cercanas a la  $f_s$  central entre la máxima y la mínima. De esta forma se les da uno "juego" a los FAS y FRS.

Si se normaliza la frecuencia de muestreo respecto de  $B$  y se define el FACTOR DE ESPACIO como  $R = \frac{f_s + \frac{B}{2}}{B}$ , los curvas de  $\frac{f_s}{B} = f(R)$  quedan:



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{f_{s\max}}{B} = \frac{2}{m} R - \frac{2}{m} \\ \frac{f_{s\min}}{B} = \frac{2}{m+1} R \end{array} \right.$$

Al aumentar el nº de repeticiones del espectro ("m") en el espectro libre, se hace menor el rango posible para  $f_s$ .

## Inversión Espectral:

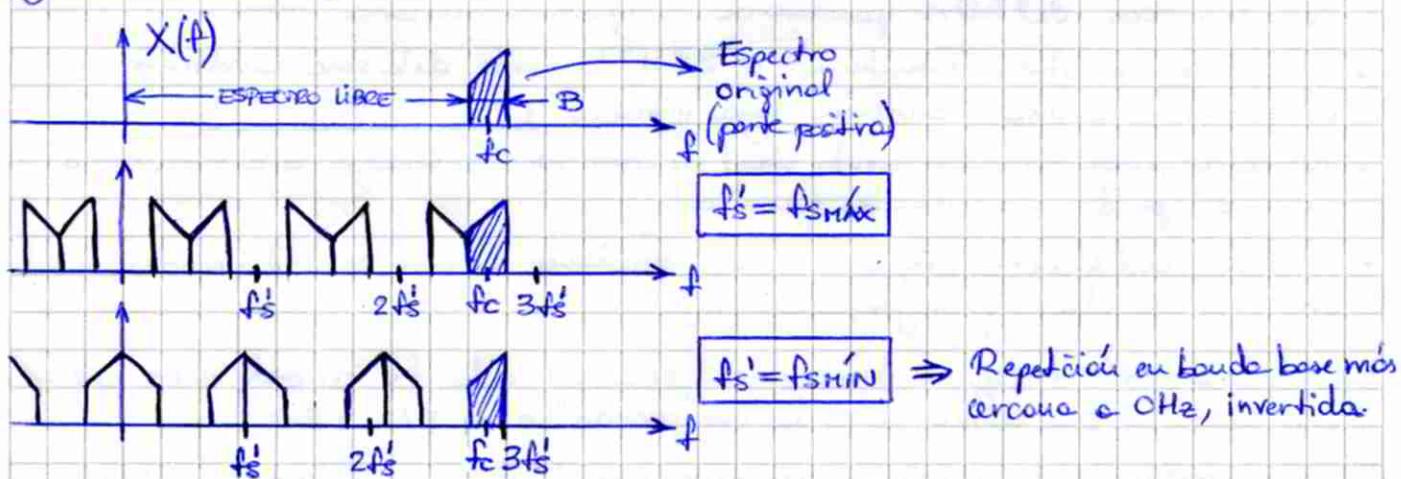
Si se desea aprovechar la traslación en frecuencia que provee el muestreo y así recuperar el espectro en "Banda Base" (o sea, la repetición más cercana a 0Hz) pueden observarse dos casos:

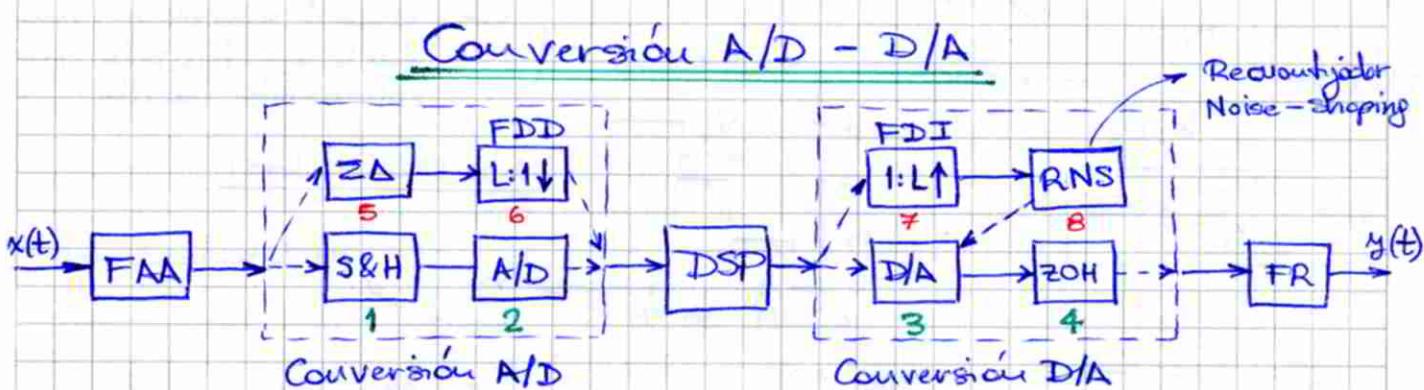
- Si "m" es un número PAR, el espectro de banda base guarda la misma simetría que el original.
- Si "m" es un número IMPAR, el espectro de banda base está INVERTIDO respecto al original. Si la señal será procesada digitalmente, puede reinvertirse el espectro para obtener el original multiplicando la secuencia por  $(-1)^n$  en tiempo discreto.

Si la señal a muestrear es una señal modulada en AM, puede llegar a desearse recuperar el espectro en Banda Base lo más cercano a 0Hz posible, tomando  $f_{s\max}$  para "m" PAR y  $f_{s\min}$  para "m" IMPAR. De esta forma se realiza "falta" de la demodulación (no estará del todo completa al no tener el espectro centrado en 0Hz).

Si se desea recuperar el espectro en Banda Base lo más cercano a 0Hz posible y además optimizar la frecuencia de muestreo ( $f_{s\min}$ ), se toma "m IMPAR" y se invierte el espectro multiplicando la secuencia por  $(-1)^n$ .

## Ejemplo anterior para m=5:

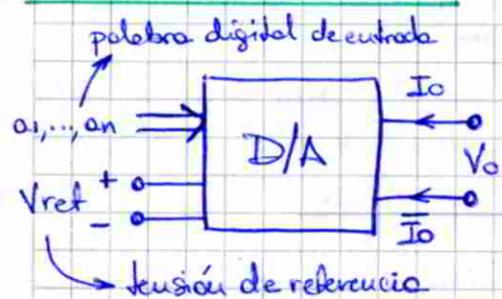




12 - 34 Conversión Clásica: La señal analógica pasa por lo general por un S&H, que suele estar integrado al A/D, para mantener muestras fijas por un tiempo y darle lugar al A/D para la conversión. El S&H puede no alterar la señal tiene frecuencias muy bajas (varía muy poco con el tiempo, cada muestra es prácticamente estable), como por ejemplo si proviene de un transductor piezoelectrico una magnitud física. Luego del DSP, el D/A lleva las muestras digitales a valores analógicos (tensión o corriente). En gen. tiene a su salida un latch, equivalente a una interpolación de orden cero (Zero Order Hold).

56 - 78 Conversión ΔΣ: La señal analógica es acutijada, por lo general a 1 bit, con frecuencias muy superiores a la de Nyquist (Oversampling). Esto simplifica el filtro anti-aliasing. Luego pasa por un Filtro Digital Decimador que reduce la frecuencia de muestreo a un valor cercano a la de Nyquist, aumentando así la resolución y el nº de bits. Luego del DSP, se aumenta la frecuencia de muestreo nuevamente (Upsampling) mediante un Filtro Digital Interpolador, cabiendo luego un Requantizador Noise Shaping, lo cual permite utilizar la conversión un D/A clásico de baja resolución (bajo nº bits) y simplificar el filtro recuperador.

### Conversores Clásicos:



La salida analógica correspondiente a la palabra digital ingresada puede ser de tensión o corriente constante. Si es de tensión:

$$V_o = k \cdot V_{FS} \left( a_1 \cdot 2^{-1} + a_2 \cdot 2^{-2} + \dots + a_n \cdot 2^{-n} \right) + V_{os}$$

↑ Tensión a fondo de escala      ↓ Tensión de offset  
ganancia

Tensión de referencia

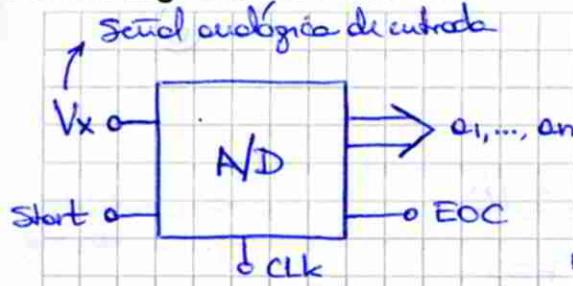
$$V_F = \frac{V_{FS}}{2^n} \triangleq \text{LSB}$$

n: nº debits del convertor.

Máximo Error Tolerable:  $V_e = \pm \frac{\text{LSB}}{2}$

NOTA

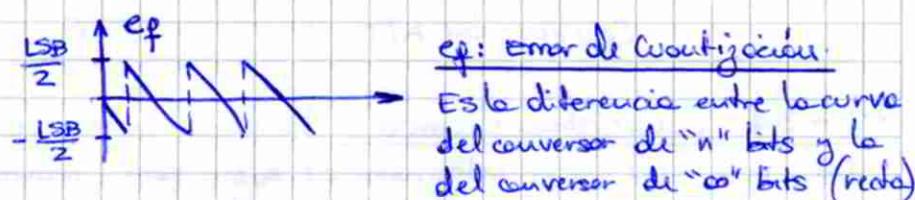
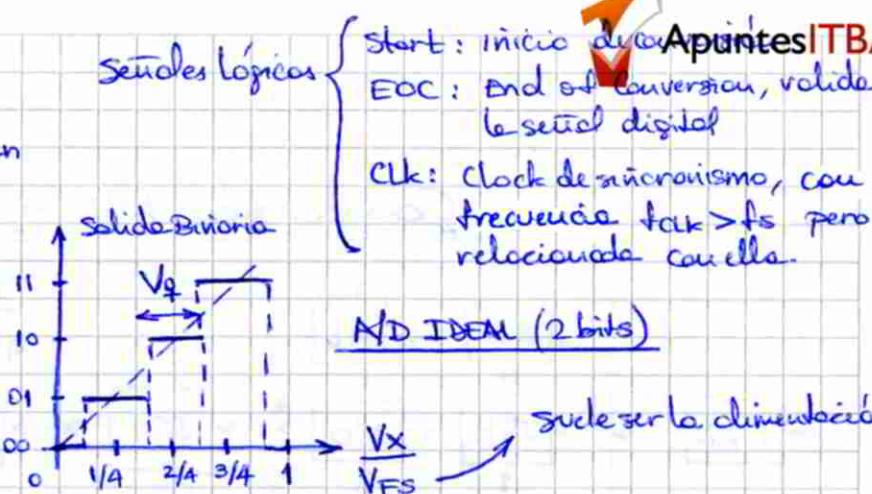




$$V_f = \frac{V_{FS}}{2^n} \triangleq \text{LSB}$$

$$-\frac{\text{LSB}}{2} < e_f < \frac{\text{LSB}}{2}$$

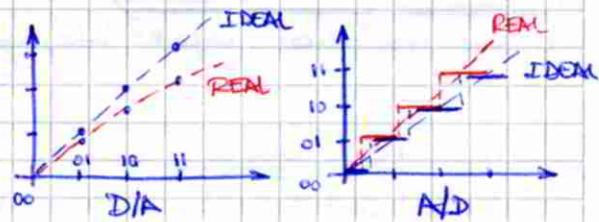
Uniformemente Distribuido



Para señales de amplitud relativamente alta (varios LSB's en convertidores de varios bits), el error de cuantización puede considerarse como RUIDO CON DISTRIBUCIÓN UNIFORME, estacionario e incoherente con la señal de entrada. A mayor n° de bits, este ruido es menor.

### Especificaciones Estáticas de los Conversores:

- Offset: La señal analógica en ambos tipos de convertidores va montada sobre una curva ubicada en la mitad del rango de conversión. Este es el valor nominal, pero puede diferir del real y esa diferencia se llama ERROR DE OFFSET. Se compensa con un circuito diseñado para tal fin.
- Error de Gauscua: Con el offset corregido, se define como la diferencia entre la gauscua nominal y la real, y representa la diferencia entre las pendientes de las transiciones ideal y real.



- Error Diferencial de No-Linealidad (DNL): Se define, para el peor caso, como la diferencia entre el alto del escalón (D/A) o el ancho del escalón (A/D) real y el valor ideal (1 LSB). Introduce DISTORSIÓN ARMÓNICA.
- Error Integral de No-Linealidad (INL): Es el DNL acumulado hasta cada valor (suma algebraica de los DNL hasta cada valor), y de una idea si se deja cada vez más lejos del comportamiento ideal.
- Monotonía: Específica que si la entrada crece, la salida debe crecer (transfunción monótona creciente). Si no es así, el convertidor es NO MONÓTONICO y



puede hacer al sistema instable. Es un error MUY GRANDE.

### Especificaciones Dinámicas de los Conversores:

#### Conversores D/A:

- Tiempo de establecimiento: Debido a capacidades e inductancias parásitas
- Glitches: Suceden si los tiempos de transición de 0 → 1 son distintos a los de 1 → 0, ocurriendo p ej: 1000 → 0111 como 1000 → 0000 → 0111 siendo el estado del medio transitorio, resultando en ruido de alta frecuencia que es eliminado en el filtro recuperador.
- Latencia: Retardo total desde que la entrada digital cambia hasta que termina el tiempo de establecimiento (salida analógica confiable). Es sólo un retardo.

#### Conversores A/D:

- Relación Señal - Ruido de Cuentajacáis (SQNR): Es la relación entre la máxima señal admisible y el mínimo nivel del conversor, y para entrada senoidal y ruido de cuentajacáis Uniforme es :
- $$SQNR(dB) = 1,76 + 6,02 \cdot n$$
- n : n° bits del conversor

Este valor establece el Rango Dinámico del sistema, siempre y cuando el mismo no ingrese más ruido que sumado al de cuentajacáis haga que el Rango Dinámico sea menor, ni agregue distorsión armónica.

- Nº efectivo de Bits (ENOB): Da una medida de la performance global del conversor, y se calcula como:

$$ENOB (\text{bits}) = \frac{SQNR(\text{dB}) \text{ medido} - 1,76}{6,02}$$

El ruido introducido por el sistema hace que  $SQNR \text{ medido} < SQNR \text{ ideal}$ .

- Relación Señal - Ruido (SNR): Con una entrada dada, es la relación entre la potencia del armónico fundamental y la potencia del piso de ruido (total, integrando todas las potencias de ruido).
- Relación Señal - Ruido + Distorsión (SINAD): Con una entrada senoidal, es la relación entre la potencia de la señal y la contenida en el resto de las frecuencias (Ruido + Distorsión Armónica).
- Distorsión Armónica Total (THD): Con una entrada senoidal, es la relación entre la potencia de un n° definido de armónicos y la potencia de la fundamental.
- Rango Dinámico libre de Espectros (SFDR): Con una entrada senoidal, es la relación entre la potencia de la fundamental y la potencia de la mayor componente. ES EL VERDADERO RANGO DINÁMICO y el mejor parámetro para comparar conversores.
- Armónicos Dentro de Banda (IDB): Es el SFDR considerando un n° limitado de armónicos.

NOTA

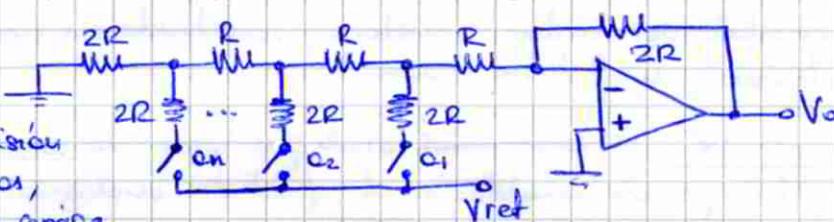
## Circuitos Básicos de D/A's:

1) Resistores Ponderados: Básicamente es un circuito sumador inversor con un op. operacional. Una de las entradas suma está conectada a  $V_{ref}$  con una resistencia  $2^i \cdot R$ , con  $i = \text{nº de bit}$ , accionada por llaves lógicas. Los corrientes son sumados y una resistencia  $R$  de realimentación la convierte a tensión.

Para un gran nº de bits requieren un gran rango de resistencias, hay disipación despareja (ALINEALIDAD), la imprecisión en los  $R$  tiene DNL y la resistencia del generador  $V_{ref}$  cause distintos efectos en cada  $R$  (ERROR DE SUPERPOSICIÓN).

2) Escalera R-2R:

Corrige el problema de precisión en un gran rango de resistencias, permitiendo integración, y corrige disipación despareja.



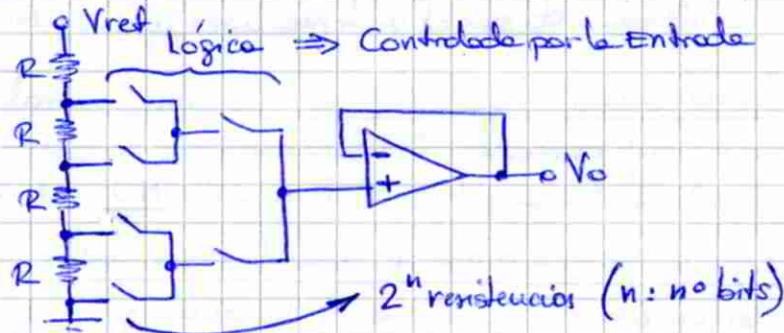
3) Escalera Invertida R-2R: Es otra forma de obviar la escalera R-2R, y corrige además el error de superposición al atenuar la resistencia de  $V_{ref}$  a través los bits de igual forma. ES USADO.

4) Fuentes de Corriente Ponderadas: Es como el de resistores ponderados pero con fuentes de corriente  $\frac{IR}{2^i}$ , con  $i = \text{nº de bit}$ . Son fáciles de integrar, corrigen la disipación despareja, pero requieren también un gran rango de corrientes.

5) Fuentes de Corriente R-2R invertida: Junta las fuentes de corriente ponderadas con la Escalera Invertida R-2R, solucionando el gran rango de corrientes pero debiendo integrar un gran nº de resistencias. ES USADO.

6) Árbol de Llaves:

Requiere gran nº de llaves y  $R$ 's iguales, pero puede integrarse fácilmente en la actualidad.



## Circuitos Básicos de A/D's: (En todos ellos hay un D/A adentro para comparar)

1) Convertidor por simple rampa contadora: Utiliza un contador binario que cuenta hasta que su valor supere a la entrada. Requiere que la entrada permanezca constante (S&H) y es muy lento. Su problema más grave es que el Tiempo de Conversión ( $T_C$ ) DEPENDE de la señal de entrada ( $V_x$ ).

NOTA: Con  $V_x = V_{FS}$ :  $T_C = T_{CHMAX} = \frac{2^n}{f_{clk}}$



2) Convertidor Seguidor: Busca seguir la señal de entrada ( $V_x$ ), reduciendo  $T_C$ .  
 Si:  $V_x = \frac{V_{FS}}{2} \operatorname{sen}(W_0 t) \Rightarrow \frac{d}{dt} V_x = \frac{V_{FS}}{2} \cdot W_0 < \frac{1 \text{ LSB}}{T_{clk}} = \frac{V_{FS}}{2^n} \cdot f_{clk}$  para que la señal no varíe más de 1 LSB por período de clock  $\Rightarrow f_0 < \frac{f_{clk}}{2\pi \cdot 2^n}$  resultando muy bajo (requiriendo S&H para obtenerlo).

### 3) Conversores por Aproximaciones Sucesivas (Conversores Serie):

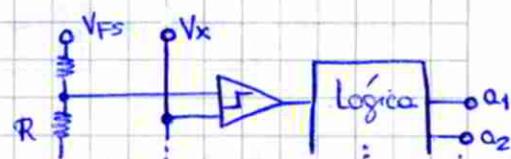
a) Direcional: Trabajo con una Lógica de Aproximaciones Sucesivas (SAR) o de busqueda binaria, que requiere " $n$ " períodos de clock para una conversión de " $n$ " bits:  $T_{C \text{ MÍN}} = n \cdot T_{clk}$ .

Si:  $V_x = \frac{V_{FS}}{2} \operatorname{sen}(W_0 t) \Rightarrow \frac{d}{dt} V_x = \frac{V_{FS}}{2} \cdot W_0 < \frac{\frac{1}{2} \text{ LSB}}{n \cdot T_{clk}} = \frac{f_{clk}}{2} \cdot \frac{V_{FS}}{n \cdot 2^n}$  para que la señal no varíe más de 0,5 LSB durante la conversión  $\Rightarrow f_0 < \frac{f_{clk}}{2\pi \cdot n \cdot 2^n}$  resultando todavía más bajo (requiriendo S&H).

b) Por Redistribución de Carga: El algoritmo de Aprox. Sucesivas va redistribuyendo la carga en una red de capacitores, cuyos valores son los elementos de precisión. Estos pueden controlarse en MOS integrados.

c) En etapas (Pipelined): Constau de varios etapas para realizar la conversión, resultando:  $T_{C \text{ MÍN}} = T_{clk}$  (teórico). Su desventaja es el gran retraso o latencia hasta obtener la salida codificada, el cual depende del  $n^o$  de etapas. Este valor no influye en el tiempo de conversión (el cual determina la frecuencia de muestreo), es sólo un retraso.

### 4) Conversores Paralelo (Conversores Flash):



Utilizan una serie de resistencias y un comparador para cada nivel de circuito binario ( $2^n - 1$  comparadores), cada uno con su respectiva tensión de referencia del nivel determinado y con la señal analógica de entrada. A partir de sus salidas, un circuito lógico genera la salida binaria correspondiente. Son MUY RÁPIDAS (su velocidad la limita el retraso de los comparadores y el circuito lógico) y NO REQUIEREN S&H por ello, resultando:  $T_C = T_{clk}$ .

Como necesitan un gran  $n^o$  de comparadores, pueden realizarse en etapas (Pipelined).

5) Conversores Integradores: Son similares al de rango contable, pero NO EMPLEAN CONVERSOR D/A sino que integran la tensión de referencia (dando una rampa) y comparan con ella. Por ello tienen muy mala respuesta en frecuencia, pero tienen gran precisión (alto  $n^o$  de bits) y son útiles para señales continuas.

## Conversores $\Sigma\Delta$ :

Los conversores clásicos no resuelven suficientes cuando se desea digitalizar señales con un gran rango dinámico (alto n.º de bits, bajo error de cuantificación) que no se extienden en un amplio rango de frecuencias, como p.ej. audio de alta calidad. Los conversores  $\Sigma\Delta$ , en cambio, sí lo permiten.

## Características del Ruido de Cuantificación:

En un conversor clásico A/D, el Ruido de Cuantificación tendrá una característica dependiente de la amplitud de la señal. Si la misma es muy baja respecto al LSB, será como utilizar un conversor de un bajo n.º de bits. Una senoidal se verá como una cuadrada, donde los armónicos de la misma provienen del ruido de cuantificación, en este caso CORRELACIONADO con la señal.

Si en cambio la señal es de amplitud cercana al fondo de escala, el ruido de cuantificación estará INCORRELACIONADO con la señal y puede suponerse como ruido blanco limitado en banda, estacionario con distribución Uniforme, y el conversor clásico puede modelarse como:

$$x^*(t) \xrightarrow{+} e(n) : \text{ruido de cuantificación} \\ \xrightarrow{+} x(n) : \text{señal digital}$$

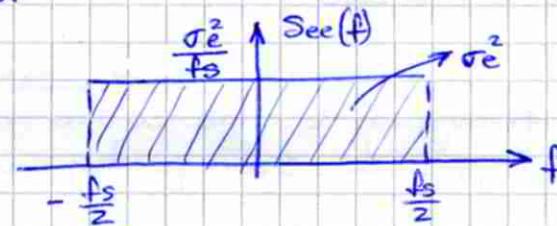
señal muestrada

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{f} \int_{-\frac{f_s}{2}}^{\frac{f_s}{2}} e^2 dt = \frac{f^2}{12}$$

$$V_f = \frac{V_{FS}}{2^n} \quad \text{con } V_{FS}=1 : \quad V_f = f = \frac{1}{2^n}$$

(normalizado)

$$\text{Resultado: } \text{See}(f) = \frac{\sigma_e^2}{f_s} = \frac{f^2}{12f_s}$$



See(f): Densidad espectral de potencia de  $e(n)$

$\sigma_e^2$ : Potencia promedio (varianza) de  $e(n)$

$$\text{Si: } V_x = \frac{V_{FS}}{2} \text{ sen (Wot)}$$

$$\text{SQNR(dB)} = 10 \log \left( \frac{P_x}{\sigma_e^2} \right) = 10 \log \left[ \frac{\left( \frac{V_{FS}}{2} \right)^2}{\frac{f^2}{12}} \right] = \\ = 17.6 + 6.02n$$

## Conversor A/D por Oversampling:

El proceso de Oversampling significa muestrear la señal acotada en banda a frecuencias muy superiores a la de Nyquist. El mismo debe ser compensado por una Decimación luego de la cuantificación para bajar la frecuencia de muestreo y poder trabajar en un DSP. Se define:

$$L = \frac{f_{os}}{f_s} : \text{Relación de Oversampling}$$

Este proceso tiene dos ventajas clave:

$f_{os}$ : Frecuencia de Oversampling,  
 $f_s$ : Frecuencia de muestreo clásica a utilizar en el DSP.

1) Simplificación del FAA: Al trabajar con muy alta  $f_{os}$ , las repeticiones de espectros se separan muchísimo y la selectividad del FAA debe ser mucho menor (p.ej., orden 1, RC) para lograr equivalente resultado que con  $f_s$ .



2) Significativa Reducción del Ruido de Cuantificación: La potencia del ruido de cuantificación debe distribuirse en un mayor ancho de banda, por lo cual el ruido de sobre puede eliminarse con el Filtro Digital Decimador (pasabajas) y al volver a la frecuencia  $f_s$  la potencia del ruido será menor. Es lo equivalente a AUMENTAR EL N° DE BITS, lo cual permite trabajar con un n° menor de bits a la frecuencia de oversampling.



Se busca conocer cuántos bits puede bajarse la resolución al trabajar con  $f_s$  (el piso), el decimar y trabajar con  $f_s$ , la potencia del ruido baje pero se mantenga la Densidad Espectral de Potencia. Para ello se lo considera como dos conversores:

$$\text{Conversor con } f_s: f = V_{FS} \cdot 2^{-n}$$

$$r_e^2 = \frac{f_e^2}{12}$$

$$\text{Conversor con } f_{OS}: f_{OS} = V_{FS} \cdot 2^{-nos}$$

$$r_{eOS}^2 = \frac{f_{OS}^2}{12}$$

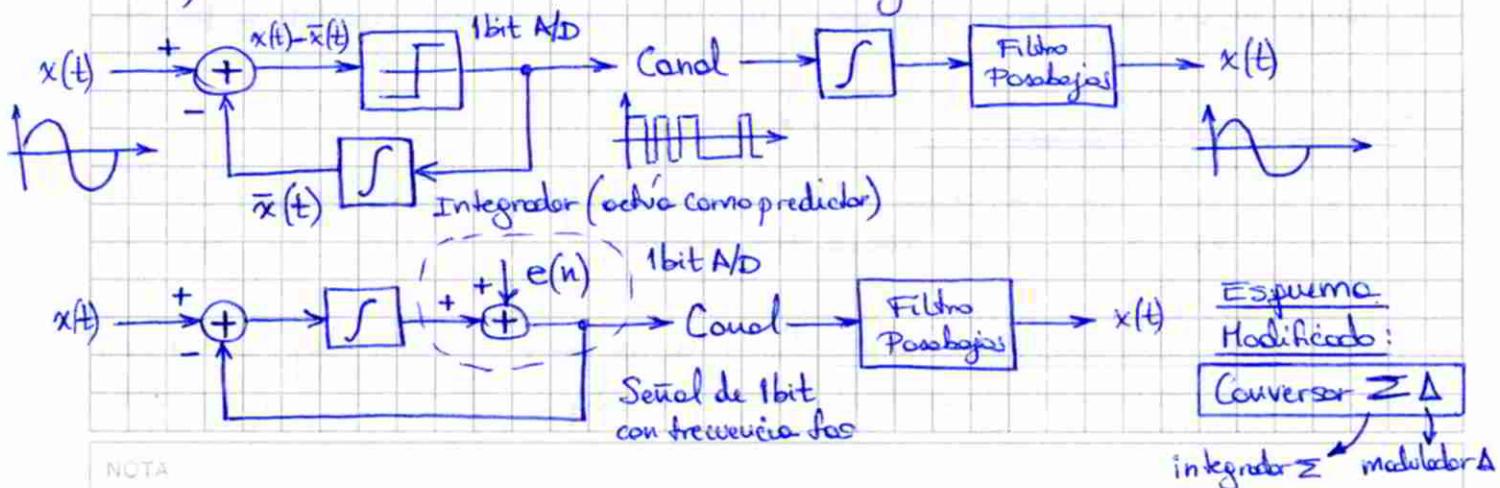
$$\text{See}(f) = \text{cte} \Rightarrow \frac{r_e^2}{f_s} = \frac{r_{eOS}^2}{f_{OS}} \Rightarrow L = \frac{f_{OS}^2}{f_s^2} = 2^{2\Delta n} \Rightarrow \Delta n = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln L}{\ln 2}$$

$\Delta n = n - nos$ : N° de bits "ganados" al pasar de  $f_s$  a  $f_s$

Como la ganancia de bits no es significativa (pocos bits implicarían fos extremadamente altos), este conversor no es usado en la práctica. Pero sus principios derivaron al conversor  $\Sigma\Delta$ .

### Conversor A/D $\Sigma\Delta$ :

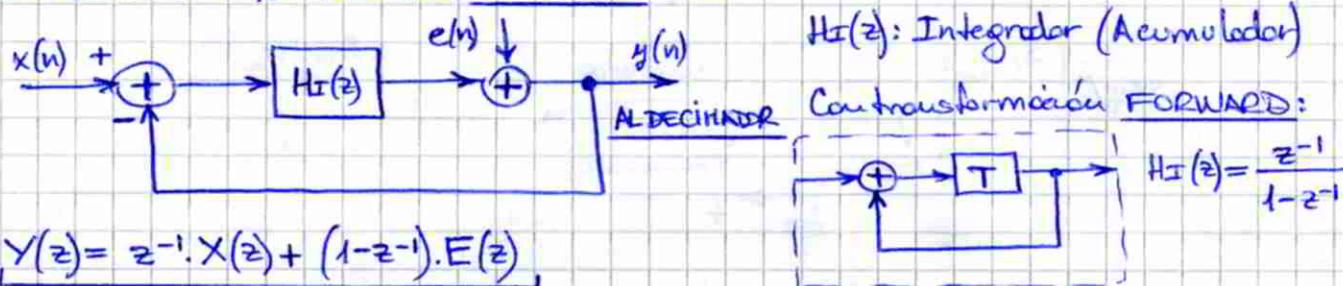
Se basa en la Modulación-Demodulación  $\Delta$ , donde el valor cuantizado (en gral 1 bit) es el cambio de la señal entre muestra y muestra:



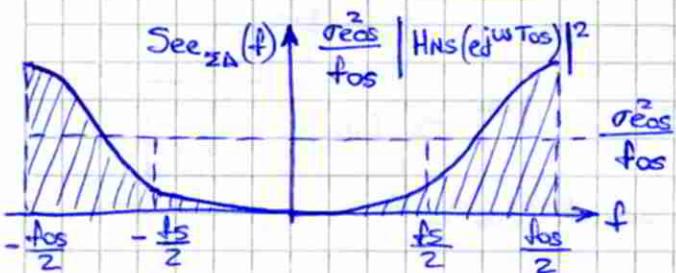
La información de la señal analógica ya no se encuentra presente en los niveles de la señal digital, sino en los cambios de la misma (es de 1 bit solamente).

### Efecto de Modelado del Ruido (Noise Shaping):

La característica más interesante de un conversor A/D  $\Sigma\Delta$  es el efecto que tiene sobre el ruido de cuantificación. Se define el ORDEN de un  $\Sigma\Delta$  como el nº de integradores utilizados. En tiempo discreto, el modelo equivalente de un conversor A/D  $\Sigma\Delta$  de 1º ORDEN es:



$$\begin{cases} H_X(z) = z^{-1} \Rightarrow \text{Transferencia pure efecto a la señal (en este caso, posatado, es sólo un retraso, efecto sólo linealmente).} \\ H_{NS}(z) = 1 - z^{-1} \Rightarrow \text{Transferencia pure efecto al ruido de cuantificación o Noise Shaping (en este caso posatados de 1º orden).} \end{cases}$$



Como el ruido de cuantificación es "lleno" a alta frecuencia, en la banda  $[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}]$  el nivel del mismo es muy bajo. Esto permite "ganar" un mayor nº de bits.

La característica del integrador, generalmente realizado con Capacitores Sintetizados, dependerá del modelo utilizado. En este caso sería un circuito SC PARALELO (FORWARD). Un  $\Sigma\Delta$  de ORDEN P tendrá una transferencia Noise Shaping del tipo:

$$H_{NS}(z) = (1 - z^{-1})^P \Rightarrow \text{Realizando el procedimiento anterior, tomando el nivel de ruido en } f = \frac{f_s}{2} \text{ (peor caso), se obtiene: } \Delta n = (p+1) \cdot \frac{\ln L}{\ln 2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(\frac{\pi}{2} \cdot 2)}{\ln 2}$$

A mayor orden, el posatado pure efecto el ruido es más acortado y permite ganar un mayor nº de bits. En la actualidad alcanzan los 24 bits ( $SQNR = 146 \text{ dB teórico}$ ).

### Filtro Digital Decimador: (L:1 ↓)

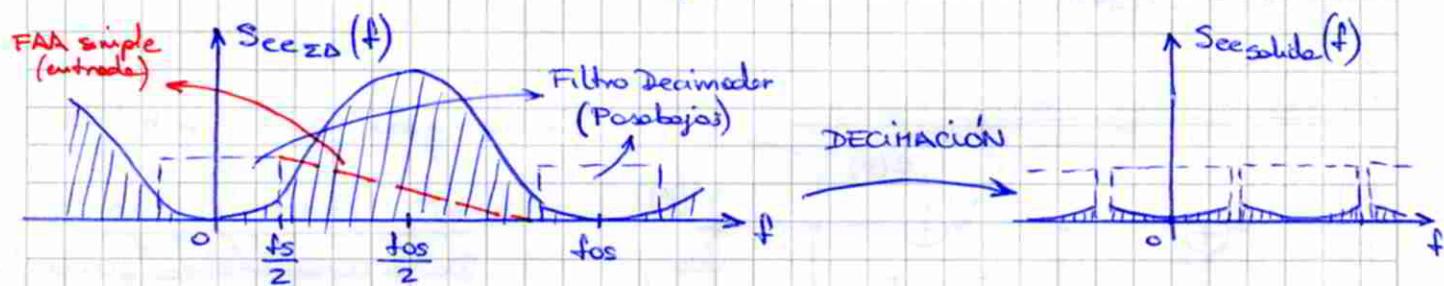
Corresponde a la segunda etapa de la conversión, y es un Filtro Digital Multifrecuencia MUY COMPLEJO. Basicamente realiza tres tareas:

- 1) Remueve el ruido de cuantificación fuera de la banda  $[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}]$ , por lo cual es un Filtro Pasabajas, generalmente de varios etapas para compensar la característica



de un  $\Sigma\Delta$  de alto orden. Suele ser una serie de filtros (analogos seguido de un FIR de fase lineal (más rápidos y estables que los IIR)).

- 2) Realiza la Decimación, o sea baje la frecuencia de muestreo de los  $f_s$  (en un factor  $L$ ), logrando mejor resolución y aumentando el  $n^o$  de bits.
- 3) Activa como FAA al eliminar el ruido fuera de la banda base, ya que al bajar la frecuencia de muestreo los espectros se acercan y, si no fuera así, habríaalias. Entonces complementa el FAA simple de la entrada.

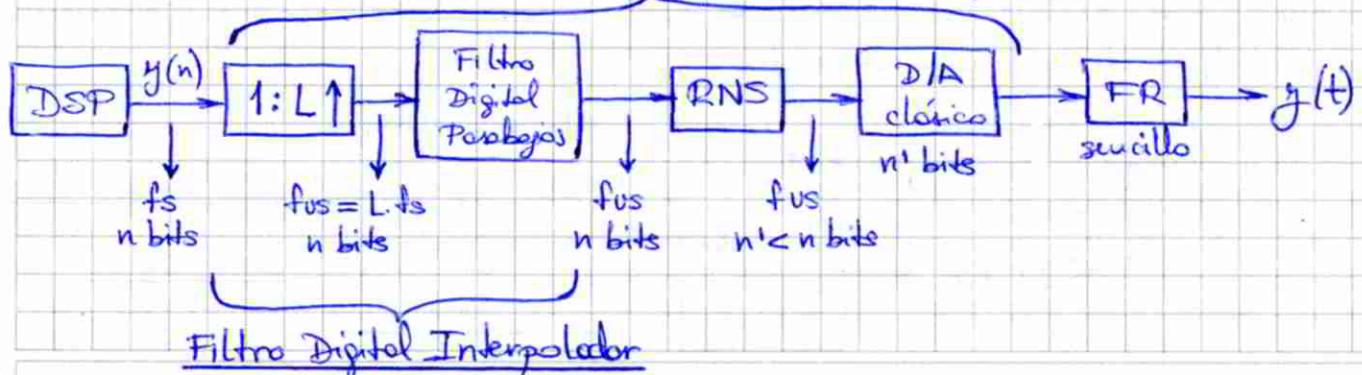


El modelo real del conversor  $\Sigma\Delta$  combina señales en tiempo continuo con señales en tiempo discreto, por lo cual requiere un conversor D/A de 1 bit en el lado de realimentación para poder restar las señales. Los conversores con ARQUITECTURA MASH utilizan además un retraso en el lado de realimentación, lo cual no afecta significativamente las transferencias. Estos cobinan conversores  $\Sigma\Delta$  de 1º orden en cascada, atendiendo cada uno el ruido de cuantificación proveniente de la etapa anterior, y suman las salidas.

### Conversor D/A:

El DSP trabajará con el elevado  $n^o$  de bits entregados por el conversor AD  $\Sigma\Delta$ . Para convertir luego la señal a analógica, puede utilizarse en el conversor D/A una filasota similar al  $\Sigma\Delta$ .

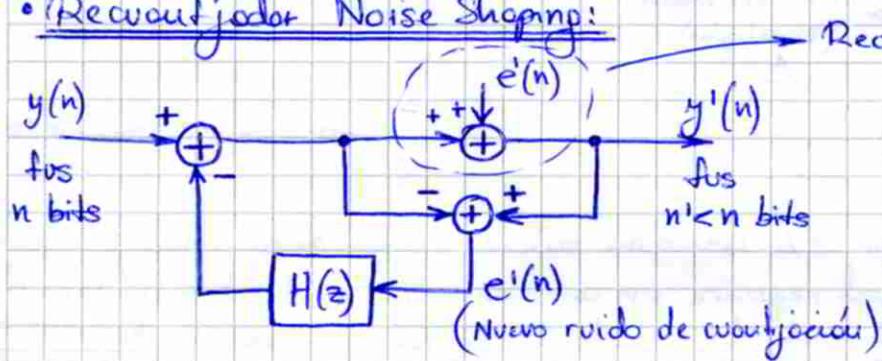
- Diagrama en Bloques: Conversor D/A (Filasota  $\Sigma\Delta$ )



en primer lugar se encuentra el Filtro Digital Interpolador, el cual eleva la frecuencia de muestreo de  $f_s$  a  $f_{us}$  (en un factor  $L$ , Upsampling). Por ello "agrega" ceros entre cada muestra de la señal, apareciendo repeticiones del espectro de la misma en  $[-\frac{f_{us}}{2}, \frac{f_{us}}{2}]$ . Esas repeticiones son eliminadas por el mismo filtro (pasobajas), equivalente a interpolar muestras en los ceros agregados (entre cada muestra de la señal). Por ello recliza parte de la recuperación.

Luego, un Recuentijador Noise Shaping permite recuperar la señal a un menor n° de bits y enviando el ruido de cuantificación a otras frecuencias, similar al  $\Sigma\Delta$ . Esto permite emplear un conversor D/A clásico de pocos bits, pudiéndose recuperar la señal con un FR simple que elimine el ruido de cuantificación a otras frecuencias.

### • Recuentijador Noise Shaping:



Recuentijador  $n$  bits  $\rightarrow n'$  bits

$H(z)$ : Filtro del logo

Dale la característica que reduce el ruido de cuantificación (Noise Shaping)

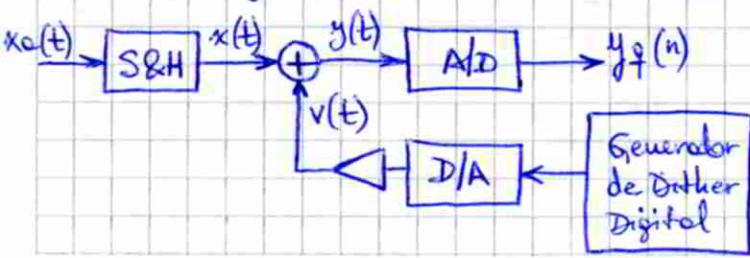
$H(z)$  debe ser una característica pasobajas para que el ruido sea detectado por una característica pasalanas.

### Dither:

Cuando la señal de entrada a un conversor A/D es de unos pocos LSB's, el ruido de cuantificación se encuentra fuertemente correlacionado con la señal, lo cual produce DISTORSIONES AUDIBLES. Sin necesidad aumentar el n° de bits, el DITHER permite lograr que dicha correlación sea mucho menor, lo cual resulta mucho mejor desde el punto de vista auditivo.

### Dither Aditivo:

Consiste en sumar una pequeña cantidad de ruido blanco a la señal de entrada antes de la cuantificación. Este ruido se suma a la señal y permanece con ella luego del proceso de cuantificación.



$$y(n) = x(n) + v(n)$$

$$e(n) = y_f(n) - y(n)$$

$$e_f(n) = y_f(n) - x(n)$$

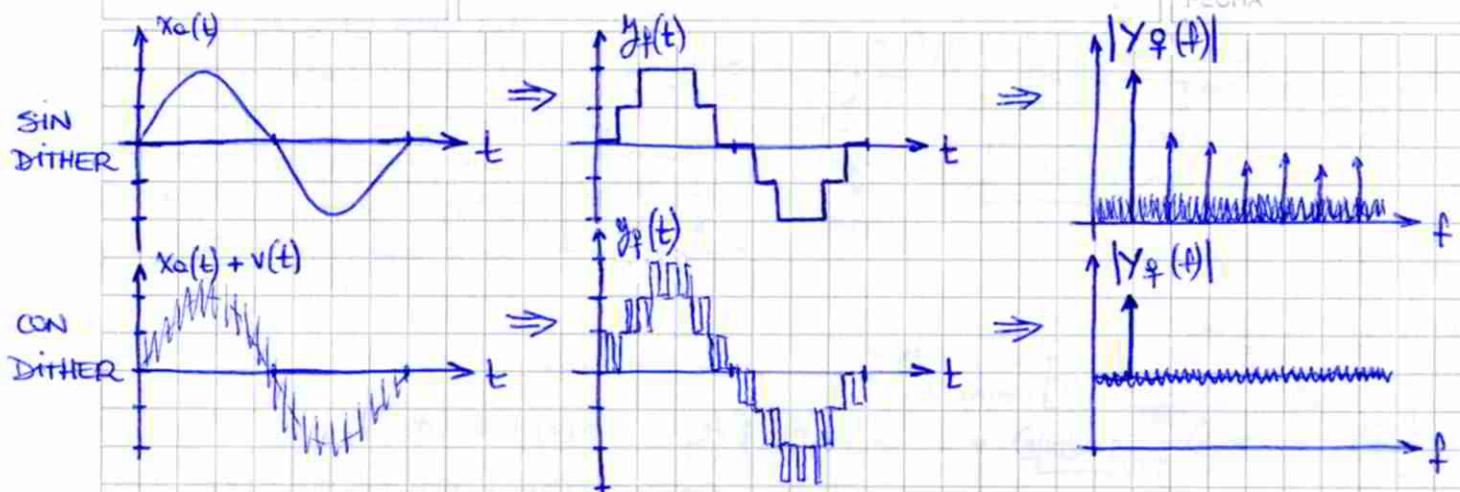
$$= e(n) + v(n)$$

Error de Cuantificación

Error Total

$$\sigma_{er}^2 = \frac{\sigma_e^2}{12} + \sigma_v^2$$

Potencia media de Ruido



Puede observarse que, con Dither, el nivel de ruido aumenta ya que se suma el de cuantificación el ruido agregado. Sin embargo, no hay potencia de ruido distribuida en armónicas de la señal, quedando el ruido descorrelacionado con la señal. Esto resulta mucho mejor auditivamente.

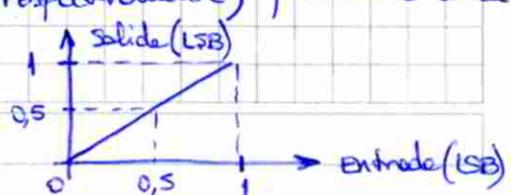
Existen distintos tipos de Dither según la función de densidad de probabilidad del ruido blanco agregado a la señal. Algunos de ellos son muy difíciles de generar auditivamente, por lo que se generan digitalmente.

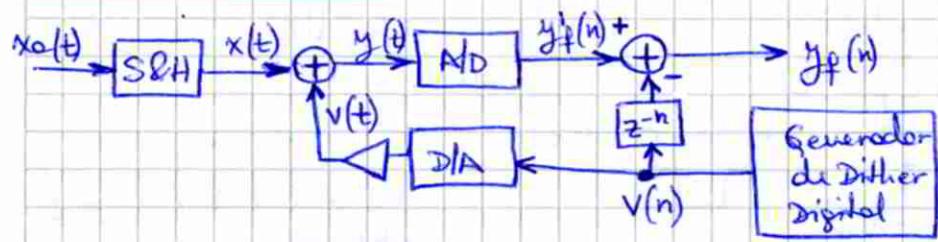
<u>Tipo de Dither</u>	<u><math>f_{dp}</math></u>	<u><math>\sigma_v^2</math></u>	<u><math>\sigma_e^2</math></u>	<u>Decrecimiento del SNR (dB)</u>
Rectangular		$\frac{f^2}{12}$	$2 \times \frac{f^2}{12} = \frac{f^2}{6}$	3
Triangular		$\frac{f^2}{6}$	$3 \times \frac{f^2}{12} = \frac{f^2}{4}$	4,8
Gaussiano		$\frac{f^2}{4}$	$4 \times \frac{f^2}{12} = \frac{f^2}{3}$	6

Auditivamente, el que mejor resultado es el Dither triangular. En general, el Dither es también utilizado para almacenar señales digitales. Suelen almacenarse con mayor nº de bits para mantener el SNR luego de realizar operaciones sobre ellas.

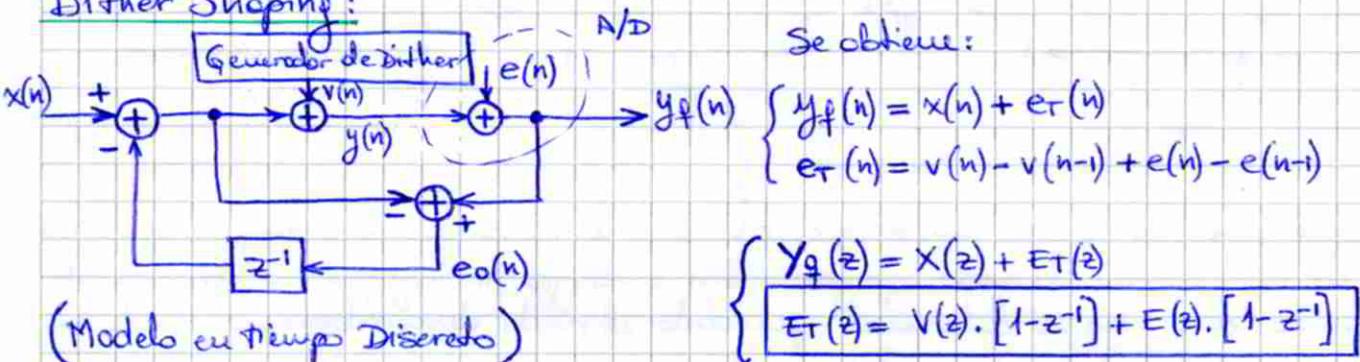
Al volver a un bajo nº de bits, se agrega dither antes de recuantizar para descorrelacionar de la señal el ruido de truncado o redondeo (según el método se utilice).

Línealización del salto de cuantificación: los amplitudes de Dither utilizadas para el Rectangular y el Gaussiano (1 LSB y  $1/2$  LSB RMS respectivamente) permiten linealizar el salto de cuantificación (en promedio), o sea: Esta es otra característica favorable del Dither.



Dither Sustitutivo:

Permite evitar la reducción del SNR al poder eliminar el dither antes ingresado. Pero requiere de una perfecta sincronización (ajuste del retraso  $z^{-n}$ ), lo cual es muy difícil, por lo cual NO ES MUY UTILIZADO.

Dither Shaping:

Puede observarse que tanto el ruido de cuantificación  $e(n)$  como el dither  $v(n)$  son afectados por una característica pasabajas. De esta forma, no sólo se evita la reducción del SNR en banda base sino que se le mejora al atenuar ambos ruidos, "ganándose" bits.

El retraso  $z^{-1}$  del loop puede ser una  $H(z)$  pasabajos, resultando también  $(1-H(z))$  una transversal pasadobos.

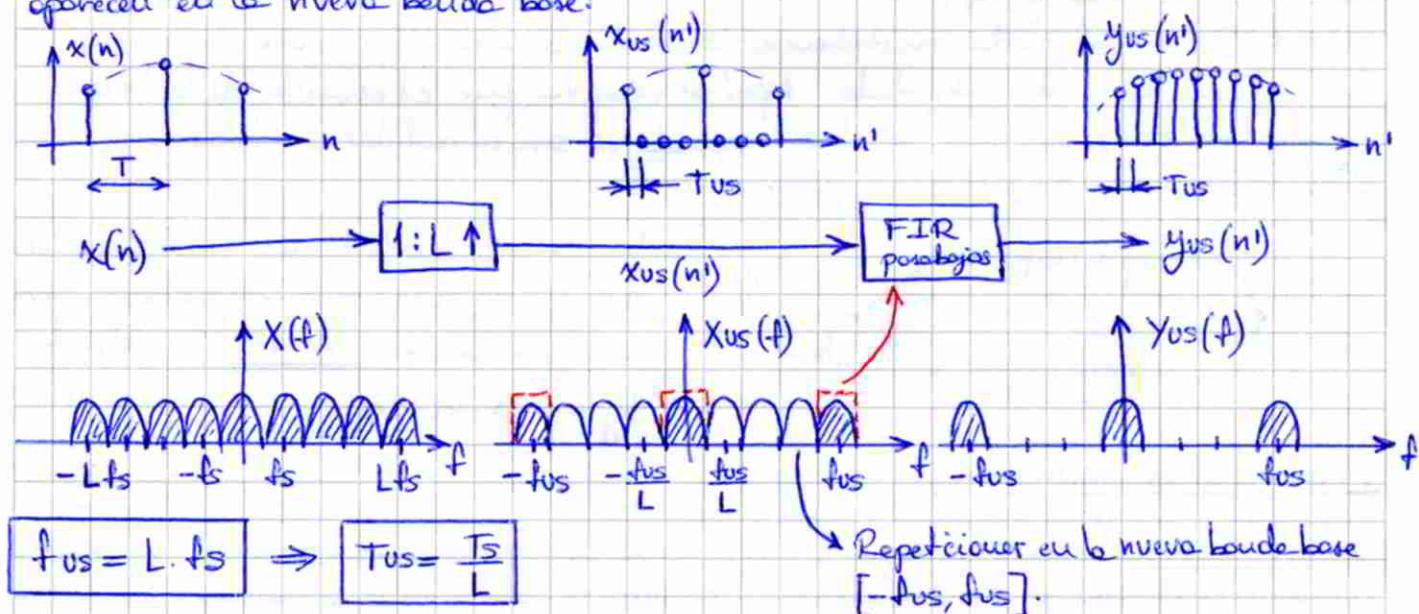


## Procesamiento de Señales Multifrecuencia: Conversión de la frec. de muestras

En muchos aplicaciones prácticas se requiere procesar señales con distintas frecuencias de muestras, por lo cual es necesario combinarlas. Dicha conversión de la fs puede realizarse de dos formas: la primera es convertir la señal a analógica y remuestreacrla, y la segunda es realizarla enteramente en el campo digital. La primera solución no siempre es factible, resulta más costosa y agrega distorsión, pero permite remuestrear a una frecuencia sin relación alguna con la fs anterior. La segunda solución evita las desventajas de la primera, pero no cuenta con este último ventaja, y es la más utilizada.

### Filtro Digital Interpolador:

La INTERPOLACIÓN consiste en elevar la frecuencia de muestras con un factor L, insertando muestras adicionales interpoladas entre los muestras originales. Para ello, en primer lugar se insertan ( $L-1$ ) ceros entre muestras de la entrada (Upsampling), y luego un filtro FIR pasabajas (interpolador) reemplaza los ceros por valores interpolados. En la frecuencia se puede ver como la eliminación de las repeticiones del espectro que aparecen en la nueva banda base.



El filtro interpolador (FIR pasabajas) opera a  $f_{us} = L \cdot fs$  y tiene como frecuencia de corte  $f_c = \frac{fs}{2} \Rightarrow W_c = \frac{\pi}{L}$  (normalizada). Truncando su respuesta impulsiva ideal a  $N = 2LM+1$  términos, se obtiene la misma como:

$$d(k') = \frac{\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi k'}{L}\right)}{\frac{\pi k'}{L}} \quad -LM \leq k' \leq LM \quad \Rightarrow y_{us}(n') = \sum_{k'=-LM}^{LM} d(k') x_{us}(n'-k')$$

En lugar de utilizar un filtro FIR de longitud  $2LM+1$  que opera a  $f_{us} = L \cdot f_s$ , es posible emplear  $L$  filtros FIR de longitud  $2M$  que operan a  $f_s$ . Estos filtros son llamados POLIFÁSICOS ya que se comportan básicamente como filtros paralelos y difieren en su fase, y permiten reducir el nº de multiplicaciones por segundo de  $N(L \cdot f_s) = NL f_s$  a  $L(2M) f_s \approx N f_s$ .

Puede escribirse:  $x_{us}(n) = \begin{cases} x(n) & \text{si } n' = nL \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$  y  $n' = nL + i, i = 0, 1, \dots, L-1$

$$y_{us}(nL+i) = \sum_{k=-M}^{LM} d(k) x_{us}(nL+i-k) = \sum_{k=-M}^{M-1} \sum_{j=0}^{L-1} d(kL+j) x_{us}(nL+i-kL-j)$$

Se define el FILTRO POLIFÁSICO DE ORDEN "j" como:  $d_j(k) = d(kL+j)$

con  $-M \leq k \leq M-1$  y  $j = 0, 1, \dots, L-1$

Por ser  $x_{us}(nL+i) = 0$  para  $i \neq 0 \Rightarrow$

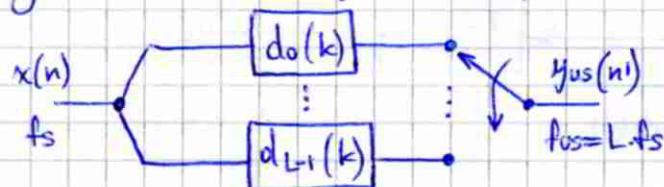
$$y_i(n) = \sum_{k=-M}^{M-1} d_i(k) x_{us}(n-k)$$

Salida del Filtro  
Polifásico de orden "i"  
en el instante "n"

El filtro polifásico de orden 0 en un caso particular, el resultado:

$$d_0(k) = d(k) = f(k) \Rightarrow y_0(n) = x(n) \Rightarrow \text{Su salida es igual a la entrada.}$$

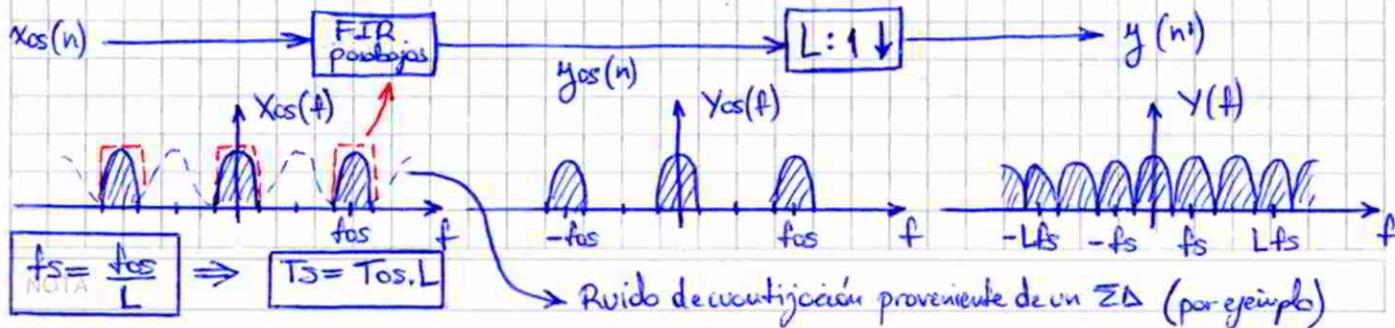
Por cada muestra de entrada  $x(n)$  a una frecuencia  $f_s$  se obtiene una salida para cada filtro polifásico  $y_i(n), i = 0, 1, \dots, L-1$ . Como se tienen "L" filtros, habrá "L" valores. Por lo cual pueden switcharse las salidas de cada filtro a una frecuencia  $L f_s$ , obteniéndose la salida interpolada. Aquí se observa que el cambio de la frecuencia de muestreo agregando ceros y el filtro parabojas son en realidad un sólo proceso, realizado en el Filtro Digital Interpolador.



La respuesta impulsiva de cada filtro polifásico  $d_j(k) = d(kL+j)$  es retroscada en un factor  $LM$  para que sea CAUSAL, resultando:  $h_j(k) = d(kL+j - LM)$

### Filtro Digital Decimador:

La DECIMACIÓN consiste en bajar la frecuencia de muestreo en un factor  $L$ . El orden de los pasos es al revés que la Interpolación: primero se toma un FIR parabojas que actúa como FAA, el cual trabaja a  $f_{os}$  (frecuencia de Oversampling, a la cual llega la entrada) y luego se baja la frecuencia de muestreo. La estructura polifásica también es viable, y se obtiene trasponiendo la del interpolador.



# ASSD ⑧

## Señales y Sistemas en Tiempo Discreto

### Señales en Tiempo Discreto:

Una señal en tiempo discreto  $x(n)$  es función de una variable  $n \in \mathbb{Z}$ . A pesar de que pueda provenir de un muestreo ideal de una señal  $x(t)$  en tiempo continuo, es INCORRECTO pensar que  $x(n)$  es nula para  $n \notin \mathbb{Z}$ , simplemente no está definida para esos valores.

### Ejemplos: Impulso Unitario

$$s(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

### Escobín Unitario

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

### Rampa Unitaria

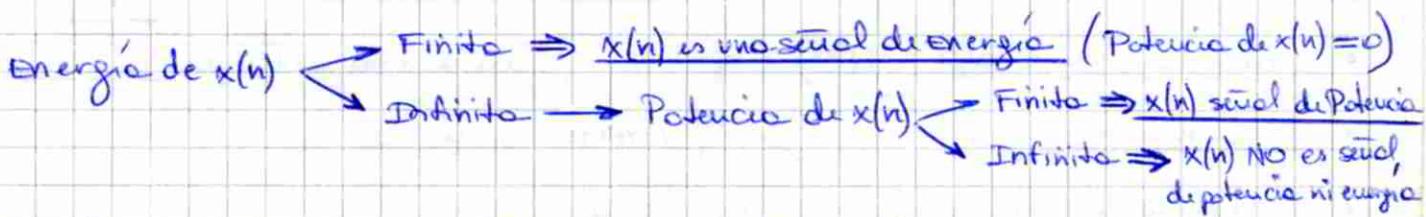
$$r(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

### Clasificación:

- Energía de  $x(n)$ :  $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$
- Potencia de  $x(n)$ :  $P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$

A partir de la energía en un intervalo finito:  $E_N = \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$

Pueden escribirse:  $E = \lim_{N \rightarrow \infty} E_N$  y  $P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} E_N$   $\xrightarrow{n \text{º de muestras en } [-N, N]}$



Puede demostrarse que si  $x(n)$  es una señal Periódica, entonces es de Potencia

### Correlación de Señales en Tiempo Discreto:

La correlación se utiliza para conocer el grado de similitud entre dos señales.

Se define la Correlación Cruzada entre dos señales  $x(n)$  e  $y(n)$ , ambas del long.  $N$ , como:

$$R_{xy} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n)$$

Si  $x$  y  $y$  son aleatorios, los productos ( $+$ ) se cancelan con los ( $-$ ) y  $R_{xy}$  da un valor bajo en mód. En cambio, si hay un grado de correlación,  $R_{xy}$  da un valor finito no nulo. Si es negativo, cuando " $x$ " aumenta, " $y$ " disminuye y viceversa.

Para que no dependa del nº de puntos tomados  $N$ , se define la Correlación Normalizada:

$$R_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n)$$

Esta definición puede arrojar un resultado nulo, aún cuando  $x$  y  $y$  estén 100% relacionadas, p.ej. si ambas son iguales y fuera de fase.

Para evitar estos casos, se resta la media de cada señal para alinearlas antes

de efectuar la correlación, pudiendo:

$$R_{xy}(l) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n-l)$$

Para secuencias infinitas no se normaliza con el  $n^o$  de puntos, y se obtiene:

$$R_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+l)y(n)$$

$x(n)$  e  $y(n)$ : señales de energía

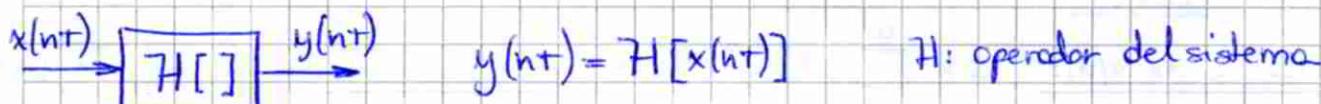
$$R_{yx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)x(n-l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n+l)x(n)$$

$R_{xy}(l) = R_{yx}(-l)$

Utilizando convolución, puede escribirse:  $R_{xy}(l) = x(l) * y(-l)$

Se define la Autocorrelación como:  $R_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n-l)$ , y puede comprobarse que:  $R_{xx}(0)$  = Energía de  $x(n)$ ,

### Sistemas en tiempo Discreto:



Existen operaciones simples que un sistema puede realizar a la entrada:

- Desplazamiento en el tiempo:  $y(nt) = x(nt-mt)$

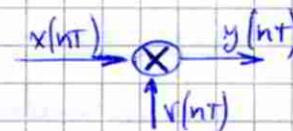
Si  $m=1$ , se conoce el operador como RETARDO UNITARIO (TAP):

- Inversión temporal:  $y(nt) = x(-nt)$  ( $t$  tiene sentido en tiempo NO REAL)

- Escalamiento temporal:  $y(nt) = x(\mu \cdot nt)$ ,  $\mu \in \mathbb{Z}$

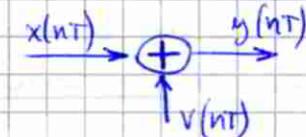
- Multiplicación por un escalar:  $y(nt) = a \cdot x(nt)$

- Multiplicación de dos secuencias:  $y(nt) = x(nt) \cdot v(nt)$



- Adición de un escalar:  $y(nt) = x(nt) + a$

- Adición de dos secuencias:  $y(nt) = x(nt) + v(nt)$



### Propiedades de los sistemas en tiempo Discreto:

- Un sistema es LINEAL si cumple el principio de SUPERPOSICIÓN, o sea:

$$H[a \cdot x_1(nt) + b \cdot x_2(nt)] = a \cdot H[x_1(nt)] + b \cdot H[x_2(nt)], \quad \forall a, b, x_1(nt), x_2(nt)$$

- Un sistema es de TIEMPO O CORRIEMIENTO INVARIANTE si la relación entre la entrada y la salida no cambia con el tiempo, o sea:

$$H[x(nt)] = y(nt) \Rightarrow H[x(nt-kT)] = y(nt-kT) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

↳ Respuesta a la  
entrada desacoplada      ↳ Salida  
desacoplada.



- Un sistema es CAUSAL si la salida en cualquier tiempo "n" depende sólo de los estados presentes y pasados, por lo cual no depende de valores futuros de los estados. O sea, si:

$$x_1(nT) = x_2(nT) \quad \forall n < k \Rightarrow H[x_1(nT)] = H[x_2(nT)] \quad \forall n < k$$

(pero, p.ej:  $x_1(nT) \neq x_2(nT) \quad \forall n > k$ )

Los sistemas en tiempo REAL (entre una muestra, salen una muestra) son causales ya que no pueden observar valores futuros de la entrada. Por otro lado, si la entrada es guardada en memoria para procesarla en tiempo NO REAL, puede implementarse un sistema no causal.

- Un sistema es INSTANTÁNEO o SIN MEMORIA si  $y(n)$  depende sólo de  $x(n)$   $\forall n$ , o sea no depende de valores pasados o futuros de la entrada. En este caso,  $y(n) = H[x(n), n]$ , o sea es una ecuación sin retardos en el tiempo.

En cambio, un sistema es DINÁMICO o CON MEMORIA si  $y(n)$  no sólo depende de  $x(n)$  en tiempo actual, sino también de sus valores pasados o futuros. En este caso el sistema puede representado por una EQUACIÓN EN DIFERENCIAS, y su orden dará el tamaño de la memoria del sistema.

Sistema Relajado: Un sistema dinámico se encuentra relajado en  $n=n_0$  si los estados detectados los retardos de tiempo del sistema son nulos para  $n=n_0$  (o sea, si es de orden N,  $y(n_0) = y(n_0-1) = \dots = y(n_0-N) = 0$ , la memoria está completa con ceros). Suelen considerarse al sistema relajado en  $n=-\infty$ , y se aplica  $x(n)$  en  $n=-\infty$  tal que  $y(n)$  depende sólo de  $x(n)$ .

### Respuesta al Impulso Unitario: Convolución Discreta

Sea un sistema LINEAL y RELAJADO, y sea su respuesta al impulso unitario:  $h(n, k) = H[\delta(n-k)]$

Escribiendo la entrada  $x(n)$  como una suma de impulsos ponderados:

$$y(n) = H[x(n)] = H\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) H[\delta(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n, k)$$

Esta es llamada Suma de Superposición. Si además el sistema es TIEMPO INVARIANTE (LTI), la respuesta al impulso retrasado en " $k$ " es la respuesta retrasada en " $k$ " al impulso, o sea:  $h(n) = H[\delta(n)] \Rightarrow h(n-k) = H[\delta(n-k)]$

Quedando:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k) h(k) = x(n) * h(n)$$

NOTA

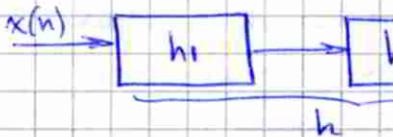
Esta es llamada Suma de Convolución o Convolución Discreta, y es una operación que cumple Asociatividad, Comunitatividad y Distributividad.

Si el sistema es CAUSAL  $\Rightarrow h(n)=0 \quad \forall n < 0$

Si además  $x(n)$  es CAUSAL  $\Rightarrow x(n)=0 \quad \forall n < 0$  (se detiene), quedando:

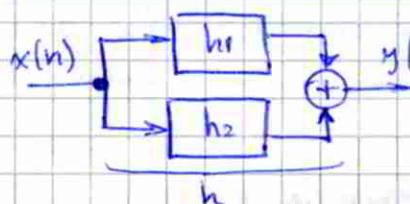
$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(k) h(n-k) = \sum_{k=0}^n x(n-k) h(k)$$

- Sistemas LTI conectados en cascada:



$$\underbrace{h(n)}_{y(n) = [h_1(n) * h_2(n)] * x(n)}$$

- Sistemas LTI conectados en paralelo:



$$\underbrace{h(n)}_{y(n) = [h_1(n) + h_2(n)] * x(n)}$$

### Estabilidad de sistemas LTI:

Un sistema LTI es BIBO-Estable  $\Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$  (Si es causal:  $\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| < \infty$ )

### Clasificación de los sistemas LTI según la duración de $h(n)$ :

• Sistemas FIR (Finite Duration Impulse Response): Su  $h(n)$  es nula fuera de un intervalo finito. Si el sistema es causal:  $h(n)=0 \quad \text{si } n < 0 \quad \text{y } n \geq M$  quedando:  $y(n) = \sum_{n=0}^{M-1} h(k) x(n-k)$ , o sea que sólo ve los últimos  $M$  muestras de la entrada, por lo cual tiene una memoria de longitud  $M$ .

• Sistemas IIR (Infinite Duration Impulse Response): Su  $h(n)$  tiene una duración infinita, por lo cual si el sistema es causal:  $y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) x(n-k)$  y el sistema tiene una memoria de longitud  $\infty$  (teóricamente).

### Sistemas en Tiempo Discreto descritos por una Ecuación en Diferencias:

En general, un sistema LTI CAUSAL puede ser descrito por la Ecuación:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (a_0=1)$$

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

Equivalentes



Si algún  $a_k \neq 0$ ,  $k \geq 1$ , entonces la salida depende no sólo de los valores presentes y pasados de la entrada, sino también de los valores pasados de la salida. Dichos sistemas son llamados RECURSIVOS y presentan, en sus diagramas en bloques, redondeaciones de la salida en la entrada con elementos de retardo. Su salida debe ser computada en orden  $[y(0), y(1), \dots]$

Si, en cambio,  $a_k = 0$   $\forall k \geq 1$ , entonces el sistema depende sólo de valores presentes y pasados de la entrada, y son llamados NO RECURSIVOS. Su salida puede ser computada en cualquier orden.

Para resolver la ecación en diferencias de un sistema RECURSIVO deben conocerse las condiciones iniciales  $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$ . El sistema estará relojado si las mismas son nulas.

La respuesta  $y(n)$  estará formada por dos partes:  $y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$ ,

- $y_{zi}(n)$  es la RESPUESTA A ENTRADA NULA y es debido sólo a condiciones iniciales, con entrada nula.
- $y_{zs}(n)$  es la RESPUESTA EN ESTADO NULO y es debido sólo a la entrada, con condiciones nulas.

A partir de la respuesta total puede reconocerse la respuesta TRANSITORIA, que tenderá a cero con  $n \rightarrow \infty$ , y la PERMANENTE, que será igual a  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{zs}(n)$ .

La respuesta de un sistema LTI calculada a partir de su respuesta al impulso utilizando la convolución es la  $y_{zs}(n)$  al considerar el sistema relojado, o sea:  $y_{zs}(n) = h(n) * x(n)$ .

### Realización de sistemas FIR e IIR:

Un sistema FIR puede realizarse mediante sistemas NO RECURSIVOS mediante sumas, productos y un nº finito de operaciones en memoria, utilizando su expresión de convolución. Puede probarse que también cualquier sistema FIR puede realizarse con sistemas RECURSIVOS, transformando su ecación en recursiva, aunque en ese caso (implícitamente) será no recursiva.

En cambio, un sistema IIR NO puede realizarse en forma no recursiva al implicar un nº infinito de operaciones y memoria. Pero una subclase de los mismos puede realizarse mediante sistemas RECURSIVOS.

En general:  $\begin{cases} \text{FIR} \Rightarrow \text{Implementación No Recursiva} \\ \text{IIR} \Rightarrow \text{Implementación Recursiva} \end{cases}$

### Respuesta en Frecuencia de Sistemas en Tiempo Discreto:

Sea un sistema LTI RELACIONADO, puede hallarse la respuesta a las entradas:  $x(nT) = e^{jn\omega T}$  conociendo:  $h(n) = H[f(n)]$ :

$$y(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{j(n-k)\omega T} = e^{jn\omega T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-jk\omega T} = x(nT) H(e^{j\omega T})$$

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-jk\omega T}$$

( $x(nT)$  es una senoidal aplicada en  $n=-\infty$ , no hay transitorio).

Respuesta en Frecuencia del sistema.

Puede verificarse que  $H(e^{j\omega T})$  cumple ciertas propiedades de periodicidad y simetría. Los mismos provienen de considerar a  $h(n)$  como una señal resultante del muestreo de una señal en tiempo continuo, y, viéndola en tiempo continuo, aplicarle la Transformada de Fourier en Tiempo Continuo (CTFT ó FT).  $H(e^{j\omega T})$  dará la respuesta PERMANENTE del sistema.

Para señales en tiempo discreto como la  $h(n)$ , la Transformada de Fourier está generalizada por la siguiente definición:

### Transformada de Fourier en Tiempo Discreto (DTFT):

Sea  $x(n) / \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$ , se define como:

$$X(e^{j\omega}) = \text{FT} \{ x(n) \} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\omega n} \quad \text{y la Antitransformada como:}$$

$$x(n) = \text{FT}^{-1} \{ X(e^{j\omega}) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega n} d\omega$$

Quedando:

$$H(e^{j\omega}) = \text{FT} \{ h(n) \}$$

A período de muestreo  $T$  no es necesario considerarlo, pero si se desea trabajar con valores de tiempo y frecuencia absolutos (no normalizados):

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-jn\omega n T} \quad \text{y} \quad x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(e^{j\omega T}) e^{jn\omega n T} d\omega$$

### Propiedades:

- $X(e^{j\omega T})$  es PERIODICA DE PERÍODO  $W_S = \frac{2\pi}{T}$ , definiendo las frecuencias posibles del sistema entre  $-\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$  (si  $T=1$ , el período es  $W_S = 2\pi$  y  $-\pi \leq \omega \leq \pi$ )
- Cumple las mismas propiedades de simetría que la CTFT. Entre otras, si  $x(n)$  es real:

$$X(e^{j\omega T}) = X^*(e^{-j\omega T}) \Leftrightarrow \begin{cases} |X(e^{j\omega T})| = |X(e^{-j\omega T})| \Rightarrow \text{Función PAR en } \omega \\ \Theta(\omega) = -\Theta(-\omega) \Rightarrow \text{Función IMPAR en } \omega. \end{cases}$$

NOTA:  $X(e^{j\omega T}) = |X(e^{j\omega T})| e^{j\Theta(\omega)}$



## Transformada Z

La Transformada Z es para los sistemas discretos como la de Laplace para los sistemas tiempo continuo. La DTF, al igual que la CTF, no permiten contemplar las condiciones iniciales del sistema, y no existen para ciertas funciones (p.ej.,  $u(n)$ ), por lo que se utiliza la Transformada Z.

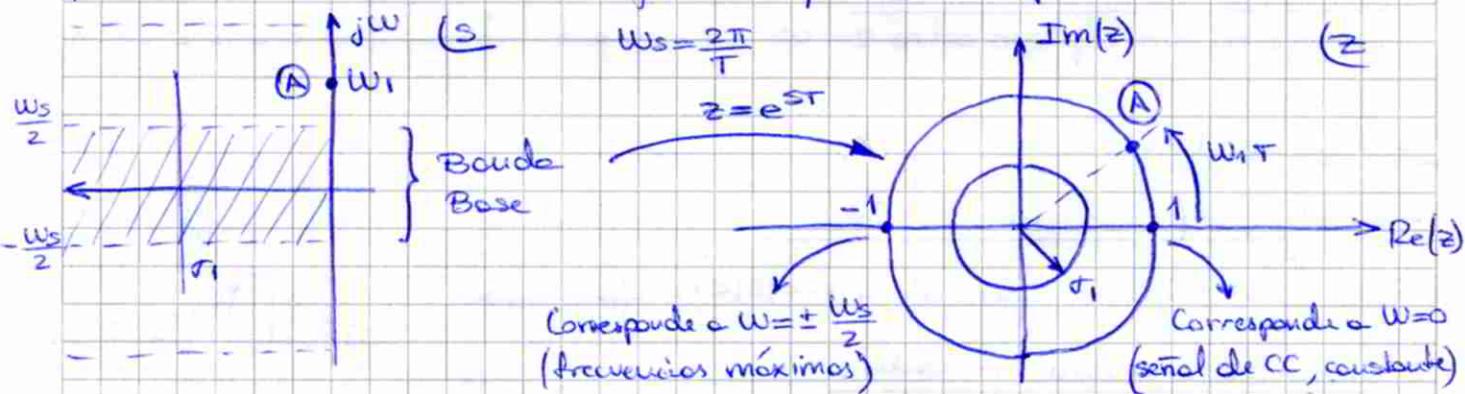
Se define la Transformada Z Bilateral como:

$$X(z) = z \{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Puede interpretarse como aplicar la transformada de Laplace a la señal en tiempo continuo que coincide con  $x(n)$ , obtenida del muestreo  $x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)s(t-nT)$  quedando  $X_s(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)s^{-nT}$  y cambiando  $s \leftrightarrow z$ . Permite obtener funciones racionales en  $z$ .

## Relación entre el plano S y el plano Z:

Considerando  $s = \sigma + jw$ , el cambio de variable  $e^{sT} \leftrightarrow z$  representa una transformación del plano S al Z, quedando  $z = e^{(\sigma+jw)T} = e^{\sigma T}e^{jwT}$ . No representa una transformación punto a punto, sino que es multiforma.



- El eje  $jw$  se transforma en la circunferencia unitaria  $|z|=1$

Este corresponde a los senoides puros, y permite calcular la respuesta en frecuencia del sistema cambiando  $z \leftrightarrow e^{jwT}$ , obteniendo la DTF de la respuesta impulsiva del sistema. Para una señal en general:

$$X(e^{jwT}) = X(z)|_{z=e^{jwT}} \quad \text{y en particular para: } H(z) = z \{h(nT)\} \Rightarrow H(e^{jwT}) = H(z)|_{z=e^{jwT}}$$

- La zona donde deben estar las singularidades de la transformada de un sistema para que sea estable se transformó de  $\operatorname{Re}(s) < 0$  a  $|z| < 1$  (sistema causal)
- Variar la frecuencia sobre el eje  $jw$  en una cantidad igual a  $w_s$  corresponde a dar un giro alrededor de la circunferencia  $|z|=1$ . De ahí la periodicidad de  $H(e^{jwT})$ , ya que luego los valores se repiten.

## Zona de Convergencia de la Transformada Z Bilateral:

Sea una señal en tiempo discreto  $x(n)$  y sea  $X(z) = \sum x(n)z^{-n}$ . Observando a  $X(z)$  como una función de variable compleja, la definición como transformada Z corresponde a un desarrollo en serie de Laurent de la misma centrado en el origen. Esta serie es convergente en un anillo sobre el cual representa a  $X(z)$ , y es única en ese anillo. Sin embargo  $X(z)$  puede tener distintos desarrollos en serie alrededor del origen según diferentes anillos de convergencia dados, y representar distintas señales  $x(n)$ . Por ello, según las características de  $x(n)$ , puede existir correspondencia con su transformada Z no sea biúnica, pero si lo es considerando la región de convergencia (ROC).

### Sequencias Finitas:

Sea  $x(n) \neq 0$  para  $n_1 \leq n \leq n_2$ , entonces  $X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n}$  y será convergente  $\forall z$  salvo  $z=\infty$  ( $\Leftrightarrow n_1 < 0$ ) y  $z=0$  ( $\Leftrightarrow n_2 > 0$ ).

- $n_1 < 0$  y  $n_2 > 0$  (no causal o two-sided):

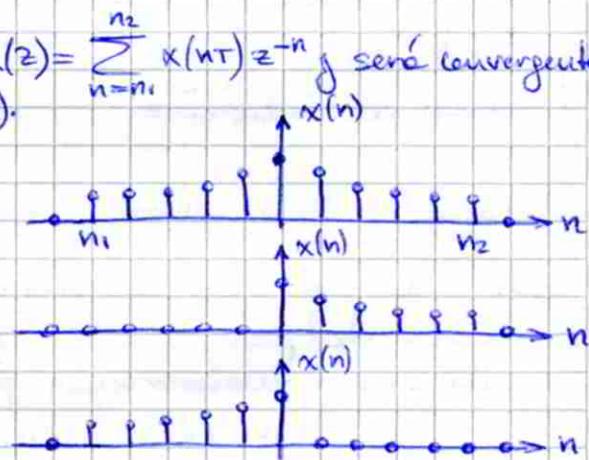
Converge en todo el plano salvo  $z=0$  y  $z=\infty$

- $n_1 \geq 0$  y  $n_2 > 0$  (causal):

Converge en todo el plano salvo  $z=0$

- $n_1 < 0$  y  $n_2 \leq 0$  (anticausal):

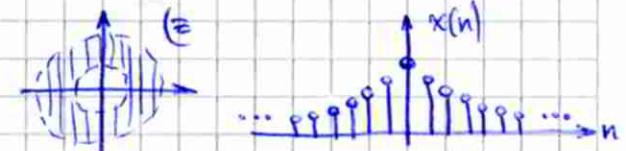
Converge en todo el plano salvo  $z=\infty$



### Sequencias Infinitas:

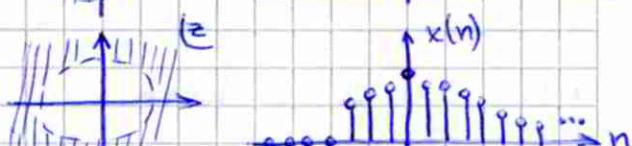
- Bilaterales (no causales o two-sided):

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (\text{convergen en } r_1 < |z| < r_2)$$



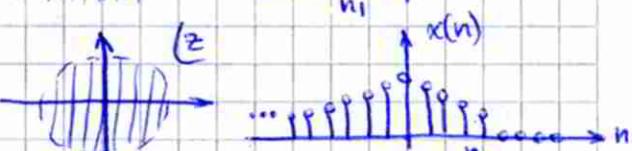
- Unilaterales Derechos (causales):

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (\text{convergen en } r_1 < |z|)$$



- Unilaterales Izquierdos (anticausales):

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n} \quad (\text{convergen en } |z| < r_2)$$



### Estabilidad y Causalidad: Son atributos INDEPENDIENTES

- Un sistema LTI con  $H(z) = \sum h(n)z^{-n}$  es BIBO-ESTABLE  $\Leftrightarrow$  la zona de convergencia de  $H(z)$  contiene a la circunferencia unitaria (puede tener polos con módulos  $> 1$  ó  $< 1$ ).

- Un sistema LTI con  $H(z) = \sum h(n)z^{-n}$  (o una señal con  $X(z) = \sum x(n)z^{-n}$ ) es CAUSAL  $\Leftrightarrow H(z)$  ( $\text{o } X(z)$ ) converge para  $z=0$  (seguencias unilat. derechos con  $n_1 > 0$ )

- Un sistema LTI CAUSAL es BIBO-ESTABLE  $\Leftrightarrow$  todos los polos de  $H(z)$  se encuentran dentro de la circunferencia unitaria.





## Función Transferencia:

Sea un sistema LTI CAUSAL representado por la Ecuación en Diferencias:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (a_0=1) \quad \text{puede obtenerse rápidamente la}$$

Función Transferencia  $H(z) = z \{ h(nz) \}$  considerando el sistema RELATIVO, aplicando Transformada Z:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

- Si  $a_k = 0 \forall k \geq 1$ , el sistema es NO RECURSIVO y FIR. Tendrá M ceros no triviales y M polos triviles en el origen. Siempre son estables y también son llamados MA (Moving Average) y All zero Filters.
- Si  $b_k = 0 \forall k \geq 1$ , el sistema es RECURSIVO y IIR pero sólo depende de la entrada actual y las salidas anteriores. Tendrá N polos no triviales y N ceros triviles en el origen. Son llamados AR(Auto Regressive) y All Pole Filters.
- Si  $a_k \neq 0, 1 \leq k \leq N$  y  $b_k \neq 0, 1 \leq k \leq M$ , el sistema es RECURSIVO y IIR y posee M ceros y N polos no triviales. Son también llamados ARMA (Auto Regressive Moving Average), al ser una combinación de los otros dos casos.

## Transformada Z Unilateral:

Se define la Transformada Z Unilateral o Causal como:

$$X^+(z) = Z^+ \{ x(nT) \} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}$$

Sus propiedades son:

- No contiene información de la función para  $n < 0$  (pero sí condiciones iniciales)
- Es única para funciones causales ( $Z$  Bilateral  $\equiv$   $Z$  Unilateral)
- La región de convergencia es siempre exterior a un círculo de radio  $R$ .

## Respuestas a Entrada Nula y en Estado Nulo de un sistema:

Sea un sistema LTI CAUSAL, la respuesta EN ESTADO NULO viene dada por:

$$Y_{zs}(z) = H(z) \cdot X(z), \quad \text{al ser obtenida con el sistema RELATIVO.}$$

La respuesta A ENTRADA NULA es obtenida como:  $Y_{zi}(z) = H(z) \cdot X_{ic}(z)$ ,

donde  $X_{ic}(z)$  es la entrada equivalente de condiciones iniciales que genera  $Y_{zi}(z)$ .

Teatrero del Valor Inicial:

Siendo  $X(z) = x(0) + \sum_{n=1}^{\infty} x(n)z^{-n} \Rightarrow x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X^+(z)$  donde  $x(z)$  es la transformada  $z$  Unilateral de  $x(n)$ .

Teatrero del Valor Final:

Si el transformado  $z$  Unilateral de  $x(n)$  tiene sus poles dentro del círculo unitario  $\Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n)z^{-n} = \lim_{z \rightarrow 1^-} (1-z^{-1})X^+(z)$$

Transformados Importantes: (Unilaterales y Bilaterales)

- $\alpha x(nT) + \beta y(nT) \Leftrightarrow \alpha X(z) + \beta Y(z), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$  sumo los muestras que agregué
- $x(nT - noT) \Leftrightarrow z^{-no} X(z) + z^{-no} \sum_{m=-no}^{-1} x(mT)z^{-m}, no > 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{solo para} \\ \text{Unilaterales} \end{array} \right\}$
- $x(nT + noT) \Leftrightarrow z^{no} X(z) - z^{no} \sum_{m=0}^{no-1} x(mT)z^{-m}, no > 0$
- $a^n x(nt) \Leftrightarrow X\left(\frac{z}{a}\right), a \neq 0$
- $(x * y)(nt) \Leftrightarrow X(z) \cdot Y(z)$
- $n^k x(nt) \Leftrightarrow \left(-z \frac{d}{dz}\right)^k X(z)$

Además:

- $f(n) \Leftrightarrow 1 \quad f(n-no) \Leftrightarrow z^{-no}, no \in \mathbb{Z}$
- $u(n) \Leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}, |z| > 1$
- $\alpha^n u(n) \Leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{z}{z-\alpha}, |z| > |\alpha|, \alpha \in \mathbb{C} \neq 0 \quad (-1)^n x(nT) \Leftrightarrow X(-z)$
- $n \alpha^n u(n) \Leftrightarrow \frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2} = \frac{\alpha z}{(z-\alpha)^2}, |z| > |\alpha|$

Transformado Importante: Inversión en el tiempo (Bilaterales)

$$\bullet x(-nt) \Leftrightarrow X(z^{-1})$$

Es útil cuando se desea hallar una  $h(n)$  no causal a partir de una  $H(z)$  dada. Se hace el desarrollo de  $H(z)$  en la zona no causal y aparecerán potencias positivas de  $z$ . Con este propósito se invierte  $z \rightarrow z^{-1}$ , se obtiene una transformada  $z$  conocida, se antitransforma obteniendo  $h(-n)$  y se vuelve a invertir  $-n \rightarrow n$ .

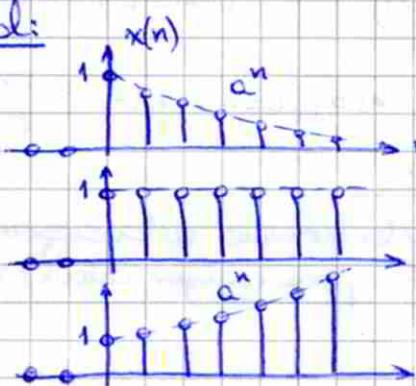
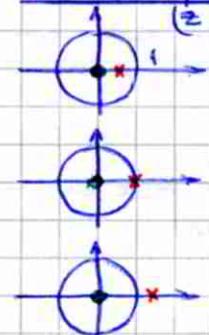
$$\bullet \operatorname{sen}(bnt)u(n) \Leftrightarrow \frac{\sin(bt)z^{-1}}{1-2\cos(bt)z^{-1}+z^{-2}} \quad \bullet \cos(bnt)u(n) \Leftrightarrow \frac{1-\cos(bt)z^{-1}}{1-2\cos(bt)z^{-1}+z^{-2}}$$



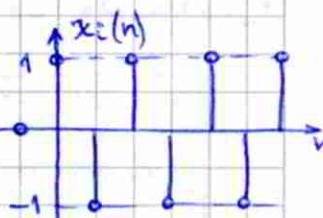
## Comportamiento en el tiempo de señales causales a partir de la Ubicación de polos:

Sea  $x(n)$  una señal causal (que puede ser la  $h(n)$  de un sistema causal), puede determinarse su comportamiento en el tiempo a partir de la ubicación de los polos de su transformada  $Z$ .

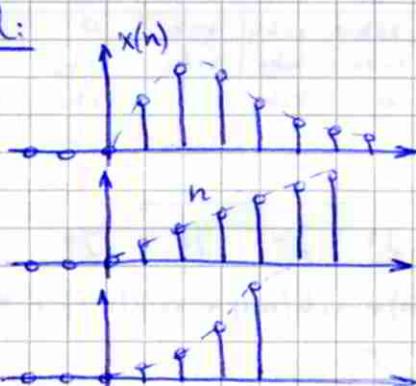
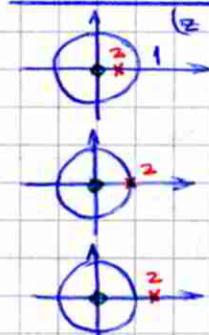
### • Polo simple real:



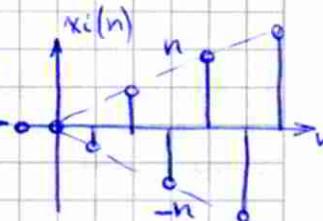
$$x(n) = a^n u(n) \Leftrightarrow X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$



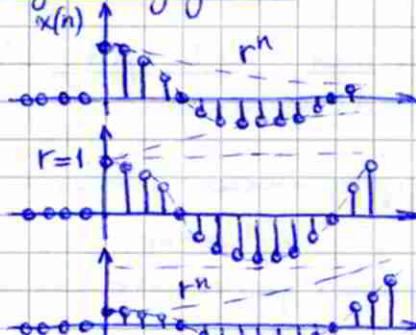
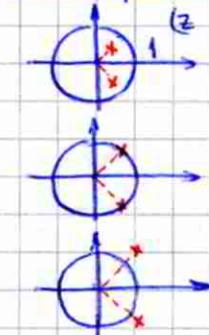
### • Polo doble real:



$$x(n) = n \cdot a^n u(n) \Leftrightarrow X(z) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$$



### • Dos polos complejos conjugados:



Cosenoidal Amortiguada  
(decrece con  $r^n$ )

Cosenoidal (oscilador)

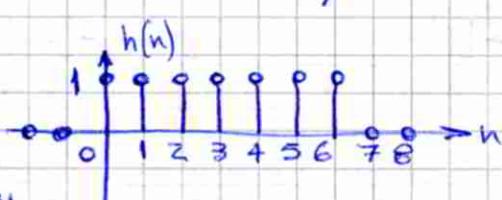
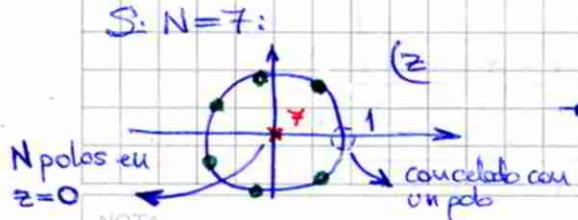
r: Modulo polo

Cosenoidal Creciente  
(crece con  $r^n$ )

### • Ventana rectangular: (Filtro FIR)

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k) \quad \left( h(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \right) \Rightarrow H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} z^{-k} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

S:  $N=7$ :



NOTA  
N polos en  
 $z=0$



## Métodos de Convolución por Bloques:

Cuando se desea procesar una señal en tiempo real, la misma es tratada por bloques de muestras luego de almacenada en memoria. Una aplicación típica es el procesamiento con filtros FIR. La convolución puede realizarse con distintos métodos:

- Forma Directa:  $y(n) = \sum_m h(m)x(n-m)$

$x$ : L muestras ( $0 \leq n \leq L-1$ )  $\Rightarrow 0 \leq m \leq M$   
 $h$ : M+1 muestras ( $0 \leq m \leq M$ , FIR de orden M)  $\Rightarrow 0 \leq n-m \leq L-1$

$$\text{Long}(y) = L+M \text{ muestras}$$

$$\Rightarrow \max(0, n-L+1) \leq m \leq \min(n, M)$$

Para cada " $n$ ", varía " $m$ " entre la sumatoria entre estos valores para hallar  $y(n)$ .

- Tabla de Convolución:  $y(n) = \sum_{\substack{i,j \\ i+j=n}} h_i x_j$ ,  $0 \leq n \leq L+M-1$

$x_0$	$x_1$	$x_2$	$n=0$
$h_0$	$h_0x_0$	$h_0x_1$	$h_0x_2$
$h_1$	$h_1x_0$	$h_1x_1$	$h_1x_2$
$h_2$	$h_2x_0$	$h_2x_1$	$h_2x_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

La suma de los términos de los diagonales permite obtener  $y(n)$ . Es muy útil para realizar cálculos a mano.

- Forma LTI: Se basa en la definición de convolución por superposición.

$$x = [x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$$

$$h = [h_0, h_1, h_2, h_3]$$

$x \setminus h$	$h_0$	$h_1$	$h_2$	$h_3$	0	0	0	0
$x_0$	$x_0h_0$	$x_0h_1$	$x_0h_2$	$x_0h_3$	0	0	0	0
$x_1$	0	$x_1h_0$	$x_1h_1$	$x_1h_2$	$x_1h_3$	0	0	0
$x_2$	0	0	$x_2h_0$	$x_2h_1$	$x_2h_2$	$x_2h_3$	0	0
$x_3$	0	0	0	$x_3h_0$	$x_3h_1$	$x_3h_2$	$x_3h_3$	0
$x_4$	0	0	0	0	$x_4h_0$	$x_4h_1$	$x_4h_2$	$x_4h_3$

La suma de los elementos de cada columna permite obtener  $y(n)$ .

$$y(n) = x_0 h(n) + x_1 h(n-1) + x_2 h(n-2) + x_3 h(n-3) + x_4 h(n-4)$$

- Forma Matricial:

$$\vec{y} = H \cdot \vec{x}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 \\ 0 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \\ 0 & 0 & h_3 & h_2 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & h_3 & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

$\vec{y}$ : vector columna de long.  $L+M$

$H$ : matriz  $(L+M) \times L$

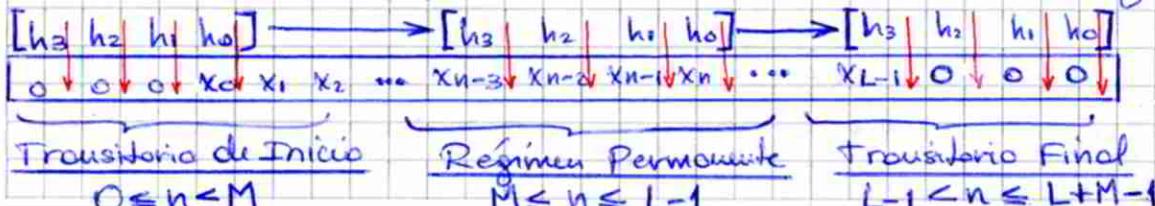
$\vec{x}$ : vector fila de long.  $L$

Es una matriz de Toeplitz al ser los elementos a lo largo de las diagonales iguales.

Una representación similar es:  $\vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{h}$ , donde  $\vec{y}$  y  $\vec{h}$  son los vectores  $y(n)$  y  $h(n)$ , y  $\vec{x}$  se escribe igual que  $H$  pero con  $x(n)$ , y  $\vec{h}$  es una matriz de  $(L+M) \times (M+1)$ .

- Convolución Gráfica:

Se invierte la secuencia de menor longitud y se la desliza sobre la otra, realizando en cada posición los productos de los respectivos componentes y sumando.





## Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Si se desea realizar análisis en frecuencia de una señal en tiempo discreto  $x(n)$  en una PC o DSP, la DTFT  $X(w)$  de  $x(n)$  no es una representación conveniente al ser una función continua, por lo que no puede almacenarse en memoria. Por lo tanto se procede a tomar muestras del espectro  $X(w)$ , lo que lleva a la Transformada Discreta de Fourier (DFT).

Sea la señal  $x(t)$  en tiempo continuo, el procedimiento es el siguiente:

1) Muestreo en el dominio del tiempo:  $x^*(t) = x(t) \cdot f_t(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nt) f_t(t-n)$

La señal continua  $x(t)$  no puede almacenarse en memoria, por lo que se la muestrea

2) Truncado en el dominio del tiempo:  $x_w^*(t) = x^*(t) \cdot w(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nt) f_t(t-n)$

Por otro lado, la memoria es finita, por lo que debe truncarse la señal muestreada a "N" muestras. Si "T" es el período de muestreo en el tiempo, entonces

la ventana estará dada por:  $w(t) = \begin{cases} 1 & -T/2 < t < T/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$  con,  $T_0 = NT$  (ANCHO VENTANA)

3) Muestreo en el dominio de la frecuencia:

El espectro de  $x_w^*(t)$  es continuo, por lo que debe ser muestreado para poder almacenarse en memoria. El muestreo en la frecuencia producirá una repetición periódica de los muestras temporales, por lo que tanto el espectro (es periódico por el muestreo temporal) como la señal temporal quedarán periódicos.

Lo más razonable es elegir una separación en el fren de  $f$  para muestrear en frecuencia,  $f_i(w)$ , igual a  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ , de tal forma que las repeticiones temporales quedan una al lado de la otra. Si es menor, se superpondrán y habrá Aliasing Temporal. Si es mayor, habrá entre ellos espacios en blanco.

Muestrear en la frecuencia con este fren de  $f$  es como convolucionar en el tiempo con otro fren de  $f$ ,  $f_i(t)$ , separados en  $T_0$ :

$$\tilde{x}(t) = x_w^*(t) * f_i(t) = \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x(nt) f_t(t-n) \right] * \left[ T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} f(t-rT_0) \right]$$

Repite la serie de muestras Genera los muestras

Antitransformada de:  $\sum_{r=-\infty}^{\infty} f(t-r\frac{2\pi}{T_0})$

$$\tilde{x}(t) = T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x(nt) f(t-nT_0-rT_0) \right]$$

NOTA

$$f_i(t)$$

$$f_i(w)$$

Los líneas espectrales buscadas serán los coeficientes de la Serie de Fourier de  $\tilde{x}(t)$  (en una señal periódica), de los cuales se podrá obtener la Transformada de Fourier de  $\tilde{x}(t)$  separándolos periódicamente cada  $W_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ .

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{j k \omega_0 t} \quad F_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) e^{-j k \omega_0 t} dt = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j k \frac{2\pi}{N} nT}$$

$$\omega_0 T = \frac{2\pi}{T_0} T = \frac{2\pi}{N T} T = \frac{2\pi}{N} \Rightarrow F_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}$$

Quedando:  $\tilde{X}\left(\frac{k}{NT}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \right] f(W - k\omega_0) = F^{-1}\{\tilde{x}(t)\}$

Puede verificarse que  $F_k$  es periódica de período  $N$ , y que tiene  $N$  valores distintos dentro del período de repetición. Por lo cual se tendrán "N" muestras distintas de la señal temporal, y "N" muestras distintas del espectro.

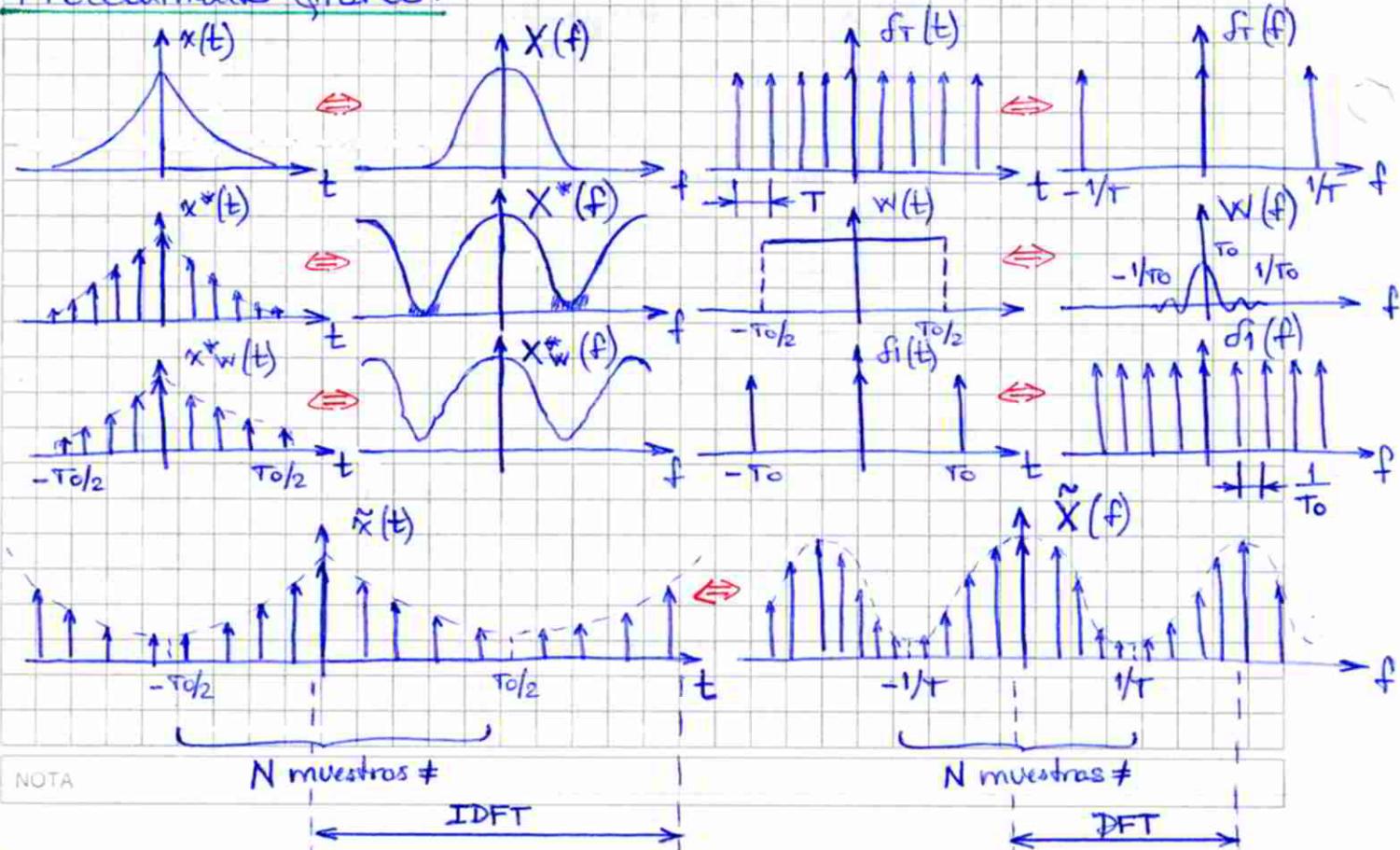
Se define entonces la Transformada Discreta de Fourier (DFT) de  $x(n)$  como:

$$X\left(\frac{k}{NT}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad X\left(\frac{k+rN}{NT}\right) = X\left(\frac{k}{NT}\right), \quad r \in \mathbb{Z}$$

y la Transformada Inversa Discreta de Fourier (IDFT) de  $X\left(\frac{k}{NT}\right)$  como:

$$x(nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{k}{NT}\right) e^{j \frac{2\pi}{N} nk} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad x(nT) = x(nT + rNT), \quad r \in \mathbb{Z}$$

Procedimiento Gráfico:

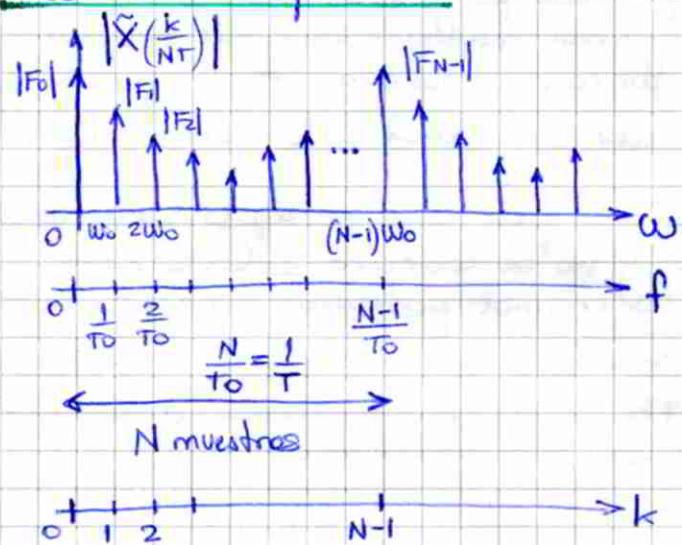


Cabe destacar que, dado  $x(n)$  de  $N$  muestras, no es necesario conocer el período de muestreo  $T$  para el cálculo de  $X(k)$ , sólo se lo necesita para referencia absoluta de frec. y tiempo.

La señal  $x(t)$  estará acotada en banda, pero de todos formas habrá un cierto grado de Aliasing Espectral al muestrearlo. Por otro lado, el espectro de la ventana (en este caso es una Ventana Rectangular, será una sinc) producirá una cierta deformación en el espectro de la señal truncada.

Para poder recuperar la señal  $x(n)$  ( $x(t)$  en tiempo discreto) a partir de la señal  $\tilde{x}(n)$  ( $\tilde{x}(t)$  en tiempo discreto) no debe haber Aliasing Temporal, para lo cual debe asegurarse que dentro de los  $N$  muestras entran todas las muestras de  $x(n)$ .

### Resolución Espectral:



$$\text{Resolución Espectral} = \frac{1}{T_0}$$

$$\text{Se obtiene: } N \cdot T = T_0$$

$N$ : n° de muestras de la señal y del espectro guardadas en memoria

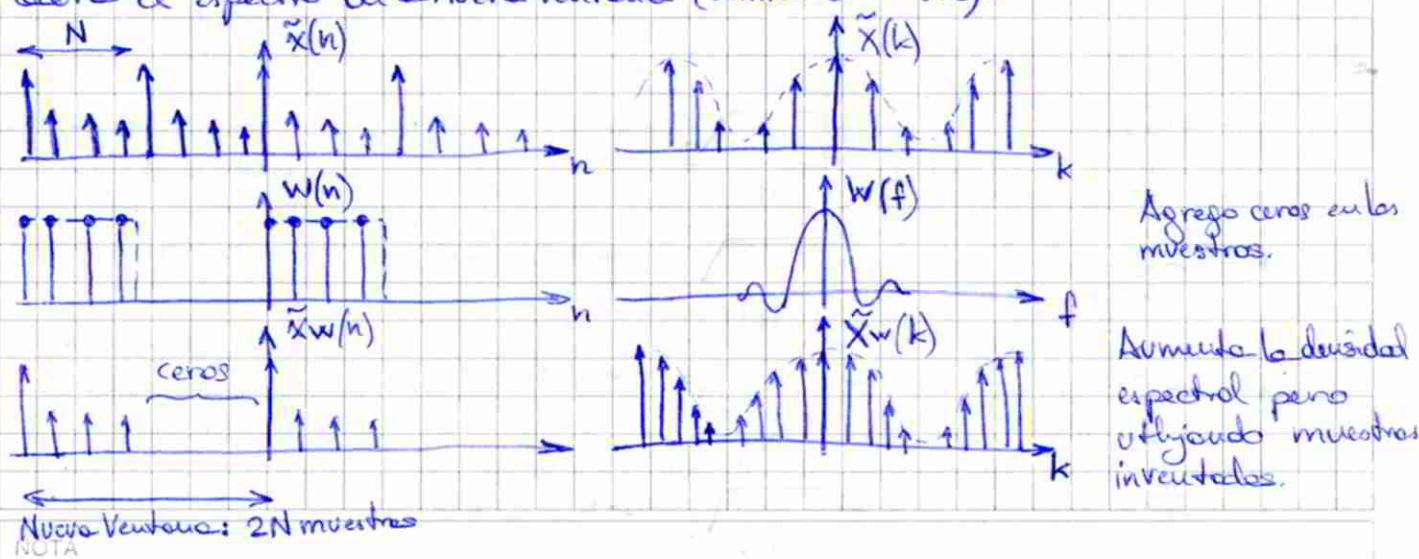
$T$ : período de muestreo de la señal temporal

$T_0$ : ancho de la ventana de truncado

Si se desea incrementar la resolución espectral debe aumentar  $T_0$ , para lo cual debe aumentar  $N$  y/o  $T$ . Pero están limitados por:

- $N$  está limitado por el tamaño de la memoria
- $T$  está limitado por Nyquist.

Existe la posibilidad de aumentar el tamaño de la ventana utilizando el mismo n° de muestras de la señal temporal y agregando ceros. Este método es llamado Zero Padding y no modifica el espectro de la señal original, sino que corrige muestras adicionales entre las originales utilizando como función interpoladora el espectro de la nueva ventana (similar a una sinc).



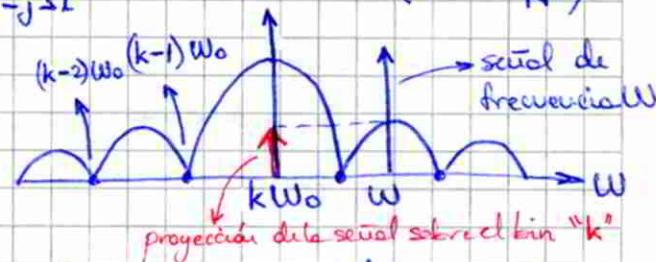
## Uso de ventanas en la DFT:

los posiciones discretas de frecuencia ( $0, \omega_0, 2\omega_0, \dots, (N-1)\omega_0$ , ó  $0, 1, 2, \dots, N-1$  para "k") son llamados BINES. Puede verificarse que si se ingresa a la DFT con una secuencia senoidal pura:  $x(nT) = e^{j\omega nT}$ , la respuesta de la DFT a la misma es:  $X(k) = \frac{1 - e^{-j\frac{N\Omega}{2}}}{1 - e^{-j\frac{\Omega}{2}}}$  donde  $\Omega = -(\omega T - \frac{2\pi k}{N})$

Se obtiene:  $|X(k)| = + \frac{\operatorname{sen}(\frac{\Omega N}{2})}{\operatorname{sen}(\frac{\Omega}{2})}$

Transformada de la ventana rectangular

Es SIMILAR a la sinc, con ceros cada  $\Omega = \frac{2\pi}{N}$ , es sea en múltiplos de  $\omega_0$ . Es como una sinc periódica.



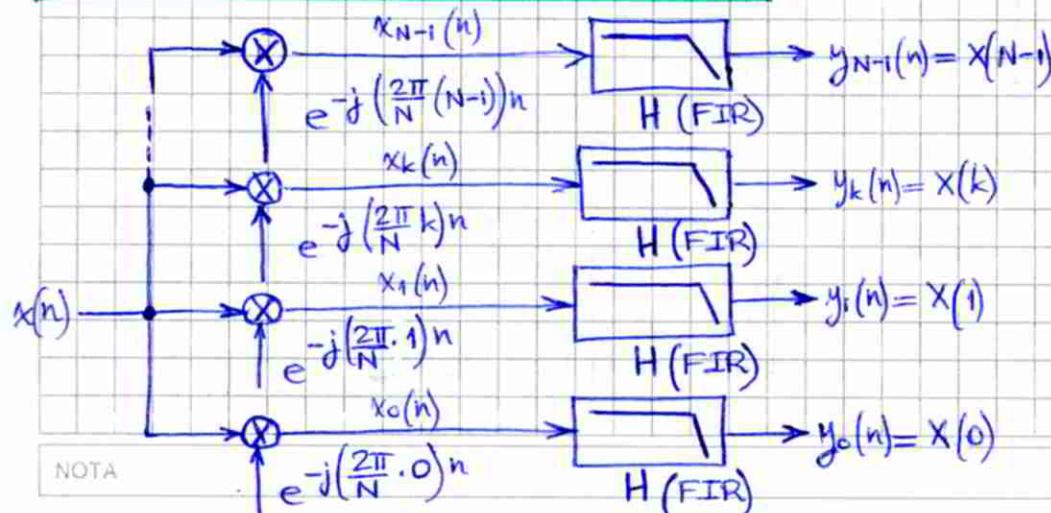
Si una señal de frecuencia  $w = k\omega_0$  es procesada por la DFT, al caer en la misma frecuencia que el BIN "k" tiene sólo proyección resultante sobre este BIN, al ser su proyección en los demás BINES nula por caer en sus ceros. Esto equivale a decir que entró un  $n^o$  entero de períodos de la señal en la ventana  $T_0$ .

En cambio, si la señal tiene una frecuencia que no es múltiplo entero de  $\omega_0$ , tendrá proyecciones en todos los BINES y no se conservará si los armónicos resultantes a frecuencias distintas de los original pertenecen o no a la señal.

Esto es llamado Fuga Espectral y se debe a que no entró un  $n^o$  entero de períodos de la señal en la ventana  $T_0$ , y el recorte brusco de la señal introduce componentes a otras frecuencias.

Una forma de reducir este error es utilizando ventanas con caída gradual, que no cortan en forma abrupta la señal, de tal forma que espectralmente sus lóbulos laterales sean más bajos y sea menor la proyección de la señal en los BINES no correspondientes. Estas ventanas (p ej. Hanning, Bartlett, Hamming, Blackman) dejan aparejado el ensanchamiento del lóbulo principal y la reducción en la selectividad de la DFT. Además, como las ceros desaparecen en frecuencias que no caen en los otros bins como la rectangular, si  $w = k\omega_0$  habrá igual Fuga Espectral.

## La DFT como un banco de filtros:



Esta es una forma gráfica de ver a la DFT como un analizador de espectro, donde cada canal representa una componente espectral (amplitud de un BIN).



La idea es que en cada canal "k", el resultado de la modulación y de atravesar el filtro pasabajas, de una señal  $y_k(n) = X(k) \forall$  instante "n". Idealmente, este filtro pasabajas dejaría pasar solamente la continua (resultado de la modulación entre la componente de frecuencia "k" de  $x(n)$  y  $e^{-j(\frac{2\pi}{N}k)n}$ ) y eliminaría las demás frecuencias (resultado de la modulación entre la componente de frecuencia "k" de  $x(n)$  y los demás osciladores).

Como el pasabajas ideal no existe, se utiliza otra implementación. La misma presenta un FILTRO FIR NO RECURSIVO con respuesta al impulso igual a una ventana rectangular de ancho  $L=N$  muestras, que presentará ceros de transmisión en las frecuencias múltiples a eliminar:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k) \Rightarrow H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} z^{-k} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right) - j\sin\left(\frac{\omega(N-1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

Si se ingresa al sistema con una señal periódica de período  $N$  muestras dada por:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X(l) e^{j\left(\frac{2\pi}{N}l\right)n} \quad (\text{Representación dada por su IDFT})$$

La salida de cada filtro "k" (todos con igual  $H(e^{j\omega})$ ) responderá a la señal modulada:

$$x_k(n) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X(l) e^{j\frac{2\pi}{N}(l-k)n} \Rightarrow y_k(n) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X(l) e^{j\frac{2\pi}{N}(l-k)n} \cdot H(e^{j\frac{2\pi}{N}(l-k)n})$$

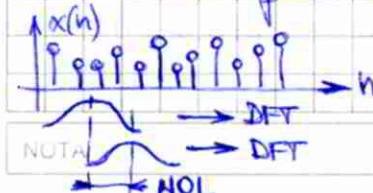
Puede verificarse:  $H(e^{j\frac{2\pi}{N}(l-k)n}) = \begin{cases} N & l=k \\ 0 & l \neq k \end{cases} \Rightarrow y_k(n) = X(k) \forall n$

### Señales de longitud infinita: Espectrogramas

Si la señal es de longitud infinita o muy larga, no puede realizarse la DFT de la misma completa, por lo cual se toman segmentos de la señal a los que se le realiza la DFT. Esto puede observarse como una ventana que se desliza sobre  $x(n)$ , y en cada desplazamiento se obtiene la DFT de la parte de la señal bajo esa ventana.

La ventana puede realizarse con un filtro FIR y puede responder a cualquier tipo deseado para controlar la fuga espectral.

Según la aplicación, puede variarse el desplazamiento de la ventana según el nº de muestras que una ventana comparte con la precedente. Este % del total es:



Llamado Sobrepiniente u Overlapping (NOL) y permite garantizar que no se pierden eventos cortos que puedan caer en los bordes de la ventana (usualmente es del 50 ó 75 %).

Para poder representar el resultado de los sucesivos DFT's se utiliza el Especrograma; que tiene como ejes la frecuencia y el tiempo y representa con colores los valores de amplitud a cada frecuencia y en cada instante.

## Propiedades de la DFT:

### Forma matricial:

Si se define el Factor de Anotación  $W_N \triangleq e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ , la DFT de una secuencia  $x(n)$  de  $N$  muestras puede escribirse como:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \Rightarrow \vec{X} = W_N \cdot \vec{x}$$

Quedando:  $W_N(k, n) = W_N^{(n-1) \cdot (k-1)}$

Haciendo lo mismo para la IDFT:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \Rightarrow \vec{x} = \frac{1}{N} W_N^* \cdot \vec{X}$$

donde:  $\vec{X}(k) = X(k)$  { long. N  
 $\vec{x}(n) = x(n)$  } (vectores columna)

$$W_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & \dots & W_N^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}_{N \times N}$$

### Propiedades de simetría:

Sea  $x(n)$  una secuencia de  $N$  muestras, la DFT la interpretará como una secuencia  $\tilde{x}(n)$  periódica de período  $N$ . Lo mismo sucederá con  $X(k)$  y  $\tilde{X}(k)$ , pero siempre se trabajará sólo con  $N$  muestras para  $x(n)$  y  $X(k)$ .

Por ello es conveniente definir cualquier valor de  $\tilde{x}(n)$  y  $\tilde{X}(k)$  a partir de los valores de  $x(n)$  y  $X(k)$ , utilizando la operación Módulo N:

$$n \bmod N = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq n \leq N-1 \\ \text{el resultado de sumar o restar a "n" múltiplos de "N" hasta que el resultado se encuentre en } [0, N-1] & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Quedando:  $\tilde{x}(n) = x(n \bmod N) \triangleq x((n))_N \quad \tilde{X}(k) = X(k \bmod N) \triangleq X((k))_N$

La DFT cumple propiedades similares a la DTFT pero utilizando la operación Módulo N. Si  $x(n)$  es una secuencia de  $N$  muestras real, entonces:

$$\begin{aligned} X(k) = X^*(-k)_N &\Leftrightarrow \begin{cases} |X(k)| = |X((-k))_N| \\ \Theta(k) = -\Theta((-k))_N \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}[X(k)] = \operatorname{Re}[X((-k))_N] \\ \operatorname{Im}[X(k)] = -\operatorname{Im}[X((-k))_N] \end{cases} \end{aligned}$$

### Inversión Circular:

Para poder invertir en el tiempo una secuencia  $x(n)$  de  $N$  muestras y obtener otra secuencia de  $N$  muestras, se define la inversión con la operación Módulo N y:

$$x(n) \longleftrightarrow X(k) \Rightarrow x((-n))_N \longleftrightarrow X((-k))_N \text{, ambas de } N \text{ muestras}$$

Linedad:

$$x(n) \leftrightarrow X(k) \Rightarrow \alpha x(n) + \beta y(n) \leftrightarrow \alpha X(k) + \beta Y(k), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$y(n) \leftrightarrow Y(k)$$

Si  $x(n)$  es de  $N_1$  muestras y  $y(n)$  de  $N_2$  muestras, entonces se calculan sus DFT's  $X(k)$  e  $Y(k)$  con  $N_3 = \max(N_1, N_2)$  muestras completando la de menor no de muestras con ceros.

Desplazamiento circular en el tiempo:

Surge de desplazar  $\tilde{x}(n)$  en "m" muestras, que de como resultado:  $\tilde{x}(n-m) = x((n-m))_N$

$$x(n) \leftrightarrow X(k) \Rightarrow x((n-m))_N \leftrightarrow X(k) e^{-j \frac{2\pi}{N} km}$$

Desplazamiento circular en la frecuencia:

$$x(n) \leftrightarrow X(k) \Rightarrow x(n) e^{j \frac{2\pi}{N} nm} \leftrightarrow X((k-m))_N$$

Convolución circular:

Una convolución lineal (definición coincide para la convolución) de dos secuencias de  $N$  muestras de como resultado una secuencia más larga. Para restringir el resultado a  $N$  muestras, se define la convolución circular de dos secuencias  $x(n)$  e  $y(n)$  de  $N$  muestras como:

$$x(n) \textcircled{N} y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) y((n-m))_N, 0 \leq n \leq N-1$$

Da como resultado una secuencia de  $N$  muestras

la misma consta de una inversión circular y un desplazamiento circular de la secuencia  $y(n)$ , y es commutativa ( $x(n) \textcircled{N} y(n) = y(n) \textcircled{N} x(n)$ )

$$\begin{aligned} x(n) &\leftrightarrow X(k) \Rightarrow x(n) \textcircled{N} y(n) \leftrightarrow X(k) \cdot Y(k) \\ y(n) &\leftrightarrow Y(k) \end{aligned}$$

Este propiedad indica que un producto de dos DFT's (punto a punto) en la frecuencia es equivalente a la convolución circular en el tiempo.

Productos de dos secuencias:

$$\begin{aligned} x(n) &\leftrightarrow X(k) \Rightarrow x(n) \cdot y(n) \leftrightarrow X(k) \textcircled{N} Y(k) \\ y(n) &\leftrightarrow Y(k) \end{aligned}$$

Filtrado de señales mediante el uso de la DFT (FFT):

Dado un filtro FIR, puede hallarse su salida a cualquier entrada usando la convolución lineal. El problema es que el tiempo involucrado es enorme, ya que si su rta. de impulso es de long.  $M$ , por cada muestra de entrada deben realizarse  $M$  productos:  $y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)$

Por otro lado, la DFT es una herramienta práctica para realizar operaciones de sistemas lineales en el dominio de la frecuencia, y es computacionalmente rápida de calcular utilizando el algoritmo de la FFT. Se podría calcular la DFT de  $h(n)$  (una sola vez porque el filtro no cambia), la de  $x(n)$ , hacer el producto y antitransformar (IDFT) obteniendo  $y(n)$ .

Sin embargo, debe tenerse en cuenta que el producto entre DFT's resulta en una convolución circular en el tiempo, no en la convolución lineal deseada. Pero puede encontrarse la condición para lograr que el resultado de la convolución circular sea igual al de la lineal.

Si la señal  $x(n)$  tiene longitud  $L$  muestras y la respuesta impulsiva del filtro  $h(n)$  tiene una longitud de  $M$  muestras, entonces la convolución lineal de ambas tendrá una longitud  $N = L + M - 1$  muestras. Si se complementan  $x(n)$  y  $h(n)$  con ceros (ZERO PADDING) hasta lograr que ambos tengan longitud  $N = L + M - 1$ , entonces EL RESULTADO DE LA CONVOLUCIÓN CIRCULAR ES IGUAL AL DE LA LINEAL.

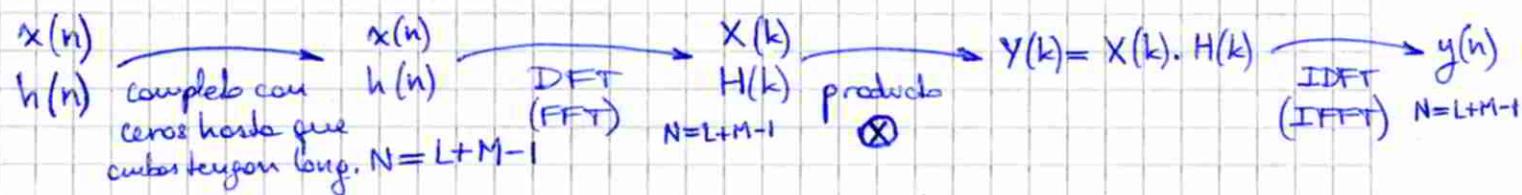
- Si se utiliza un  $N$  menor, habrá ALIASING TEMPORAL (no se logrará obtener el resultado para que figuren todas las muestras necesarias)
- Si se utiliza un  $N$  mayor, el resultado tendrá ceros sobrantes al final.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} x_1(n) &= \{1, 2, 3\} & N = 3 + 4 - 1 = 6 \\ x_2(n) &= \{1, 2, 2, 1\} \end{aligned}$$

- Si tomo  $N = 8$  y completo con ceros  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$ :  
 $x_1(n) \otimes x_2(n) = \{1, 4, 9, 11, 8, 3, 0, 0\}$ , ceros demás
- Si tomo  $N = 6$  y completo con ceros  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$ :  
 $x_1(n) \otimes x_2(n) = \{9, 7, 9, 11\} \rightarrow \text{aliasing temporal}$   
 suma muestra 0 ← (suma muestra 1  
 con muestra 4) con muestra 5

Entonces, dado un filtro FIR con  $h(n)$  de longitud  $M$ , y dada una entrada  $x(n)$  de longitud  $L$ , teniendo en cuenta lo visto puede calcularse la salida  $y(n)$  con el siguiente procedimiento:



La salida entonces será igual a la convolución lineal entre  $x(n)$  y  $h(n)$ , es decir:  $y(n) = x(n) * h(n)$

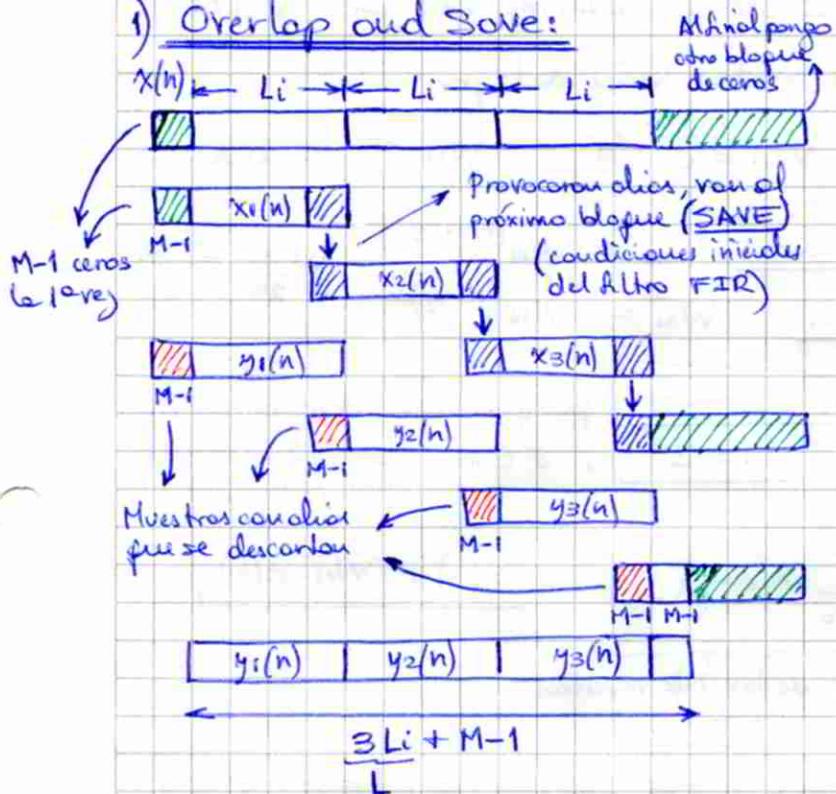
### Filtrado de Secuencias largas:

Si la longitud de la secuencia  $x(n)$  ( $L$ ) es mucho mayor a la de  $h(n)$  ( $M$ ), se debe partirla en bloques, filtrando individualmente cada uno de ellos (teniendo en cuenta las condiciones iniciales del filtro al empejar un nuevo bloque) y reconstruyendo la salida.

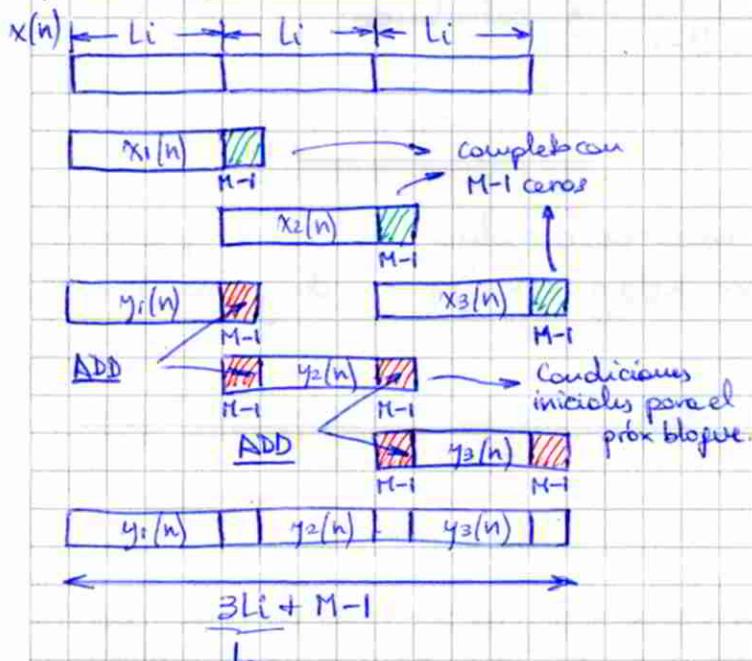


Existen dos métodos para realizarlo:

1) Overlap and Save:



2) Overlap and Add:



- Long de cada bloque de  $x(n)$ :  $L_i$
- long de cada bloque  $x_i(n)$ :  $N = L_i + M - 1$  ( $M-1$  datos del bloque previo más  $L_i$  muestras nuevas de la señal de entrada)
- Se incrementa la  $h(n)$  con ceros hasta que tenga long  $N$  ( $L_i-1$  ceros). Luego se calcula una sola vez su DFT.
- Se multiplica la DFT de  $h(n)$  con la de cada bloque  $x_i(n)$ , y se calcula la IDFT del producto resultando el bloque  $y_i(n)$
- La long de la convolución lineal es:  $(L_i + M - 1) + (M) - 1$ , pero el bloque  $y_i(n)$  tiene long.  $L_i + M - 1$ , porque los primeros  $(M-1)$  muestras son alias.

- Long de cada bloque de  $x(n)$ :  $L_i$  ceros
- Long de cada bloque  $x_i(n)$ :  $N = L_i + M - 1$  ( $L_i$  muestras nuevas de la señal de entrada, completado con  $M-1$  ceros)
- Se incrementa la  $h(n)$  con ceros hasta que tenga long  $N$  ( $L_i-1$  ceros). Luego se calcula una sola vez su DFT.
- Se multiplica la DFT de  $h(n)$  con la de cada bloque  $x_i(n)$ , y se calcula la IDFT del producto resultando el bloque  $y_i(n)$
- La long de la convolución lineal es:  $L_i + M - 1$ , igual a la de cada bloque  $y_i(n)$ , no hay alias.

## Transformada Rápida de Fourier (FFT):

La FFT es un algoritmo que permite calcular en forma eficiente la DFT de una señal, aprovechando ciertas simetrías de esta transformada. Los mismos características pueden aprovecharse para calcular en forma eficiente la IDFT.

La DFT de una secuencia  $x(n)$  de  $N$  muestras viene dada por:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \quad \text{dónde } W_N = e^{-j \frac{2\pi}{N}} \quad W_N: \text{Factor de Aceleración}$$

Propiedades de  $W_N$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Periodicidad: } W_N^{nk} = W_N^{n(k+N)} \\ \text{Simetría: } W_N^{nk} = -W_N^{n(k+\frac{N}{2})} \end{array} \right. \quad W_N^{\frac{nk}{2}} = W_N^{nk \cdot 2^a}, \quad a \in \mathbb{Z}$$

El algoritmo a cuijor es llamado Radix-2, porque considera el nº de muestras como una potencia de dos:  $N = 2^r$ ,  $r \in \mathbb{N}$ . La DFT puede separarse en dos partes:

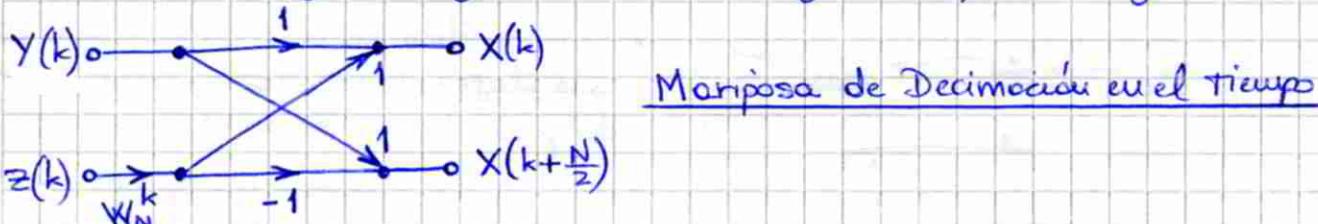
$$X(k) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) W_{\frac{N}{2}}^{nk}}_{\text{DFT de los } N/2 \text{ muestras PARES}} + \underbrace{W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) W_{\frac{N}{2}}^{nk}}_{\text{DFT de los } N/2 \text{ muestras IMPARES}} = Y(k) + W_N^k Z(k) \quad k=0, \dots, N-1$$

Conociendo  $Y(k)$  y  $Z(k)$  para la primera mitad del espectro,  $k=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1$ , puede obtenerse  $X(k)$  para la segunda mitad del espectro,  $k=\frac{N}{2}, \dots, N-1$  haciendo:

$$X(k)|_{k=\frac{N}{2}, \dots, N-1} = X\left(k+\frac{N}{2}\right)|_{k=0, \dots, \frac{N}{2}-1} \quad \text{y calculando:}$$

$$X\left(k+\frac{N}{2}\right) = Y\left(k+\frac{N}{2}\right) + W_N^{\frac{(k+\frac{N}{2})}{2}} \cdot Z\left(k+\frac{N}{2}\right) = Y(k) - W_N^k \cdot Z(k)$$

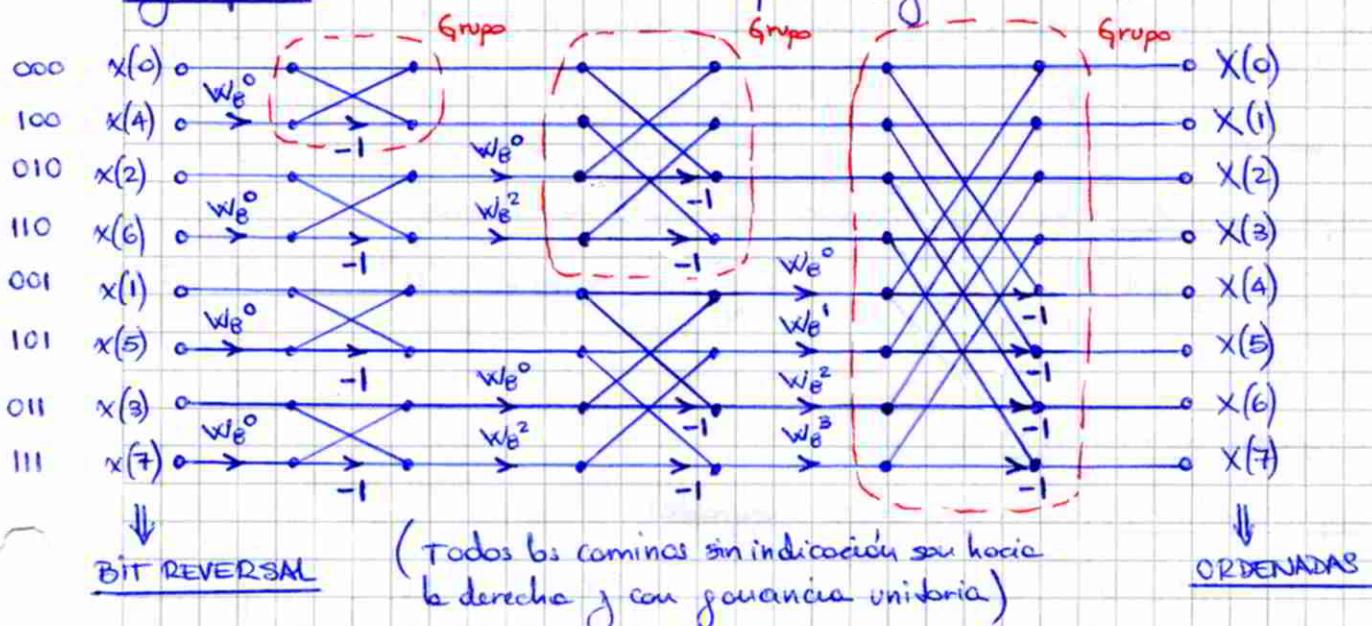
De esta forma se reduce en el nº de productos a realizar, ya que el producto  $W_N^k \cdot Z(k)$  se realiza una vez para calcular  $X(k)$  y  $X(k+\frac{N}{2})$ . El diagrama resultante:



El proceso de división de muestras pares e impares puede ser repetido para cada una de las DFT de  $N/2$  muestras hasta llegar a una DFT de 2 muestras (mariposa). Este es el llamado Algoritmo de Decimación en el tiempo. El proceso puede hacerse al revés desde las muestras en frecuencia, llamado Algoritmo de Decimación en Frecuencia. Ambos son equivalentes, pero en el 1º caso las muestras temporales se encuentran ordenadas según su posición en binario invertido (BIT REVERSAL) y las muestras en frecuencia ordenadas según su posición original, y viceversa para el 2º caso.



Ejemplo: FFT de  $N=8$  muestras por el Algoritmo de Decimación en el tiempo



El nº de etapas de cálculo es igual a  $\log_2 N$ , siendo  $N = 2^3$ . Los nodos pertenecientes a la misma mariposa son llamados DUALES, y a medida que el nº de grupos independientes disminuye de izquierda a derecha ( $2^2, 2^1, 2^0$ ) aumenta el nº de muestras que distinguen los nodos dudosos ( $2^0, 2^1, 2^2$ ). El algoritmo requiere "N" posiciones de memoria, ya que luego del cálculo de cada etapa los valores anteriores son descartados.

Comparación nº productos DFT - FFT:

$$\text{Nº productos DFT} = N^2 \quad (\text{para cada } X(k), k=0, \dots, N-1, \text{ realiza "N" productos})$$

$$\text{Nº productos FFT} = \frac{N}{2} \log_2 N \quad (\text{en cada etapa, siendo } \delta = \log_2 N \text{ el nº de etapas, realiza } \frac{N}{2} \text{ productos})$$

El ahorro en el nº de productos a realizar aumenta con el "N", y es muy importante para aplicaciones en tiempo real al ahorrar tiempo. Los productos considerados son, en general y en ciertos casos, complejos.

## Resumen Series y Transformadas de Fourier:

### Series de Fourier:

- Tiempo Continuo: Sea  $x(t)$  periódica con período  $T$ :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j \frac{2\pi k}{T} t} \quad C_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-j \frac{2\pi k}{T} t} dt \quad \left. \right\} \text{CTFS}$$

- Tiempo Discreto: Sea  $x(n)$  periódica con período  $N$  muestras:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{j \frac{2\pi k}{N} n} \quad C_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi k}{N} n} \quad \left. \right\} \text{DTFS}$$

### Transformadas de Fourier:

- Tiempo Continuo: Sea  $x(t)$  módulo integrable:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j 2\pi f t} dt & x(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j 2\pi f t} df \\ \text{ó } X(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j w t} dt & x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(w) e^{j w t} dw \end{aligned} \quad \left. \right\} \text{CTFT (ICTFT)}$$

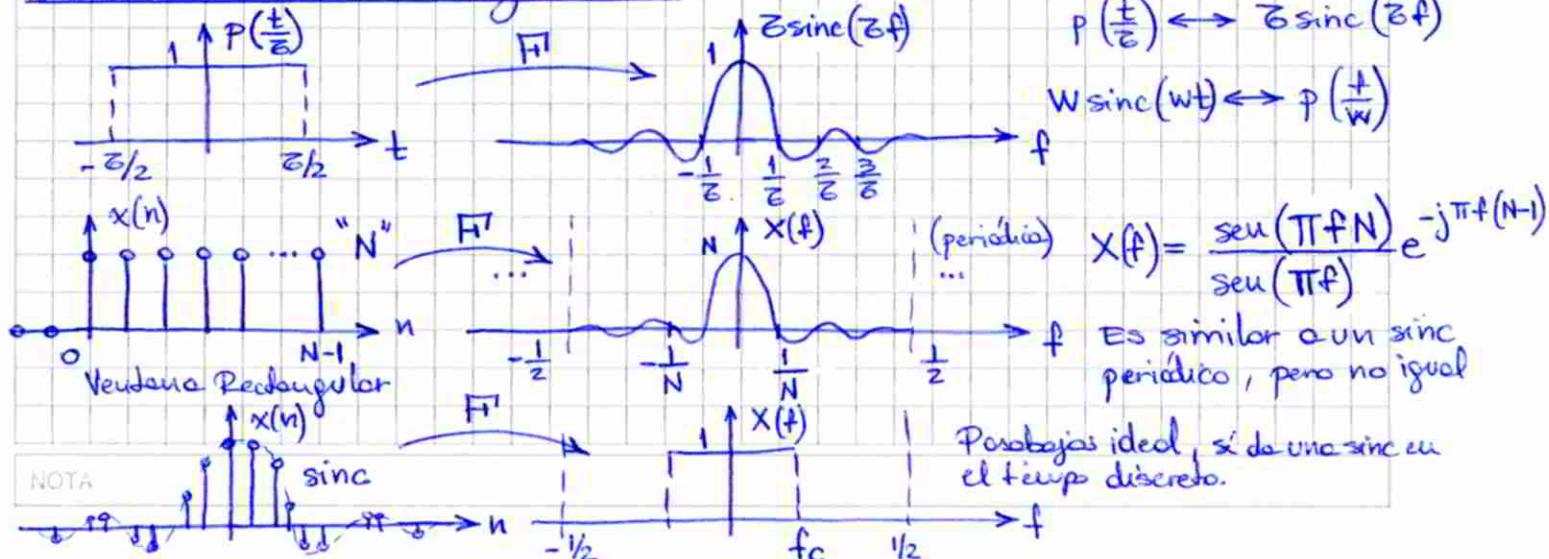
- Tiempo Discreto: Sea  $x(n)$  módulo sumable:

$$\begin{aligned} X(e^{j 2\pi f}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j 2\pi f n} & x(n) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(e^{j 2\pi f}) e^{j 2\pi f n} df \\ \text{ó } X(e^{j w}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j w n} & x(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j w}) e^{j w n} dw \end{aligned} \quad \left. \right\} \text{DTFT (IDTFT)}$$

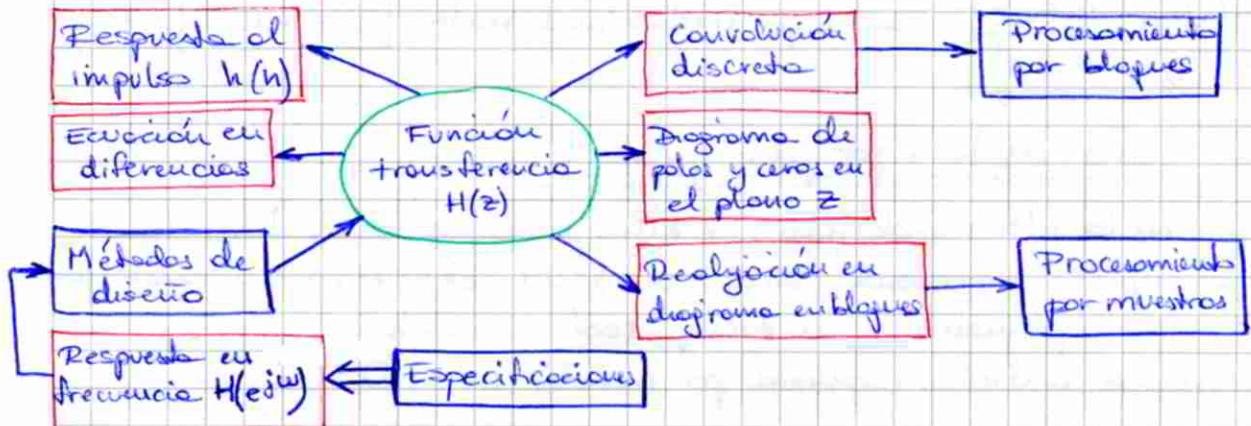
- Discreto en Tiempo Discreto: Sea  $x(n)$  con  $N$  muestras:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi k}{N} n} & x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi k}{N} n} \\ X(k) &= X(e^{j w}) \Big|_{w=\frac{2\pi k}{N}} & \end{aligned} \quad \left. \right\} \text{DFT (IDFT)}$$

### Transformadas del Pulso y la Sinc:



## Diseño de sistemas digitales: Funciones Transferecia



Relaciones importantes para sistemas LTI estables con coeficientes reales:

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-jn\omega}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N c_k z^{-k}} = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - p_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})}$$

↑ ceros  
↑ polos

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(z) \cdot H(z^{-1}) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

cociente de polinomios en  $\cos\omega$

$$b_k, c_k \in \mathbb{R}$$

$$z_k, p_k \in \mathbb{C}$$

**Sistema de Fase Mínima:**  
Todos sus ceros y polos están dentro del círculo unitario

Resposta sinusoidal de un sistema con polos reales:

Sea la excitación:  $x(n) = e^{j\omega_0 n} u(n) \iff X(z) = \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}}$

Que ingresa al sistema LTI estable causal con  $M$  polos reales:

$$H(z) = \frac{N(z)}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \dots (1 - p_M z^{-1})} \quad |p_i| < 1 \quad (\text{estable y causal})$$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{N(z)}{(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \dots (1 - p_M z^{-1})}$$

Supongo el sistema relojado es la t.n. en Estado Nulo.

Desarrollando por fracciones simples se llega a un resultado del tipo:

$$Y(z) = \frac{H(e^{j\omega_0})}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{B_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{B_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \dots + \frac{B_M}{1 - p_M z^{-1}}$$

$$y(n) = \underbrace{H(e^{j\omega_0}) e^{j\omega_0 n}}_{\text{Régimen permanente}} + \underbrace{B_1 p_1^n + B_2 p_2^n + \dots + B_M p_M^n}_{\text{Régimen transitorio}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{dscr } |p_i| < 1 \quad \forall i$$

$\Rightarrow$  Dominado por los polos del sistema.

El polo real que predomine en el transitorio será el que verifique:  $\max_i |p_i| = r_i$ .  
A fines prácticos, el transitorio se extingue cuando su amplitud llegó a un "E" de la amplitud máxima (pico del transitorio), especificado en el diseño.

En un sistema en tiempo discreto, un polo  $|p|$  es mayor que  $|q|$  cuando más cerca este del círculo unitario  $|z|=1$ . El de mayor  $|p|$  tendrá mayor  $r_i$  y predominará en el transitorio.

A partir del valor de " $E$ " y del módulo del polo de mayor módulo, " $f$ ", puede hallarse el n° de muestras a partir de  $n=0$  que deben pasar para que el transitorio sea despreciable, que debe cumplir:

$$E = f^{n_{\text{eff}}} \Rightarrow n_{\text{eff}} = \frac{\ln E}{\ln f} \quad \text{El tiempo de establecimiento resulta: } Z = n_{\text{eff}} \cdot T \quad T: \text{periodo de muestra}$$

### Diseño de Filtros Digitales por polos y ceros:

Al igual que en los filtros analógicos, el filtro pasobajos ideal tiene una respuesta al impulso no causal (sinc), fundiendo el sistema no causal por lo que no puede implementarse en tiempo real. Sin embargo, también es posible acercarse a dicha respuesta por métodos alternativos.

#### c) Filtros de 1º orden:

• Pasobajos:

$$H(z) = G \frac{(1+bz^{-1})}{(1-az^{-1})} \quad \begin{array}{ll} 0 \leq b < 1 & \text{cero: } z = -b \\ 0 < a < 1 & \text{polo: } z = a \end{array}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \left| G \frac{(1+be^{-j\omega})}{(1-ae^{-j\omega})} \right| = G \sqrt{\frac{1+2b \cos \omega + b^2}{1-2a \cos \omega + a^2}}$$

El módulo de la respuesta en frec. es la relación entre la distancia desde el cero a un punto ubicado sobre el círculo unitario a la frecuencia  $\omega$ , y la distancia entre el polo y ese punto. Como, a  $\omega=0$  ( $z=1$ ) el cero está más lejano que el polo, y a  $\omega=\pi$  ( $z=-1$ ) el cero está más cerca que el polo, es un pasobajos.

Pueden hallarse los valores de  $a$  y  $b$  conociendo el rango de atenuación  $\frac{H_M}{H_N}$  (dB) y el tiempo de establecimiento (dado por  $E$  y  $n_{\text{eff}}$ ):

$$\left. \begin{aligned} H_M &= |H(e^{j\omega})| \Big|_{\omega=0} = H(z) \Big|_{z=1} = G \frac{1+b}{1-a} \\ H_N &= |H(e^{j\omega})| \Big|_{\omega=\pi} = H(z) \Big|_{z=-1} = G \frac{1-b}{1+a} \end{aligned} \right\} \frac{H_M}{H_N} (\text{dB}) = 20 \log \frac{(1+b)(1-a)}{(1+b)(1+a)}$$

Considerando  $|a| > |b|$ , se obtiene la otra relación:  $E = a^{n_{\text{eff}}}$

• Pasoditros:

$$H(z) = G \frac{(1-bz^{-1})}{(1+az^{-1})} \quad \begin{array}{ll} 0 \leq b < 1 & \text{cero: } z = b \\ 0 < a < 1 & \text{polo: } z = -a \end{array}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \left| G \frac{(1-be^{-j\omega})}{(1+ae^{-j\omega})} \right| = G \sqrt{\frac{1-2b \cos \omega + b^2}{1+2a \cos \omega + a^2}}$$

Puede pasarse del pasobajos al pasoditro girando el diagrama de polos en 180° (equivalente a multiplicar  $h(n)$  por  $(-1)^n$ , o cambiar  $z \rightarrow -z$  en  $H(z)$ ). El cálculo de  $a$  y  $b$  es similar que para el pasobajos.

NOTA



### b) Filtro Resonador ( $2^{\text{o}}$ orden):

• Paraboloide:

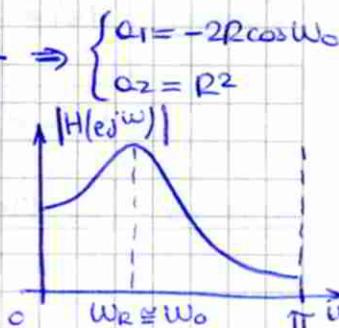
$$H(z) = G \frac{1}{(1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2})}$$

Ceros:  $z_{1,2} = 0$

$$\begin{aligned} \text{polos: } & p = Re^{j\omega_0} \\ & p^* = Re^{-j\omega_0} \quad 0 < R < 1 \end{aligned}$$

Los polos deben ser complejos conjugados para obtener coeficientes  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ . De esta forma se obtiene:

$$H(z) = \frac{G}{(1 - Re^{j\omega_0}z^{-1})(1 - Re^{-j\omega_0}z^{-1})} = \frac{G}{1 - 2R \cos \omega_0 z^{-1} + R^2 z^{-2}}$$



Para obtener los valores de  $R$  y  $G$ , se parte de los datos  $\omega_0$  y  $\Delta\omega$  (BW de 3dB).

Para ello debe tenerse en cuenta que el pico máximo de la respuesta a frecuencia ocurre a la Frecuencia de Resonancia:

$$\omega_R = \arccos\left(\frac{1+R^2}{2R} \cos \omega_0\right) \xrightarrow{R \rightarrow 1} \omega_0$$

en general se normaliza la ganancia en  $\omega_0$ :

$$|H(e^{j\omega_0})| = 1 \Rightarrow G = (1-R)\sqrt{1-2\cos(2\omega_0)+R^2}$$

Por otro lado, puede demostrarse que el BW de 3dB está dado por:  $\Delta\omega \approx 2(1-R)$  ( $R \rightarrow 1$ )

• Paraboloido:

$$H(z) = \frac{G(1-z^{-1})(1+z^{-1})}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2}}$$

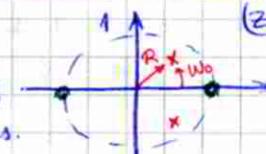
ceros de transmisión:  $z_1 = 1$   $z_2 = -1$

$$\text{polos: } \begin{cases} p = Re^{j\omega_0} \\ p^* = Re^{-j\omega_0} \end{cases} \quad 0 < R < 1$$

Para poder a paraboloido se agregan ceros de transmisión (en sistemas discretos, los ceros de transmisión, que son los que efectivamente hacen nula a  $|H(e^{j\omega})|$ , se ubican sobre la circunferencia unitaria) en  $z=1$  ( $\omega=0$ ) y  $z=-1$  ( $\omega=\pi$ ). Se obtiene entonces la respuesta a frecuencia:

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{G \sqrt{2-2\cos(2\omega)}}{\sqrt{1-2R\cos(\omega_0-\omega)+R^2} \sqrt{1-2R\cos[2(\omega_0-\omega)]+R^2}}$$

La frecuencia de resonancia  $\omega_R$  y el BW de 3dB, varían un poco respecto al paraboloido, pero con  $R \rightarrow 1$  pueden aproximarse a estos valores.



### c) Filtros Comb y Notch:

• de  $2^{\text{o}}$  orden:

$$H(z) = G \frac{1+b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + b_1 z^{-2}}$$

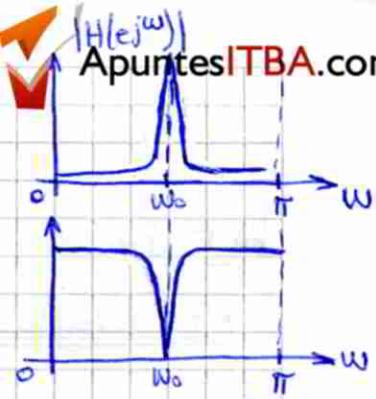
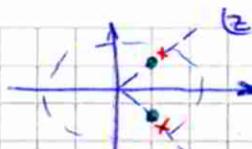
ceros:  $z = Re^{j\omega_0}$ ,  $z^* = Re^{-j\omega_0}$

$$\text{polos: } p = Re^{j\omega_0}, p^* = Re^{-j\omega_0}$$

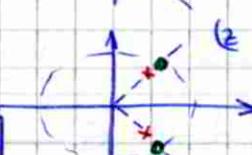
Los ceros y los polos están ubicados a la misma frecuencia, y son pares complejos conjugados:

$$H(z) = G \cdot \frac{(1 - Re^{j\omega_0}z^{-1})(1 - Re^{-j\omega_0}z^{-1})}{(1 - Re^{j\omega_0}z^{-1})(1 - Re^{-j\omega_0}z^{-1})} = G \frac{1 - 2\cos(\omega_0 z^{-1}) + R^2 z^{-2}}{1 - 2R\cos(\omega_0 z^{-1}) + R^2 z^{-2}} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = -2R\cos(\omega_0) \\ b_2 = R^2 \\ \alpha_1 = -2R\cos(\omega_0) \\ \alpha_2 = R^2 \end{cases}$$

Comb:  $r < R \leq 1$  (pero  $R < 1$ )



Notch:  $R < r = 1$  (ceros de transmisión en  $\omega_0$ )



• de orden M:  $H(z) = G \frac{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}}$

Comb:  $H(z) = \frac{N(r^{-1}z)}{N(R^{-1}z)}$   
 $r < R \leq 1$  (pero  $R < 1$ )

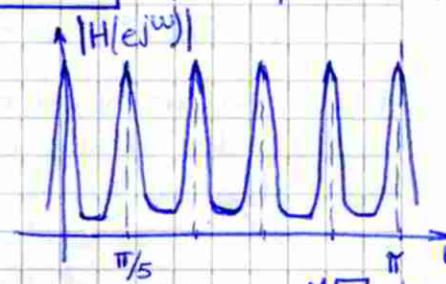
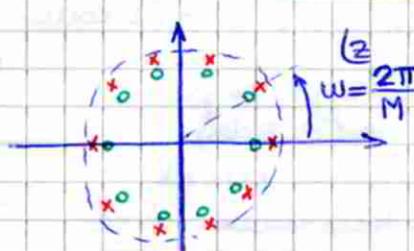
Ejemplo: si  $M=10$ :

Notch:  $H(z) = \frac{N(z)}{N(R^{-1}z)}$

$R < r = 1$  (ceros de transmisión cada  $\frac{2\pi}{M}$ )

Ejemplo: si  $M=10$ :

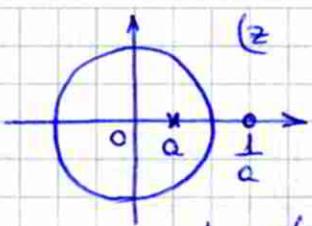
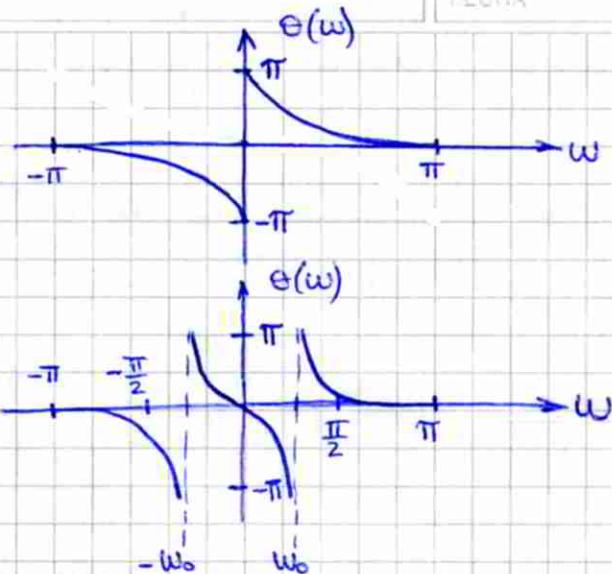
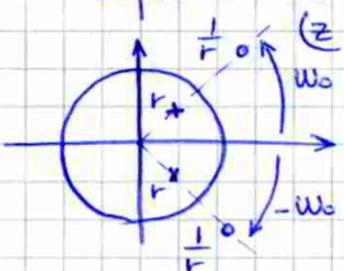
Si el primer cero está en  $\omega=0$ :  $H(z) = \frac{1 - r^M z^{-M}}{1 - R^M z^{-M}}$



Si el primer cero está en  $\omega=\pi$ :

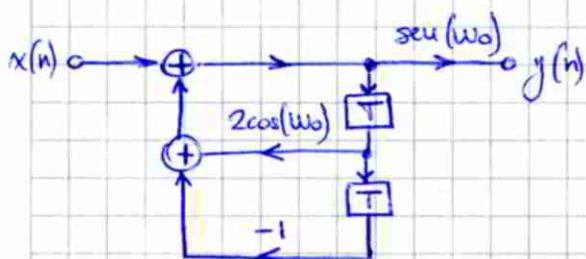
$$H(z) = \frac{1 - z^{-M}}{1 - R^M z^{-M}}$$

Ceros:  $z = \sqrt[M]{1}$  (M ceros)  
polos:  $z = \sqrt[M]{R^M}$  (M polos)

1º orden:2º orden:Osciladores Sencillamente Digitales:

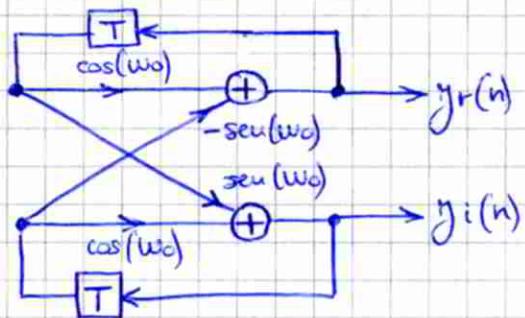
Un oscilador senoidal digital puede observarse como la forma límite de un Filtro Pasabandas de 2º orden cuyos polos complejos conjugados quedan en el circuito unitario.

$$H(z) = \frac{\operatorname{sen}(w_0)}{1 - 2\cos(w_0)z^{-1} + z^{-2}} \Rightarrow h(n) = \operatorname{sen}[(n+1)w_0] \cdot u(n)$$



$$y(n) = 2\cos(w_0) \cdot y(n-1) - y(n-2) + x(n)$$

- Si  $x(n) = f(n) \Rightarrow y(n) = h(n)$  y oscila independientemente por las características de  $h(n)$
- Si  $x(n) = 0$  (sin entrada), se llega al mismo resultado con las condiciones iniciales:  
 $y(-1) = 0, y(-2) = -\operatorname{sen}(w_0)$

Oscilador de Señales en Cuadra:

$$\begin{cases} y_r(n) = \cos(n \cdot w_0) u(n) \\ y_i(n) = \operatorname{sen}(n \cdot w_0) u(n) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} y_r(n) = \cos(w_0) y_r(n-1) - \operatorname{sen}(w_0) y_i(n-1) \\ y_i(n) = \operatorname{sen}(w_0) y_r(n-1) + \cos(w_0) y_i(n-1) \end{cases}$$

Para que funcione el oscilador deben ser las condiciones iniciales:

$$y_r(-1) = \cos(w_0) \quad y_i(-1) = -\operatorname{sen}(w_0) \Rightarrow \text{Surgen de evaluar } y_r(-1) \text{ e } y_i(-1) \text{ sin la } u(n) \text{ en sus expresiones.}$$



## Gráficos de Respuesta en Amplitud y en Fase:

Para evaluar la gráfica de la respuesta en amplitud y fase de una transferencia es conveniente escribirlo como:

$$H(e^{j\omega}) = b_0 \cdot \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k e^{-j\omega})} = b_0 \cdot e^{j\omega(N-M)} \cdot \frac{\prod_{k=1}^M (e^{j\omega} - z_k)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - p_k)}$$

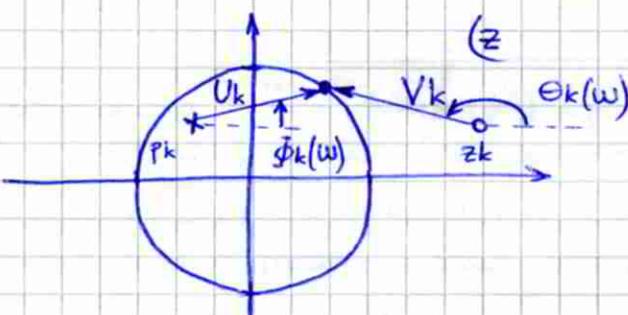
$$e^{j\omega - z_k} = V_k(\omega) e^{j\theta_k(\omega)}$$

$$e^{j\omega - p_k} = U_k(\omega) e^{j\phi_k(\omega)}$$

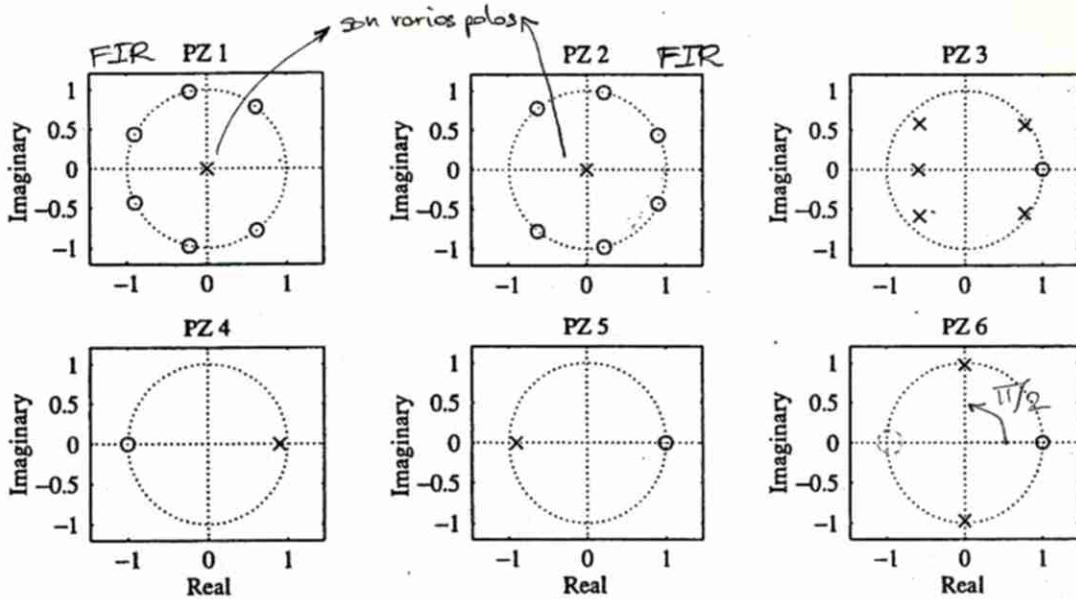
- Amplitud:  $|H(e^{j\omega})| = |b_0| \cdot \frac{\prod_{k=1}^M V_k(\omega)}{\prod_{k=1}^N U_k(\omega)}$

- Fase:  $\angle H(e^{j\omega}) = \underbrace{\angle b_0}_{\text{Fase inicial}} + \omega(N-M) + \sum_{k=1}^M \theta_k(\omega) - \sum_{k=1}^N \phi_k(\omega)$

De este forma, para cada valor de  $\omega$ , se computan  $|H(e^{j\omega})|$  y  $\angle H(e^{j\omega})$ . Gráficamente, siendo  $e^{j\omega}$  un punto sobre el círculo  $|z|=1$ !



8.16 Match the frequency responses (A-E) with the correct pole-zero plots (PZ 1-6). Poles are denoted by  $x$  and zeros by  $o$ .



$$\text{FIR: } X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k \cdot x(n-k)$$

Poles en  $Z=0$

Zeros en  $|z|=1$  si  $b_k=1+k$   
de transmisión

Con los  $b_k=1+k$ , se corresponde la  $h(n)$   
con una ventana rectangular. En consecuencia  
 $H(e^{j\omega})$  tiene la forma indicada en A y C.

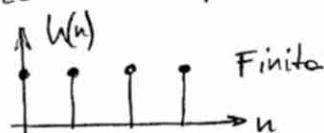
El diagrama de polos proviene

$$\text{de: } H(z) = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

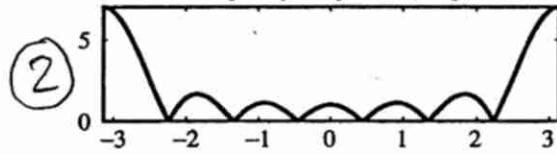
→ Elimina el cero  
en  $z=1$

Proviene de una suma geométrica, los  
coef. de la ec. en diferencias deben valer  
todos lo mismo.

La respuesta al impulso es un pulso discreto:

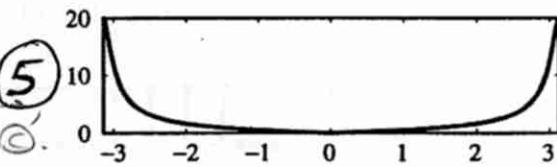


Frequency Responses (Mag)



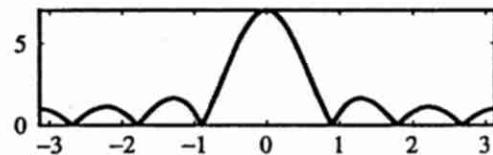
Filtro Pasa Altos

A tiene todos los  
Poles en el origen  
→ FIR

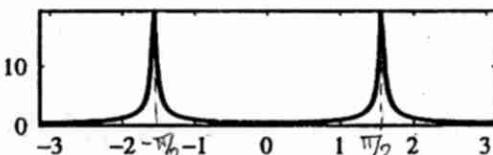


Filtro Pasa Altos

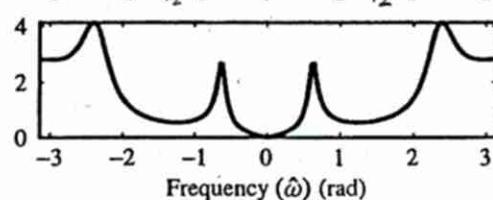
B Respuesta (1º orden)  
cero en  $z=1$  ( $\omega=0$ )



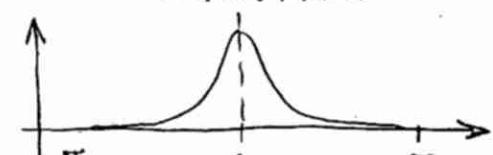
C Rotación en 180° del  
diagrama de polos y ceros  
(Función obtenida a partir  
de una ventana temporal,  
ver DFT).



D (6) Resonador  
(polos cerca circuito unitario)  
pasabanda



E (3) Pasabandas con  
más de una banda  
(multibanda)

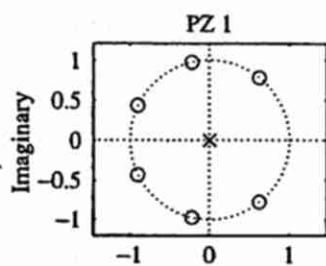


(4) Figura "B"  
desplazada en  $\pi$

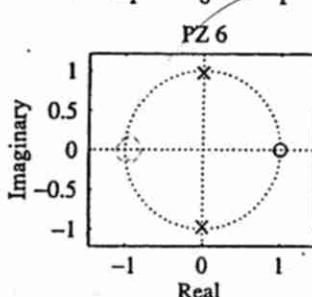
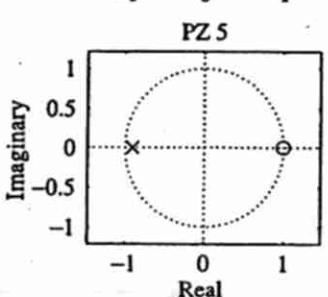
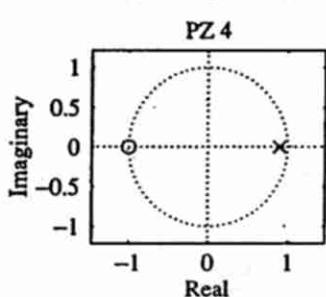
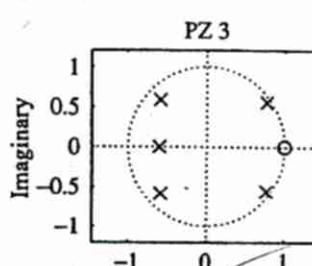
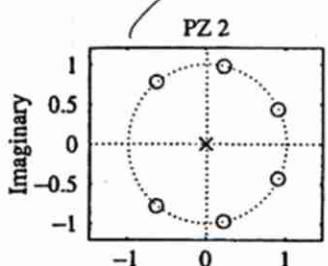
(diagrama de polos  
rotado 180° respecto  
del (5)).

8.17 Match the impulse responses (J-N) with the correct pole-zero plots (PZ 1-6). Poles are denoted by  $\times$  and zeros by  $\circ$ .

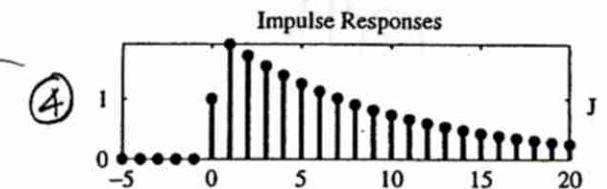
$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$



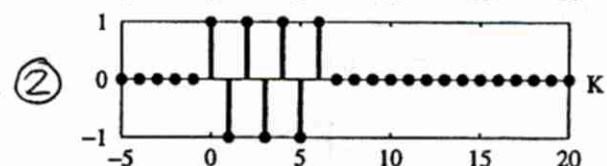
$$H(z) = \frac{1+z^{-N}}{1+z^{-1}}$$



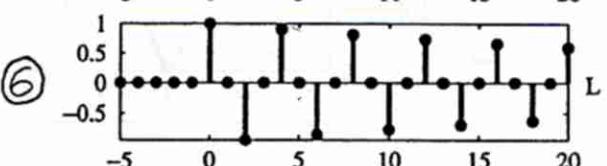
Si multiplico los coeficientes por  $(-1)^n$  es como rotar el diagrama de polos en  $180^\circ$



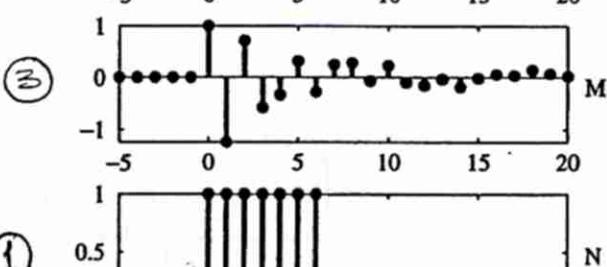
sistema 1º orden  
Paso bajos



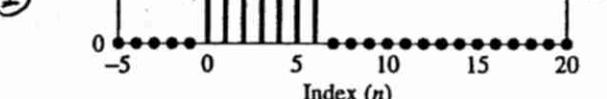
2 Pasaaltos (FIR)



Frecuencia de oscilación bien definida



Frecuencia de oscilación no muy bien definida  
(hay otros polos)



Paso bajos (FIR)

Ventana Rectangular:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k) \quad \left( h(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \right) \Rightarrow H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} z^{-k} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

$$h(n) = u(n) - u(n-N) \Leftrightarrow H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{z^{-N}}{1-z^{-1}} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$



## Diseño de Filtros IIR

En general un filtro digital será un sistema LTI causal, dado por:

$$y(n) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^M c_i y(n-i) \Rightarrow H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^M c_i z^{-i}}$$

Para que el filtro sea IIR (re recursivo), al menos uno de los  $c_i \neq 0$  y las raíces del denominador no son canceladas por las del numerador.

La idea es hallar los coeficientes  $c_i$ ,  $b_i$  del filtro digital tal que alguna característica del mismo se aproxime a lo deseado mediante algún criterio. Para el diseño de IIR se aprovechan las técnicas de diseño de filtros analógicos (aproximaciones de Butterworth, Chebyshov, etc) y se busca algún tipo de transformación del campo analógico ( $s$ ) al digital ( $z$ ) que conserve las propiedades relevantes.

Para que la transformación sea efectiva, debe cumplir dos propiedades:

- 1) El eje  $j\omega$  del plano  $S$  debe mapearse en el círculo unitario ( $|z|=1$ ) en el plano  $z$ . Con esto se busca mantener la respuesta en frecuencia, existiendo una relación directa entre las frecuencias analógica y digital.
- 2) El semiplano izquierdo del plano  $S$  ( $\sigma < 0$ ) debe mapearse en el interior del círculo unitario ( $|z| < 1$ ) en el plano  $z$ . Con esto se busca que un filtro analógico estable se transforme en uno digital estable.

Puede probarse que NO es posible realizar un filtro IIR causal y estable con fase lineal. Si puede lograrse en tiempo no real (no causal), pero no tiene ventajas respecto a los filtros FIR que permiten obtener sistemas causales y estables con fase lineal.

Por ello, los filtros IIR se diseñan a partir de la característica en módulo, y se acepta la respuesta en fase obtenida por el método de diseño elegido.

Un filtro analógico puede describirse a partir de tres formas equivalentes, como son su transferencia  $H(s)$ , su rta. del impulso  $h(t)$  y su Ecuación Diferencial que relaciona  $x(t)$  y  $y(t)$ . Estas representaciones permiten obtener distintos métodos para transformar un filtro analógico en uno digital.

### 1) a) Método Invertir el Impulso:

La idea es preservar la rta. del impulso  $h_A(t)$  del filtro analógico, resultando la rta. del impulso  $h_D(nT)$  del filtro digital una versión muestrada de  $h_A(t)$ , siendo

$$T \text{ el período de muestreo : } h_d(nT) = h_a^*(t) \Big|_{t=nT} \text{ donde } h_a^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_a(n). f(t-nT)$$

$$H_d(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{h_a(0)}{2} + \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_a(s-jnW_s) \text{ donde } W_s = \frac{2\pi}{T}$$

Con las condiciones :  $\begin{array}{l} \textcircled{A} \quad H_a(j\omega) \leq 0 \quad \text{y} \quad |\omega| > \frac{W_s}{2} \\ \textcircled{B} \quad h_a(0) \leq 0 \end{array} \Rightarrow H_d(e^{j\omega T}) \leq \frac{1}{T} H_a(j\omega) \text{ con } |\omega| < \frac{W_s}{2}$

Por teorema del valor inicial :  $h_a(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot H_a(s)$

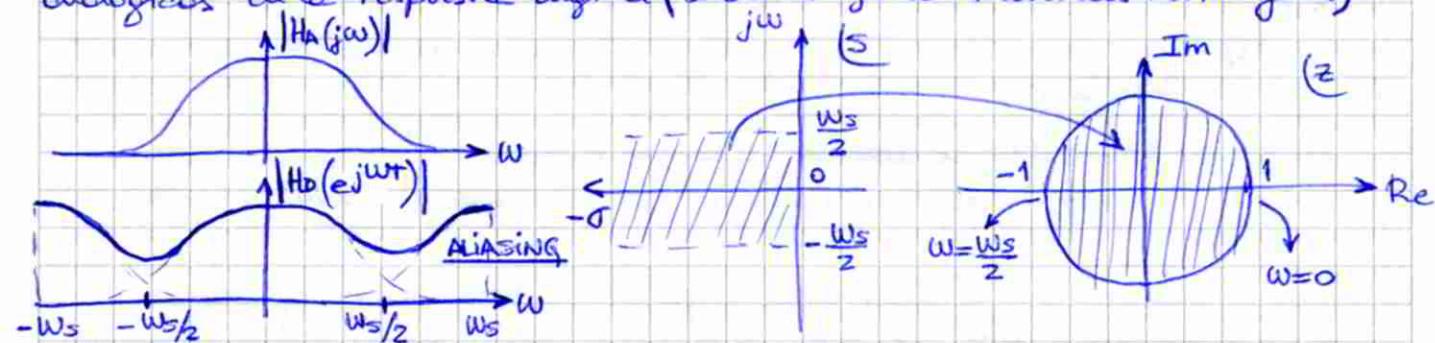
$\textcircled{A}$  implica que  $H_a(j\omega)$  debe estar acotada en banda, por lo cual con este método sólo pueden diseñarse filtros PASABAJOS y PASABANDA.

$\textcircled{B}$  implica que  $h_a(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot H_a(s) = 0$ , por lo cual el grado del denominador de  $H_a(s)$  debe ser superior al del numerador en por lo menos dos.

La respuesta en frecuencia del filtro digital  $H_d(e^{j\omega T})$  corresponderá a una repetición periódica de  $H_a(j\omega)$  por las características del muestreo. Por ello tiene el problema de Aliasing. Si la frecuencia de muestreo es lo suficientemente alta para minimizarlo y se cumplen las condiciones  $\textcircled{A}$  y  $\textcircled{B}$ , entonces es el método más conveniente al permitir obtener una respuesta en frecuencia prácticamente igual a la analógica.

Si no se cumple  $\textcircled{B}$ , el método puede aplicarse igual, pero puede llegar a tenerse un alto Aliasing en la respuesta obtenida.

La respuesta digital obtenida es igual a la analógica multiplicada por  $\frac{1}{T}$ , lo cual puede eliminarse multiplicando los coeficientes obtenidos por  $T$ . Por otro lado debe tenerse en cuenta que las frecuencias analógica y digital están relacionadas por el factor  $T$ , lo cual permitirá obtener donde caerán las frecuencias de interés analógicos en la respuesta digital (si se trabaja con frecuencias normalizadas).



El semiplano izquierdo del plano  $s$  se mapea en el interior del círculo unitario en el plano  $z$ , y cada tramo de ancho  $W_s$  sobre el eje  $j\omega$  del plano  $s$  se mapea en el círculo unitario  $|z|=1$  (uno sobre la otra, por ello el aliasing).

### Pasos del Diseño :

- Polos simples de  $H(s)$  :  $\frac{A_i}{s-p_i} \rightarrow \frac{A_i}{1-z^{-1}e^{p_i T}}$  (pdo en  $s=p_i \rightarrow$  polo en  $z=e^{p_i T}$ )

Separando  $H_a(s)$  en fracciones simples :  $H_a(s) = \sum_i \frac{A_i}{s-p_i} \rightarrow H_d(z) = \sum_i \frac{A_i z}{z-e^{p_i T}}$



Poles complejos conjugados de  $H(s)$ : polos en  $s = \sigma_i \pm j\omega_i \rightarrow$  polos en  $z = e^{(\sigma_i \pm j\omega_i)\tau}$

La relación  $z = e^{s\tau}$  que tiene los polos en  $z$  con los polos en  $s$  no se da con los ceros de esta transformación. Por ello este método funciona bien para transferencias que tienen solamente polos finitos, sin ceros finitos (Auto-Regressive, All-pole filters). Los ceros de  $H_D(z)$  aparecen luego de la suma de los factores simples.

### 1) b) Método Invariante al Impulso modificado:

$$H_A(s) = G \frac{N(s)}{D(s)} = G \frac{\frac{1}{D(s)}}{\frac{1}{N(s)}} \quad \text{llamamos } H_{AI}(s) = \frac{1}{D(s)} \quad \text{y } H_{AZ}(s) = \frac{1}{N(s)}$$

S:  $H_A(s)$  no cumple las condiciones necesarias para aplicarle el método invariante al impulso, puede que  $H_{AI}(s)$  y  $H_{AZ}(s)$  si los cumplen. Para ello debe cumplirse:

grado  $D(s) \geq 2$ , y grado  $N(s) \geq 2$ , (aseguran que  $H_{AI}(j\omega)$  y  $H_{AZ}(j\omega)$  estén acotados en banda, y  $H_{AI}(0^+) = 0$  y  $H_{AZ}(0^+) = 0$ ).

Se obtienen entonces:  $H_{D1}(z) = \frac{N_1(z)}{D_1(z)}$  y  $H_{D2}(z) = \frac{N_2(z)}{D_2(z)} \Rightarrow H_D(z) = G \frac{N_1(z) \cdot D_2(z)}{N_2(z) \cdot D_1(z)}$

Esta aproximación es buena para los pasobajos y pasabanda Cover, que tienen ceros de transmisión. Pero este método trae aparejada la desventaja que se incrementa notablemente el orden de  $H_D(z)$ .

### Pasos del Diseño:

- Se transforman  $H_{AI}(s)$  y  $H_{AZ}(s)$  en  $H_{D1}(z) = \frac{N_1(z)}{D_1(z)}$  y  $H_{D2}(z) = \frac{N_2(z)}{D_2(z)}$  por el método invariante al impulso.
- Los ceros de  $N_2(z)$ , que serán polos de  $H_D(z) = G \frac{H_{D1}(z)}{H_{D2}(z)}$ , pueden estar en  $|z| > 1$  haciendo inestable a  $H_D(z)$ . Si esto es así, se los reemplaza por sus reciprocos ( $z_0 \rightarrow \frac{1}{z_0}$ ) sin resultar alterado  $|H_D(e^{j\omega\tau})|$ .
- Si algún polo de  $H_D(z)$  cae en  $|z|=1$ , se lo corre "levemente" hacia  $|z| < 1$ .

### 2) Transformación Matched Z:

Comprende transformar cada cero o polo de  $H_A(s)$  en  $s = s_i$  a un cero o polo de  $H_D(z)$  en  $z = e^{s_i\tau}$ , quedando:

$$H_A(s) = \frac{\prod_{i=1}^M (s - s_i)}{\prod_{i=1}^N (s - p_i)} \rightarrow H_D(z) = G \frac{\prod_{i=1}^M (z - e^{s_i\tau})}{\prod_{i=1}^N (z - e^{p_i\tau})}$$

Puede observarse que los polos coinciden con los obtenidos por el método invariante al impulso, no así los ceros.

Pasos del Diseño:

- Transformar cada cero o polo de  $H(s)$  en  $s=s_i$  en cero o polo de  $H(z)$  en  $z=e^{s_i T}$
- Realizar demás ajustes según la transferencia en frecuencia. Por ejemplo, si es pasabajas, agregar tantos ceros en  $z=-1$  como ceros en  $s=\infty$  haya.
- Ajustar la ganancia  $G$  tal que se corresponda con la del analógico en alguna frecuencia crítica. Por ejemplo, si es pasabajas,  $|H(s)||_{s=0} = |H(z)||_{z=1}$

3) Métodos de Integración Numérica (o de Aproximación de Derivadas):

Una transferencia analógica  $H(s)$  puede representarse utilizando únicamente sumadores, multiplicadores e integradores. Tanto el sumador como el multiplicador tienen una representación directa en el campo digital, pero esto no ocurre con el integrador. Estos métodos se basan en modelizar al integrador en el campo digital.

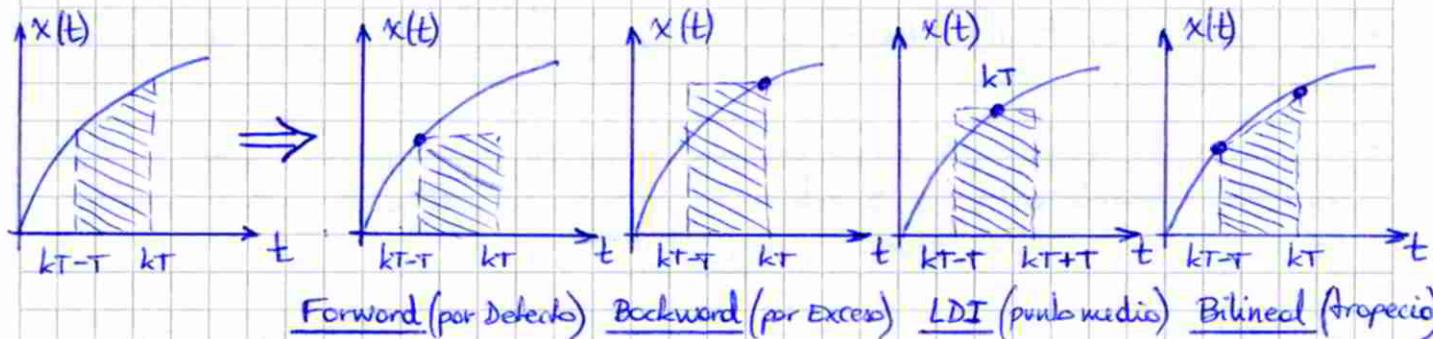
Otra forma equivalente de observar estos métodos es a partir de la representación del sistema analógico con su Ecuación Diferencial, y aproximar las derivadas de forma tal de obtener una Ecuación en Diferencias. Los resultados son los mismos.

La transferencia de un integrador analógico es:  $H_I(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s}$

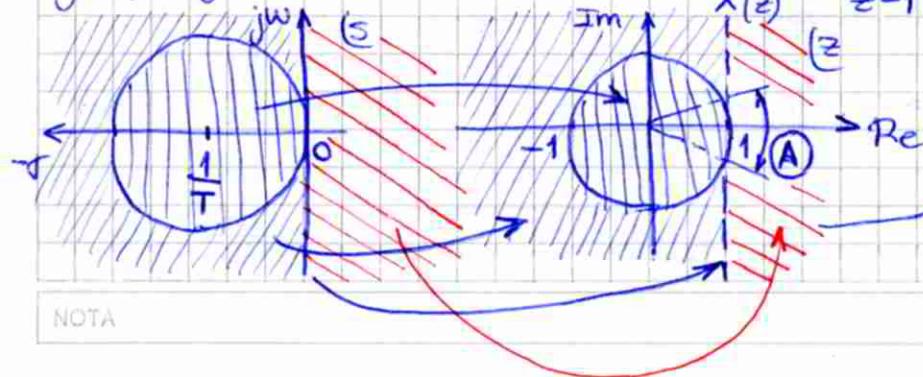
Obteniéndose:  $y(t) = \int_0^t x(t) dt$

Si se discretiza la variable  $t = kT$ :  $y(kT) = \int_0^{kT} x(t) dt + \int_{kT}^{kT+T} x(t) dt = y(kT+T) + \int_{kT+T}^{kT+2T} x(t) dt$

Por lo cual, para poder conocer la integral de una función en tiempo discreto, debe conocerse la integral de la misma en un período de muestras  $T$ , la cual puede aproximarse de 4 formas distintas:

3)c) Transformación Forward (Forward Difference o por Detección):

$$y(kT) = y(kT-T) + x(kT-T) \cdot T \Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T}{z-1} \cong H_I(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow s = \frac{z-1}{T}$$



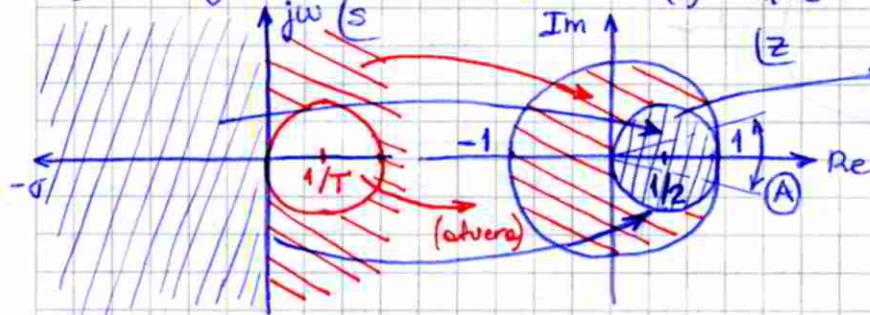
Sólo hay un desplazamiento de los singulares hacia la derecha en una unidad, y escalada con  $T$ .  
Se pierden los ceros de transmisión.



- La zona  $\left(\frac{1}{T} + \sigma\right)^2 + \omega^2 < \frac{1}{T^2}$  (círculo de radio  $\frac{1}{T}$ , centrado en  $\sigma = -\frac{1}{T}$ , tangente al eje  $j\omega$ ) se transforma en el interior del círculo unitario  $|z| < 1$ . El resto del semiplano izquierdo del plano  $s$  se transforma en una zona inestable del plano  $z$ , por lo cual sólo se obtendrán  $H_d(z)$  estables si  $H_A(s)$  tiene sus polos dentro del círculo mencionado al principio. Los sistemas de alto  $Q$  probablemente no tengan todos sus polos allí, y pueden resultar sistemas inestables ("MEJORAMIENTO" del  $Q$ ).
- Habrá distorsión de la respuesta en frecuencia ya que el eje  $j\omega$  no se transforma en la circunferencia  $|z|=1$ . Esta distorsión puede ser aceptable si se trabaja p.ej. en la zona  $\textcircled{A}$ , donde  $|z|=1$  casi coincide con  $\text{Re}(z)=1$ , recto en el cual se transforma el eje  $j\omega$  (recta punteada).
- La región que proporciona filtros estables y la zona  $\textcircled{A}$  (en frecuencia absoluta) aumenta con la frecuencia de muestreo  $f_s = \frac{1}{T}$ .

### 3)b) Transformación Backward (Backward Difference o por Exceso):

$$y(kT) = y(kT-T) + x(kT) \cdot T \Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T}{1-z^{-1}} \cong H_I(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow s = \frac{1-z^{-1}}{T}$$



Las posibles ubicaciones de los polos del filtro digital quedan contenidas a esta zona, de pequeñas frecuencias.

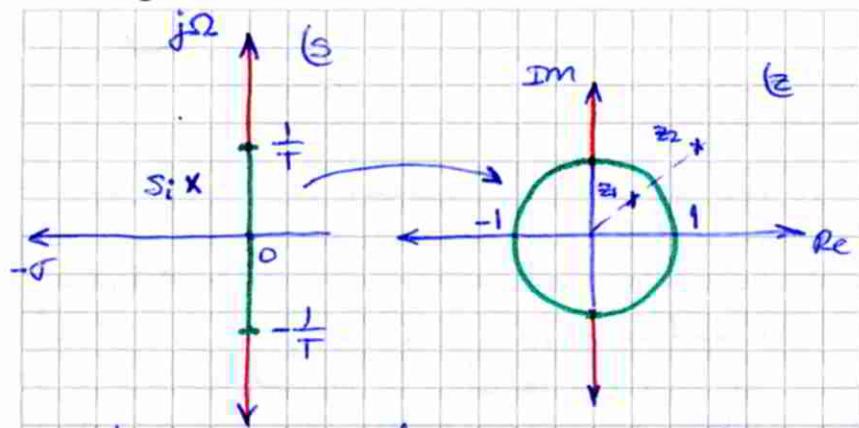
Se pierden los ceros de transmisión. Sistemas no estables en "s" pueden ser estables en "z".

- La zona  $\sigma < 0$  (semiplano izquierdo del plano  $s$ ) se transforma en el interior del círculo  $x^2 + y^2 - x < 0$  (donde  $z = x + jy$ ), y el eje  $j\omega$  se transforma en los límites de este círculo (circunferencia  $x^2 + y^2 - x = 0$ ). Por lo cual toda  $H_A(s)$  estable permitirá obtener una  $H_d(z)$  estable con esta transformación.
- Nuevamente habrá distorsión de la respuesta en frecuencia, la cual puede ser aceptable en la zona  $\textcircled{A}$  donde ambas circunferencias ( $|z|=1$  y a la que se transforma el eje  $j\omega$ ) casi coinciden. Hay un "EMPEORAMIENTO" del  $Q$  (más lejos de  $|z|=1$ ).
- La zona  $\textcircled{A}$  (en frecuencia absoluta) aumenta con la frecuencia de muestreo.

### 3)c) Transformación LDI (Lossless Discrete Integrator o de Punto Medio):

$$y(kT+T) = y(kT-T) + 2Tx(kT) \Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2T}{z-z^{-1}} \cong H_I(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow s = \frac{z-z^{-1}}{2T}$$

Como  $x(kT)$  está en tiempo discreto, no se conoce su valor en el medio de un período  $T$ , debentomarse dos períodos  $T$  y tomar  $x(kT)$  en el medio de ellos.

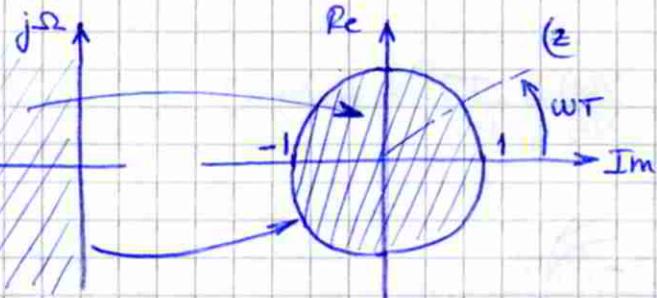


- Si  $\Omega$  es la frecuencia analógica y  $W$  es la frecuencia digital:
  - $|\Omega| \leq \frac{\pi}{T}$  se mapea en  $|z|=1$
  - $|\Omega| > \frac{\pi}{T}$  se mapea en  $\text{Im}(z) > 1$  y  $\text{Im}(z) < -1$
  - $\Omega = \frac{1}{T} \sin(W\pi)$  (Relación NO LINEAL)

- Cada polo si en el plano  $S$  se transforma en 2 polos en el plano  $z$ ,  $z_1$  y  $z_2$ , que cumplen:  $z_1 \cdot z_2 = -1$ , por lo cual uno cae dentro del círculo unitario y el otro fuera. Por ello, este transformación DA SIEMPRE SISTEMAS INESTABLES, no es usada para el diseño de IIR pero sí para otras aplicaciones.

### 3)d) Transformación Bilineal:

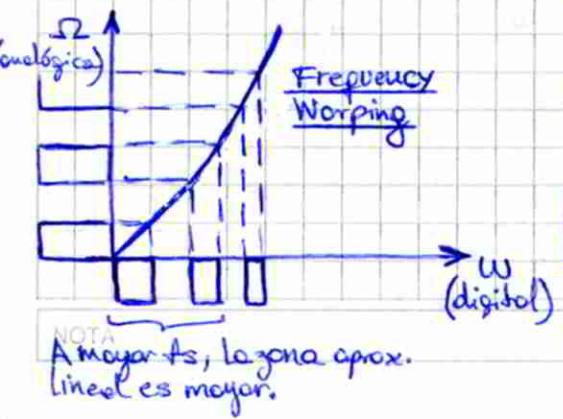
$$y(kT) = y(kT-T) + \frac{x(kT-T) + x(kT)}{2} T \Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \cong \frac{1}{s} \Rightarrow s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$



- Si  $\Omega$  es la frecuencia analógica y  $W$  es la frecuencia digital:
 
$$z = e^{jW\pi} = \frac{\frac{2}{T} + s}{\frac{2}{T} - s} = \frac{(\frac{2}{T} + \sigma) + j\Omega}{(\frac{2}{T} - \sigma) - j\Omega}$$

$$W = \frac{2}{T} \arctan\left(\frac{\Omega\pi}{2}\right) \quad (\text{Relación NO LINEAL})$$

- La transformación bilineal mapea todo el eje  $j\omega$  en la circunferencia unitaria  $|z|=1$  UNA SOLA VEZ, por lo cual NO HAY ALIASING. Esto permite realizar TODO TIPO DE FILTROS (PASAJOS, PASAALTOS, PASABANDA, RECHAZABANDA)
- Todos los puntos del semiplano izquierdo del plano  $s$  se transforman en el interior del círculo unitario  $|z|<1$ , y los del semiplano derecho en el exterior de este. Por lo cual todo  $H(s)$  estable dará una  $H(z)$  estable.
- $s=0$  se mapea en  $z=1$ , y  $s=\infty$  se mapea en  $z=-1$ . Por lo cual, el rango exterior de  $\Omega$  se mapea en  $-\pi \leq W \leq \pi$ , resolviendo una compresión de las frecuencias (llamada FREQUENCY WARPING (se comprime la respuesta en frecuencia)).



La gran mayoría de los diseños se hacen con esta transformación (es MUY UTILIZADA). Se parte de una plantilla digital, convirtiendo sus frecuencias al campo analógico haciendo el llamado PREWARPING:

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{W\pi}{2}\right)$$

Se diseña en el campo analógico, y luego se aplica la transformación bilineal obteniendo  $H(z)$ . De esta forma puede garantizar que sea cumpliendo plantilla.



## Circuitos con Capacitores Switcheados (SC)

Históricamente, los primeros filtros analógicos de alta calidad fueron realizados con circuitos pasivos LRC. Debido al gran tamaño de los inductores, sus pérdidas e imposibilidad de integración, se mejoraron a realizar circuitos activos RC. Los mismos eran miniaturizados en pequeñas placas con aux. operacionales. El próximo paso era realizar FILTROS COMPLETAMENTE INTEGRADOS.

Para ello, la tecnología MOS presentaba grandes ventajas respecto de la bipolar pero a su vez ciertas desventajas para integrar circuitos activos RC:

### Ventajas

- Implementación de C integrados de alta calidad.
- Almacenamiento de carga con bajas pérdidas
- Posibilidad de usar la carga sin modificarla ni perderla
- Error < 1% en la relación de dos capacidades
- Alta estabilidad térmica
- Implementación de aux. op. con alta ganancia y bajo ruido

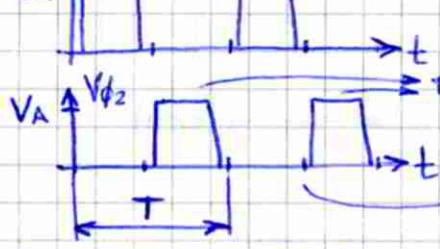
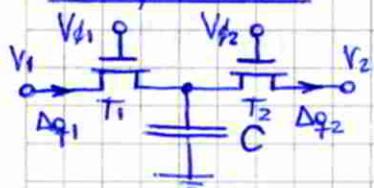
### Desventajas

- Sólo pueden implementarse C hasta 100 pF con precisión 5-10%
- En audiofrecuencia, requeriría R del orden del MΩ, ocupando gran área y resultando no lineales
- Los errores de  $R_g$  y  $C$  no son correlacionados por lo que se suman, resultando  $Z = R \cdot C$  con gran error.

Para sobreponer estos desventajes, se ideó la posibilidad de SIMULAR RESISTENCIAS utilizando capacitores y switches, ambos realizados con tecnología MOS. Estos son los circuitos con capacitores switcheados, y además de utilizarse en filtros se emplean en conversores A/D y D/A.

## Simulación de Resistencias con Capacitores y Switches MOS:

### • SC paralelo:



C es alternativamente cargado a  $V_1$  y  $V_2$ . Cada vez, una carga  $\Delta q = C(V_1 - V_2)$  fluye.

Hay un pequeño intervalo de tiempo con ambas llaves abiertas.

Si inicialmente, cuando  $V_{d1} = V_{d2} = 0$ , C estaba cargado a  $V_2$ :

- Cuando  $V_{d1} = V_A \Rightarrow \Delta q_1 = C(V_1 - V_2)$  y C se carga a  $V_1$  ( $V_{d2} = 0$ )
- Cuando  $V_{d2} = V_A \Rightarrow \Delta q_2 = C(V_1 - V_2)$  y C se carga a  $V_2$  ( $V_{d1} = 0$ )

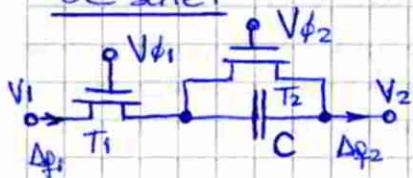
$\Delta q = \Delta q_1 = \Delta q_2$  quedando la CORRIENTE PROMEDIO por ciclo:

$$i = \frac{\Delta q}{T} = \frac{V_1 - V_2}{T/C} \Rightarrow \text{El circuito tiene, en PROMEDIO: } R = \frac{T}{C}$$



La ley de Ohm no se verifica en un instante, sino en promedio en un periodo "T". Los switches convierten al capacitor en un elemento sin memoria de carga, debido a la recarga periódica, disipándose la misma a través de los llaves.

### • SC serie:



La señal de clock es la misma que en el caso anterior. Es alternativamente descargado, y recargado a  $(V_1 - V_2)$ . Durante la recarga fluye una carga  $\Delta q = C(V_1 - V_2)$ .

• Cuando  $V_{d2} = V_A$  ( $V_{d1}=0$ )  $\Rightarrow$  C se descarga por  $Q_2$ ,  $\Delta q_1 = \Delta q_2 = 0$

• Cuando  $V_{d1} = V_A$  ( $V_{d2}=0$ )  $\Rightarrow$  C se carga a  $(V_1 - V_2)$ ,  $\Delta q_1 = \Delta q_2 = C(V_1 - V_2)$

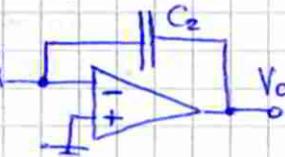
Resistencia:  $R = \frac{T}{C}$

### Constante de tiempo de 1º orden con SC:

Si se desea:  $\tau = R_i \cdot C_2$  y se realiza  $R_i = \frac{1}{C_1} \Rightarrow \tau = T \cdot \frac{C_2}{C_1} \Rightarrow$  Proporcional a la relación  $C_2/C_1$ , que se logra con error < 1%

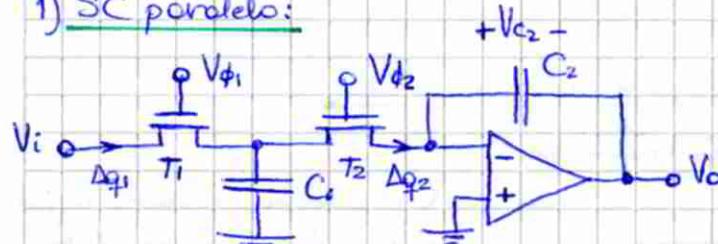
### Integrador con SC:

Como los integradores son los componentes básicos para realizar un filtro, se busca implementarlos con SC. A partir del integrador inversor, la idea es simular  $R_i$  con los métodos vistos.



Debe tenerse en cuenta que los circuitos que se obtendrán serán aproximaciones al integrador deseado. A pesar de trabajar en forma analógica, las tensiones  $V_i$  y  $V_o$  sólo tienen sentido en instantes de tiempo discretos (apertura/cierre de llaves), por lo cual hay un Muestreo de los señales intrínsecas en el sistema. Por ello las transiciones son suyadas usando transformada Z.

### 1) SC paralelo:



t	T1	T2	Cargas
$t_{n-1}$	conduce	abierto	$C_1$ se carga a $V_1$ $\Delta q_1 = C_1 \cdot V_1(t_{n-1})$
$t_{n-1} + \frac{T}{2}$	abierto	conduce	$C_1$ se descarga a $C_2$ $\Delta q_2(t_n) = C_1 \cdot V_1(t_{n-1})$ $\Delta V_2(t_n) = \frac{\Delta q_2(t_n)}{C_2} = \frac{C_1}{C_2} V_1(t_{n-1})$

$$V_o(t_n) - V_o(t_{n-1}) = - (V_{c2}(t_n) - V_{c2}(t_{n-1})) = - \frac{C_1}{C_2} V_1(t_{n-1})$$

$$\frac{V_o(z)}{V_i(z)} = - \frac{C_1 \cdot z^{-1}}{C_2 \cdot 1 - z^{-1}} = H(z)$$

IDEAL:  $H_{RC}(j\omega) = - \frac{1}{j\omega R C}$

REAL:  $H_{SC}(e^{j\omega T}) = - \frac{C_1/C_2}{T(j\omega - \frac{W^2 I}{Z} + \dots)}$

La transfunción obtenida es, a diferencia del ideal, periódica y compleja (no es imaginaria pura, hay pérdidas). Poco será una buena aproximación:

$R_i = \frac{T}{C_1}$  (surge solo del SC)

$\omega T \ll 1 \Rightarrow f_{in} < \frac{1}{100} f_{clock}$

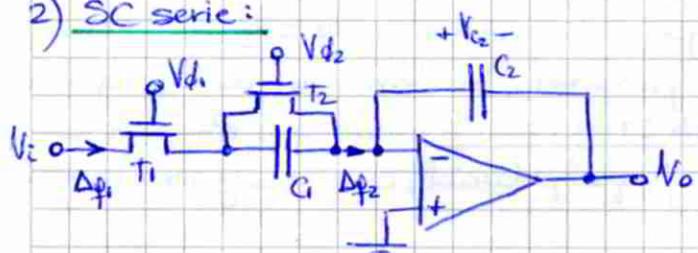
Resultado MUCHO MÁS EXIGENTE que Nyquist

Otra posibilidad para llegar a la transferencia obtenida es a partir de la Transformación FORWARD, que representa a este sistema:

$$H_{RC}(s) = -\frac{1}{s R_1 C_2} \quad \begin{aligned} & \bullet R_1 = \frac{T}{C_1} \\ & \bullet s = \frac{z-1}{T} \end{aligned} \Rightarrow H(z) = -\frac{C_1}{C_2} \frac{z-1}{1-z^{-1}}$$

La zona donde la distorsión es aceptable es para  $W \ll \frac{W_s}{2} \Rightarrow f_{in} < \frac{1}{100} \text{ fak}$

### 2) SC serie:



$$V_o(t_n) - V_o(t_{n-i}) = -\frac{C_1}{C_2} V_i(t_n)$$

$$\frac{V_o(z)}{V_i(z)} = -\frac{C_1}{C_2} \frac{1}{1-z^{-1}} = H(z)$$

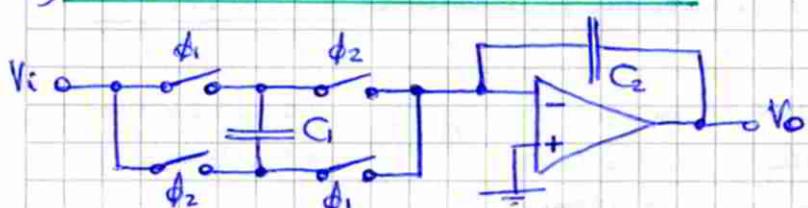
La Transformación BACKWARD representa a este sistema:

$$H_{RC}(s) = -\frac{1}{s R_1 C_2} \quad \begin{aligned} & \bullet R_1 = \frac{T}{C_1} \\ & \bullet s = \frac{1-z^{-1}}{T} \end{aligned} \Rightarrow H(z) = -\frac{C_1}{C_2} \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Nuevamente la distorsión es aceptable para  $f_{in} < \frac{1}{100} \text{ fak}$ . En este caso, como la salida depende de  $V_i(t_n)$ , NO HAY RETARDO, lo que sí sucede en el SC paralelo.

Por otro lado, estos esquemas son muy sensibles a las capacidades parásitas presentes entre los nodos flotantes y masa, del orden de los  $0.05\text{pF}$ . Para que ellos sean despreciables,  $C_1$  y  $C_2$  requieren de un gran área para su implementación.

### 3) SC con Transformación Bilineal:



Esta forma de modelar la resistencia utiliza 4 llaves, que se cierran y abren de a pares.

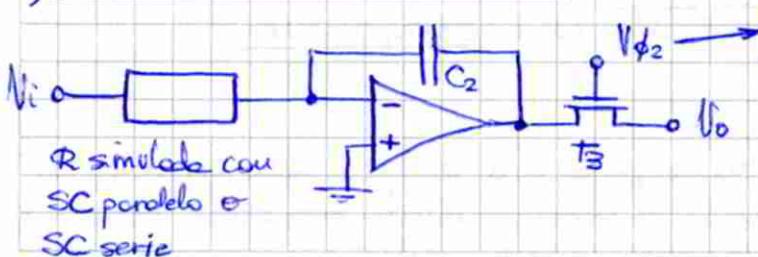
$$H_{RC}(s) = -\frac{1}{s R_1 C_2}$$

$$\begin{aligned} & \bullet R_1 = \frac{T}{2C_1} \\ & \bullet s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \end{aligned}$$

Empleo el doble de fak que cutes.

$$\Rightarrow H(z) = -\frac{C_1}{C_2} \frac{z+1}{z-1}$$

### 4) SC con Transformación LDI:



Misma tensión que controla el  $T_2$  del SC paralelo o del SC serie.

Estos integradores no tienen pérdidas (LDI: lossless Discrete Integrators). Dorian siempre sistemas inestables, pero en circuitos SC pueden resultar compensados.

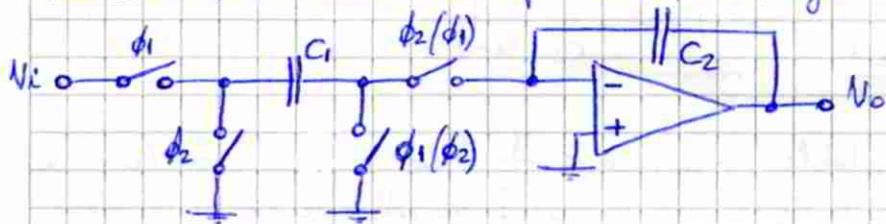
$$H(s) = -\frac{1}{sR_1C_2} \quad \begin{aligned} & R_1 = \frac{T}{C_1} \\ & S = \frac{z^{1/2} - z^{-1/2}}{T} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{En } x(kT), k \text{ es el} \\ \text{punto intermedio} \\ \text{entre dos muestras,} \\ \text{a diferencia del LDI} \\ \text{visto antes.} \end{array} \right\} \Rightarrow H(z) = -\frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{z^{-1/2}}{1-z^{-1}}$$

Estos dos últimos sistemas también tienen el problema de ser muy sensibles a cap. parásitos.

### Circuitos SC insensibles a las capacidades parásitas:

Para poder minimizar la superficie de los circuitos integrados deben utilizarse capacidades pequeñas, por lo cual las capacidades parásitas no deben influir. Por ello, en lugar de los esquemas anteriores, se utilizan en la práctica otros sistemas. Para lograr insensibilidad a dichas capacidades parásitas, los terminales de cada capacitor deben commutar entre nodos de MUY BAJA IMPEDANCIA, como son masa y la salida del amplificador operacional, o entre puntos de igual potencial, como masa y masa virtual.

Un sistema insensible a las capacidades parásitas, que se comporta similar al SC paralelo (serie), pero que constituye un integrador NO INVERSOR al presentar una inversión adicional en la resistencia equivalente, es el siguiente:



### Cascada de Etapas de 2º orden:

Conociendo que una transferencia de orden "n" puede realizarse colocando etapas de 1º y 2º orden en cascada, se integran etapas UNIVERSALES reemplazando los integradores y resistencias del equivalente analógico por sistemas SC insensibles a las capacidades parásitas. En general representan transferencias BIQUADRÁTICAS, siempre en tiempo discreto (en z):

$$H(z) = -\frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{b_2 z^2 + b_1 z + 1} \quad \begin{aligned} & \Im W < \frac{1}{T}, \text{ entonces} \\ & \text{es válida } z = e^{j\omega T} \cong 1+j\omega T \\ & (\text{con } s=j\omega), \text{ obteniéndose:} \end{aligned} \quad H_A(s) = -\frac{k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{s^2 + \frac{W_0}{Q}s + W_0^2}$$

Estos circuitos integrados tienen las ventajas de permitir variar las frecuencias de los ceros y polos con el clock en forma muy precisa, y de permitir variar los Q en forma independiente mediante R externos.

A nivel práctico debe tenerse en cuenta que el MUESTREO intrínseco en estos sistemas obliga a emplear en muchos casos FAA y FR para el circuito con SC, que generalmente resultan ser simples. La salida fue entregada en ESCALONADA.

### Filtros Escolena (Leap Frog):

Cuando se deseó integrar filtros de orden superior a 6 de frecuencia variable, los Q resultaron muy elevados y las sensibilidades de las etapas en cascada muy altas. Por ello se utilizaron redes bipuente RLC doblemente cargadas, sintetizables con integradores y resistencias, y reemplazándolas con circuitos SC. Las sensibilidades resultaron menores.



## Diseño de Filtros FIR

### Filtros FIR de fase lineal:

En general, un filtro FIR de longitud (orden) "N" está dado por:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x(n-k) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) x(n-k) \Rightarrow H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) z^{-k}$$

La respuesta al impulso  $h(k)$  está dada por los coeficientes del filtro:  $h(k) = b_k, k=0, \dots, N-1$

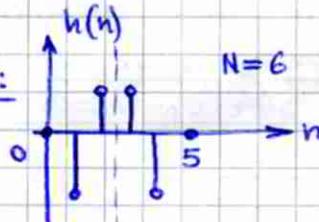
La respuesta en frecuencia está dada por:  $H(e^{j\omega T}) = H(z)|_{z=e^{j\omega T}} = |H(e^{j\omega T})| e^{j\theta(\omega)}$

Para cumplir la condición de FASE LINEAL hay dos alternativas posibles:

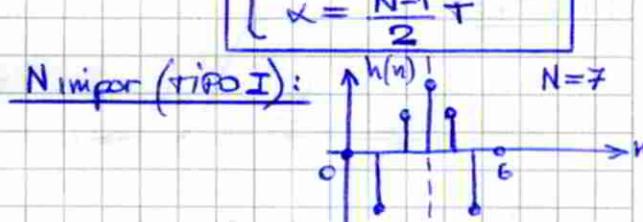
- Filtro FIR simétrico:  $\theta(\omega) = -\alpha\omega$ , Solución  $\Rightarrow$

$$\begin{cases} h(n) = h(N-1-n) \\ \alpha = \frac{N-1}{2}\pi \end{cases}$$

N par (TIPO II):



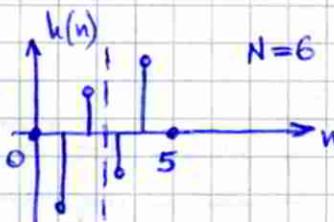
N impar (TIPO I):



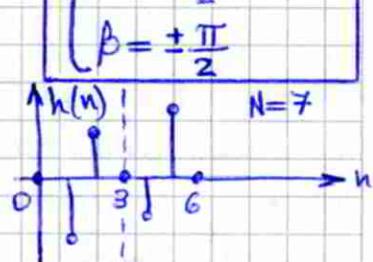
- Filtro FIR antisimétrico:  $\theta(\omega) = -\alpha\omega + \beta$ , Solución  $\Rightarrow$

$$\begin{cases} h(n) = -h(N-1-n) \\ \alpha = \frac{N-1}{2}\pi \\ \beta = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

N par (TIPO IV):



N impar (TIPO III):



### Respuesta en Frecuencia:

$$H(e^{j\omega T}) = H_0(j\omega) e^{j\theta(\omega)} \quad H_0(j\omega) \text{ es una función REAL} \Rightarrow |H(e^{j\omega T})| = H_0(j\omega)$$

$$\bullet \text{ TIPO I: } H_0(j\omega) = \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} c_k \cos(k\omega T) \quad \left. \begin{array}{l} \theta(\omega) = \begin{cases} -\frac{N-1}{2}\omega T & \leq H_0(j\omega) > 0 \\ -\frac{N-1}{2}\omega T + \pi & \leq H_0(j\omega) < 0 \end{cases} \end{array} \right\}$$

$$\bullet \text{ TIPO II: } H_0(j\omega) = \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} b_k \cos\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)\omega T\right] \quad \left. \begin{array}{l} \theta(\omega) = \begin{cases} -\frac{N-1}{2}\omega T + \frac{\pi}{2} & \leq H_0(j\omega) > 0 \\ -\frac{N-1}{2}\omega T + \frac{3\pi}{2} & \leq H_0(j\omega) < 0 \end{cases} \end{array} \right\}$$

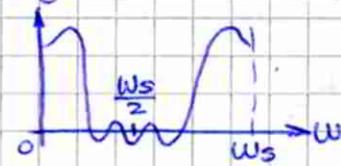
$$\bullet \text{ TIPO III: } H_0(j\omega) = \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} a_k \sin(k\omega T) \quad \left. \begin{array}{l} \theta(\omega) = \begin{cases} -\frac{N-1}{2}\omega T + \frac{\pi}{2} & \leq H_0(j\omega) > 0 \\ -\frac{N-1}{2}\omega T + \frac{3\pi}{2} & \leq H_0(j\omega) < 0 \end{cases} \end{array} \right\}$$

$$\bullet \text{ TIPO IV: } H_0(j\omega) = \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} b_k \sin\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)\omega T\right]$$

$$a_0 = h\left(\frac{N-1}{2}\pi\right) \quad c_k = 2 \cdot h\left[\left(\frac{N-1}{2}-k\right)\pi\right] \quad b_k = 2 \cdot h\left[\left(\frac{N-1}{2}-k\right)\pi\right]$$

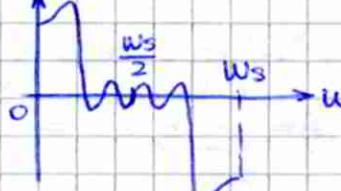
## Ejemplos de gráficas de $H(j\omega)$ :

### TIPO I:



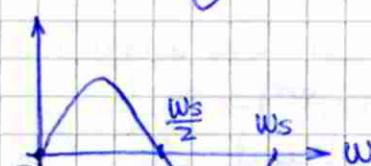
Permite hacer cualquier tipo de filtro cl no tener restricciones para  $H_0(j_0)$  y  $H_0(j\frac{\omega_s}{2})$ . Es el más utilizado para esta aplicación.

### TIPO II:



Cumple  $H_0(j\frac{\omega_s}{2}) = 0$ , por lo cual permite hacer solo pasobanda y pasobanda.

### TIPO III:



Cumple  $H_0(j_0) = H_0(j\frac{\omega_s}{2}) = 0$ , por lo cual permite hacer solo pasobanda. También es utilizado para hacer DIFERENCIADORES (deriva desde 0Hz) y TRANSFORMADORES DE HILBERT (deriva en un BW).

### TIPO IV:



Cumple  $H_0(j_0) = 0$ , por lo cual permite hacer solo pasobandas y pasobanda. También es utilizado para hacer DIFERENCIADORES y TRANSFORMADORES DE HILBERT.

Como los filtros tipos III y IV agregan un desfase exceso de  $\frac{\pi}{2}$  respecto de los tipos I y II, pueden utilizarse un par de ellos (I y III, o II y IV) para generar señales en cuadratura.

## Métodos para el Diseño de Filtros FIR:

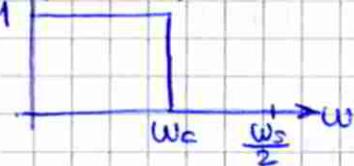
El diseño de un FIR simple se resume a hallar los "N" coeficientes de la respuesta al impulso  $h(n)$ ,  $n=0, \dots, N-1$ , para que la respuesta en frecuencia  $H(e^{j\omega t})$  cumpla las especificaciones deseadas (plantilla). Para además obtener un filtro de fase lineal, se le impondrá a la  $h(n)$  las características de simetría antes mencionadas. En general se utilizan los TIPO I (simétricos, N impar).

Existen básicamente tres métodos para el diseño de FIR:

### 1) Utilizando la Serie de Fourier (Ventanas):

Suponiendo que se desea diseñar un filtro pasobanda, la característica deseada (ideal) será:

$$|H_d(e^{j\omega t})|$$



$$H_d(e^{j\omega t}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-jn\omega t} \Rightarrow \text{Expansión en Serie de Fourier de } H_d(e^{j\omega t})$$

(es su transformada de Fourier, es periódica)

$$h_d(n) = \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} H_d(e^{j\omega t}) e^{jn\omega t} d\omega \Rightarrow \text{Coeficientes de Fourier}$$

→ Infinitos términos (sinc) →  $h_d(n) = \begin{cases} \frac{\sin(n\cdot\omega_c\cdot T)}{n\pi} & n \neq 0 \\ \frac{2\omega_c}{\omega_s} & n = 0 \end{cases}$



las características de la  $hd(n)$  hacen que no se pueda implementar. La no causalidad puede solucionarse introduciendo un delay muy grande, pero el mismo debería ser infinito al haber infinitos términos. Este inconveniente aparece también para todos los demás tipos de filtros ideales.

La solución es TRUNCAR el nº de términos de la  $hd(n)$  hasta "N" términos, y DESPLAZARLA (con un delay) hasta que todos ellos se encuentren en la zona  $n \geq 0$ , de tal forma de obtener un filtro CAUSAL.

$$h_w(n) = hd(n) \cdot w(n) \quad w(n): \text{Ventana de Truncado}$$

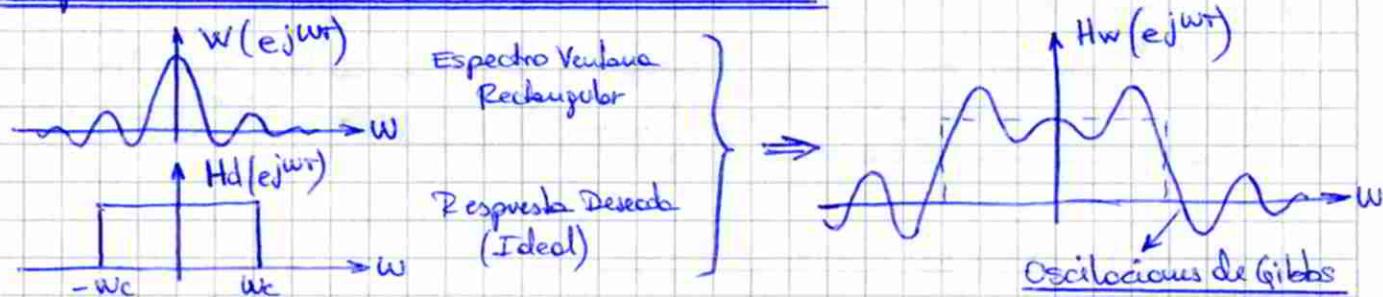
Considerando que  $hd(n)$  (sinc) es simétrica, y la ventana  $w(n)$  también lo es, entonces se mantiene la simetría para obtener FASE LINEAL. El producto en el tiempo discreto da una convolución compleja de las transformadas Z, que se reduce a una convolución en la frecuencia W:

$$H_w(e^{j\omega n}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\Omega T}) \cdot W(e^{j(\omega - \Omega)^T}) d\Omega$$

Si esta respuesta en frecuencia obtenida satisface la plantilla deseada, entonces se obtiene la  $h(n)$  final haciendo causal a la  $hd(n)$  (introduce un desplazamiento en fase):

$$h(n) = h_w\left(n - \frac{N-1}{2}\right) \Rightarrow H(z) = z^{-\frac{N-1}{2}} H_w(z) \quad (N \text{ impar, tipo I})$$

Respuesta obtenida con los distintos ventanas:



El truncado directo de los términos de la  $hd(n)$  (equivalente a aplicar una Ventana Rectangular) significa eliminar términos de la Serie de Fourier de  $H_d(e^{j\omega n})$ . Esto trae como consecuencia la aparición de Oscilaciones de Gibbs, indeseadas, lo que aleja la respuesta obtenida  $H_w$  de la deseada  $H_d$ .

En principio la solución es agregar términos a la  $h_w(n)$ , con lo cual las oscilaciones disminuyen y la respuesta se acerca más a la deseada. Sin embargo, como la convergencia de la Serie de Fourier resulta lenta, por más que el nº de términos "N" se aumente muchísimo la atenuación mínima NO BAJA de 21dB (presente en el 1º lóbulo de las oscilaciones cuando se obtiene). Lo mismo sucede con el ripple en la banda de paso. Si aumenta, encubriendo, la selectividad con el "N" (disminuy-

el ancho de la banda de transición).

Como las atenuaciones máximas en banda de paso y mínima en banda de atenuación NO SE PUEDEN MEJORAR, la solución es utilizar ventanas con lóbulos laterales menores, concéntrica tensa y notch abrupta como la rectangular. Pero para cada ventana tiene también atenuaciones FÍJAS que no pueden mejorarse con el "N", por lo cual:

- Cada ventana define una atenuación determinada.
- El "N" define el ancho de la banda de transición (selección).

A igual "N", a mayor  $A_a$  de la ventana se obtiene una caída más suave en la respuesta en frecuencia (mejor selectividad). Esto puede corregirse aumentando el "N". El lóbulo principal es más ancho. Por ello, a igual selectividad, las ventanas con mayor atenuación requieren mayor "N".

Si se desea una atenuación para la cual ninguna de las ventanas prediseñadas se adoptan, se toma la próxima mayor, pero se tendrá que aumentar el "N" para compensar la caída suave. Esto no permitirá alcanzar el "N óptimo" para todos los casos, ya que será mayor del que realmente se requiere.

### Diseño utilizando la Ventana de Kaiser:

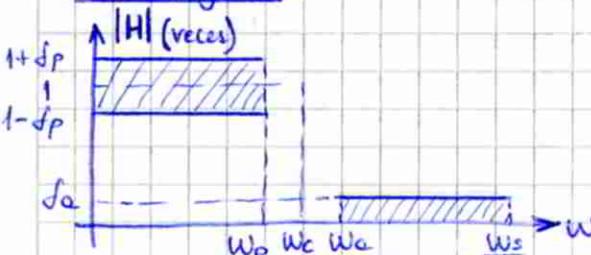
La ventana de Kaiser permite obtener el "N óptimo" para cada caso, aprovechando un parámetro " $\alpha$ " que permite variar, eiforme continua, el ripple desde los valores de la ventana de Blackman hasta los de la Rectangular.

A mayor " $\alpha$ ", mayor  $A_a$  y mayor el ancho de la banda de transición. Una vez elegido el " $\alpha$ " que satisfaga las  $A_a$  y  $A_p$  pedidas, se ajusta el "N" para satisfacer el ancho de la banda de transición pedido.

### Respuesta al Impulso de Filtros Ideales:

Para poder diseñar filtros posibles, probando y rechazando, además de pasabajos, debe conocerse sus respuestas al impulso  $h_d(n)$  correspondientes a los sistemas ideales, para luego poder truncarlos con una ventana y desplazarlos.

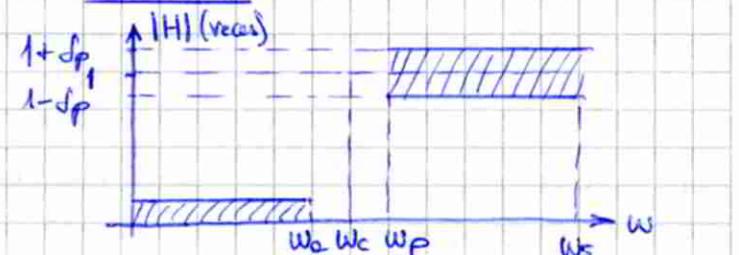
#### • Pasabajos:



$$h_d(n) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi n W_c)}{\pi n} & n \neq 0 \\ 1 & n=0 \end{cases}$$

NOTA:  $W_c = \frac{W_p + W_a}{2}$

#### • Pasobajos:

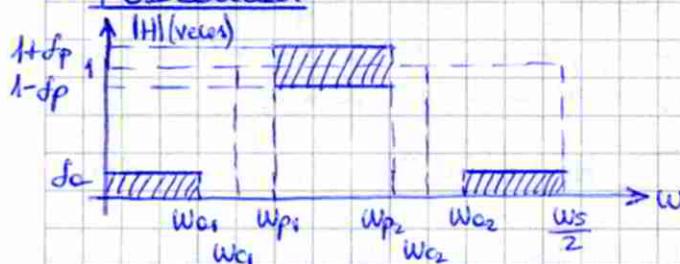


$$h_d(n) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi n W_c)}{\pi n} & n \neq 0 \\ 1 - 2 \frac{\sin(\pi n W_c)}{\pi n} & n=0 \end{cases}$$

B =  $W_p - W_a$   
 $W_c = \frac{W_p + W_a}{2}$



- Pasobanda:



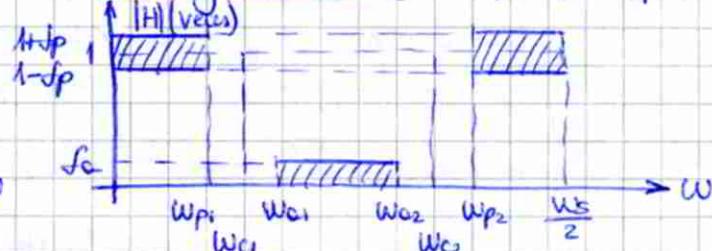
$$hd(n) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(nW_{c1}\pi) - \operatorname{sen}(nW_{c2}\pi)}{n\pi} & n \neq 0 \\ 2 \cdot \frac{W_{c2} - W_{c1}}{W_s} & n = 0 \end{cases}$$

$$\text{Se forma: } B = \min(W_{p1} - W_{s1}, W_{p2} - W_{s2})$$

$$W_{c1} = W_{p1} - \frac{B}{2} \quad W_{c2} = W_{p2} + \frac{B}{2}$$

Respeto banda de paso.

- Rechazobanda: (suma pasobandas + pasostopas)



$$hd(n) = \begin{cases} -\frac{\operatorname{sen}(nW_{c1}\pi) - \operatorname{sen}(nW_{c2}\pi)}{n\pi} & n \neq 0 \\ 1 - 2 \cdot \frac{W_{c2} - W_{c1}}{W_s} & n = 0 \end{cases}$$

$$B = \min(W_{s1} - W_{p1}, W_{p2} - W_{s2})$$

$$W_{c1} = W_{p1} + \frac{B}{2} \quad W_{c2} = W_{p2} - \frac{B}{2}$$

Respeto banda de paso.

### Pasos del diseño con Ventana de Kaiser:

Para cualquiera de los tipos de filtros analizados, los pasos de diseño son:

- Hallar  $hd(n)$  correspondiente al filtro a diseñar
- Conociendo:  $A_p$  (dB): Ripple en Banda de Pasa Máximo aceptado (amplitud del mismo)  
 $A_o$  (dB): Atenuación Mínima deseada en Banda Atenuada.

$$\text{Se calcula: } f = \min \left( f_a = 10^{-\frac{A_o}{20}}, f_p = \frac{10^{\frac{A_p}{20}} - 1}{10^{\frac{A_p}{20}} + 1} \right)$$

$$\bullet \text{ Se recalcule: } A_o' = -20 \log(f)$$

$$\bullet \text{ Se halla: } \alpha = \begin{cases} 0 & A_o' \leq 21 \\ 0,5842 (A_o' - 21)^{0,4} + 0,07886 (A_o' - 21) & 21 < A_o' \leq 50 \\ 0,1102 (A_o' - 8,7) & A_o' > 50 \end{cases}$$

$A_o' \leq 21$  (rectangular)

$21 < A_o' \leq 50$

$A_o' > 50$

$$\bullet \text{ Se halla el "N" mínimo impar (TIPO I) que satisface:}$$

$$N \geq 1 + \frac{W_s \cdot D}{B} \quad D = \begin{cases} 0,9222 & A_o \leq 21 \\ \frac{A_o' - 7,95}{14,36} & A_o > 21 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Con } N \text{ y } \alpha \text{ se halla la ventana de Kaiser } W(n)$$

$$\bullet \text{ Se forma:}$$

$$H(z) = z^{-\frac{N-1}{2}} \cdot H_w(z), \text{ donde: } H_w(z) = z^{\{hd(n) \cdot W(n)\}}$$

$$\text{Quedando: } h_w(n) = hd(n) \cdot w(n) \Rightarrow h(n) = h_w(n - \frac{N-1}{2})$$



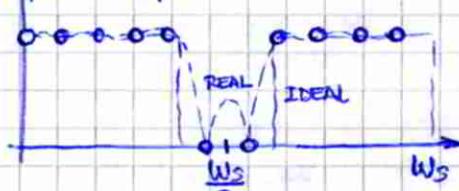
## 2) Muestreo en el Dominio de la Frecuencia:

A partir de la respuesta en frecuencia deseada ( $H_d(e^{j\omega})$ ), es posible tomar "N" muestras de la misma entre  $\omega = 0$  y  $\omega = \omega_s$ , equiespacadas. Estas muestras definirán por completo una respuesta al impulso  $h(n)$  a través de la IDFT, logrando que las muestras correspondan a la DFT de  $h(n)$ :

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \Rightarrow h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$H(k) = H_d(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N} k} \quad (\text{muestra la } H_d(e^{j\omega}) \text{ sobre el eje } \omega, \text{ equivalente a muestrear la } H(z) \text{ sobre el círculo unitario, tomando muestras equiespacadas})$$

$$|H_d(e^{j\omega})|$$



La respuesta en frecuencia del filtro obtenido, con respuesta al impulso  $h(n)$ , tendrá un error nulo respecto a la deseada donde caen las muestras, y un error finito entre ellas.

La respuesta en frecuencia obtenida resulta:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega T \cdot \frac{N-1}{2}} \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \cdot S(\omega, k)$$

$$S(\omega, k) = \pm e^{-j \frac{\pi}{N} k} \cdot \underbrace{\sin \left( \frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} k \right)}_{\sin \left( \frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} k \right)}$$

Función que interpola las muestras, similar a la sinc.

En el caso de partir de un filtro ideal, no habrá muestras en la banda de transición al ser la misma nula, y el ripple cerca de la transición es alto en la respuesta obtenida debido a los oscilaciones de Gibbs. Por ello es posible colocar una muestra en una "supuesta" banda de transición y minimizar el ripple, al coste de tener una caída más suave. La posición óptima de la (o las) muestra(s) muestra(s) está debatida.

### Diseño mediante cálculo matricial:

$$H_d(e^{j\omega_k}) = H(k) = \sum_{n=0}^P h(n) a_{nk} \quad \omega_k = \frac{2\pi}{N} (k+\alpha) \quad k = 0, 1, \dots, P, \quad \alpha = 0 \text{ ó } \frac{1}{2}$$

$\omega_k$  son las frecuencias donde se muestrea  $H_d(e^{j\omega})$ ,  $\alpha=0$  significa que la primera muestra estará en  $\omega=0$  y  $\alpha=\frac{1}{2}$  significa que estará en  $\omega=\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{N}$ . "N" es el orden (longitud) del filtro FIR, y "k" llega hasta "P" por simetría:  $\begin{cases} P = \frac{N-1}{2} & \text{si } N \text{ es impar (tipos I y III)} \\ P = \frac{N}{2}-1 & \text{si } N \text{ es par (tipos II y IV)} \end{cases}$  Se despejan los coeficientes  $h(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, P$  de:

$$\begin{bmatrix} H_d(e^{j\omega_0}) \\ \vdots \\ H_d(e^{j\omega_P}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & \dots & a_{0P} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{P0} & \dots & a_{PP} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h(0) \\ \vdots \\ h(P) \end{bmatrix}$$

$a_{nk}$ : depende del tipo de FIR elegido (I-IV)  
(se despejan de sus expresiones de  $H_d(j\omega)$ )

Diseño Mediante uso de tablas: Permite colocar 1 ó 2 muestras en la banda de transición

A los tablas se ingresa con:  $\begin{cases} M: \text{orden (longitud) del filtro FIR} \\ (\text{una vez fijados } \alpha \text{ y muestras en la banda de paso}) \end{cases}$

(una vez fijados  $\alpha$  y muestras en la banda de transición)  $\begin{cases} BW: \text{nº de muestras en la banda de paso del filtro} \\ (\text{p ej, para la figura de arriba de tab en } BW=5) \end{cases}$

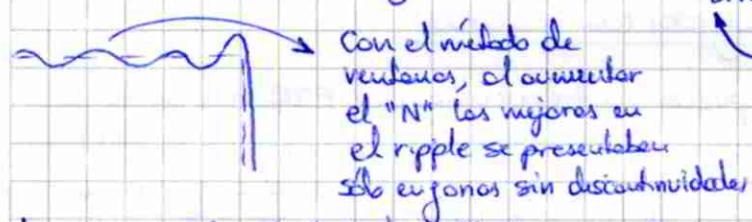
Se obtienen de las tablas:  $\begin{cases} T_1, T_2: \text{amplitud relativa a la amplitud en banda pasante de las muestras en banda de transición (en veces)} \\ \text{(Nota: } T_1, T_2 \text{ son iguales)} \end{cases}$

Minimax: amplitud relativa en dB del máximo lóbulo secundario.

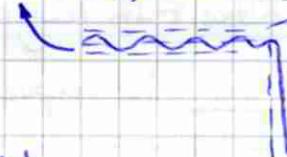


### 3) Por el Método MinitMax (de Parks - McClellan, Equiripple o Chebyshev):

Los métodos anteriores tienen la desventaja de no tener un control preciso de las frecuencias críticas, como son  $W_p$  y  $W_a$ . El método siguiente encara el diseño de un filtro FIR como un problema de aproximación de Chebyshev. La idea es obtener un filtro óptimo en el sentido que el error entre la respuesta obtenida y la deseada se distribuya en forma pareja entre la banda de paso y entre la banda de transición, MINIMIZANDO EL ERROR MÁXIMO. Se obtiene de esta forma un filtro con ripple parejo en cada banda, características de los filtros de Chebyshev.



$$\text{Errores (+)} = \text{Errores (-)}$$



Con este método, al aumentar el "N" hay mejoras en toda la banda.

La respuesta  $H_0(e^{j\omega})$  hallada para los cuatro tipos de filtros FIR con diseño lineal puede generalizarse escribiendo:

$$H_0(e^{j\omega}) = P(\omega) \cdot Q(\omega)$$

$$P(\omega) = \sum_{k=0}^L \alpha(k) \cos(k\omega)$$

$$L = \frac{N-1}{2} \text{ TIPOS I y III}$$

$$L = \frac{N}{2} - 1 \text{ TIPOS II y IV}$$

$$Q(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{TIPO I} \\ \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) & \text{TIPO II} \\ \operatorname{sen}(\omega) & \text{TIPO III} \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right) & \text{TIPO IV} \end{cases}$$

Si  $H_d(\omega)$  es la respuesta deseada del filtro,  $W(\omega)$  es una función que pondera el error de la aproximación y  $E(\omega)$  es el error de la aproximación:

$$E(\omega) = W(\omega) [H_d(\omega) - P(\omega) \cdot Q(\omega)]$$

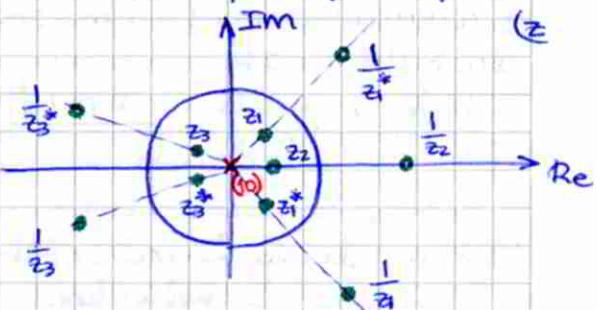
Se busca encontrar los coeficientes  $\alpha(k)$  que minimicen  $E(\omega)$  en toda la banda donde se aproxima  $H_d(\omega)$  por  $H_0(e^{j\omega})$ . Para ello existe un algoritmo iterativo llamado ALGORITMO REHEZ o de PARKS - MCCLELLAN.

La ventaja de contar con la función que pondera el error,  $W(\omega)$ , es poder mejorar, p.ej., filtros multibanda con distintos ripple en cada banda de interés.

## Características de los ceros de los filtros FIR de fase lineal:

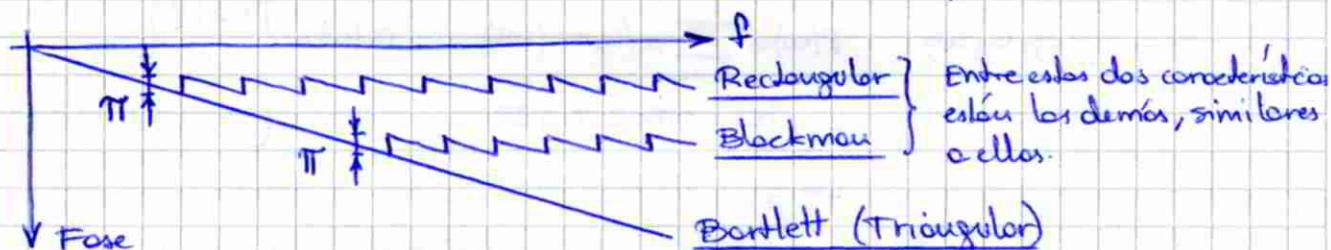
Sea un filtro FIR de fase lineal de alguno de los tipos visto (I-IV), su transferencia  $H(z)$  cumple:  $\pm H(z) = z^{-(M-1)} H(z^{-1})$ , donde  $M$ : orden (length) del FIR.

Por lo cual, las raíces de  $H(z)$  son idénticas a las de  $H(z^{-1})$ , lo que implica que deben ocurrir en pares recíprocos. Si la respuesta es real, entonces las raíces complejas deben ocurrir en pares complejos conjugados. Por ser FIR, esto sucederá con los ceros, ya que todos los polos estarán en el origen.



## Características de los filtros FIR realizados con ventanas:

- Características de Fase: La respuesta en frecuencia del FIR resultante del diseño con una cierta ventana será la convolución de la respuesta del filtro ideal con la respuesta en frecuencia de la ventana. Los ventana poseen ceros de transmisión, por lo que también lo tendrá la respuesta final (algunos). Los características de Fase para un FIR de fase lineal, quedan con los ventana:



La Rectangular es la de menor ancho del lóbulo central, pero los ceros de transmisión aparecen primero en ella. La Blackman es la de menor selectividad y mayor ancho del lóbulo central, sucediendo al revés que para la anterior. En cada una de ellas hay, luego de cada cero, un cambio de signo (salto en  $\pi$ ).

La Bartlett (triangular) tiene como característica en frecuencia un  $\text{sinc}^2$ , siempre positivo, por lo que no tiene cambios de signo y no altera la fase del filtro.

Los filtros FIR diseñados con ventana de Bartlett NO TIENEN CEROS DE TRANSMISIÓN debido a sus características en frecuencia, que a pesar de tener ceros de transmisión, luego de la convolución con la respuesta ideal desaparecen (es la convolución de un  $\text{sinc}^2$  con un pulso, el área siempre suma al ser el  $\text{sinc}^2$  positivo, nunca se hace el área nula).



## Comparación entre filtros digitales IIR y FIR

Elegir un filtro digital para un diseño depende de dos factores primordiales. Primero la complejidad del cálculo y análisis; segundo y más importante, sus propiedades al medir su *performance*. Las siguientes características deben tenerse en cuenta a la hora de decidir si un diseño se implementa con IIR o FIR.

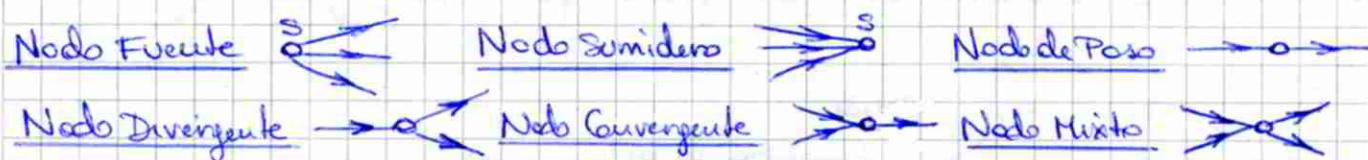
Característica	IIR	FIR
Cantidad de multiplicaciones	Menor	Mayor
Sensibilidad a la cuantización de coeficientes	Dependiente de la estructura	Muy baja
Probabilidad de error de overflow	Dependiente de la estructura	Muy baja
Estabilidad	Debe ser diseñada	Garantizada
Fase lineal	No	Si, para coeficientes de la $h(n)$ simétricos
Emula filtros analógicos	Si	No
Cantidad de memoria (hardware) requerida	Menor	Mayor
Complejidad para controlar la implementación	Moderada	Simple
Disponibilidad de buen software de diseño	Buena	Muy buena
Complejidad de diseño de $H(z)$	Alta	Baja
Dificultad de análisis de ruido de cuantización	Alta	Baja

Las especificaciones de los filtros muchas veces nos orientan a uno u otro tipo. Por ejemplo la velocidad de los datos nos inclina por IIR mientras que la linealidad de fase por los FIR.

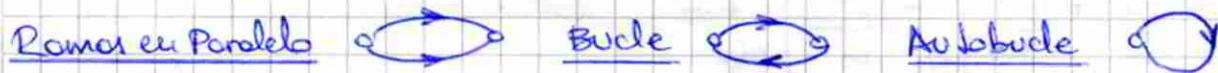


## Grafos de Señal

Un Grafo de Señal es una herramienta para calcular la ganancia de un circuito analógico o de un diagrama en bloques digital. En contraste con el Grafo Topológico, que describe el circuito y se usa para resolución por variables de estado, un Grafo de Señal representa las ecuaciones lineales del circuito.



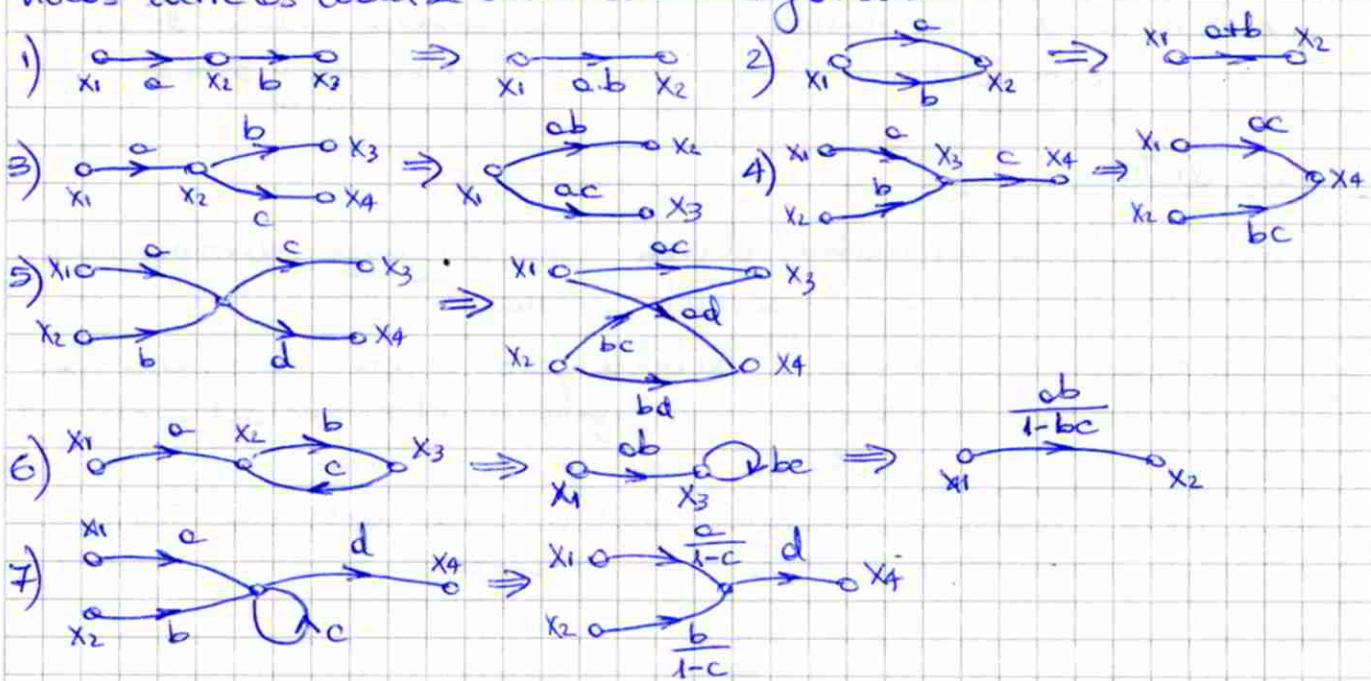
En función de las ecuaciones lineales obtenidas despejando todas las variables dependientes en función de las demás, y sin despejar la variable independiente (fuente) se redige el grafo colocando un nodo por variable y relacionándolas con flechas que indican la relación (ganancia, inversión) entre esas variables.



Para resolver un grafo de señal existen distintos métodos:

### Método de Reducción:

Se reduce el grafo aplicando las siguientes reglas, hasta dejar solamente los nodos entre los cuales se desea obtener la ganancia:



Para eliminar un autobucle, se dividen todos los ganancias de los ramos que llegan al nodo del autobucle por  $\frac{1-g}{1-g}$ , donde  $g$  es la ganancia del autobucle.



## Método de Mason:

Para aplicarlos deben existir un nodo fuente y un nodo sumidero en el grafo. Se define CAMINO como una sucesión de ramas en serie que permiten llegar del nodo fuente al sumidero sin ningún bucle. Dos o más caminos o bucles son DISJUNTOS entre sí si no poseen ningún nodo en común.

- Se encuentran los "k" caminos del grafo y se calculan sus ganancias  $G_k$ .
- Se calcula el determinante del grafo a partir de los "j" bucles con ganancias  $B_j$ :

$$\Delta = 1 - \sum_{B_1} + \sum_{B_2, D} - \sum_{B_3, D} + \dots$$

Sumatoria de las ganancias de los bucles formados de a 1.

Sumatoria de las ganancias de los bucles DISJUNTOS formados de a 2 (producto)

- Se calculan los determinantes de cada camino "k":

$$\Delta_k = 1 - \left[ \sum_{B_1} \right] + \left[ \sum_{D_{G_k}} \right] - \left[ \sum_{B_3, D} \right] + \dots$$

Igual que para  $\Delta$ , pero además descontando el camino "k".

- Se obtiene la transference:

$$G = \frac{1}{\Delta} \sum_k G_k \Delta_k$$

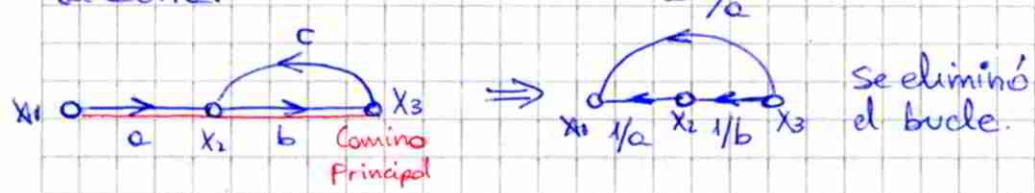
$G$ : Ganancia entre el nodo fuente y el sumidero.

Si el nodo de salida no es sumidero, puede transformarse saliendo de él a otro nodo con ganancia 1. Este último será igual al anterior y sumidero.

## Método de Inversión:

Permite simplificar (no resolver) el grafo, para por ejemplo eliminar bucles y resolver luego en forma más sencilla por Mason.

Se elige el camino con mayor n° de bucles para invertir. Se invierten los flechos del camino y sus ganancias, siguiendo el sentido del camino. Si una flecha LLEGA a un nodo del camino que se está invirtiendo, se cambia el signo de su ganancia y se la divide por la ganancia de la rama que llega al mismo nodo. Luego de invertir esta rama del camino, se corre el punto de llegada de atrás.



PERO el sumidero pasó a ser fuente y viceversa, por lo cual habrá la inversa de la ganancia.

NOTA



## Método de la Matriz Conexión:

Es un método totalmente sistemático para resolver un Grabo dinámic. Sea un sistema lineal dado por:

$$\vec{Y} = A \cdot \vec{X} \Rightarrow \vec{X} = -\vec{Y} + (A + II) \cdot \vec{X}$$

Tal que cumple:

- $\vec{Y} = k \cdot y_0 \rightarrow$  Variable Independiente

- Los demás componentes de  $\vec{X}$  es sumideros.

$$x_p = c_{p0} y_0 + \sum_{i=1}^n c_{pi} x_i$$

Escribiéndolo matricialmente:

$$(n+1)x_1 \quad (n+1) \times (n+1) \quad (n+1)x_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vec{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -k & A + II \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ \vec{X} \end{bmatrix}$$

C: Matriz Conexión

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{10} & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n0} & c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

$$c_{p0} y_0 \quad x_p \quad c_{pi} x_i$$

$$\text{Si se despeja } x_n = c_{n0} y_0 + \sum_{i=1}^n c_{ni} x_i \Rightarrow x_n = \frac{c_{n0}}{1-c_{nn}} y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_{ni}}{1-c_{nn}} x_i$$

y se reemplaza en  $x_p$ , se obtiene:

$$x_p = \left( c_{p0} + \frac{c_{n0} c_{pn}}{1-c_{nn}} \right) y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \left( c_{pi} + \frac{c_{ni} c_{pn}}{1-c_{nn}} \right) x_i$$

Para resolver un grabo se arma la matriz conexión C y se la reduce por pasos:

$$C = \begin{bmatrix} y_0 & x_1 & \dots & x_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & c_{10} & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ x_n & c_{n0} & c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Cada elemento es:

$$x_{fila} = C_{fila, columna} \cdot x_{columna}$$

$c_{ii}$  = ganancia autobucle  
(0 si no hay)

En este caso se desea  
hacer la transversal entre  
 $y_0$  (entrada) y  
 $x_i$  (salida).

Se eliminan los autobucleos:

$$C' = \begin{bmatrix} y_0 & x_1 & \dots & x_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & c_{10} & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_n & \frac{c_{n0}}{1-c_{nn}} & \frac{c_{n1}}{1-c_{nn}} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

se dividen los elementos de la última fila por  $(1-c_{nn})$ ,  
donde  $c_{nn}$  es el último elemento de la última fila.

Se eliminan la última fila y la última columna:

$$C'' = \begin{bmatrix} y_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & c''_{10} & c''_{11} & \dots & c''_{1,n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_{n-1} & c''_{n-1,0} & c''_{n-1,1} & \dots & c''_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

Cada elemento es:

$$c''_{ij} = c'_{ij} + c'_{in} \times c'_{nj} \rightarrow \text{Elementos en los límites de la matriz anterior ubicados en esa posición.}$$

Así sucesivamente hasta llegar a:

$$C^{(n-2)} = \begin{bmatrix} y_0 & x_1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ x_1 & G \end{bmatrix}$$

$$x_1 = G \cdot y_0$$

Elemento de la  
matriz anterior  
en igual posición

## Trasposición de un Grafo:

Se basa en invertir el sentido de todos los flechas del grafo, sin modificar las ganancias de cada rama ni la posición de los nodos. De esta forma la entrada se convierte en salida, y la salida en entrada, obteniéndose la inversa de la ganancia del grafo original.

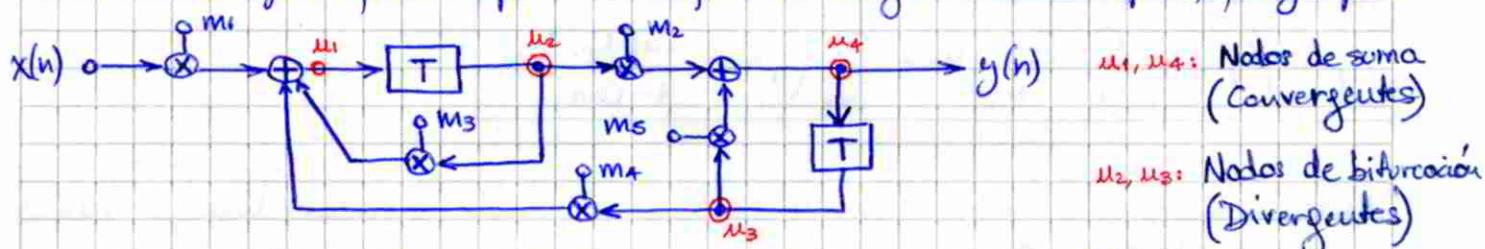
Ejemplo:



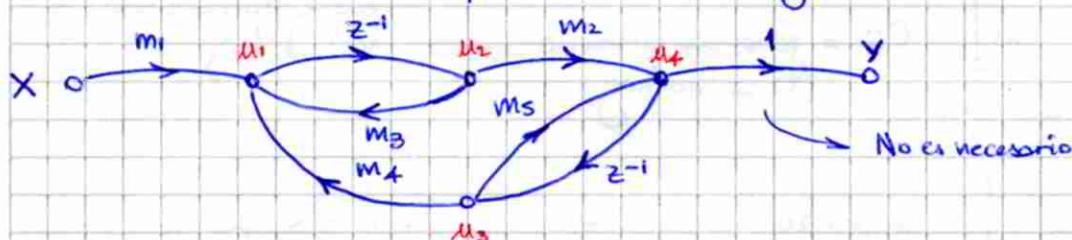
En estos casos, al haber intercambiado la entrada con la salida, la ganancia permanece igual a la del original

## Representación de un Sistema Digital con Grafos:

Un sistema digital puede representarse por su diagrama en bloques, por ejemplo:



Para pasar al grafo equivalente deben colocarse nodos en los sumadores y a la salida de retardos o productos donde haya bifurcaciones, quedando:



Al trasponer un grafo, los nodos de suma (convergentes) se transforman en nodos de bifurcación (divergentes), y viceversa.

## Implementación de Sistemas Digitales

Implementar un sistema digital en Hardware o Software significa configurar un circuito digital o realizar un programa que ejecute la ejecución en diferencias que lo represente. Aunque para un sistema dado esta ejecución es única, existen distintas formas de implementarla, como por ejemplo separándola en varias ejecuciones más simples.

Cada tipo de implementación tendrá su Diagrama en Bloques (o de Flujo de Señal o Estructura), el cual podrá representarse por un Giro de Señal equivalente. Los distintos implementaciones diferirán en:

- Complejidad Computacional (tiempo de procesamiento)
  - Requerimientos de Memoria (posiciones)
  - Efectos de Cuantificación (debido a precisión finita de los parámetros del sistema)
- } En general hay una relación de compromiso entre ambas.

### Estructuras para Filtros IIR:

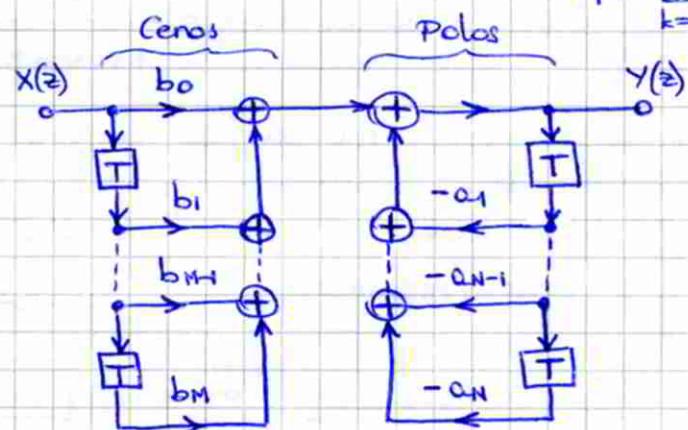
$$\text{En general: } y(n) = \sum_{k=0}^M b(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^N a(k)y(n-k) \Rightarrow H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b(k)z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a(k)z^{-k}}$$

#### Forma Directa I:

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$$

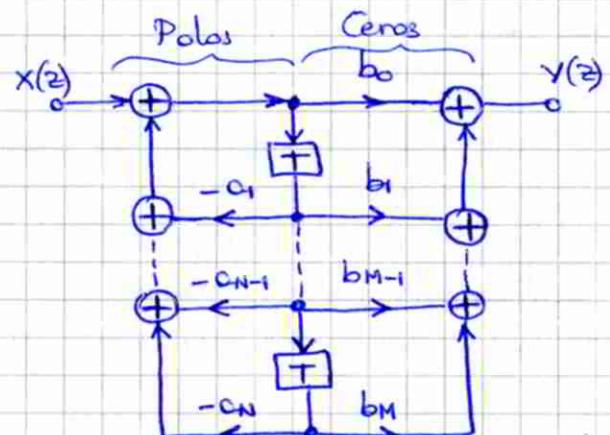
$$H_1(z) = \sum_{k=0}^M b(k)z^{-k} \quad (\text{ceros})$$

$$H_2(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N a(k)z^{-k}} \quad (\text{polos})$$



#### Forma Directa II:

$H(z) = H_2(z) \cdot H_1(z)$  y se agrupan los retardos repetidos. Minimiza el n.º de retardos (ubicaciones de memoria) necesarios, por lo que se llama CANÓNICA, pero otras estructuras también lo hacen.



Estas dos estructuras son MUY SENSIBLES a los Efectos de Cuantificación (un pequeño cambio en un coeficiente del filtro debido a la cuantificación produce un gran cambio en la ubicación de polos y ceros), por lo cual no se utilizan en aplicaciones prácticas.

NOTA

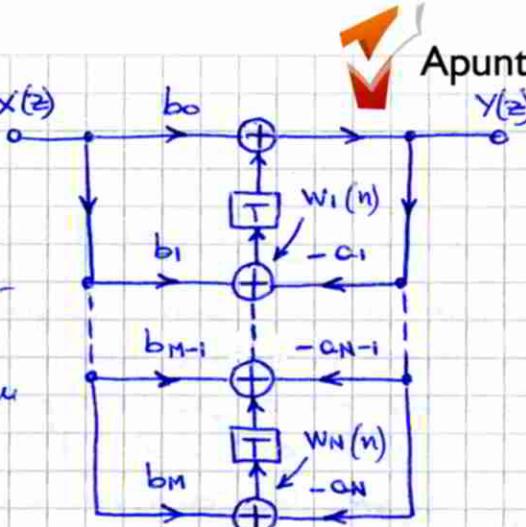
### • Forma Directa II Trespuesta:

A partir de la Forma Directa II, se procede a trasponer el Grado invirtiendo todos los flechas y la salida por la entrada para mantener la trascendencia.

Como resultado, los nodos suma se transforman en nodos de bifurcación, y viceversa.

Con  $N=M$  se obtiene:

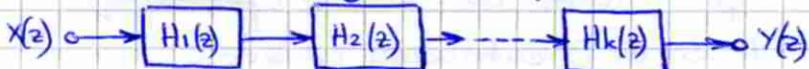
$$\begin{cases} y(n) = w_1(n-i) + b_0 x(n) \\ w_k(n) = w_{k+1}(n-i) + b_k x(n) - a_k y(n), \quad k=1, 2, \dots, N-1 \\ w_N(n) = b_N x(n) - a_N y(n) \end{cases}$$



También puede obtenerse a partir de la Forma Directa I, cambiando los retardos a la mitad central y juntando las sumas.

Utiliza los mismos recursos de memoria, sumas y productos que la Forma Directa II.

### • Estructura en Cascada:



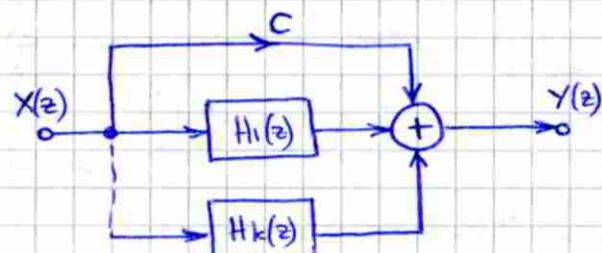
Para realizar un IIR de orden "n" pueden colocarse varias etapas de 1º y 2º orden en cascada, donde cada una de ellas se encuentra realizada con algunas de las Formas Directas vistas (en general, la II o la II trespuesta).

$$H(z) = \prod_{k=1}^K H_k(z) \quad \text{donde } H_k(z) = \frac{b_{k0} + b_{k1} z^{-1} + b_{k2} z^{-2}}{1 + a_{k1} z^{-1} + a_{k2} z^{-2}} \quad (\text{transferencia BICUADRÁTICA})$$

La idea es que resulte más sencillo controlar las sensibilidades de varios sistemas de 1º y 2º orden por separado, que de un sistema de orden "n". Es importante tener en cuenta el error numérico al separar la trascendencia en varios de 1º y 2º orden (redondeo).

### • Estructura en Paralelo:

$$H(z) = C + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - P_k z^{-1}}$$



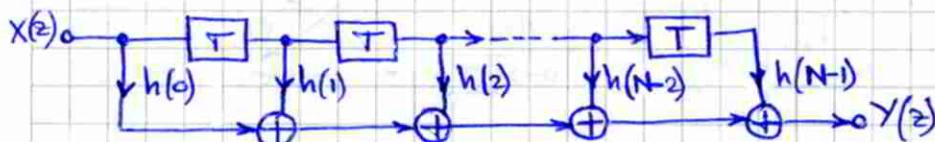
Considerando  $N \geq M$  y todos los polos distintos, puede expandirse  $H(z)$  en fracciones simples como indica la expresión. En general tendrán  $A_k$  y  $P_k$  complejos, pudiendo agruparse los polos complejos conjugados en secciones de 2º orden para evitar productos de nº complejos. Si se agrupan también polos reales de c pares, se obtiene:

$$H(z) = C + \sum_{k=1}^K H_k(z) \quad \text{donde } H_k(z) = \frac{b_{k0} + b_{k1} z^{-1}}{1 + a_{k1} z^{-1} + a_{k2} z^{-2}} \quad (\text{todos los coeficientes reales})$$

Si el filtro es de un orden muy elevado, puede utilizarse esta estructura e implementar cada  $H_k(z)$  con un procesador distinto (procesamiento en paralelo).

Estructuras para Filtros FIR:

en general:  $y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k) \Rightarrow H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)z^{-k}$

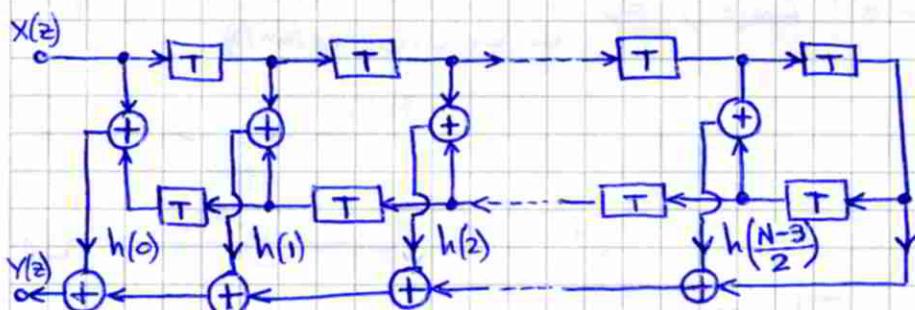
• Forma Directa:

Requiere  $N-1$  ubicaciones de memoria, y realiza  $N$  productos y  $N-1$  sumas por cada salida.  
Es igual a las Formas Directas para IIR sin los polos.

• Forma Directa para FIR de fase lineal:

Simétrico:  $h(n) = h(N-1-n)$   $\Rightarrow$  con  $N$  impar:  $y(n) = \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} h(k) [x(n-k) + x(n-N+k)] + h(\frac{N-1}{2})x(n-\frac{N-1}{2})$  (TIPO I)

Antisimétrico:  $h(n) = -h(N-1-n)$



$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} h(k) [x(n-k) + x(n-N+k)] + \\ & + h(\frac{N-1}{2})x(n-\frac{N-1}{2}) \end{aligned}$$

Aprovecha las propiedades de simetría para, con el mismo  $n^o$  de ubicaciones de memoria, disminuir el  $n^o$  de productos a la mitad.

• Estructura en Cascada:

En forma similar a la Cascada para IIR, realizando cada etapa con Forma Directa:

$$H(z) = \prod_{k=1}^K H_k(z) \quad \text{donde } H_k(z) = b_{k0} + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2}$$

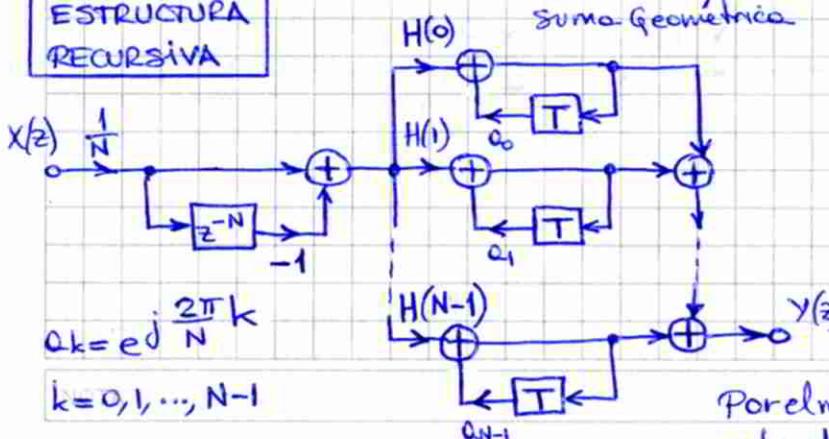
• Estructura para FIR con Muestreo en Frecuencia:

Su respuesta al impulso es:  $h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j \frac{2\pi}{N} nk} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$

Quedando:  $H(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} nk} z^{-n}}_{\text{Suma Geométrica}} = \frac{1}{N} (1-z^{-N}) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{j \frac{2\pi}{N} k} z^{-1}}$

Cascada de un FIR con "N" filtros de un sólo polo en paralelo.

ESTRUCTURA RECURSIVA



$$\omega_k = e^{j \frac{2\pi}{N} k}$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

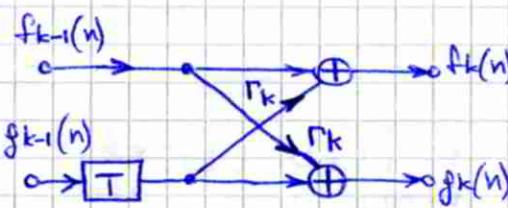
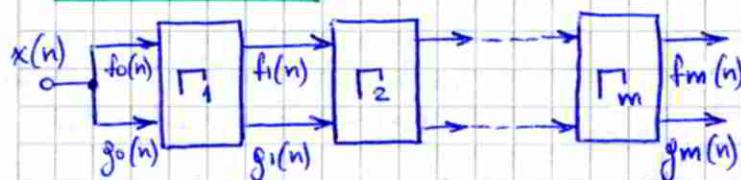
Este estructura es muy útil si la respuesta en frecuencia del filtro es de banda ancha, resultando muchos coeficientes  $H(k)$  nulos y pudiendo eliminarse esos secciones.

Por el muestreo en frecuencia, la estructura es similar a la de la DFT como un banco de filtros.

## Estructuras lattice:

Se caracterizan por ser sistemas modulares, estables y con baja sensibilidad a la cuantización de coeficientes frente a los demás estructuras. Por ello son muy utilizadas (más que nada en procesamiento de voz y otras adaptativas)

### FIR Lattice:



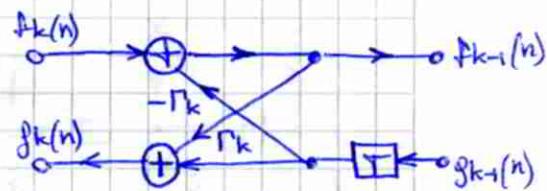
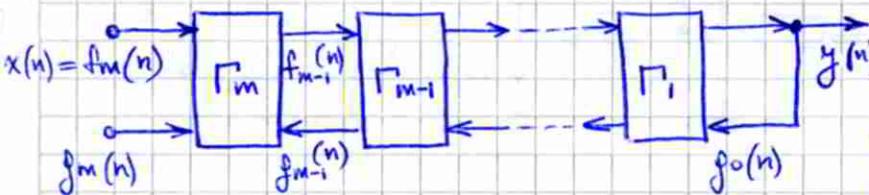
$$\text{la salida puede ser } f_m(n) \text{ o } g_m(n): \quad f_m(n) = \sum_{k=0}^m \alpha_m(k) x(n-k) \quad \alpha_m(0)=1 \quad \Delta_m(z) = \frac{f_m(z)}{X(z)}$$

$$\Gamma_k: \text{Coeficiente de reflexión de codo cuadrípolo.} \quad g_m(n) = \sum_{k=0}^m \beta_m(k) x(n-k) \quad \beta_m(m)=1 \quad B_m(z) = \frac{g_m(z)}{X(z)}$$

Se comprueba que:  $\beta_m(k) = \alpha_m(m-k) \quad k=0,1,\dots,m \Rightarrow$  Operan en orden inverso.

$B_m(z) = z^{-m} \Delta_m(z^{-1}) \Rightarrow$  los ceros de  $B_m(z)$  son los reciprocos de los ceros de  $\Delta_m(z)$ .

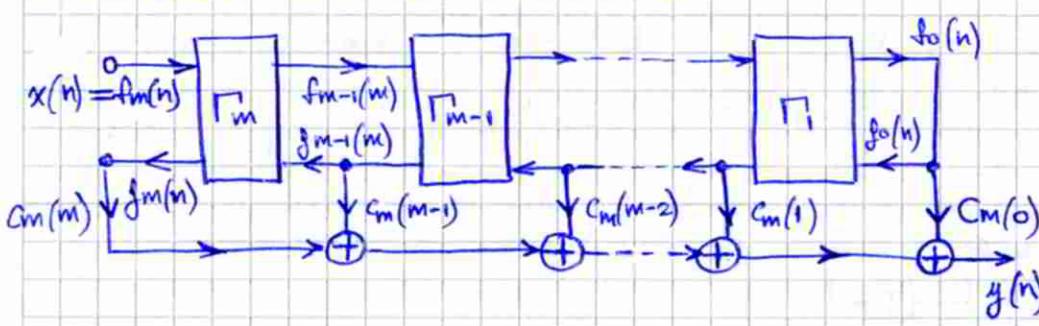
### IIR All-pole lattice:



los coeficientes resultan idénticos a los del FIR lattice con iguales ceros que los polos del IIR lattice, pero ocurren en orden inverso.

### IIR lattice:

La ecuación es igual al del All-Pole lattice, excepto que se deben generar los ceros mediante una línica de retardo.



$$b_m(k) = \sum_{j=k}^m c_m(j) \cdot a_j(j-k)$$

↴  
 coeficientes numerador  
 con: orden numerador ( $m$ ) = orden denominador ( $n$ )

↴  
 coeficientes denominador

$k=0,1,\dots,n$



## Efectos de la Cuantificación

### Representación de Números:

Debido a la precisión numérica finita en los cálculos y al número finito de dígitos empleados para representar números, cada implementación de un sistema digital tiene aparejados errores y efectos no lineales. Básicamente existen dos sistemas de representación de números:

### Punto Fijo:

Se trabaja con nº fraccionarios (normalizados,  $<1$ ) debido a la facilidad de las operaciones de truncado o redondeo. Se representan de la siguiente forma:

$$X = 0.b_1 b_2 \dots b_B = \sum_{i=1}^B b_i r^{-i}, \quad X \geq 0, \quad 0 \leq b_i \leq (r-1) \quad r: \text{Base del sistema}$$

En el caso binario,  $r=2$  y  $b_i = \{0,1\}$ . Para representar nº negativos existen tres formatos (los nº positivos no dependen del formato usado):

- Magnitud - signo:  $X_{SM} = 1.b_1 b_2 \dots b_B$  siendo  $X = -0.b_1 b_2 \dots b_B = -\sum_{i=1}^B b_i 2^{-i}$
- Complemento a 1:  $X_{1C} = 1.\bar{b}_1 \bar{b}_2 \dots \bar{b}_B = 2 - 2^{-B} - |X|$  siendo  $\bar{b}_i = 1 - b_i$
- Complemento a 2:  $X_{2C} = X_{1C} + \underbrace{0.00 \dots 1}_{2^{-B}} = 2 - |X|$

La mayoría de los DSP's emplean aritmética en Complemento a 2 por resultar más sencillas las operaciones. Esta aritmética tiene naturaleza circular: cuando se pasa del más positivo al más negativo y viceversa, lo que puede ser desastroso para una señal. Por ello, si una señal se pasa de rango se le deje SATURADA en el máximo valor.

En cálculos numéricos suele tener picos, y puede suceder que se pase de rango (Overflow, Underflow) en el medio pero no en el resultado final. Por ello, muchos DSP's poseen un acumulador (registro) de muchos más bits para evitar Overflow o Underflow durante las operaciones numéricas y para lograr mayor precisión en los mismos.

### Punto Flotante:

$$X = M \times 2^E \quad M: \text{mantisa } (\frac{1}{2} < M < 1) \quad E: \text{exponente}$$

Permiten cubrir un rango mucho mayor que los de Punto Fijo, almacenándose M y E, resultando mucho menor la posibilidad de Overflow e Underflow, pero poseen una resolución que varía en el rango. El costo de un DSP con punto flotante es mucho mayor por su complejidad en las operaciones, por lo cual se los usa para desarrollo, pasando a DSP's de punto fijo para producción en serie.

## Errores de Truncado y Redondeo:

- Truncar un n° binario significa eliminar bits menos significativos. Si el n° sin truncar tiene  $(u+1)$  bits y truncado tiene  $(b+1)$  bits ( $u > b$ ), entonces el error de truncado se encuentra en el rango, para Punto Fijo, dado por:

$$\begin{array}{ll} \text{Nº positivas (para cualquier formato):} & -(2^{-b}-2^{-u}) \leq E_t \leq 0 \\ \text{Nº negativas} \xrightarrow{\text{Magnitud - signo / Comp. a 1:}} & 0 \leq E_t \leq (2^{-b}-2^{-u}) \\ \xrightarrow{\text{Complemento a 2:}} & -(2^{-b}-2^{-u}) \leq E_t \leq 0 \end{array}$$

- Redondear significa llevar al n° binario de  $(u+1)$  bits al n° binario más cercano representado con  $(b+1)$  bits ( $u > b$ ). El error de redondeo resulta menor al de truncado, y se encuentra, para Punto Fijo, en el rango dado por:

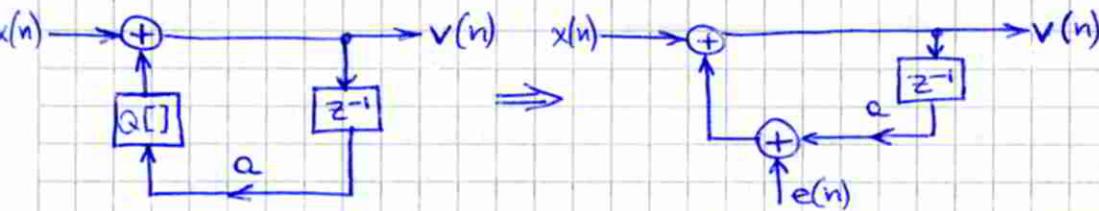
$$-\frac{1}{2}(2^{-b}-2^{-u}) \leq E_r \leq \frac{1}{2}(2^{-b}-2^{-u}) \quad (\text{para cualquier formato y signo del n°})$$

Generalmente:  $2^{-u} \ll 2^{-b} \Rightarrow -\frac{2^{-b}}{2} \leq E_r \leq \frac{2^{-b}}{2}$

Si el valor que de justo entre dos niveles de cuantificación, para no producir una tensión deseada (desplazamiento) de los cálculos y lograr un redondeo decimal, se redondea hacia arriba o hacia abajo según el valor del último bit (bit "b").

## Ruido de Redondeo:

En general, el producto de dos números de " $b+1$ " bits da como resultado un número de " $2(b+1)$ " bits, el cual debe ser truncado o redondeado a " $b+1$ " bits. Suponiendo aritmética fraccionaria de Punto Fijo y que se realice redondeo (suele ser la más utilizada), entonces el Error o Ruido de Redondeo puede representarse como una secuencia  $e(n)$  sumando wego del producto (ES UNA CUANTIZACIÓN).



$$v(n) = Q[a \cdot y(n-1)] + x(n) = e(n) + a \cdot v(n-1) + x(n)$$

$Q[]$ : cuantificación (redondeo)

La secuencia  $v(n)$  contiene la señal  $y(n)$  deseada junto con ruido de redondeo  $f(n)$  o la señal, proveniente de la respuesta del sistema a  $e(n)$ :

$$v(n) = y(n) + f(n)$$

Hipótesis:

- $e(n)$  es un proceso estacionario de ruido blanco
- Para cada " $n$ ",  $e(n)$  está uniformemente distribuido en  $[-\frac{2^{-b}}{2}, \frac{2^{-b}}{2}]$
- Cada fuente de ruido  $e(n)$  no está correlacionada con la entrada  $x(n)$  ni con las demás fuentes de ruido.

$$\begin{array}{l} e(n) \xrightarrow{\mu_e = 0} \\ e(n) \xrightarrow{\sigma_e^2 = \frac{(2^{-b})^2}{12}} \end{array}$$



La última hipótesis permite separar la ec. en diferencias:  $\begin{cases} y(n) = c \cdot y(n-1) + x(n) \\ f(n) = a \cdot f(n-1) + e(n) \end{cases}$

Por lo cual,  $e(n)$  es afectado por la  $h(n)$  del sistema, obteniéndose  $f(n)$ . De ello resulta:

$$\mu_f = \mu_e \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) = 0$$

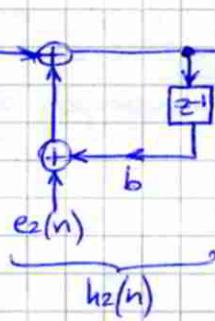
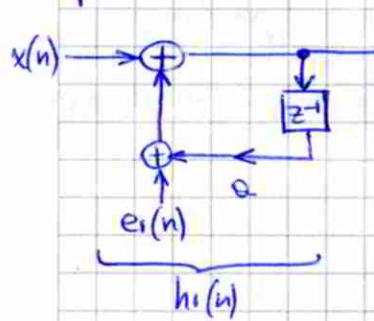
$$\sigma_f^2 = \sigma_e^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^2(n) = \frac{\sigma_e^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

↑ Igualdad de Parseval.

Esta expresión es válida para todo sistema atravesado por un ruido  $e(n)$  con las características planteadas, obteniéndose la salida  $f(n)$ .

Para sistemas implementados en Paralelo, la varianza (potencia promedio) del ruido a la salida será la suma de los varianas de los ruidos producidos por cada ramo del mismo, al estar los ruidos incomunicados.

En el caso de la implementación en Casco, la ubicación de cada subsistema hace que varíe la potencia promedio del ruido a la salida. Por ejemplo:



$$\begin{cases} h_1(n) = a^n u(n) & |a| < 1 \\ h_2(n) = b^n u(n) & |b| < 1 \\ h(n) = \left[ \frac{a}{a-b} a^n + \frac{b}{b-a} b^n \right] u(n) \end{cases}$$

los ruidos de rededor  $e_1(n)$  y  $e_2(n)$  tienen igual varianza, pero el primero afecta a todo el sistema ( $h(n)$ ) y el segundo sólo a  $h_2(n)$ .

$$\sigma_f^2 = \sigma_e^2 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} h_1^2(n) + \sum_{n=0}^{\infty} h_2^2(n) \right] = \sigma_e^2 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \frac{1}{1-b^2} \right]$$

Resulta entonces  $\sigma_f^2$  menor cuando los etapas se encuentran ordenadas, tal que  $b < a$  (dado que  $\frac{1}{1-b^2} < \frac{1}{1-a^2}$ ), por lo que conviene ordenar las etapas de 1º orden por sus coeficientes de MAYOR A MENOR.

### Sensibilidad de los coeficientes del filtro a la cuantificación:

La longitud finita de la palabra de los registros del DSP limita la precisión de los coeficientes del filtro a realizar, cambiando la posición de los ceros y polos y alterándose la respuesta en frecuencia.

La estructura utilizada para realizar el filtro influye mucho en estos efectos. Para el caso de un IIR jerárquico realizado con la Forma Directa, su transferencia y coeficientes a emplear en la estructura puede escribirse como:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}, \quad \bar{H}(z) = \frac{\sum_{k=0}^M \bar{b}_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=0}^N \bar{a}_k z^{-k}}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_k &= a_k + \Delta a_k \\ \bar{b}_k &= b_k + \Delta b_k \end{aligned} \quad \} \text{cuantificación}$$

$\bar{a}_k, \bar{b}_k, \bar{H}(z)$ : Resultados de la cuantificación.



Los denominadores de ambas fracciones pueden escribirse como:

$$D(z) = \prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1}), \quad \overline{D}(z) = \prod_{k=1}^N (1 - \bar{p}_k z^{-1}) \quad \bar{p}_k = p_k + \Delta p_k$$

$\bar{p}_k$ : polos resultantes de la cuantización.

Se busca obtener la variación de los polos  $\Delta p_i$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ , cuando varían los coeficientes  $p_k$  en un  $\Delta a_k$ , producto de la cuantización. Esto viene dado por:

$$\Delta p_i = \frac{\sum_{k=1}^N \frac{\partial p_i}{\partial a_k} \Delta a_k}{\sum_{k=1}^N \frac{\partial D(z)}{\partial a_k}} \quad i=1, 2, \dots, N \quad \text{puede escribirse: } \frac{\partial p_i}{\partial a_k} = \left. \frac{\frac{\partial D(z)}{\partial a_k}}{\frac{\partial D(z)}{\partial p_i}} \right|_{z=p_i}$$

Desarrollando ambas expresiones se obtiene:

$$\frac{\partial p_i}{\partial a_k} = \frac{-p_i^{N-k}}{\prod_{k=i, k \neq i}^N (p_i - p_k)} \Rightarrow \Delta p_i = \sum_{k=1}^N \frac{-p_i^{N-k}}{\prod_{r=1, r \neq i}^N (p_i - p_r)} \Delta a_k$$

Puede observarse que si los polos se encuentran muy próximos (pequeños distancias  $|p_i - p_r|$ ) los errores serán muy grandes. Para minimizarlos es conveniente realizar transformaciones de alto orden como secciones de 1º y 2º orden, agrupando en ellos polos bien alejados. Para obtener coeficientes reales se agrupan polos complejos conjugados, sabiendo además que están suficientemente separados.