



Instituto Tecnológico de Buenos Aires  
4 de Abril 2019

MUESTREO  
Trabajo de Laboratorio nº 1

---

## Análisis de Señales y Sistemas Digitales

---

Grupo 1

<i>Nombre</i>	<i>Legajo</i>
Ariel Nowik	58309
Joaquín Mestanza	58288
Marcelo Regueira	58300
Martina Máspero	57120
Rocío Parra	57669

---

---

# Índice

<b>1. Oscilador</b>	<b>2</b>
1.1. Introducción teórica . . . . .	2
1.2. Circuitos para generar las señales deseadas . . . . .	2
1.2.1. Diente de sierra . . . . .	2
1.2.2. Señal triangular . . . . .	4
1.3. Comparador . . . . .	6
1.4. Valores de componentes . . . . .	6
1.5. Mediciones . . . . .	7
<b>2. Filtros</b>	<b>9</b>
2.1. Antialiasing . . . . .	9
2.2. Recuperador . . . . .	9
2.3. Diseño . . . . .	10
2.3.1. Parámetros . . . . .	10
2.3.2. Aproximación teórica . . . . .	10
2.3.3. Etapas . . . . .	11
2.3.4. Acoplamiento y ajuste de ganancia . . . . .	12
2.4. Respuesta en frecuencia . . . . .	13
2.5. Elección de $f_p$ . . . . .	15
<b>3. Llave analógica</b>	<b>17</b>
3.1. Elección del integrado . . . . .	17
3.2. Configuración de la llave analógica . . . . .	18
<b>4. Sample and hold</b>	<b>19</b>
<b>5. GUI</b>	<b>21</b>
<b>6. Mediciones básicas</b>	<b>23</b>
6.1. Caso con variables óptimas . . . . .	23
6.1.1. Señal $X_a(t)$ . . . . .	24
6.1.2. Señal $X_b(t)$ . . . . .	24
6.1.3. Señal $X_c(t)$ . . . . .	25
6.2. Caso con $f_s = f_a$ . . . . .	26
6.2.1. Señal $X_a(t)$ . . . . .	26
6.2.2. Señal $X_b(t)$ . . . . .	27
6.3. Caso con $f_{in} = f_s$ - Aliasing con $X_a$ . . . . .	27
6.4. Caso con $f_s$ fija - Aliasing con $X_b$ y $X_c$ . . . . .	28
<b>7. Remuestreo</b>	<b>29</b>
<b>8. Muestreo sub-nyquist</b>	<b>33</b>
8.1. Señal a muestrear . . . . .	33
8.2. Cálculo de $f_s$ . . . . .	33
8.3. Simulaciones con Llave analógica . . . . .	33
8.4. Simulaciones con sample and Hold . . . . .	34
8.5. Mediciones . . . . .	35
<b>9. Ejercicio 9</b>	<b>36</b>
9.1. Item a . . . . .	36
9.2. Item b - Downsampling . . . . .	36
9.2.1. Caso 1 . . . . .	36
9.2.2. Caso 2 . . . . .	37
9.3. Item c . . . . .	38

# 1. Oscilador

## 1.1. Introducción teórica

En esta sección el objetivo es generar un oscilador con frecuencia y duty cicle variables e independientes uno de otro.

Frente a esta problemática se presentaron dos posibles soluciones:

- Generar una señal diente de sierra con frecuencia variable
- Generar una señal triangular con frecuencia variable

Para la opción de duty cycle se optó por utilizar un comparador. La señal generada excita una de las entradas del comparador y en la otra se coloca una tensión referencia. El duty cycle de la señal a la salida del comparador será regulada mediante la variación de la referencia.

## 1.2. Circuitos para generar las señales deseadas

### 1.2.1. Diente de sierra

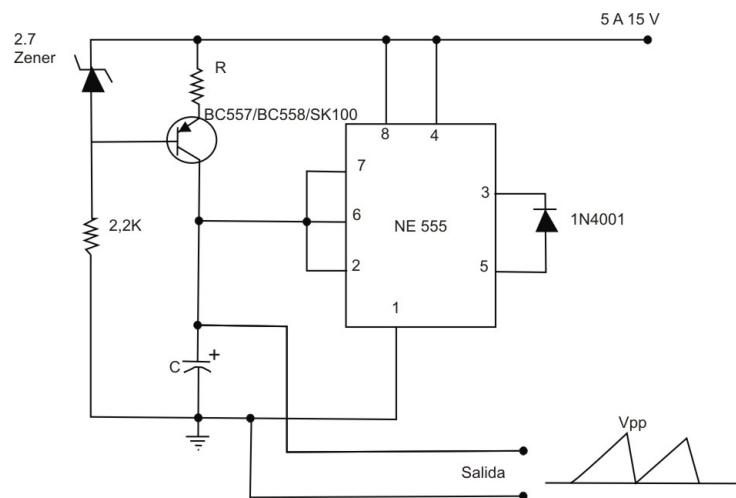


Figura 1: Generador de onda diente de sierra

### Problema del diente de sierra con LM555

El capacitor se descarga a través del transistor interno del 555, dando lugar a una gran pendiente negativa en la señal y como se está midiendo sobre un capacitor, esto resulta en una gran demanda de corriente.

Dado que se carga el capacitor con una fuente de corriente constante, el mismo va a extraer corriente a la fuente, haciendo que la tensión de alimentación varíe.

Estos efectos se pueden mitigar, primero colocando una resistencia en serie en el pin de descarga del LM555 y luego poniendo un capacitor de desacople.

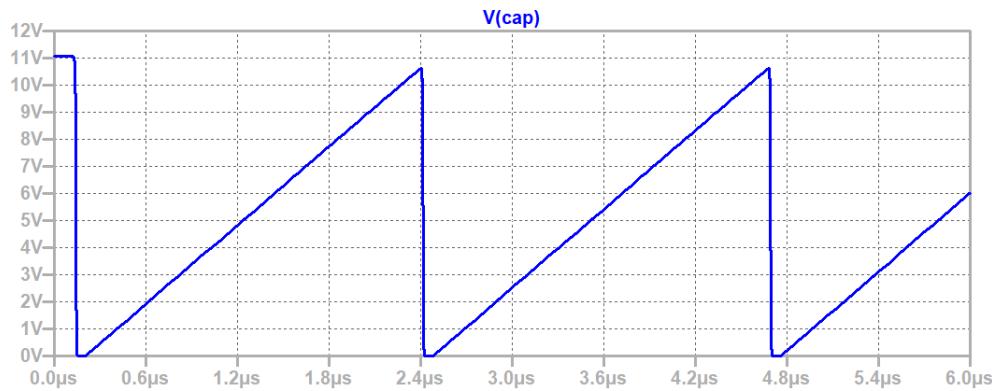


Figura 2: Circuito sin resistencia en serie con el pin de descarga

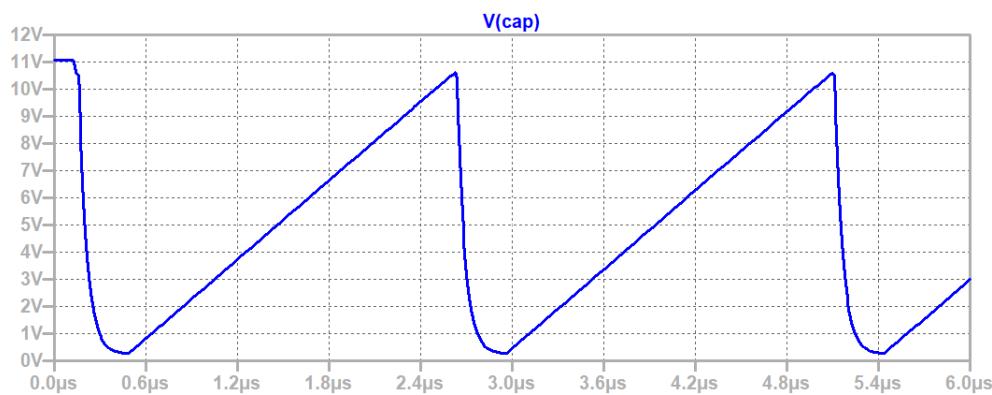


Figura 3: Circuito con resistencia de  $500\Omega$  en serie con el pin de descarga

El problema principal que surge con la colocación de la resistencia es que si bien se logra suavizar la curva, a la hora de variar el duty cicle con el comparador se complica llegar al duty cycle límite pedido por consigna (esto es porque los cambios son muy pequeños mientras decrece la señal acercándose a 0V).

### Justificación del circuito elegido

Experimentalmente se pudo comparar el comportamiento de los dos circuitos propuestos a alta frecuencia y se pudo ver que a medida que aumenta la frecuencia se va deformando la señal diente de sierra mientras que la señal triangular mantiene su suavidad con un rango más amplio y esto fue lo que determinó qué circuito se utilizó.

### 1.2.2. Señal triangular

A continuación se deja una figura del circuito propuesto con un bloque integrador, un schmitt trigger no inversor y un bloque que independiza parte del circuito de VCC.

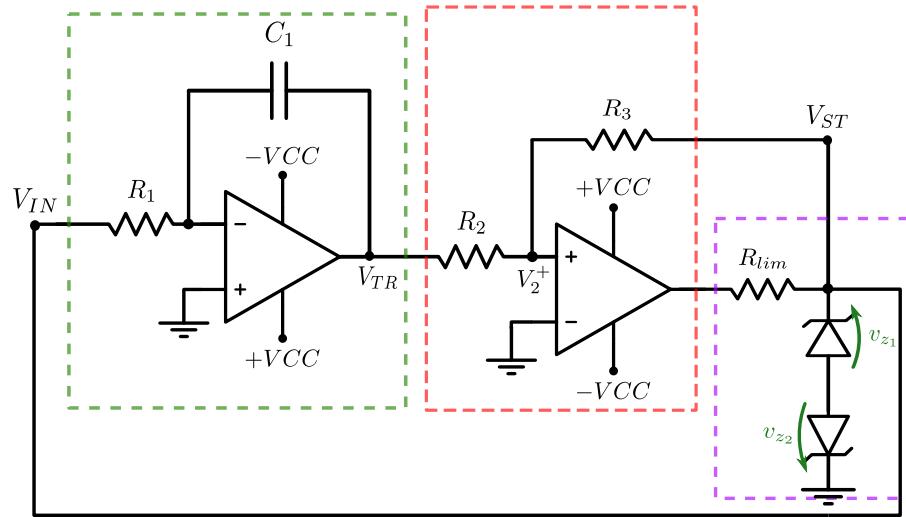


Figura 4: Generador de onda triangular

$$V_{TR} = -V_{IN} \frac{1}{sC_1 R_1}$$

Si ajustamos la ventana del schmitt trigger adecuadamente (es decir, dentro del rango de alimentación),  $V_{ST}$  es una señal cuadrada y provoca que  $V_{TR}$  sea una señal triangular.

Analizando medio período:

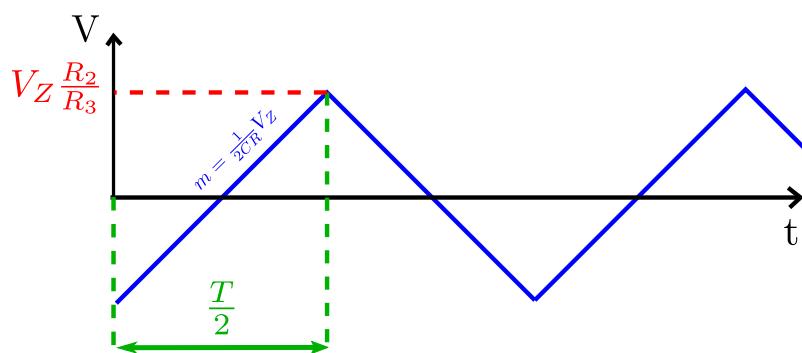


Figura 5: Señal triangular resultante

$$\frac{T}{2} \frac{1}{C \cdot R_1} V_{IN} = V_{Ventana}$$

$$\frac{T}{2} \frac{1}{C \cdot R_1} V_{ST} = V_{ST} \frac{R_2}{R_3}$$

$$f = \left( \frac{1}{2C_1 R_1} \right) \frac{R_3}{R_2}$$

De esta forma se puede lograr **variar la frecuencia** de la señal variando el valor de  $R_1$ .

### Clamper

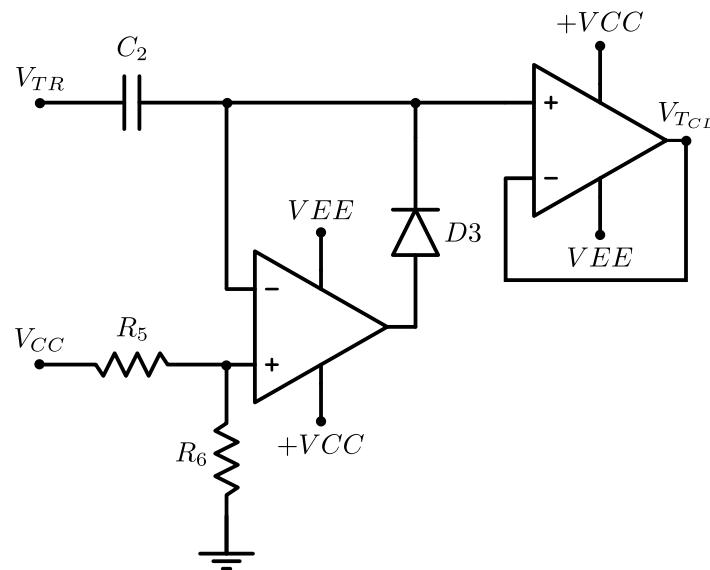


Figura 6: Circuito clamper

El clamper logra elevar la señal por encima de 0V de forma tal que se pueda aprovechar la excursión de la señal.  $R_5$  y  $R_6$  se ajustan de manera tal que la salida esté efectivamente sobre 0V debido a que el clamper no es ideal.

### 1.3. Comparador

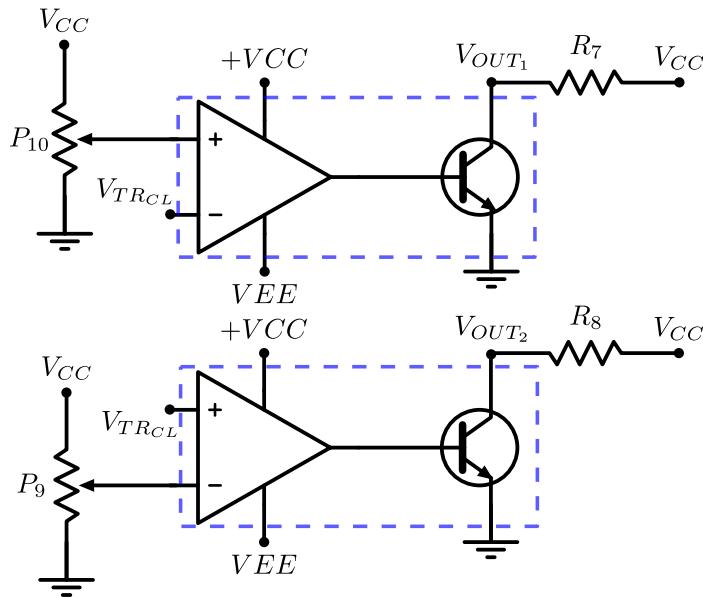


Figura 7: Circuito comparador

Variando  $P_9$  y  $P_{10}$  se pueden regular los **duty cicle de la señales**.

El propósito de este último circuito es generar dos señales con misma base de tiempo, desfasadas  $180^\circ$  y con duty regulable.

De esta forma se conecta  $V_{OUT_1}$  en la entrada de la llave analógica y  $V_{OUT_2}$  en la de sample and hold (o viceversa). Ajustando adecuadamente el duty de cada señal, se puede realizar el muestreo con sample and hold y luego remuestreo con la llave analógica dándole tiempo al sample and hold para establecer el valor en tiempo de hold antes de cerrar la llave.

### 1.4. Valores de componentes

$$V_{Z_2} = V_{Z_1} = \begin{cases} 5,1V & \text{en inversa} \\ 0,7 & \text{en directa} \end{cases}$$

$R_2, R_7, R_8$	$1K\Omega$
$R_3$	$8,2K\Omega$
$V_{ST_{MAX}}$	$5,8V$
$V_{ST_{MIN}}$	$-5,8V$
$V_{CC}$	$9V$
$C_1$	$10nf$ y $220nf$
$C_2$	$100nf$

$$I_{O_{TL084}|_{MAX}} \approx 30mA$$

$$R_{lim} \approx \frac{V_{CC} - |V_{ST_{MAX}}|}{I_{O_{TL084}|_{MAX}}} = 100\Omega$$

$C_1$  tiene dos valores (se eligen mediante un jumper) debido a que uno es para un rango de frecuencias bajas (400Hz-30kHz) y otro para altas (30KHz-125KHz) esto es de modo tal que frente una misma  $R_1$  de valor bajo se pueda obtener una frecuencia más grande sin deformar la señal. Lo que genera la deformación de la señal es la demanda de corriente que es proporcional al capacitor, por lo cual es una limitación para este circuito.

## 1.5. Mediciones

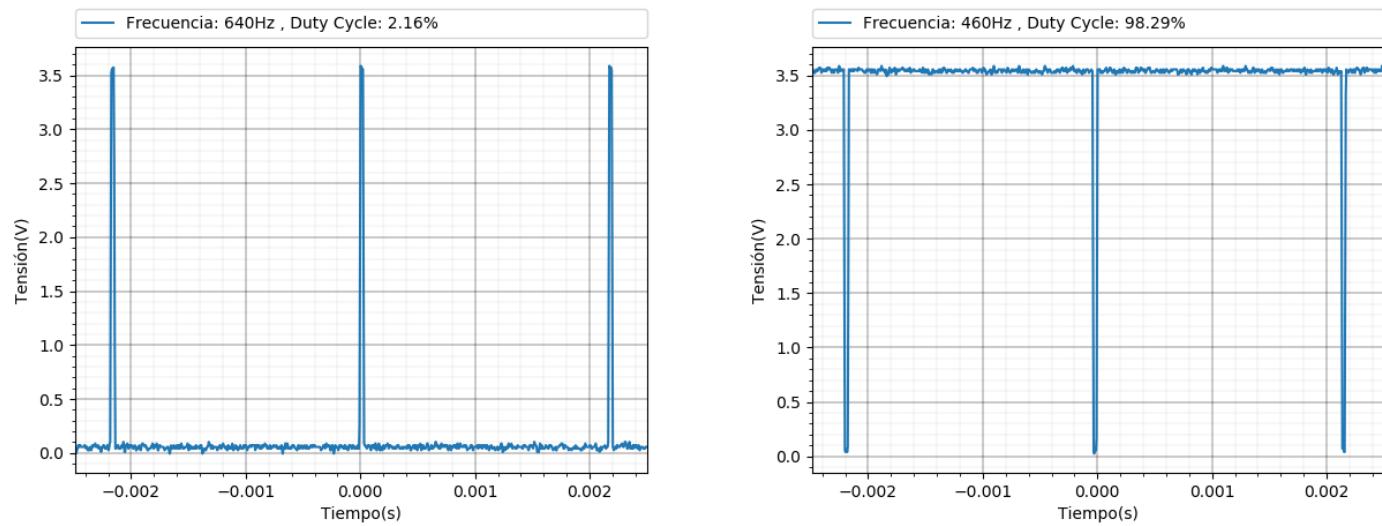


Figura 8: Límite de duty cicle para las frecuencias mínimas de operación

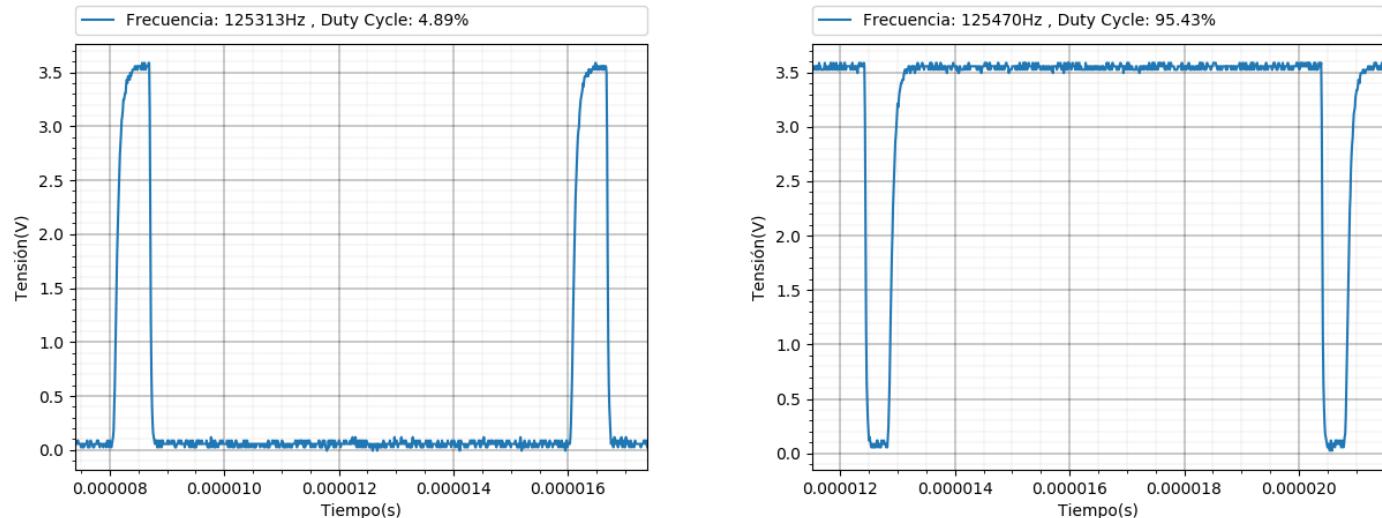


Figura 9: Límite de duty cicle para las frecuencias máximas de operación

Se puede observar en las figuras 8 y 9 que al variar el duty cicle se ve alterada la frecuencia de la señal, lo cual en principio indicaría que no son independientes, sin embargo en la generalidad de los casos se puede aceptar esa mínima desviación respecto de la frecuencia o sino calibrar mediante variaciones graduales la frecuencia y el duty hasta que se aproxime al valor deseado.

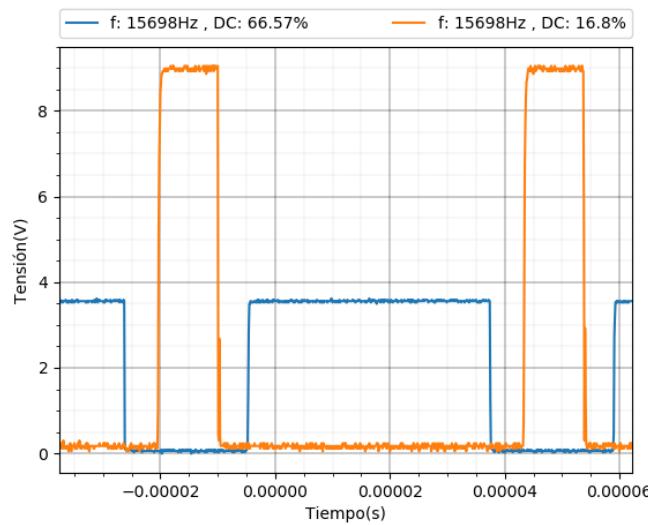


Figura 10: Señales con distintos duty dado el circuito propuesto de duty configurable

Las señales en la figura 10 corresponden a mediciones en distintas entradas. La señal naranja es la medida en la entrada de control de la llave analógica y la señal azul es la medida en la entrada de control del sample and hold. Poseen distintas amplitudes ya que las dos entradas de control requieren tensiones distintas.

## 2. Filtros

### 2.1. Antialiasing

Para el muestreo de señales analógicas, partimos de la base que éstas deben poseer un ancho de banda limitado, de manera tal que de acuerdo al teorema de Nyquist del muestreo, la frecuencia de muestreo debe ser el doble del ancho de banda ( $B$ ) de la señal (en el caso de que el filtro sea ideal) para que las repeticiones del espectro de la señal en cuestión no se solapen, es decir:

$$f_s \geq 2B$$

Para observar mejor esto, llamando al período de muestreo  $T$ , se tiene el tren de pulsos periódico:

$$\delta_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Para el muestreo de una señal en tiempo continuo  $x(t)$ , se tiene:

$$x^*(t) = x(t) \cdot \delta_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT)$$

Donde  $x^*(t)$  es la señal muestreada. Si se aplica la transformada de Fourier resulta:

$$X_T(\omega) = X(\omega) * \delta_{\omega_s}(\omega)$$

Donde:

$$\delta_{\omega_s}(\omega) = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

Es decir que al convolucionar el espectro de la señal muestreada con el tren de deltas se obtiene el espectro de dicha señal replicado cada  $n\omega_s$ . Suponiendo que el espectro tiene un ancho total  $B$ , para que no se solapen las repeticiones (es decir, ocurra alias entre los espectros) se debe cumplir el teorema en cuestión.

La función del filtro antialiasing pasa bajos consiste entonces en, teniendo una frecuencia de muestreo fija, limitar en banda a la señal de entrada, de manera tal que si la señal que ingresa al sistema tiene un ancho  $B < f_p$  (donde  $f_p$  es la frecuencia de paso del filtro) no ocurre ningún inconveniente. En el caso contrario se perderían algunas componentes de la señal, pero se asegura de esta manera que no ocurra el solapamiento entre espectros. En el caso ideal puede modelarse como una ventana cuadrada en el dominio de la frecuencia, donde entre 0 y  $\frac{B}{2}$  dicha ventana vale 1, y fuera del mismo vale 0.

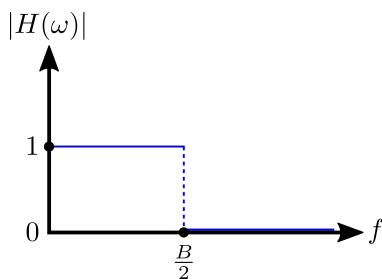


Figura 11: Transferencia del ideal del filtro

### 2.2. Recuperador

Una vez muestreada la señal, como se mencionó anteriormente se tiene el espectro de la misma replicado en cada posición del tren de pulsos, separados en  $\omega_s$ . Para recuperar la señal original, basta con quedarse solamente con el espectro en banda base, descartando el resto. Para ello se utiliza el filtro recuperador, el cual resulta idéntico al filtro antialiasing dado que, justamente lo que se busca es recuperar el espectro original cuyo ancho en el peor caso es  $B$  (entre  $-\frac{B}{2}$  y  $\frac{B}{2}$ ).

Para recuperar el espectro en banda base, se multiplica la transferencia del filtro  $H(\omega)$  por el espectro periódico de la señal muestreada:

$$X_R(\omega) = X_T(\omega) \cdot H(\omega)$$

En el filtro real, al no tener pendiente infinita en  $f_p$  y poseer cierta atenuación en dicha frecuencia, se debe considerar dar un margen de frecuencia al momento del diseño, lo cual se explica en la sección siguiente.

## 2.3. Diseño

### 2.3.1. Parámetros

Para el diseño de los filtros, se tienen en cuenta los siguientes parámetros de frecuencias y atenuación:

$f_p$	$A_p$	$f_a$	$A_a$
1,5KHz	1dB	2,25KHz	41dB

Cuadro 1: Parámetros de diseño

La elección de dichos valores se basa en poder abarcar, con un poco de margen, el ancho de banda de las señales a utilizar para ingresar al sistema y posterior recuperación. Tomando el caso de la señal  $X_C$ , teniendo en cuenta que la frecuencia  $f_{in} = 500Hz$ , las frecuencias que la componen son 900Hz, 1KHz y 1,1KHz, por lo que en un principio se tomaría como  $f_p = 1,1KHz$ . Para tener en cuenta la caída de la respuesta en frecuencia en dicho punto y que el filtro real implementado puede poseer un poco de ripple debido a las tolerancias de los componentes, se decidió correrla a 1,5KHz de manera que ambas cuestiones no afecten a la señal, en caso de no poder calibrarlo correctamente.

### 2.3.2. Aproximación teórica

Para obtener la función transferencia teórica del filtro, se utilizó la aproximación de Legendre, dado que utilizando la misma se obtiene un orden razonable para la transferencia (lo cual facilita la implementación y calibración, teniendo en cuenta que es el mismo filtro tanto para antialiasing como para recuperador) y, idealmente, no posee ripple. Utilizando la aproximación de Chebyshev se obtiene una mayor caída con menor orden, pero posee ripple, y utilizando Butterworth no se tiene ripple (máxima planicie en banda de paso) pero el orden resulta casi el doble del obtenido para Legendre.

Considerando los parámetros dados, se realizó la aproximación utilizando una plantilla un poco más restringida, para tener un margen de corrección a la hora de realizar la implementación real. El orden resultante es  $N = 10$ , que se buscará implementar en 5 etapas de segundo orden. La transferencia teórica resulta, ya desnormalizada con el formato:

$$H(S) = \frac{k}{\sum_{n=0}^9 a_n \cdot S^n}$$

Donde de acuerdo a los coeficientes  $a_n$  y factorizando, se tienen las frecuencias y selectividades características de cada etapa:

Etapa	$f_0$	$Q$
1	1621,86Hz	9.06
2	1473Hz	2.82
3	1214,37Hz	1.45
4	902,65Hz	0.84
5	658,14Hz	0.54

Cuadro 2: Detalles de cada etapa

### 2.3.3. Etapas

Para la implementación se utilizaron una celda KHN y celdas Sallen-Key, implementadas en los operacionales integrados TL082 y TL084.

**Etapa 1 - Celda KHN** Para la primer etapa, dado que el  $Q$  resulta elevado, se optó por implementarla con dicha celda ya que permite un control independiente del factor de selectividad sin afectar a la ganancia de la celda (aunque el circuito resulte más grande, ya que posee 3 amplificadores operacionales), y se la había utilizado con anterioridad en la materia «Teoría de Circuitos» para una etapa con  $Q$  más elevado que en este caso y dio resultados satisfactorios.

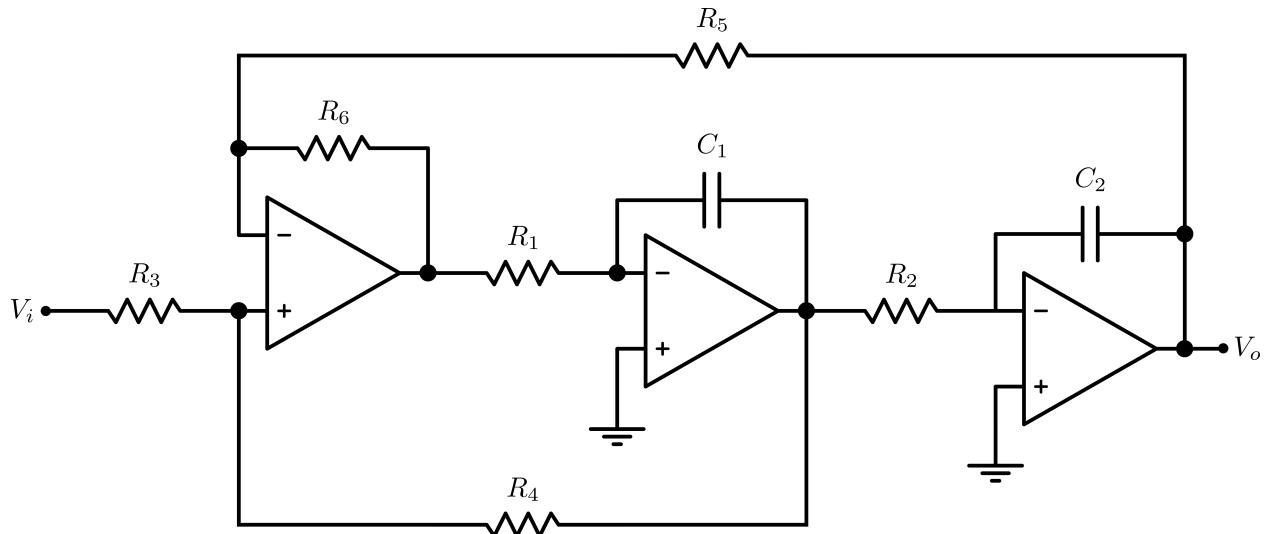


Figura 12: Celda KHN

Considerando para el diseño lo siguiente:

$$R_5 = R_6$$

$$R_1 = R_2 = R$$

$$C_1 = C_2 = C$$

$$R = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot C}$$

De forma tal que queda:

$$R_4 = R_3(2Q - 1)$$

Por lo que asignando valores para  $C$ ,  $R_3$ ,  $R_5$  y  $R_6$  resulta:

Componente	Valor calculado	Normalizado
$C$	$100nF$	$100nF$
$R_1 = R_2$	$981\Omega$	$1K\Omega$
$R_3$	$3,3K\Omega$	$3,3K\Omega$
$R_4$	$56,5K\Omega$	$47K\Omega + \text{Preset } 20K\Omega$
$R_5 = R_6$	$10K\Omega$	$10K\Omega$

Cuadro 3: Valores de componentes

Dado que  $f_0$  tiene una sensibilidad significativa frente a variaciones de  $R_1$  y  $R_2$ , se buscó que ambas fueran cercanas al valor teórico calculado midiéndolas previo al soldado.

Para el ajuste de  $Q$ , ya que se considera  $R_3$  fija, se agregó un preset en serie a  $R_4$  para realizar dicha calibración.

Dado que el sobrepico de la etapa alcanza los 25dB, se añadió a la salida de la misma un divisor resistivo fijo (separado de la etapa siguiente con un buffer) para atenuar la señal 20dB, ya que las 2 etapas siguientes tienen también un  $Q$  elevado y se perdería más rango dinámico.

**Etapas 2, 3, 4 y 5 - Celda Sallen Key** Para las etapas siguientes, se optó por implementarlas utilizando la celda Sallen Key, dado que los  $Q$  no son muy altos y el circuito de dicha celda es más simple.

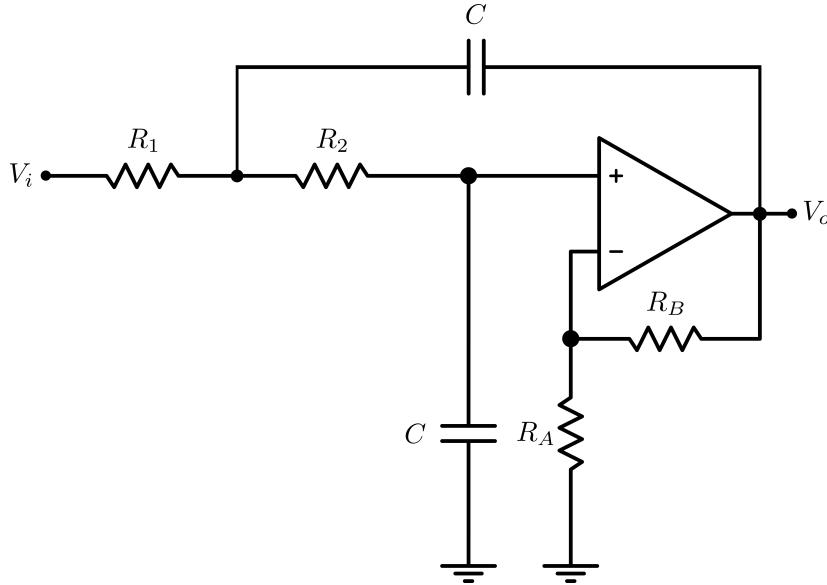


Figura 13: Celda Sallen-Key

Tomando  $R_1 = R_2$  para simplificar los cálculos y tener una menor dispersión de valores, se parte de las ecuaciones:

$$C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot R} \quad R_B = R_A \left( 2 - \frac{1}{Q} \right)$$

Se eligen los valores de  $C$  y  $R_A$ , definiendo así a  $R$  y a  $R_B$ . En la siguiente tabla se muestran los valores obtenidos y normalizados.

Etapa	$C$	$R$	$R - Norm.$	$R_A$	$R_B$	$R_B - Norm.$
2	100nF	1,08KΩ	1KΩ + 82Ω	1,2KΩ	1,97KΩ	1,8KΩ + Preset 200Ω
3	100nF	1,31KΩ	1,2KΩ + 100Ω	1,2KΩ	1,57KΩ	1KΩ + 560Ω
4	100nF	1,76KΩ	1,5KΩ + 270Ω	1,5KΩ	1,21KΩ	1,2KΩ
5	100nF	2,42KΩ	2,4KΩ (1%)	15KΩ	2,22KΩ	2,2KΩ

Cuadro 4: Valores de componentes

Se buscó utilizar un mismo valor de capacitor para todos los  $C$ , de forma tal de minimizar la diversidad de valores mientras las resistencias resultantes se mantuvieran en el mismo orden (de los KΩ). Dado que la etapa 2 posee un  $Q$  más alto respecto de las otras, resulta significativamente sensible a las variaciones sobre  $R_B$ , por lo que se decidió configurarla con el preset de 200Ω para un ajuste más fino.

#### 2.3.4. Acoplamiento y ajuste de ganancia

Dado que las impedancias de entrada de las etapas con Sallen-Key resultan mayores a 1KΩ y las de salida del orden de los Ω, no hay inconveniente para acoplar dichas etapas en cascada, por lo que no se las separó mediante buffers, excepto la primer etapa KHN con la segunda, dado que se incorporó el divisor resistivo mencionado anteriormente.

A la salida del filtro, se colocó otro divisor resistivo, acoplado a un buffer de salida, con un preset para realizar un ajuste a la ganancia general.

## 2.4. Respuesta en frecuencia

Teniendo la implementación real de los dos filtros, se midió la respuesta en frecuencia (módulo), comparando con la teórica y la simulada en las siguientes gráficas. Se midió únicamente la respuesta en módulo ya que para la aplicación que se tiene va a ser de interés si modifica o no la amplitud de la señal a la entrada. La fase introducida no es de interés para el análisis del muestreo y reconstrucción.

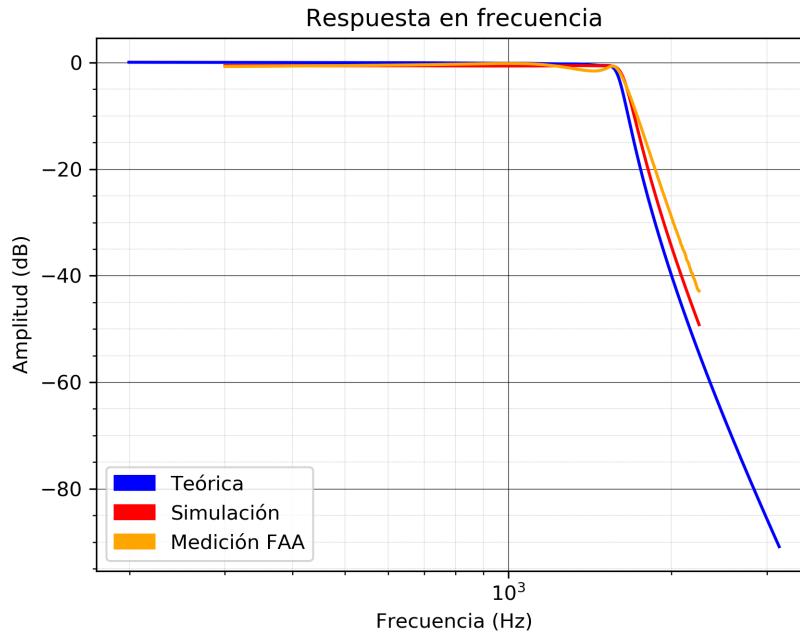


Figura 14: FAA - Módulo

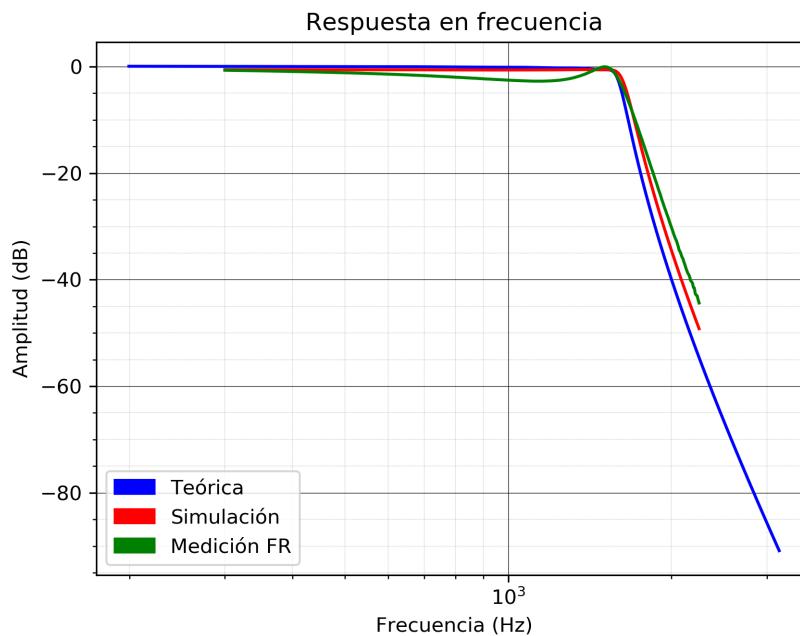


Figura 15: FR - Módulo

Debido a las desviaciones en los valores de los componentes no fue posible ajustarlos correctamente para eliminar el ripple. No obstante, como se mencionó anteriormente en el diseño, se tuvo en cuenta que podía ocurrir un inconveniente de este tipo, por lo que se definió la  $f_p$  con un valor más grande, de manera tal que la señal sufra lo menos posible la distorsión que provoca el sobreímpetu de la curva de respuesta en el espectro de la señal. Como los aspectos a analizar se centran en el muestreo y recuperación, no se lo consideró un problema grave. En la siguiente gráfica se muestran ambas curvas, de forma tal que se observe que tan similares resultaron en la práctica.

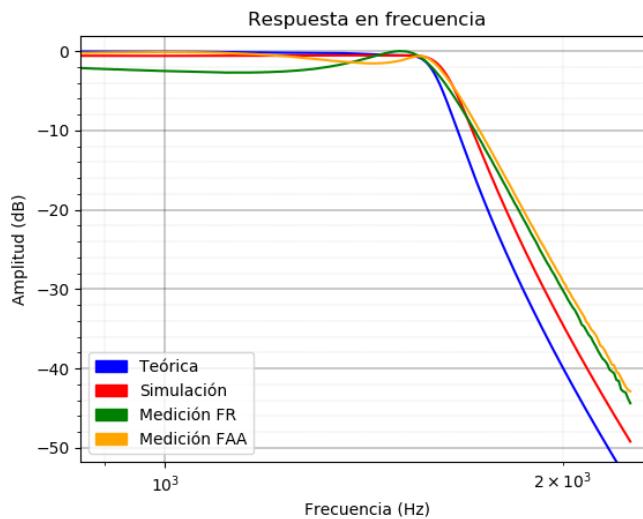


Figura 16: FAA y FR

En la siguiente gráfica se muestra el análisis de montecarlo tomando como referencia una tolerancia de 1 % en las resistencias y del 10 % en los capacitores.

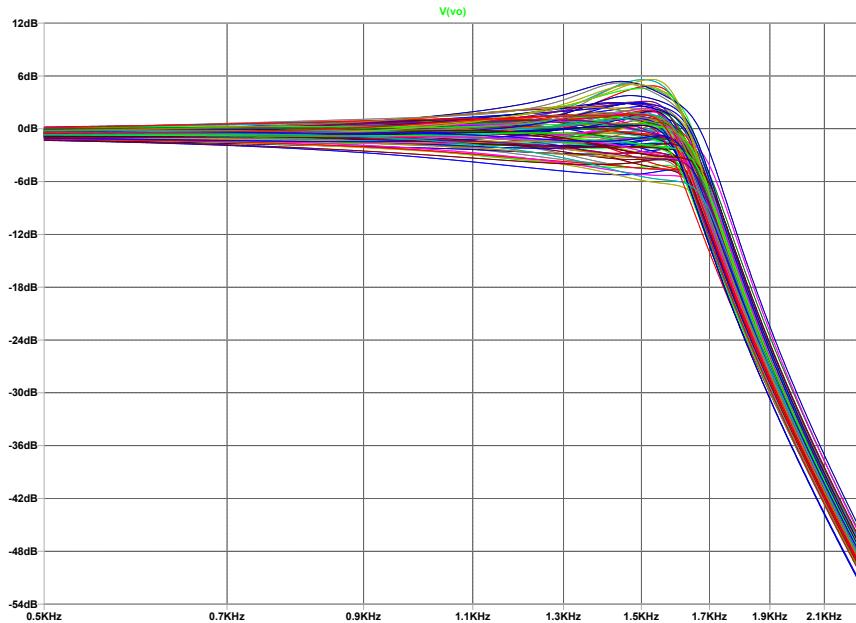


Figura 17: Curvas de montecarlo

## 2.5. Elección de $f_p$

Para determinar  $f_p$ , se buscó minimizar este valor a fin de filtrar la mayor cantidad de ruido posible, pero teniendo en cuenta también la necesidad de recuperar las señales originales. Se estudió, pues, el espectro de las señales que se utilizarían en la entrada, a saber: un seno en  $f_0 = 500\text{Hz}$ , un  $3/2$  seno en la misma frecuencia, y una exponencial decreciente de período 10s, así como una señal de AM.

La primera de estas señales, el seno, nos permite determinar que el filtro antialiasing debe dejar pasar al menos señales de 500Hz. Por otro lado, la señal de AM es:

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot \cos(2\pi \cdot 1,8f_0 \cdot t) + \cos(2\pi \cdot 2f_0 \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \cos(2\pi \cdot 2,2f_0 \cdot t)$$

De esto sabemos que  $f_p$  debe ser al menos  $2,2f_0 = 1,1\text{kHz}$ . Para dejar un margen de error, consideramos por ahora que  $f_p$  debe ser al menos 1.5kHz. En cuanto a la señal exponencial:

$$x(t) = e^{-|t|}, \quad -5 \leq t \leq 5$$

La frecuencia fundamental de la misma es 0.1Hz, con lo cual teniendo en cuenta la restricción anterior, sabemos que van a pasar más de 5000 de sus armónicos, con lo cual en principio esta señal no sería un problema. Para comprobar esta suposición, se obtuvieron los coeficientes de la serie exponencial de Fourier de esta función, resultando:

$$X_n = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - (-1)^n \cdot e^{-T/2}}{1 + \left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2}$$

Sabiendo que la potencia correspondiente al enésimo armónico es  $2 \cdot |X_n|^2$  (salvo para  $n = 0$ , donde no se duplica el valor del coeficiente), se confirmó que la misma se hace absolutamente despreciable a partir del octavo armónico, hasta donde se encuentra más del 99% de la potencia. Por lo tanto, esta señal no impone restricciones al filtro antialiasing. Considerando que incluso con una frecuencia 100 veces mayor, de 10Hz, se recuperan 50 armónicos y

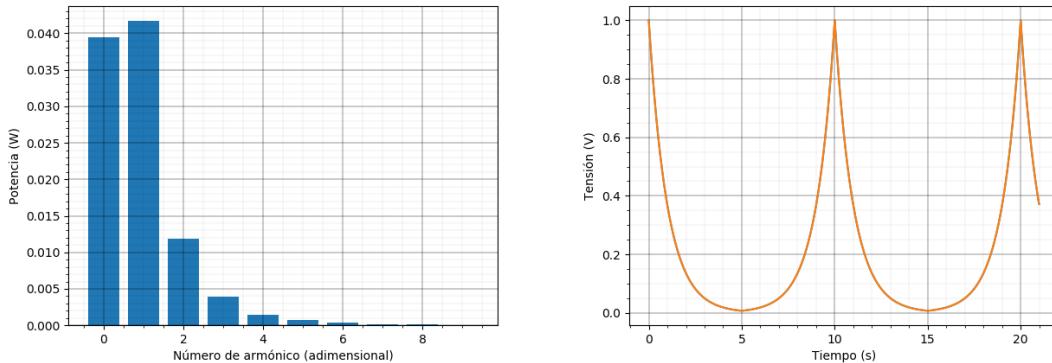


Figura 18: Potencia en función del número de armónico de la señal exponencial (izquierda), y señal reconstruida con 50 armónicos (derecha), superpuesta a la señal original (no llegan a distinguirse).

la señal se recupera de manera virtualmente completa (como se observa en la figura 18), se decidió trabajar esta frecuencia más rápida, a fin de no tener que esperar 10 segundos para medir un período. En el caso del  $3/2$  seno, la frecuencia fundamental es en cambio 500Hz, con lo cual por un filtro con  $f_p = 1500\text{Hz}$  pasaría la fundamental y los siguientes 2 armónicos. Para analizar el espectro en este caso se utilizó la serie trigonométrica de Fourier, obteniéndose:

$$a_0 = \frac{2}{3\pi}, \quad a_n = \frac{12}{\pi} \cdot \left( \frac{1}{9 - 4n^2} \right), \quad b_n = 0$$

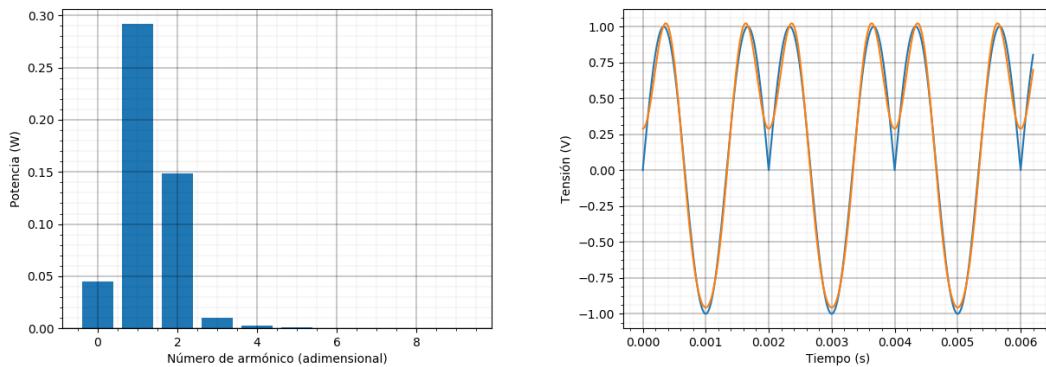


Figura 19: Potencia en función del número de armónico del  $3/2$  (izquierdo), y señal reconstruida con 3 armónicos incluyendo la fundamental (derecha, naranja), supuestra a la señal original (azul).

Se obtuvo, pues, que hasta 500Hz se tiene el 67 % de la potencia, hasta 1kHz el 97 %, y hasta 1.5kHz el 99 %. Por lo tanto, siendo que con  $f_p = 1,5\text{kHz}$  se puede conservar más del 99 % de la potencia de las 3 señales de entrada, se utilizó este valor, con el cual se recupera la señal tal como se observa en la figura 19.

### 3. Llave analógica

La llave analógica cumple la función de muestreo y reemuestreo de la señal.

#### 3.1. Elección del integrado

Los parámetros que se tuvieron en cuenta para la elección del integrado a utilizar fueron los siguientes:

1. Resistencia de encendido ( $R_{on}$ ): en una llave ideal es nula, cuando la llave está cerrada no debería de producirse ninguna caída de tensión cuando la señal pasa a través de la llave. Buscamos que sea lo mas baja posible para que no se degrade mucho la señal. También es importante que sea constante para evitar alteraciones de la señal de entrada a la salida debido a diferentes atenuaciones que puedan producirse por variaciones en esta resistencia y que tenga menor distorsión armónica.
2. Resistencia de apagado ( $R_{off}$ ): en una llave ideal es infinita, cuando la llave está abierta no debería de circular corriente y debería bloquear por completo el paso de la señal a través de la llave. Por lo ello buscamos que sea lo más alta posible, para poder aislar lo mejor posible la señal de entrada con la salida. Está relacionada con la corriente de fuga cuando la llave está en corte.
3. Niveles lógicos: deben ser compatibles con los niveles de tensión generados por el oscilador del sistema.
4. Velocidad de conmutación: debe ser lo más rápida posible para poder muestrear señales de alta frecuencia, minimizar la distorsión de la señal y evitar errores en el muestreo.
5. Voltaje máximo de entrada: las máximas amplitudes de éstas tienen que ser compatibles con la llave analógica elegida, estas coinciden con la alimentación que se use para la misma.

Se compararon las hojas de datos de tres integrados distintos:

Integrado	CD4016	CD4066	MAX320
Resistencia de encendido ( $\Omega$ )	280	125 (flat over full signal-input range)	35
$\Delta R_{on}$ ( $\Omega$ )	10	10	2
Corriente de fuga en corte	100pA	10pA	10pA
Propagation Delay (from input to output)	20ns	20ns	-
$t_{on}/t_{off}$	20ns	20ns	65ns/35ns
Cut off frequency (-3dB)	40MHz	40MHz	-
Tensión de alimentación (max. recomendado)	VSS+18V	VSS+18V	VSS+17V
Feedthrough Frequency (-50dB)	1.25MHz	1MHz	-
Crosstalk (control input to signal-output)	50mV	50mV	-
Input Capacitance	4pF	8pF	-
THD	0.4 %	0.4 %	-
Encapsulado	THT	THT	SMD

Cuadro 5: Comparación de las características de los integrados

Entre todos los modelos disponibles se priorizó la llave con menor  $R_{on}$  y mayor velocidad de conmutación para tener menor distorsión armónica en las señales de alta frecuencia, ya que, el ancho del pulso de la señal de control será:

$$T_0 = \frac{DC}{f}$$

donde el caso más crítico se obtiene con el menor Duty cicle a la mayor frecuencia a la cual se quiere muestrear, donde la velocidad de conmutación de la llave cobra mucha importancia.

La llave MAX320 resulta una buena opción debido a la pequeña  $R_{on}$  que tiene en comparación con las otras dos, pero se optó por la CD4066, ya que también tiene buenas características y no es de montaje superficial como la anterior mencionada, lo que le da practicidad al armado de la placa. Otra característica a tener en cuenta es la corriente de fuga en corte, en este aspecto la del integrado CD4066 es menor que la del integrado CD4016. Otra ventaja del CD4066 son los tiempos de apertura y cierre de la llave, muy importantes para el correcto muestreo de una señal, ya que no se puede switchejar la llave a un tiempo menor a este. Como se puede ver en la tabla,

estos tiempos son menores que los del MAX320. Por otra parte, el tiempo de propagación entre la entrada y la salida, no fué encontrada en la hoja de datos del MAX320. El factor de Crosstalk, no resulta ser crítico dado que se cuenta con un filtro recuperador pasa bajos, por lo que elimina el ruido de alta frecuencia característico del Crosstalk. Un punto a contemplar son los niveles de tensión a utilizar. eligiendo alimentación con fuente partida de  $\pm 9V$  se garantiza que ésta caiga dentro de los límites de la tensión de alimentación recomendada en la hoja de datos. Y como existe la restricción de que la llave no admite tensiones mayores a su alimentación, se verifica que este rango sea mayor que la máxima amplitud de las señales de entrada a tratar.

### 3.2. Configuración de la llave analógica

Para el correcto funcionamiento, se incluyó una resistencia de pull-down a la salida de la llave para garantizar que cuando esté en alta impedancia (llave abierta), la salida sea de 0 V y no quede en un estado flotante. Esta resistencia no debe ser muy chica, dado que provocaría que corrientes de gran valor circulen por la llave analógica. Debe ser lo suficientemente mayor que la RON, para poder despreciar el divisor resistivo que se forma al considerar ambas resistencias. Por otro lado, si el valor fuera muy elevado, el circuito RC que se forma con la capacidad de salida de la llave tendría un tiempo característico muy alto en comparación con el ancho del pulso de la señal de control cuando la frecuencia de muestreo es alta, lo que haría que la señal no se termine de establecer. Por esta relación de compromiso, se va a notar una leve diferencia entre la amplitud de la señal maestreada y la señal de entrada por el divisor resistido formado. Se debe garantizar, además, que la impedancia de entrada del filtro recuperador sea de ordenes de magnitud más grande que esta resistencia para que la transferencia de dicho filtro no se vea modificada.

## 4. Sample and hold

La etapa de sample and hold, o track and hold, cumple la función de mantener la señal constante por un tiempo suficiente como para medir su valor. Este proceso se divide en dos:

- Sample o track: la salida es igual a la entrada.
- Hold: la salida se mantiene constante en el valor que tenía cuando se recibió la señal de hold.

Para este fin se utilizó, de acuerdo a lo pautado por la cátedra, el integrado LF398<sup>1</sup>. Al mismo se lo controla con una señal cuadrada: cuando la misma toma un valor superior al de la referencia lógica (con un threshold de 1.4V) se opera en modo sample, y con valor inferior a la referencia, en modo hold. Sus principales limitaciones están dadas por:

- La salida debe mantenerse dentro de los valores de tensión de la alimentación.
- Para frecuencias bajas debe tenerse en cuenta el droop rate, es decir qué tan rápido se descarga el capacitor de hold.
- Para frecuencias altas, pueden surgir problemas con el slew rate y/o con el tiempo de establecimiento y de adquisición de la señal en hold.

Para satisfacer los requerimientos que se tengan en frecuencia, se debe elegir el capacitor de hold apropiadamente. Esto se debe a que cuanto mayor sea el capacitor, más estable será la señal de salida (se reducirán el droop rate y el tiempo de establecimiento), pero el sistema será más lento a cambios en la entrada en el momento de sample (empeorará el tiempo de adquisición). Un droop rate elevado impide trabajar a bajas frecuencias, mientras que cuanto mayores sean los tiempos de adquisición y establecimiento, menor será la máxima frecuencia a la que el integrado funciona correctamente.

Se procedió, pues, a realizar mediciones de tiempo de establecimiento y tiempo de adquisición con distintos capacitores (tabla 6). En cuanto al droop rate, dado que al computar la derivada de la tensión, se arrojaban valores poco representativos de la señal debido a la presencia de ruido, se decidió utilizar los valores de la hoja de datos del integrado para realizar la comparación. Se utilizó el gráfico proporcionado por el fabricante, que se observa en la figura 20. En primer lugar, cabe aclarar que las mediciones de tiempo de establecimiento se vieron

Capacidad	Tiempo de establecimiento (s)	Tiempo de adquisición (s)
100pF	$9 \times 10^{-7}$	$1,4 \times 10^{-6}$
10nF	$\leq 1,3 \times 10^{-8}$	$8,0 \times 10^{-6}$
100nF	$\leq 1,3 \times 10^{-8}$	$1,3 \times 10^{-4}$

Cuadro 6: Parámetros del LF398 para distintos valores de  $C_h$

limitadas por los instrumentos de medición utilizados: puesto que el rise time del generador utilizado para realizar las mediciones es de 13ns, es imposible con este instrumento medir un tiempo de establecimiento del mismo orden que este valor. Sin embargo, sí se pudo realizar esta medición para el capacitor más pequeño.

Resulta claro de estas mediciones que el capacitor de 100nF, por su tiempo de adquisición, no permitiría trabajar con frecuencias mayores a aproximadamente 3.5kHz con duty del 50 %, lo cual es inaceptable considerando que  $f_p = 1,5\text{kHz}$ : sólo se podría muestrear en el límite establecido por el teorema de Nyquist, casi sin margen de error alguno. Con este capacitor, además, se hace demasiado notorio el problema de la absorción dieléctrica, por el cual en la etapa de hold el capacitor tiende a volver al valor de hold anterior. Este efecto se observa en la figura 21.

Por otro lado, con el capacitor de 100pF, si bien los tiempos medidos fueron pequeños, esto es en desmedro de la estabilidad de la señal en hold. En la figura 22, se observa cómo para frecuencias elevadas el capacitor no mantiene correctamente el valor de la señal. En cuanto al droop rate documentado para este valor de  $C_h = 100\text{pF}$ , de  $0.3\text{V/s}$ , provocaría que caiga 1.2mV trabajando a 500Hz con 50 % de duty, que es la mínima frecuencia sub nyquist que se utilizará, con lo cual en principio esto no debería ser un problema. Por último, con el capacitor de 10nF recomendado por el fabricante, se consigue un droop rate de  $4\text{mV/s}$ , completamente despreciable para nuestra aplicación, mientras que la frecuencia máxima a la que se puede trabajar sube a 62.5kHz, lo cual permite tomar 40 muestras por período de una señal con  $f_{in} = f_p$ . Con este capacitor, además, la señal resulta mucho

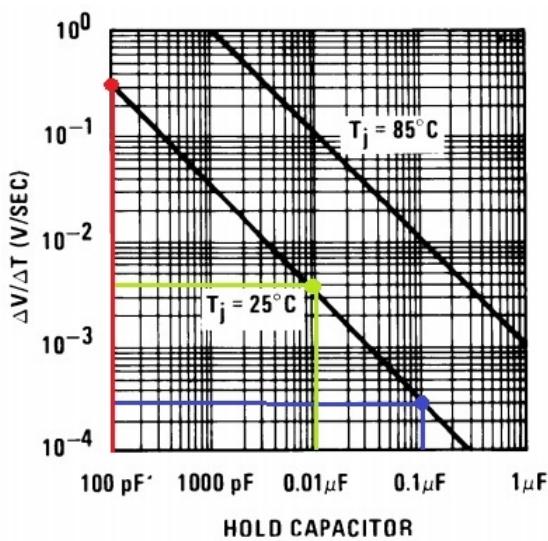
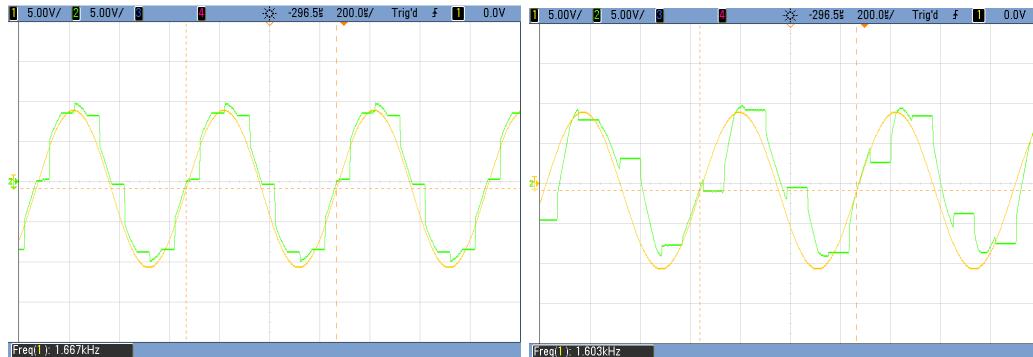
Figura 20: Droop rate en función de  $C_h$  para el LF398

Figura 21: Salida del sample and hold (verde) con entrada senoidal de 1.6KHz (amarillo). Izquierda: capacitor de 100pF. Derecha: capacitor de 100nF.

menos ruidosa que la del capacitor de 100pF. Por lo tanto, este es el valor que se decidió utilizar. En cuanto a la tecnología de este componente, se siguió también la recomendación del fabricante de usar un capacitor film, debido a que su dieléctrico tiene bajas pérdidas y mejor comportamiento en cuanto a absorción dieléctrica que en otros tipos de capacitores. En la figura 23, se observa cómo se comporta el integrado con el capacitor elegido. La señal se ve mucho más estable en hold que para el capacitor de 100pF, sin los problemas de absorción dieléctrica manifestados por el de 100nF.

<sup>1</sup> Hoja de datos consultada: <http://www.ti.com/lit/ds/symlink/lf398-n.pdf>.



Figura 22: Salida del sample and hold (verde) con entrada senoidal de 240KHz (amarillo). Izquierda: capacitor de 100pF. Derecha: capacitor de 100nF.



Figura 23: Salida del sample and hold (verde) con entrada senoidal de 1.6KHz (amarillo). Capacitor de 10nF.

## 5. GUI

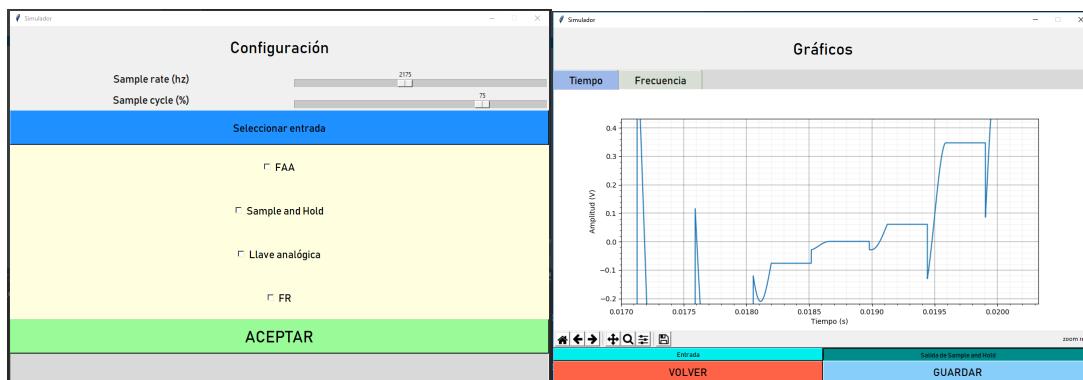


Figura 24: GUI - Ventanas de usuario

La GUI para realizar las simulaciones fue implementada en Python. La imagen de la derecha presenta la ventana principal, donde se configuran los parámetros del sistema para simular. Se puede elegir el modo de muestreo, además de la frecuencia de sampleo y el duty cicle del oscilador. Al hacer click en aceptar, se procesa

la simulación y se muestra con una barra verde en la parte inferior de la ventana mientras se carga. Una vez terminada, se pueden observar los gráficos resultantes de la señal en los diferentes puntos del sistema, tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia.

Para correr el programa, se debe utilizar el archivo UI.py.

## 6. Mediciones básicas

Se estudió el comportamiento del sistema con tres señales de entrada distintas, las cuales fueron:

$$X_a(t) = A \cdot \cos(2\pi f_{int} t)$$

$$X_b(t) = A \cdot \sin(2\pi f_{int} t)$$

$$X_c(t) = A \cdot e^{|t|}$$

Se debe recordar nuevamente que los filtros reales implementados tienen una ligera atenuación de como máximo 2dB en la banda de paso cerca de la frecuencia  $f_p$  debido a las dificultades en su calibración, dadas las desviaciones en los valores de los componentes reales. Por ello, las señales recuperadas tendrán una atenuación mínima en todos los casos. Como se mencionó previamente en el diseño de los filtros, se busca analizar los efectos del muestreo y recuperación de la señal a partir del espectro en banda base, por lo que no se lo consideró un problema.

### 6.1. Caso con variables óptimas

Para definir la amplitud máxima de las señales de entrada, se tiene en cuenta la máxima amplitud que puede tener la señal que ingresa al filtro antialiasing sin sufrir distorsión apreciable. Se consideró entonces una máxima amplitud de  $1Vp$ .

Partiendo en cada caso de una  $f_s$  que cumpla el teorema de Nyquist del muestreo, se utilizó una un poco mayor dado que se debe tener en cuenta un cierto margen de frecuencia debido a que los filtros no son ideales, sino de orden finito, por lo que la caída de los mismos es finita y, en consecuencia, en  $f_a$  no se tiene atenuación infinita. Se varió el duty del oscilador hasta conseguir que la señal recuperada tuviera la máxima amplitud posible (recuperando la mayor potencia posible).

Finalmente se utilizó una  $f_s = 2KHz$ , siendo la  $f_{in} = 500Hz$  correspondiente al número de grupo (para las señales  $X_a$  y  $X_b$ ), y un valor de  $A = 1Vp$ .

Se tomaron mediciones tanto de la salida como de la entrada, para ambos casos: FAA + LLAVE + FR, y FAA + S&H + FR.

Para la potencia, se expresó la potencia recuperada respecto de la entrada, es decir el porcentaje relativo. En el cálculo parcial se utilizó el hecho de ser señales periódicas, por lo que:

$$P_x = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T |x(t)|^2 dt$$

Para las señales  $X_a$  y  $X_b$ :

$$P_a = f_{in} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \sin^2(2\pi f_{in} t) dt = \frac{A^2}{2}$$

$$P_b = f_{in} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left( e^{-|t \cdot 2f_{in}|} \right)^2 dt \approx \frac{A^2}{10}$$

Y la potencia relativa se obtiene como:

$$Pr(\%) = \left( \frac{P_r}{P_{in}} \right) 100$$

### 6.1.1. Señal $X_a(t)$

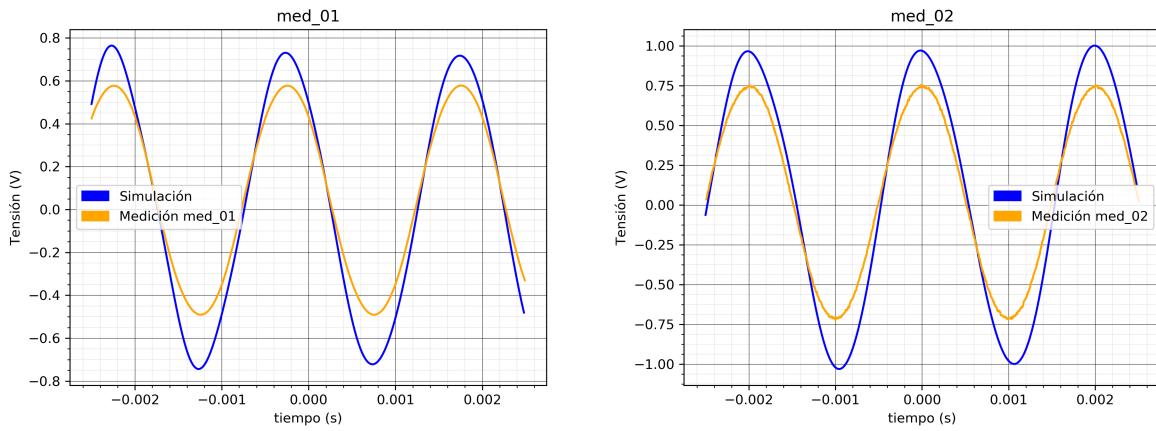


Figura 25: Caso con Llave analógica (izquierda) - Duty 24 %, y Sample and Hold (derecha) - Duty 40 %

En ambos casos se recupera la senoidal original (con menos potencia naturalmente) tal como se esperaba sin armónicos adicionales. En el caso de la llave analógica, la potencia relativa recuperada es del 30 %, y en el del sample and hold es de 56 %.

### 6.1.2. Señal $X_b(t)$

Se repitió el procedimiento con la señal  $X_b(t)$ .

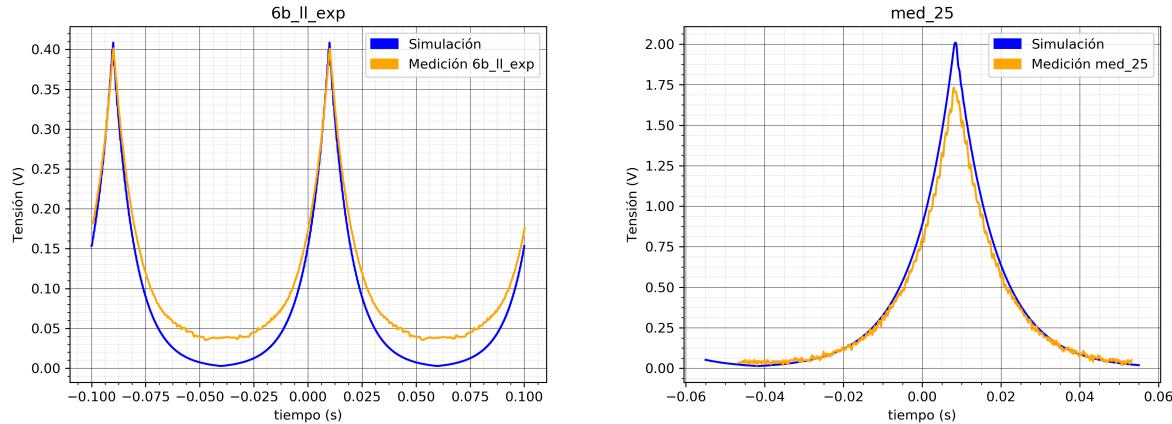


Figura 26: Llave analógica (izquierda) - Duty 20 %, Sample and Hold (derecha) - Duty 20 %

Se logra recuperar la exponencial en ambos casos (con menos potencia también) como era de esperarse. En el caso de la llave analógica se recupera un 16 % de la potencia, y en el caso con sample and hold 76 %.

### 6.1.3. Señal $X_c(t)$

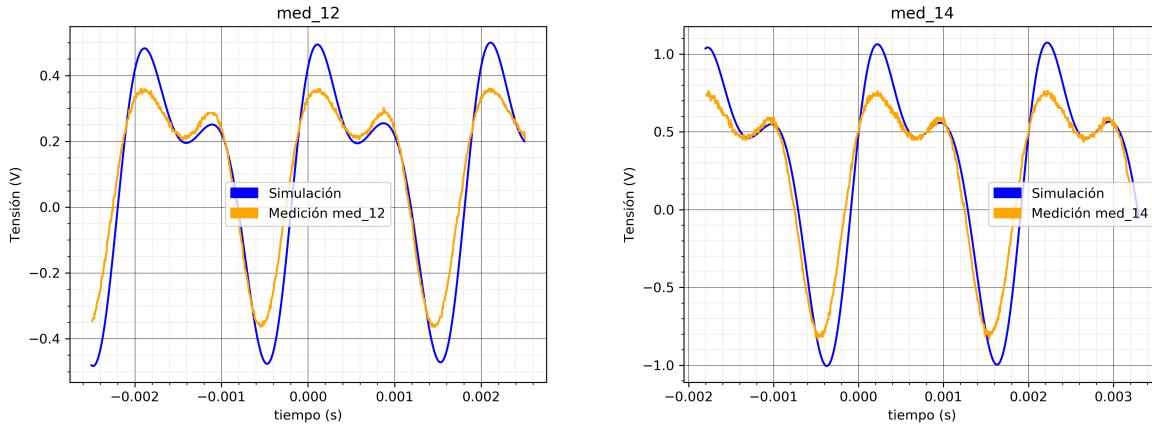


Figura 27: Llave analógica (izquierda), Sample and Hold (derecha)

En ambos casos se observa que se recupera la forma de la señal, pero no es igual a la original. Si se tiene en cuenta que  $f_{in} = 500\text{Hz}$ , a través del FAA sólo pasan las frecuencias  $f_{in}$ ,  $2 \cdot f_{in}$  y  $3 \cdot f_{in}$ . Como se explicó anteriormente en los criterios de selección de  $f_p$ , la mayor potencia de dicha señal se recupera con los 3 primeros armónicos; sin embargo, la señal recuperada es distorsionada por la no planicidad en banda de paso de los filtros reales, como se explicó durante el análisis de los filtros. El efecto se observa también en la simulación dado que para ambos filtros se cargó la transferencia aproximada con Legendre (y no una ventana cuadrada ideal). Dado que la señal no mantiene su formato original no puede inferirse fácilmente una función que la defina, por lo que no se realizó el cálculo numérico de la potencia recuperada.

Se puede ver en todos los casos que se recupera mayor potencia utilizando el sample and hold que con la llave analógica. En el caso de la llave analógica, se puede modelar como la señal multiplicada por un tren de pulsos de ancho  $\tau$ :

$$x^*(t) = x(t) \cdot \Pi_T(t)$$

Donde el tren de pulsos:

$$\Pi_T(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) * \delta_{2\tau}(t)$$

Donde  $\delta_{2\tau}(t)$  es el tren de deltas periódico de período  $2\tau$ . Entonces se tiene que:

$$x^*(t) = x(t) \cdot \left( \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) * \delta_{2\tau}(t) \right)$$

Mediante la transformada de Fourier para hallar el espectro resultante se obtiene:

$$X^*(f) = X(f) * (\tau \cdot \text{sinc}(\tau f) \cdot \delta_{f_s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi \cdot \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \cdot X(f - \frac{n}{2\tau})$$

Donde  $f_s = \frac{1}{2\tau}$ .

Se puede ver que espectro resultante se encuentra envuelto por una *sinc*.

En el caso del sample and hold, se tiene esa misma información sobre el espectro más la que se obtiene durante el tiempo de hold, por lo que se recupera mayor información. El muestreo durante el tiempo de hold puede modelarse como la señal muestreada con un tren de deltas periódico  $\delta_T(t)$  convolucionado con un pulso  $\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$ . En fórmulas:

$$x^*(t) = [x(t) \cdot \delta_T(t)] * \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

Donde aplicando la transformada de Fourier se obtiene:

$$X^*(f) = (X(f) * \delta_{\omega_s}(f)) \cdot \tau \cdot \text{sinc}(\tau f) = \left( X(f) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi f_s \cdot \delta(f - nf_s) \right) \cdot \tau \cdot \text{sinc}(\tau f)$$

$$X^*(f) = \tau \cdot \text{sinc}(\tau f) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi f_s \cdot X(f - nf_s)$$

Es decir que en cada delta se tendrá una réplica del espectro de  $X(f)$ , afectado por la envolvente de la *sinc*. Si el ancho del pulso  $\tau$  se aproxima a 0, el lóbulo principal del *sinc* será más ancho, aproximándose al caso ideal de un tren de deltas periódico.

Sumando los efectos del muestreo en tiempo de sample más el del tiempo de hold se tiene finalmente:

$$X_T(f) = \underbrace{\tau \cdot \text{sinc}(\tau f) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\tau} \cdot X(f - \frac{n}{2\tau})}_{\text{Sample}} + \underbrace{\tau \cdot \text{sinc}(\tau f) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi f_s \cdot X(f - nf_s)}_{\text{Hold}}$$

## 6.2. Caso con $f_s = f_a$

En este caso, se cambia la frecuencia de sampleo; considerando además que  $f_{in} \leq \frac{f_p}{2}$ , se mantuvo la  $f_{in}$  del ítem anterior. Se muestran los casos representativos con  $X_a$  y  $X_b$ .

### 6.2.1. Señal $X_a(t)$

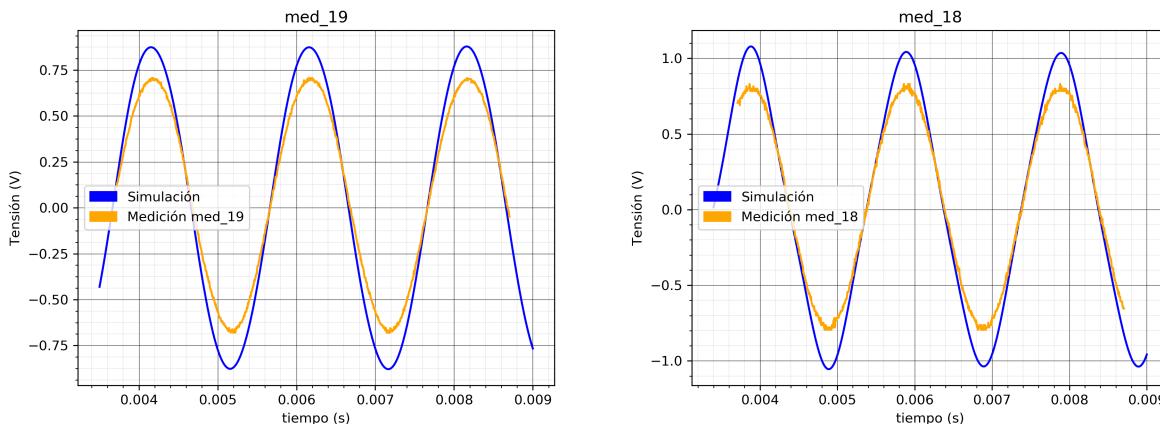


Figura 28: Llave analógica (izquierda) - Duty 88 %, Sample and Hold (derecha) - Duty 71 %

En el caso de la llave analógica, se recupera una potencia realtiva del 49 %, y en el del sample and hold del 64 %.

### 6.2.2. Señal $X_b(t)$

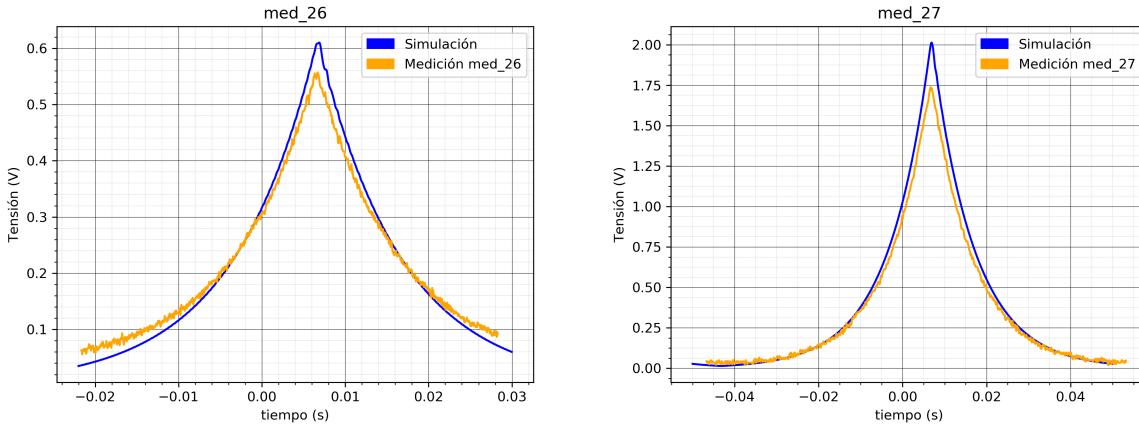


Figura 29: Llave analógica (izquierda) - Duty 30 %, Sample and Hold (derecha) - Duty 15 %

Al igual que en el caso de muestreo natural con llave analógica, se recuperan las señales originales sin armónicos adicionales como era de esperar. En este caso se recupera más potencia, ya que el  $\tau$  del pulso  $\Pi(\frac{t}{\tau})$  es menor al haber aumentado la frecuencia de muestreo, lo que resulta en que el lóbulo principal de la *sinc* es más ancho y distorsiona menos el espectro.

Para el caso con llave analógica, se recupera un 7 %, y en el caso del sample and hold un 76 %.

### 6.3. Caso con $f_{in} = f_s$ - Aliasing con $X_a$

Ahora se toma sólo la señal  $X_a$ , es decir la senoidal básica. Dado que en este caso  $f_{in} = f_s$ , no se está cumpliendo Nyquist. Por lo tanto, se esperará observar los efectos del solapamiento entre las repeticiones del espectro de la señal en cuestión a la salida del sistema.

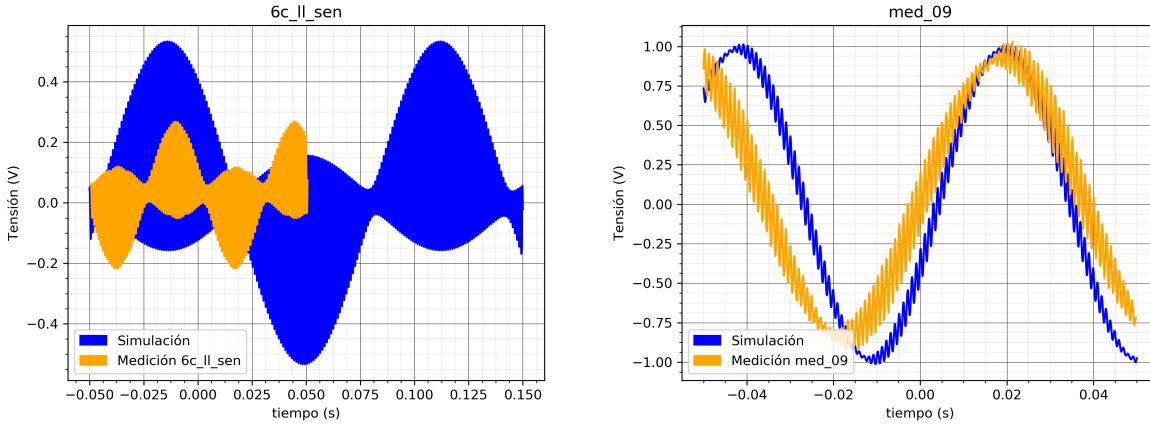


Figura 30: Caso con llave analógica (muestreo natural) a la izquierda, y muestreo con sample and hold a la derecha.

Se observa que efectivamente, tanto en simulación como medición hay aliasing entre las repeticiones del espectro de la senoidal original. Al pasar por el filtro recuperador, se obtuvieron dos espectros solapados, produciendo una senoidal montada sobre otra, como se observa en el caso con sample and hold. En el caso con llave analógica, se obtuvo una señal modulada en amplitud.

#### 6.4. Caso con $f_s$ fija - Aliasing con $X_b$ y $X_c$

En este caso, dada una  $f_s$  fija, se varía la frecuencia de las señales  $X_b$  y  $X_c$  hasta observar efectos de aliasing a la salida del filtro recuperador, realizado tanto para el caso de muestreo natural como el instantáneo con sample and hold. Se muestran los efectos producidos con la señal  $X_c$ . Las frecuencias de muestreo utilizadas en este caso es de  $f_s = 1,5 KHz$ .

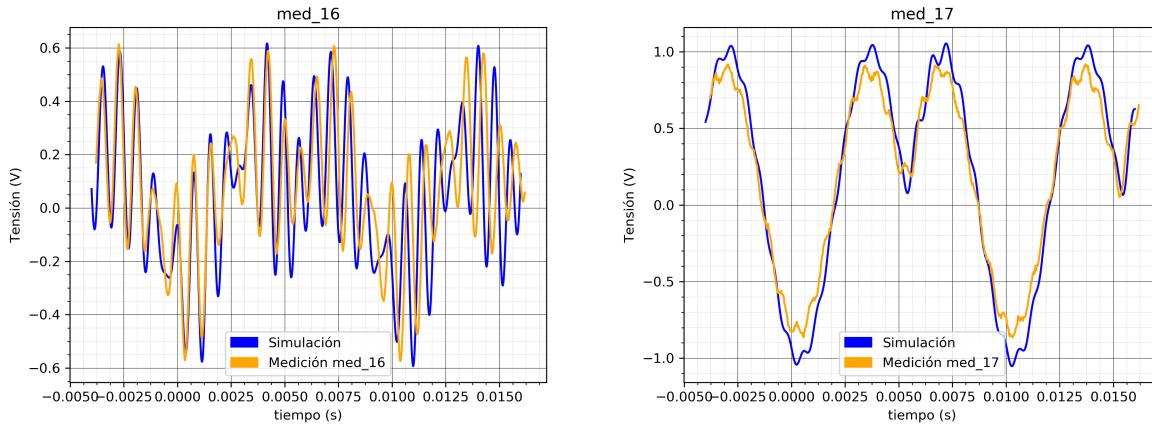


Figura 31: Caso de aliasing en señal  $X_c$ . Muestreo natural (izquierda), y muestreo instantáneo (derecha).

En el caso de muestreo natural, con el aliasing la señal obtenida se asemeja a una de mayor frecuencia modulada por la  $X_c$ , mientras que en el caso de muestreo instantáneo se tiene una señal montada sobre la  $X_c$ .

## 7. Remuestreo

En esta sección, analizaremos los efectos del muestreo instantáneo en una señal AM. La misma es de la forma:

$$X_C(t) = \frac{A_{MAX}}{2} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \cos(2\pi \cdot (f_p - f_m) \cdot t) + \cos(2\pi f_p \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \cos(2\pi \cdot (f_p + f_m) \cdot t) \right) \quad (1)$$

En este caso, se utilizó  $f_p = 1\text{kHz}$  y  $f_m = 100\text{Hz}$ . Para lograr el muestreo instantáneo, primero se pasa la señal por el sample and hold. Luego, se la vuelve a muestrear, pero esta vez con la llave analógica, de manera tal que a la salida se anule la totalidad del tiempo de sample y se conserve sólo el de hold. Idealmente, esto es equivalente a multiplicar la señal por un tren de deltas (muestreo ideal), y luego convolucionar con un pulso.<sup>2</sup> Gráficamente, donde había deltas se obtienen pulsos con el ancho del pulso original y la altura del delta que se reemplaza. Si

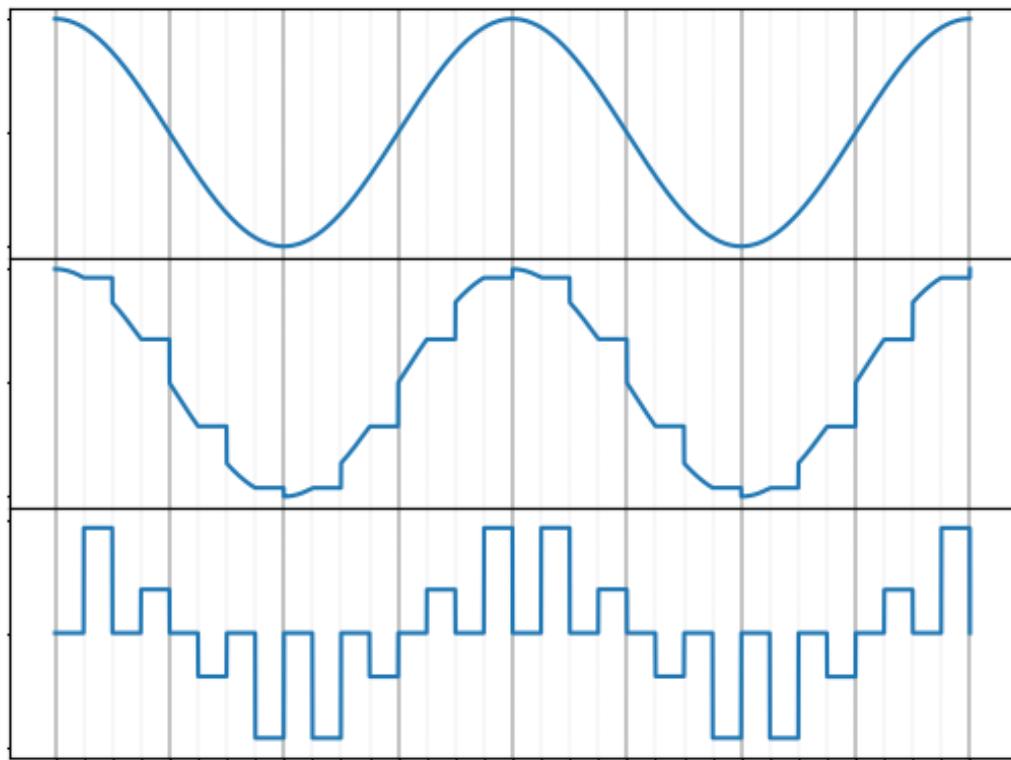


Figura 32: Efecto en una señal de entrada (arriba) de pasar primero por un sample and hold (centro), y luego por la llave analógica (abajo), considerando todo ideal.

bien en el caso ideal basta con abrir la totalidad del tiempo que el S&H está en hold y viceversa, al tener en cuenta las limitaciones de los integrados surgen otras consideraciones. A fines de garantizar que la señal se mantenga lo más constante posible en cada muestra, se quiere evitar que a la salida se observe el tiempo de establecimiento del sample and hold. Por lo tanto, se decidió usar en las mediciones un duty levemente menor para la llave que para el S&H. En cuanto al duty cicle de estas mediciones, cuanto más tiempo esté abierta la llave, más potencia se recuperará a la salida. Sin embargo, hay que tener en cuenta que el S&H debe estar en hold por más tiempo que la llave está abierta por lo anteriormente discutido, pero si esto se lleva al extremo es posible que el integrado no llegue a seguir a la señal en sample y la salida no sea correcta. Considerando que la máxima frecuencia que entra en el sistema por  $X_C$  es  $f_p + f_m = 1,1\text{kHz}$ , por Nyquist la frecuencia de sampleo debe ser mayor a  $2.2\text{kHz}$ , y se decidió establecerla en  $3\text{kHz}$ , obteniéndose un período de  $167\mu\text{s}$ . Por otro lado, sabemos por las mediciones realizadas en el LF398 que el tiempo de adquisición del mismo es de  $8\mu\text{s}$ , pero dejando un margen de error establecemos que no queremos un tiempo de sample inferior a  $16\mu\text{s}$ . Se obtiene, entonces, que el S&H debe estar en sample el 9.6 % del tiempo, y por lo tanto se toma 90 % de duty cicle para la llave analógica. Se

<sup>2</sup>Dependiendo de la bibliografía, puede encontrarse que a esto lo llama “muestreo flat top”, mientras que con muestreo instantáneo se refiere al caso de producto con tren de deltas.

procedió, pues a realizar mediciones en las condiciones ya mencionadas, a saber: sin el filtro antialiasing, con el sample and hold y la llave analógica, con  $f_s = 3\text{kHz}$ , y un duty cycle del 90%, con  $X_C$  en la entrada. El espectro de dicha señal se observa en la figura 33. En primer lugar, se observa en la figura 34 que, si bien la forma de la

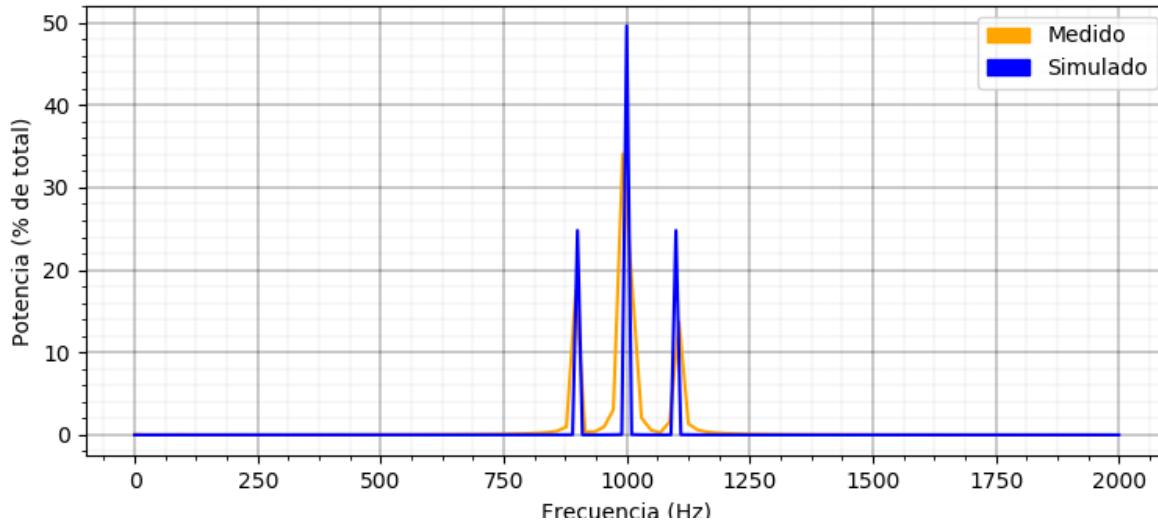


Figura 33: Espectro de la entrada, medido con el analizador de espectro y simulado

función es, a grandes rasgos, la misma (un tren de pulsos modulados por una AM), hay diferencias importantes en el alto de los pulsos. Esto se debe a que no se pudieron replicar exactamente las condiciones de la medición, en cuanto a la fase entre la función y el clock de la llave y del S&H, la cual no es una variable que se tuvo en cuenta en la simulación ni podamos controlar en la medición. Por otro lado, se observa en la medición que el valor de la salida no se mantiene perfectamente constante en los momentos de hold. Considerando que sólo varía unos pocos mV (menos de 5), esto puede atribuirse al piso de ruido del osciloscopio. En cuanto a la frecuencia

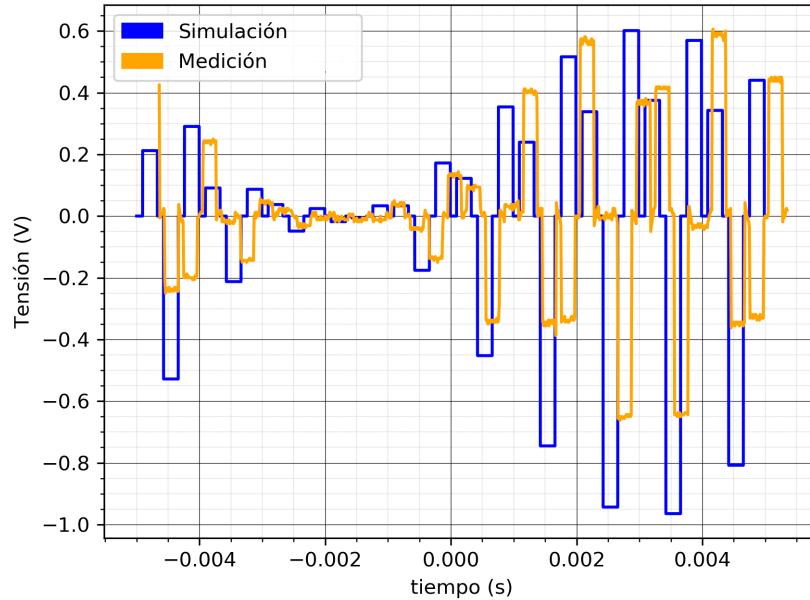


Figura 34: Señal AM a la salida de la llave analógica

(figura 35), se observa que el espectro de la entrada se replica periódicamente, pero con distintas atenuaciones. Este fenómeno puede explicarse recordando la modelización matemática del muestreo instantáneo: convolución entre la señal muestreada idealmente (con deltas) y un pulso. Al muestrear idealmente la señal, su espectro se

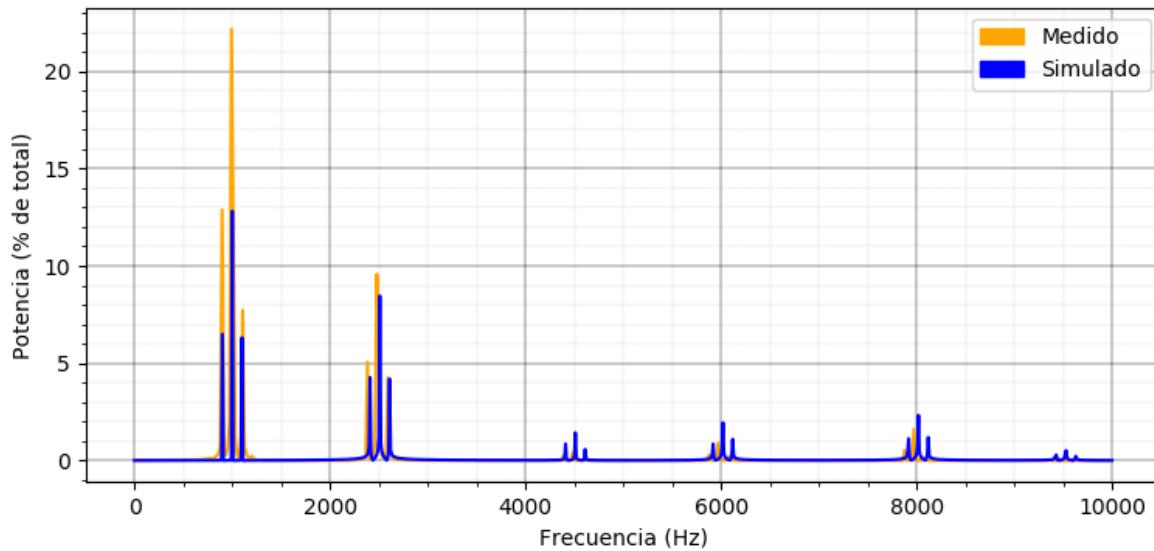


Figura 35: Espectro a la salida de la llave analógica, medido con el analizador de espectro y simulado

hace periódico, y al convolucionar esta nueva señal con un pulso, en frecuencia se multiplica su espectro por un sinc. Por lo tanto, la periodicidad de este espectro proviene de discretizar la señal en el tiempo, mientras que las distintas alturas de cada repetición se deben a la modulación por un sinc. Por último, podemos observar la señal a

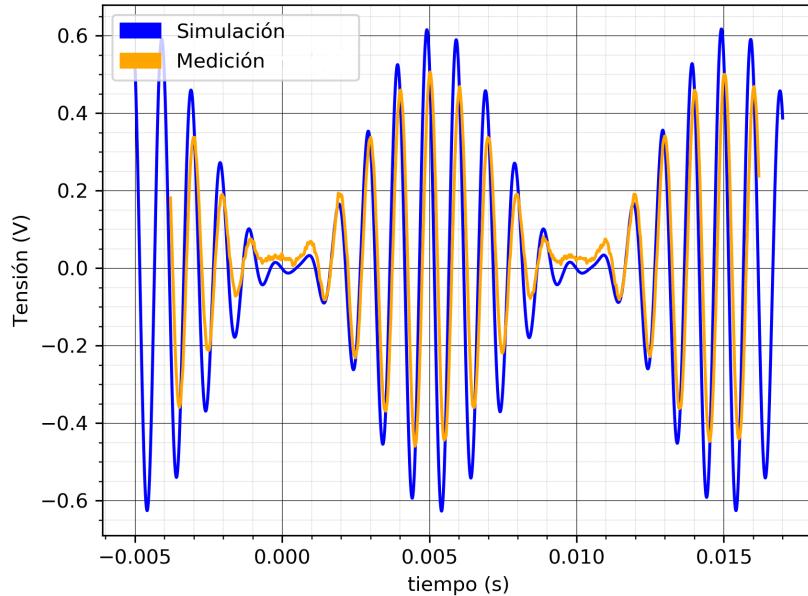


Figura 36: Señal AM a la salida del filtro recuperador

la salida del filtro recuperador en las figuras 36 (en el dominio del tiempo) y 37 (en el de la frecuencia). Al atenuar más de 40dB las réplicas del espectro de la señal de entrada, la de salida deja de estar discretizada en el tiempo, y de esta manera se recupera la señal de entrada. Si bien en la salida se conserva, en líneas generales, la forma de la entrada, resulta claro de las mediciones especlares que la señal ha sido distorsionada, puesto que la potencia en  $f_p + f_m$  no es igual a la de  $f_p - f_m$ . Esto puede explicarse teniendo en cuenta que en el filtro recuperador implementado no se logró ganancia constante en la banda pasante, con lo cual cada componente de frecuencia se atenúa de manera diferente. Esto explica también las diferencias entre la tensión máxima en la simulación y en la medición: mientras que idealmente el filtro planteado tiene ganancia prácticamente unitaria en estas frecuencias,

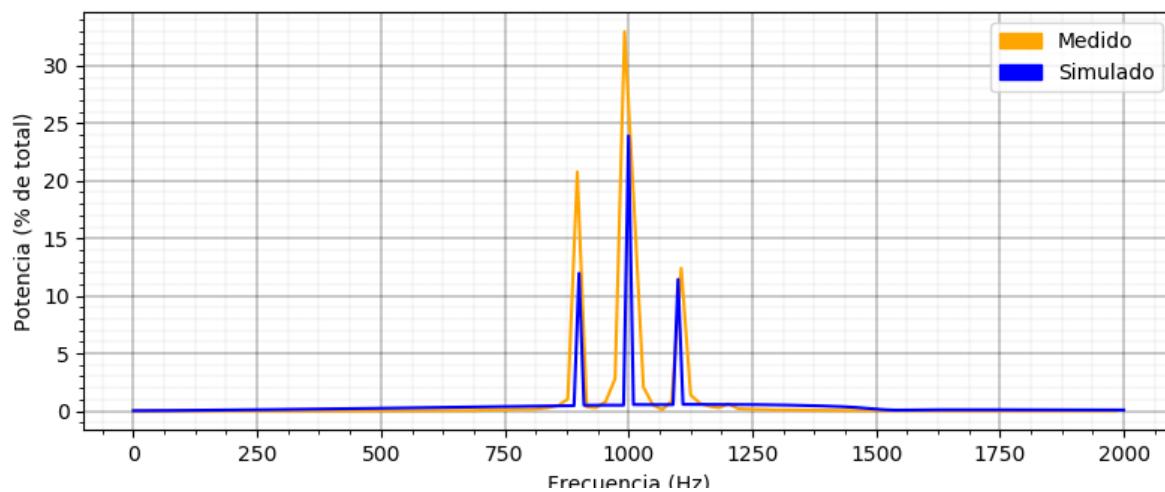


Figura 37: Espectro de la salida del filtro recuperador, medido con el analizador de espectro y simulado

debido a la dispersión en los valores de los componentes utilizados, no se logró

## 8. Muestreo sub-nyquist

### 8.1. Señal a muestrear

La señal a muestrear es

$$Xc(t) = A_{max} \left( \frac{1}{2} \cos(2\pi 1,8f_{in}) + \cos(2\pi 2f_{in}t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi 2,2f_{in}t) \right)$$

Con  $f_{in} = 1,2kHz$

La cuál la podemos pensar como una señal compuesta por tres componentes

Frecuencia (kHz)	Fase (°)	Amplitud	Potencia
2,4	0	1	1
2,4 + 0,24	0	1/4	1/4
2,4 - 0,24	0	1	1

Figura 38: Composición de la señal AM de entrada

Por lo tanto, la señal a estudiar tiene un ancho de banda  $B = 480Hz$  y una  $f_c = 2,4kHz$ .

### 8.2. Cálculo de $f_s$

Utilizando la expresión conocida

$$\frac{2f_s + B}{m + 1} < f_s < \frac{2f_s - B}{m}$$

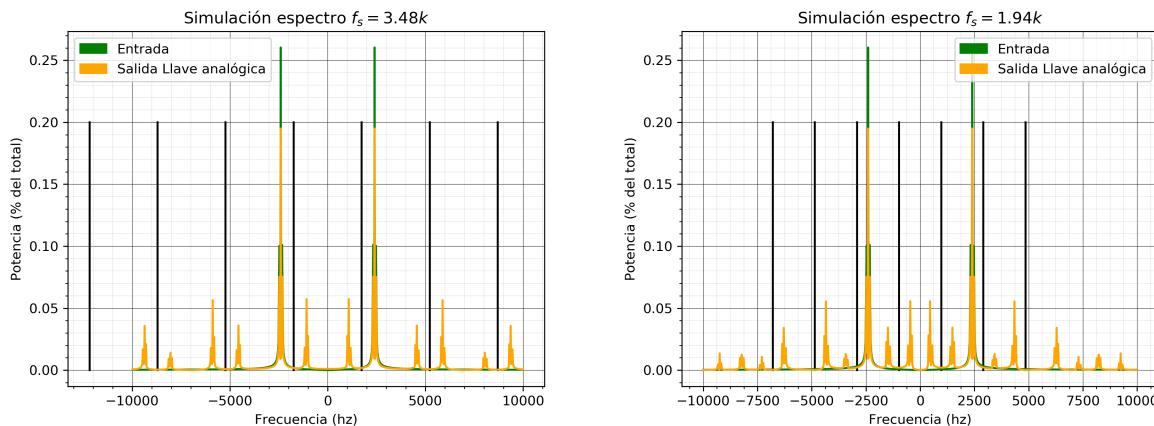
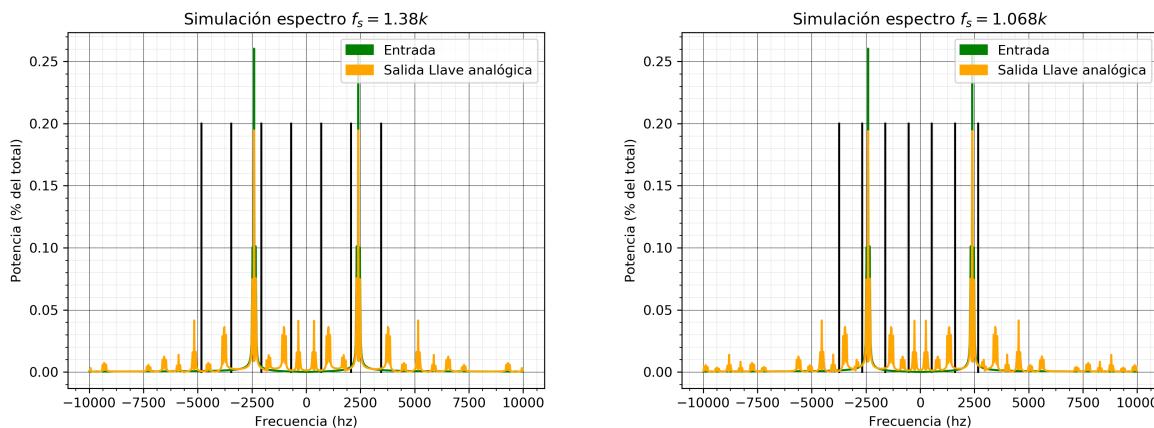
se calcularon los  $f_s$  permitidos para el muestreo subnyquist. Los resultados fueron los siguientes:

$m$	$f_{min}(kHz)$	$f_{max}(kHz)$
nyquist	5,28	$\infty$
1	2,64	4,32
2	1,76	2,16
3	1,32	1,44
4	1,056	1,08

Figura 39: Frecuencias  $f_s$  permitidas

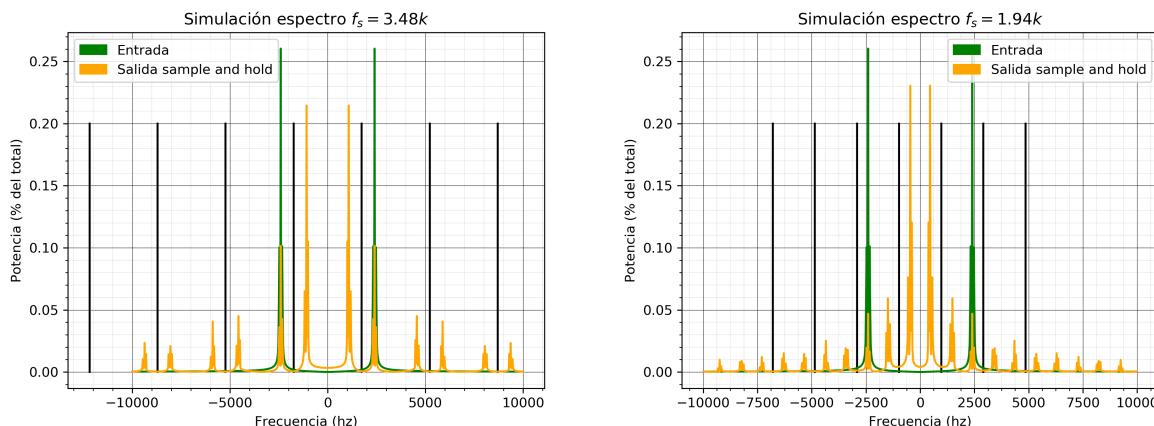
### 8.3. Simulaciones con Llave analógica

Se estudió mediante software el efecto sobre el espectro de la señal AM a muestrear al aplicar un muestreo a distintas frecuencias subnyquist utilizando llave analógica con  $Dutycycle = 25\%$ . Se muestran a continuación los resultados.

Figura 40: Simulación Sub-nyquist  $f_s = 3,48kHz(m = 1)$  (izquierda),  $f_s = 1,94kHz(m = 2)$  (derecha)Figura 41: Simulación Sub-nyquist  $f_s = 1,38kHz(m = 3)$  (izquierda),  $f_s = 1,068kHz(m = 4)$  (derecha)

#### 8.4. Simulaciones con sample and Hold

Se simuló sample and hold con un *dutycycle* = 5 % para distintos valores de  $f_s$ .

Figura 42: Simulación sub-nyquist  $f_s = 3,48kHz(m = 1)$  (izquierda)  $f_s = 1,94kHz(m = 2)$  (derecha)

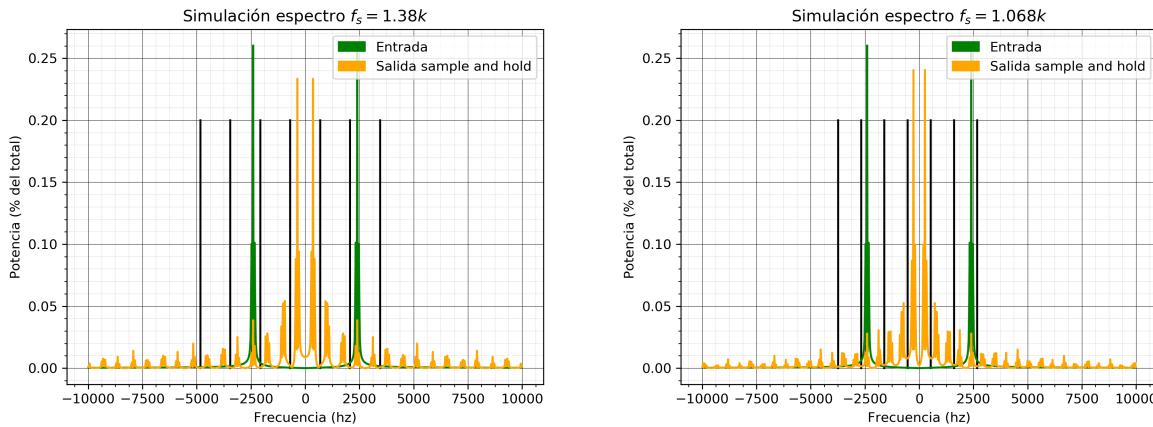


Figura 43: Simulación sub-nyquist  $f_s = 1,38kHz$ ( $m = 3$ ) (izquierda),  $f_s = 1,068Khz$ ( $m = 4$ ) (derecha)

Se observa que los espectros de la banda central son de una amplitud mayor que en el caso de la llave analógica.

## 8.5. Mediciones

Se procedió a medir los espectros para el caso  $m = 4$ ( $f_s = 1,07Khz$ ) con llave analógica con duty 25 %, y sample and hold con duty 5 %.

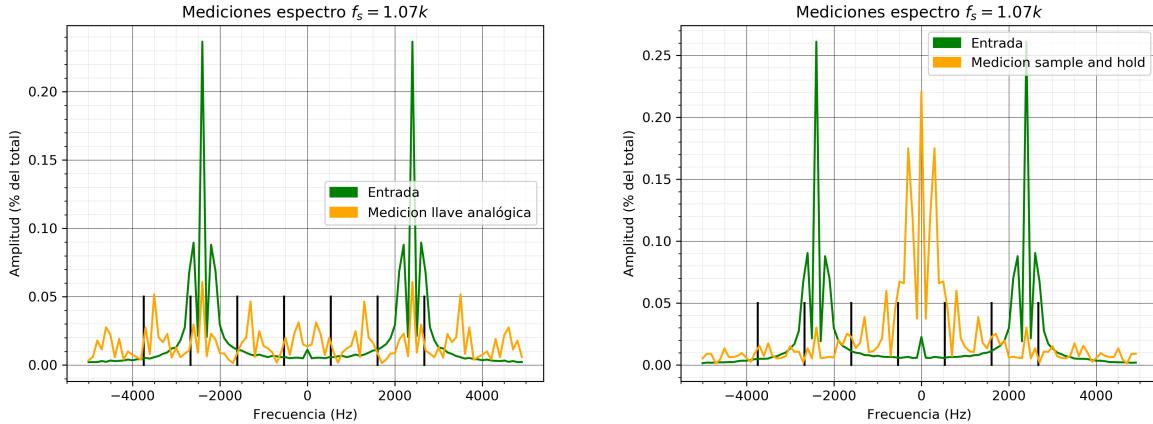


Figura 44: Mediciones sub-nyquist  $f_s = 1,07Khz$  solo sample and hold (izquierda), solo llave analógica (derecha)

Se observa que se verificó que la llave analógica atenuó en una medida mucho mayor las frecuencias bajas, que fue lo mismo que se observó en la simulación. Esto se debe a que la llave analógica en general tiende a disminuir en una medida mucho mayor el valor medio de la señal debido a que produce que la señal sea nula en una importante proporción del periodo, al mismo tiempo que provoca una cantidad considerable de saltos abruptos en la señal, lo cual se traduce en la presencia de frecuencias altas que en la entrada no estaban.

El sample and hold en ese sentido es menos invasivo, debido a que no produce saltos abruptos tan pronunciados y por lo tanto no amplifica tanto las altas frecuencias, pero no obstante amplifica en una mayor medida la continua ya que produce que la señal permanezca constante en algunos intervalos de tiempo.

## 9. Ejercicio 9

### 9.1. Item a

Este ejercicio se entregó en la guía de sistemas discretos.

### 9.2. Item b - Downsampling

Se analizó el efecto sobre el espectro de dos señales al realizar un downsampling, es decir, al bajar la tasa de muestreo de las señales en un factor de  $M = 4$  aplicando la transformación  $y(n) = x(nM)$

#### 9.2.1. Caso 1

La señal a analizar fue  $x(n) = \sin(2\pi \frac{0.125}{2}n)$  con  $-50 \leq n \leq 50$

Nota: se asumió arbitrariamente que la frecuencia de sampleo es 1 para la señal  $x(n)$  y  $1/4$  para la señal  $y(n)$ , lo cual nos sirvió para hacer conclusiones útiles sobre la hipotética señal original

#### Análisis temporal

Se infirió la forma de la señal original mediante las muestras tanto con la señal original  $x(n)$  como la decimada,  $y(n)$

El método que se utilizó consistió en primero calcular la dft de la señal discreta, y luego la posterior reconstrucción de la misma mediante dichos coeficientes utilizando series de fourier.

La fórmula utilizada para la reconstrucción de la señal fue la siguiente:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} 2\|X_k\| \cos(2\pi f + \angle X_k)$$

Se intentó el uso de la versión de la fórmula exponencial compleja, pero debido a dificultades técnicas que no se llegaron a resolver, se optó por la versión real de la fórmula, la cual no recurre al cálculo complejo, pero que para señales reales es equivalente.

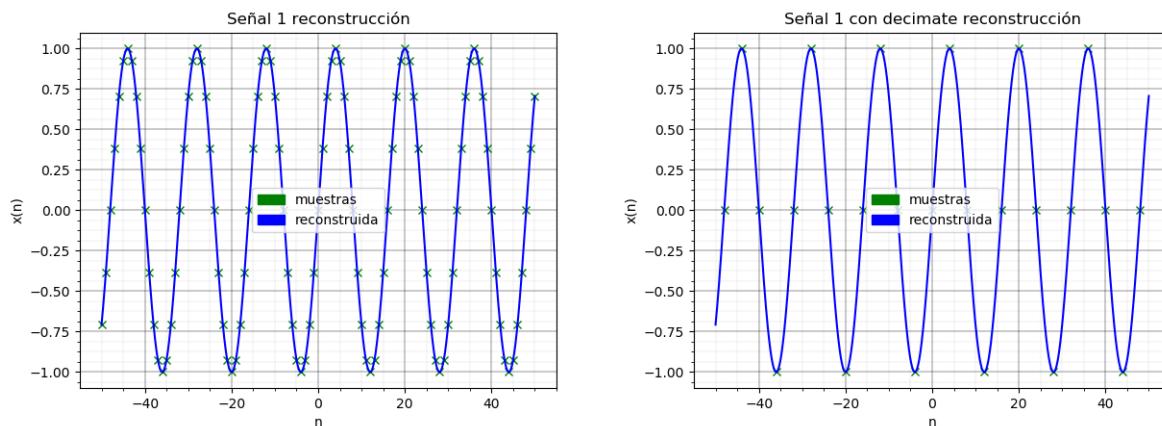


Figura 45: Señal 1 reconstruida con y sin decimate aplicado

Se observó que, intuitivamente, es mucho más creíble la forma de la señal inferida en la señal original sin decimate.

## Análisis espectral

Se calculó la DTFT de la señal con y sin downsampling. Los resultados fueron los siguientes:

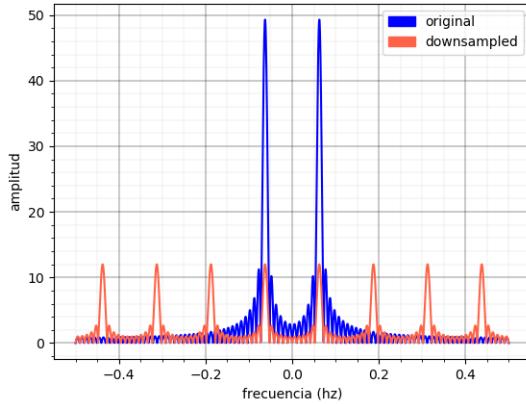


Figura 46: DTFT señal con y sin downsampling

Podemos observar que como realizamos una DTFT en lugar de una FFT sobre un período el espectro es continuo, pues la señal teórica analizada no es periódica, se anula fuera de  $50 \leq n \leq 50$  para la DTFT.

Por otro lado, también se puede notar que las repeticiones del espectro de la señal con downsampling se encuentran mucho más cercanas entre sí, que las repeticiones del espectro de la señal sin el mismo; esto implica; que para garantizar una reconstrucción adecuada de la señal con downsampling se debe asumir que la señal original tenga un ancho de banda más pequeño (que si no tuviera el downsampling aplicado). Este razonamiento es consecuencia del teorema de Nyquist.

### 9.2.2. Caso 2

Se repitió exactamente el mismo análisis pero con la señal  $x(n) = \sin(2\pi 0.25n)$  con  $-50 \leq n \leq 50$

## Análisis temporal

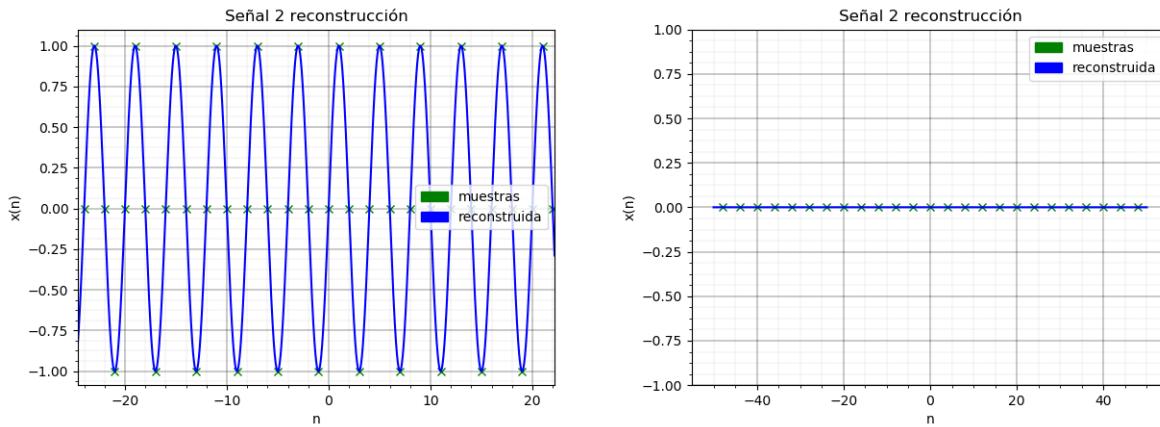


Figura 47: Señal 2 reconstruida con y sin downsampling

En este caso podemos observar que el downsampling provocó que la única inferencia que podamos hacer de la señal es que sea una constante, lo cual, en principio no parece ser una inferencia adecuada.

Esto se debe a que el ancho de banda de la señal original que buscamos inferir es demasiado chico considerando la frecuencia de sampleo utilizada. Más concretamente, mientras que la frecuencia de sampleo es  $1/4$ , la frecuencia de la señal  $\sin(2\pi 0,25t)$  es  $1/4$  tambien, cuando, por Niquist sabemos que la frecuencia de sampleo debería ser al menos el doble.

### Análisis espectral

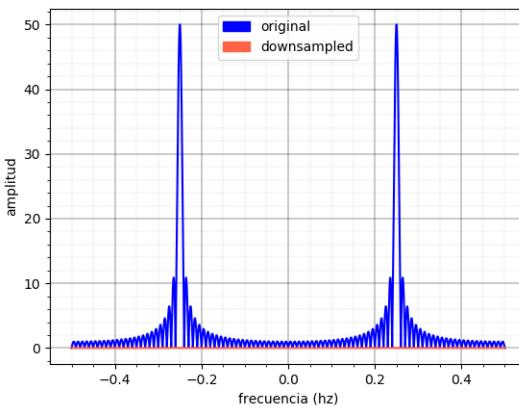


Figura 48: DTFT señal con y sin downsampling

Podemos observar que la señal con decimate carece de espectro, pues es una constante nula.

Hay una razón de este hecho. Debido a que la frecuencia de sampleo de la señal con downsampling es menor a  $1/2 = f_{niquist}$  la discretización provoca que el recorte del espectro de la señal continua original, que ocurre en el rango  $(-1/2f_s, +1/2f_s) = (-0,125Hz, 0,125Hz)$ , no tome ningun armonico de la señal original (los cuales se encuentran en  $(-0,25Hz, 0,25Hz)$ )

### 9.3. Item c

Para el caso de una respuesta impulsiva real, finita, de largo  $M+1$  (con  $M$  par), con simetría par se tiene que:

$$h(n) = \begin{cases} h(M-n) & 0 \leq n \leq M \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

El punto de simetría corresponde con  $\frac{M}{2}$ .

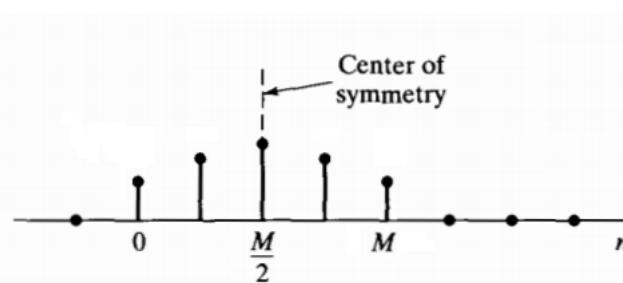


Figura 49: Respuesta impulsiva finita con simetría par

Donde su respuesta en frecuencia se puede calcular como:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} = \sum_{k=0}^M h(k)e^{-j\omega k}$$

$$H(e^{j\omega}) = h(0) + h(1)e^{-j\omega} + \dots + h\left(\frac{M}{2}\right)e^{-j\omega\frac{M}{2}} + \dots + h(M-1)e^{-j\omega M-1} + h(M)e^{-j\omega M}$$

$$H(e^{j\omega}) = h(0) + h(1)e^{-j\omega} + \dots + h\left(\frac{M}{2}\right)e^{-j\omega\frac{M}{2}} + \dots + h(1)e^{-j\omega M-1} + h(0)e^{-j\omega M}$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{M}{2}} \left[ h(0)e^{j\omega\frac{M}{2}} + h(1)e^{j\omega(\frac{M}{2}-1)} + \dots + h\left(\frac{M}{2}\right)e^{-j\omega 0} + \dots + h(1)e^{-j\omega(\frac{M}{2}-1)} + h(0)e^{-j\omega\frac{M}{2}} \right]$$

Sabiendo que

$$\cos(\omega) = \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2}$$

se puede escribir que:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{M}{2}} \left[ 2h(0)\cos\left(\omega\frac{M}{2}\right) + 2h(1)\cos\left(\omega\left(\frac{M}{2}-1\right)\right) + \dots + h\left(\frac{M}{2}\right) \right]$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{M}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} a(k) \cos(\omega k)$$

Donde

$$a(0) = h\left(\frac{M}{2}\right)$$

$$a(k) = 2h\left(\frac{M}{2} - k\right)$$

$$k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}$$

Llamando

$$A(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} a(k) \cos(\omega k)$$

Se puede escribir que

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\omega\frac{M}{2}}$$

$A(e^{j\omega})$  es una función real, par y periódica de  $\omega$ , y puede tener fase de 0 o  $\pi$ . El segundo término tiene una fase de  $-\omega\frac{M}{2}$ , por lo que la fase total de  $H(\omega)$  puede ser:

$$\phi(\omega) = -\omega\frac{M}{2}$$

o

$$\phi(\omega) = -\omega\frac{M}{2} + \pi$$

Lo que se corresponde a una fase lineal, y por lo tanto, el retardo de grupo será

$$\tau_g = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = \frac{M}{2}$$

Para calcular la respuesta impulsiva del sistema propuesto, se tomó a

$$x(n) = \delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

De esta forma se obtiene que:

$$h(0) = 1, \ h(1) = 2, \ h(2) = 3, \ h(3) = 4, \ h(4) = 3, \ h(5) = 2, \ h(6) = 1$$

y que  $h(n) = 0$  si  $n < 0$  o  $n > 6$ .

Como se puede ver, se cumplen las condiciones mencionadas anteriormente para obtener el retardo de grupo constante,  $h(n)$  es real, finita, de largo 7 (con  $M=6$  par) y con simetría par respecto de  $n = \frac{M}{2} = 3$ .

Por lo que el retardo de grupo será

$$\tau_g = 3$$