1 Ejercicio 8b - Downsampling

Se analizó el efecto sobre el espectro de dos señales al realizar un downsampling, es decir, al bajar la tasa de muestreo de las señales en un factor de $M = 4$ aplicando la transformación $y(n) = x(nM)$

1.1 Caso 1

La señal a analizar fue $x(n) = sin(2\pi \frac{0.125}{2} n)$ con $-50 \leq n \leq 50$

Nota: se asumió arbitrariamente que la frecuencia de sampleo es 1 para la señal $x(n)$ y 1/4 para la señal $y(n)$, lo cual nos sirvió para hacer conclusiones utiles sobre la hipotetica señal original

1.1.1 Análisis temporal

Se infirió la forma de la señal original mediante las muestras tanto con la señal original $x(n)$ como la decimada, $y(n)$

El método que se utilizó consistió en primero calcular la dft de la señal discreta, y luego la posterior reconstrucción de la misma mediante dichos coeficientes utilizando series de fourier.

La fórmula utilizada para la reconstrucción de la señal fue la siguiente:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} 2\|X_k\| cos(2\pi f + \angle X_k)$$

Se intentó el uso de la versión de la fórmula exponencial compleja, pero debido a dificultades técnicas que no se llegaron a resolver, se optó por la versión real de la fórmula, la cual no recurre al cálculo complejo, pero que para señales reales es equivalente.

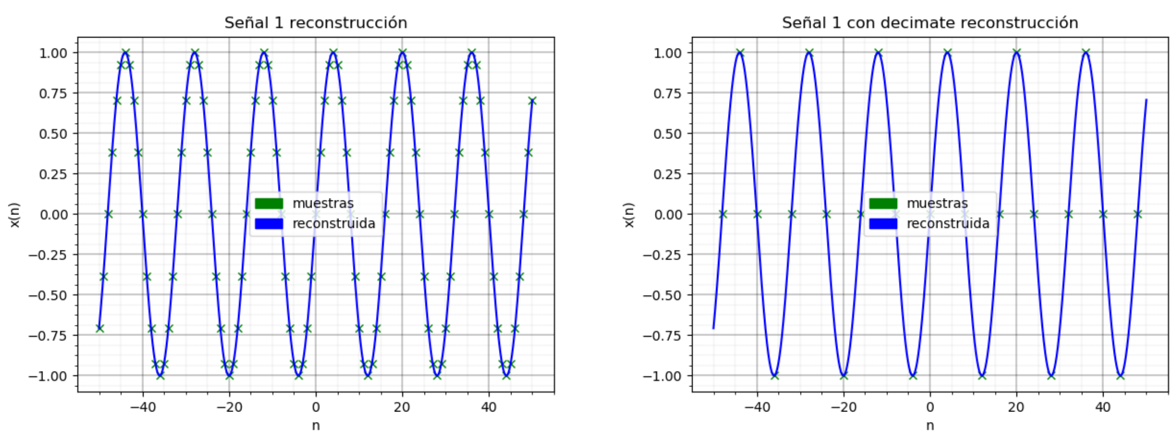

Figure 1: Señal 1 reconstruida con y sin decimate aplicado

Se observá que, intuitivamente, es mucho más creible la fórma de la señal inferida en la señal original sin decimate.

1.1.2 Análisis espectral

Se cálculo la DTFT de la señal con y sin downsampling. Los resultados fueron los siguientes:

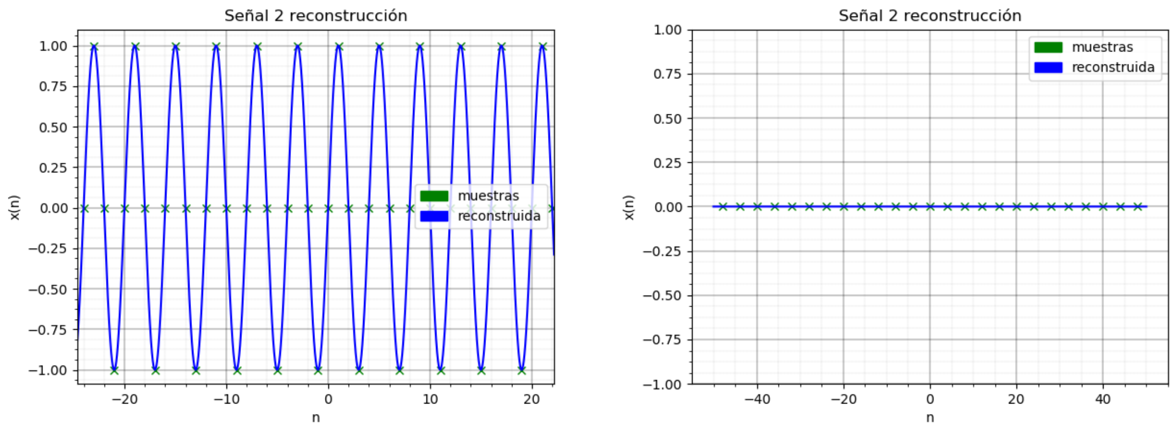

Figure 3: Señal 2 reconstruida con y sin downsampling

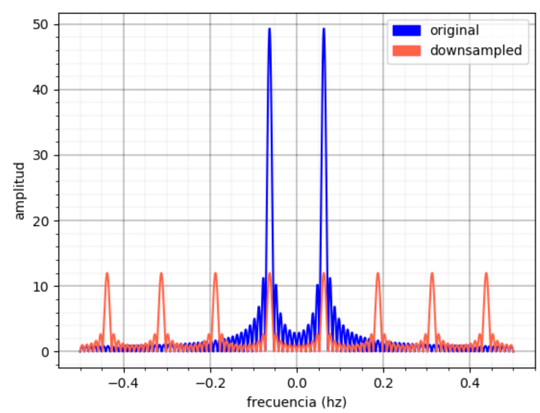

Figure 2: DTFT señal con y sin downsampling

Podemos obserbar que como realizamos una DTFT en lugar de una FFT sobre un período el espectro es continuo, pues la señal teórica analizada no es periodica, se anula fuera de $50 \leq n \leq 50$ para la DTFT

Por otro lado, también se puede notar que las repeticiones del espectro de la señal con downsampling se encuentran mucho mas cercanas entre si, que las repeticiones del espectro de la señal sin el mismo; esto implica; que para garatizar una reconstrucción adecuada de la señal con downsampling se debe asumir que la señal original tenga un ancho de banda mas pequeño (que si no tuviera el downsampling aplicado). Este razonamiento es consecuencia del teorema de Niquist.

1.2 Caso 2

Se repitió exactamente el mismo analisis pero con la señal $x(n) = sin(2\pi 0.25n)$ con $-50 \leq n \leq 50$

1.2.1 Análisis temporal

En este caso podemos observar que el downsampling provocá que la unica inferencia que podamos hacer de la señal es que sea una constante, lo cual, en principio no parece ser una inferencia adecuada.

Esto se debe a que el ancho de banda de la señal original que buscamos inferir es demasiado chico considerando la frecuencia de sampleo utilizada. Más concretamente, mientras que la frecuencia de sampleo es $1/4$, la frecuencia de la señal $sin(2\pi 0.25t)$ es $1/4$ tambien, cuando, por Niquist sabemos que la frecuencia de sampleo debería ser al menos el doble.

1.2.2 Análisis espectral

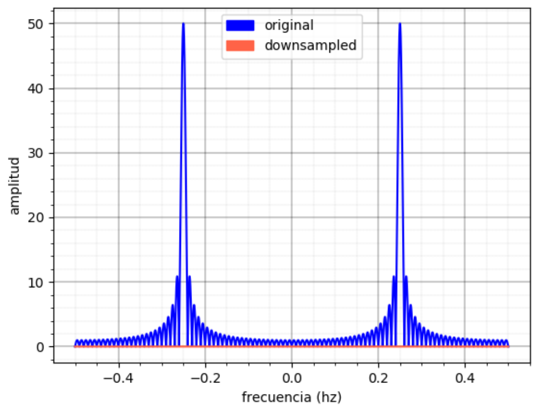

Figure 4: DTFT señal con y sin downsampling

Podemos observar que la señal con decimate carece de espectro, pues es una constante nula.

Hay una razón de este hecho. Debido a que la frecuencia de sampleo de la señal con downsampling es menor a $1/2 = f_{niquist}$ la discretización provoca que el recorte del espectro de la señal continua original, que ocurre en el rango $(-1/2f_s, +1/2f_s) = (-0.125Hz, 0.125Hz)$, no tome ningun armonico de la señal original (los cuales se encuentran en $(-0.25Hz, 0.25Hz)$