

Índice

1. Métodos de medición de equilibrio de puentes	2
1.1. Osciloscopio	2
1.2. Multímetro de precisión	2
1.3. Amplificador de instrumentación	2
2. Puente de Wien	3
2.1. Análisis de sensibilidades	4
2.1.1. Variación de R_1	4
2.1.2. Variación de R_3	5
2.2. Mediciones	6
2.3. Conclusiones	7
3. Puente de Hay (L)	8
3.1. Análisis de Sensibilidades	8
3.2. Equivalente paralelo de la bobina	10
3.3. Medición de las inductancias	10
3.4. Precisión del puente	11
3.5. Manual de usuario	11
3.6. Conclusiones	12

1. Métodos de medición de equilibrio de puentes

Para saber cuando el puente está balanceado es muy importante saber con exactitud cuando la tensión $V_d = 0$. El mayor problema es que, como la tensión diferencial a medir es de muy baja amplitud, la condición de equilibrio teórica no es medible en la práctica, sino que se busca el método de medición para el cual se alcance la menor amplitud posible. A continuación se compararán distintos métodos para medir el equilibrio de un puente:

1.1. Osciloscopio

El osciloscopio es un método visual para medir V_d , además se puede apreciar como varía en el dominio del tiempo y por lo tanto se puede conocer también su fase respecto a la tensión de entrada. Para encontrar $V_d = 0$, se hace uso de la función MATH del osciloscopio. Se busca que la diferencia $V_a - V_b$ sea lo mas chica posible, la desventaja es que el osciloscopio es un instrumento sensible al ruido, y cuando la señal pasa a estar por debajo del nivel del ruido no se puede llegar a distinguir correctamente el verdadero mínimo de V_d .

1.2. Multímetro de precisión

La ventaja de utilizar este instrumento es que éstos ya cuentan con la posibilidad de medir tensiones diferenciales sobre el circuito, lo que hace que la medición sea mas precisa en comparación con el osciloscopio, además es menos sensible al ruido. En este caso no es posible ver los cambios de la fase de la señal

1.3. Amplificador de instrumentación

El amplificador de instrumentación tiene la característica de atenuar la tensión en modo común y amplificar la tensión en modo diferencial. Al conectarlo a la salida del puente, se obtiene al final una tensión que va a tener mayor amplitud que la original, lo que la hace ser menos comparable con el piso del ruido, y además, debido a su alto CMRR (Coeficiente de rechazo de modo común) el ruido, que es común a ambas entradas, va a disminuir en gran medida. Cuanto mayor sea el CMRR del amplificador, más precisión se tendrá para medir el equilibrio del puente.

Teniendo en cuenta todas las posibilidades, se decidió utilizar el amplificador de instrumentación junto con el osciloscopio. De esta manera se evitan los problemas con el ruido y también se puede visualizar tanto la fase como la magnitud de la señal en el tiempo y en forma gráfica, lo que ayuda a ver si las mediciones tomadas son correctas.

2. Puente de Wien

Se pidió diseñar un puente de Wien que dado el número de grupo (6 en nuestro caso) pueda medir entre un rango de frecuencias determinado.

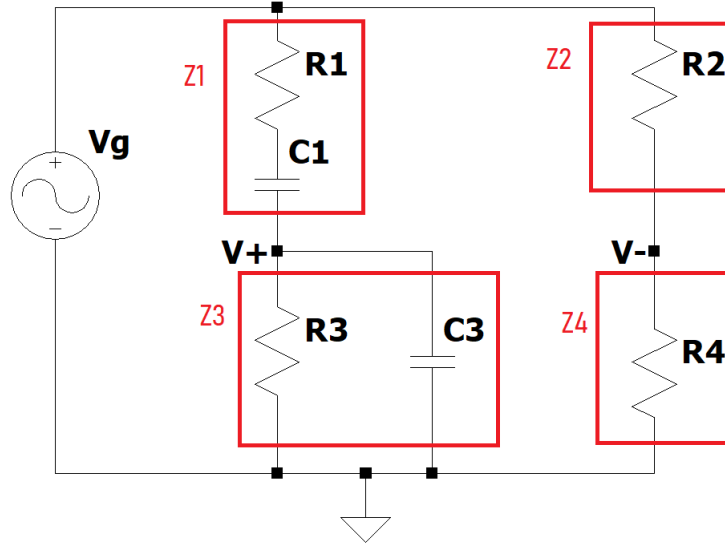


Figure 1: Circuito del Puente de Wien

El rango pedido es de 5K a 50KHz.

Si llamamos $Vd = V^+ - V^-$

$$\frac{Vd}{Vg} = -\frac{R_4(C_1R_1s + C_3R_3s + C_1C_3R_1R_3s^2 + 1) - C_1R_2R_3s}{(R_2 + R_4)(C_1C_3R_1R_3s^2 + (C_1R_1 + C_1R_3 + C_3R_3)s + 1)}$$

$$H(s) = -\frac{R_4}{R_2 + R_4} \frac{C_1C_3R_1R_3s^2 + (C_1R_1 + C_3R_3 - \frac{C_1R_2R_3}{R_4})s + 1}{(C_1C_3R_1R_3s^2 + (C_1R_1 + C_1R_3 + C_3R_3)s + 1)}$$

Si llamamos $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1C_3R_1R_3}}$ y $k = \frac{R_4}{R_2 + R_4}$

$$H(s) = -k \frac{\left[\left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 + (C_1R_1 + C_3R_3 - \frac{C_1R_2R_3}{R_4})s + 1 \right]}{\left[\left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 + (C_1R_1 + C_1R_3 + C_3R_3)s + 1 \right]}$$

Si realizamos el diagrama de bode asintótico veríamos que el punto de interés es $s = j\omega_0$.

$$H(s = j\omega_0) = -k \frac{\left[C_1R_1 + C_3R_3 - \frac{C_1R_2R_3}{R_4} \right]}{[C_1R_1 + C_1R_3 + C_3R_3]}$$

$$H(s = j\omega_0) = 0 \iff \frac{R_1}{R_3} + \frac{C_3}{C_1} = \frac{R_2}{R_4}$$

ergo

$$|H(s = j\omega_0)|_{dB} \rightarrow -\infty$$

Y se determina que es un filtro notch rechaza banda.

La frecuencia para la cual Vd se anula es:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{C_1 C_3 R_1 R_3}}$$

En general se utiliza $R_1=R_3=R$ y $C_1=C_3=C$ y queda :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi CR}$$

Para el diseño hacemos $C=C_1=C_3=3.3nf$.

Nos deja con $\frac{R_2}{R_4}=2$ y por ende tomamos un valor de $R_1=10K\Omega$ y $R_2=20K\Omega$.

Para cubrir el rango de medición R debe variar entre 964Ω y 9640Ω por lo cual se colocan presets de $10K\Omega$ para R_1 y R_2 .

Estos valores son de este orden ya que si se diera el caso en el que necesitaríamos medir con puntas sobre los terminales, las resistencias R no sean comparables con la resistencia de la punta, ni el capacitor de la punta sea comparable con el capacitor C .

2.1. Análisis de sensibilidades

2.1.1. Variación de R_1

Si V_d es nuestra variable de interés, entonces debemos calcular la sensibilidad de esa variable respecto del cambio de otra.

Para ello la cuenta a realizar es la siguiente:

Como se sabe, en el equilibrio

$$\frac{Z_4}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_1}$$

Y ya que sabemos que $\frac{R_2}{R_4}=2$ entonces definimos la cabeza de puente $A = \frac{Z_4}{Z_2} = \frac{1}{2}$.
Asumiendo que $Z \gg \Delta Z_1$

$$V_d + \Delta V_d = \frac{Z_3 Z_2 - Z_4 (Z_1 + \Delta Z_1)}{(Z_3 + Z_1)(Z_2 + Z_4)} V_g$$

En un entorno cercano al equilibrio $V_d = 0$ y $\frac{Z_4}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_1}$, luego:

$$\Delta V_d = \frac{-\frac{\Delta Z_1}{Z_1}}{(\frac{Z_3}{Z_1} + 1)(\frac{Z_2}{Z_4} + 1)} V_g$$

$$\frac{\Delta V_d}{V_g} = -\frac{A}{(1+A)^2} \frac{\Delta Z_1}{Z_1} = -\frac{2}{9} \frac{\Delta Z_1}{Z_1}$$

Si llamamos $\delta_{Z_1} = \frac{\Delta Z_1}{Z_1}$ entonces

$$\Delta V_d = -\frac{2}{9} V_g \delta_{Z_1}$$

Por lo cual como la sensibilidad es proporcional a V_g en todo el rango de medición sería recomendable tomar V_g lo más chica posible para las mediciones.

Para el ajuste de cada variable, se puede ver a $Z_1=R_1+jX_1$

Por lo que si variamos R_1 y tomamos modulo nos queda que:

$$|\delta_{R1}| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{X_1}{R_1})^2}} \frac{\Delta R_1}{R_1}$$

Se puede ver que si X_1 es un capacitor mientras la frecuencia sea baja, V_d va a ser menos sensible a los cambios de R_1 y se puede ver también que si aumenta la frecuencia entonces los cambios con respecto a R_1 empiezan a pesar mucho más.

Si tenemos en cuenta $\frac{\Delta R_1}{R_1} = 0.01$ entonces

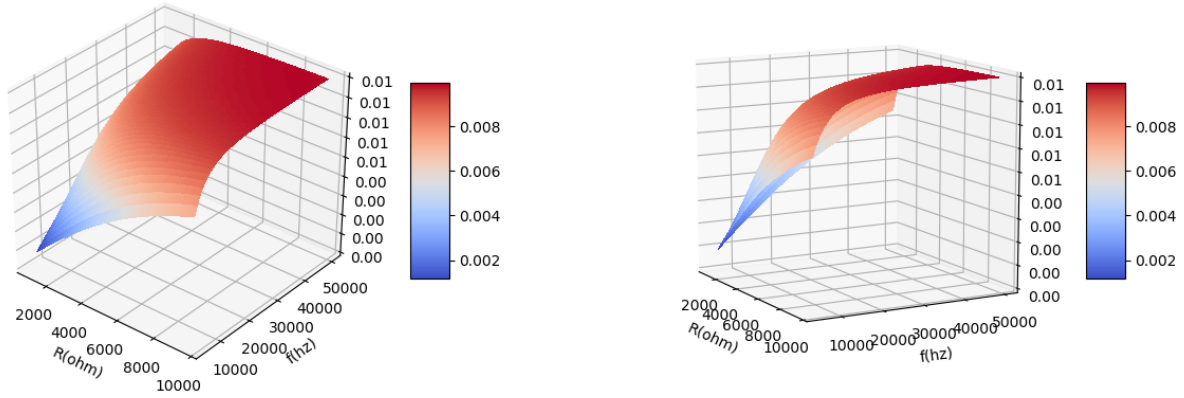


Figure 2: Sensibilidad de Vd con respecto a R_1

2.1.2. Variación de R_3

Asumiendo que $Z \gg \Delta Z_3$

$$Vd + \Delta Vd = \frac{(Z_3 + \Delta Z_3)Z_2 - Z_4 Z_1}{(Z_3 + Z_1)(Z_2 + Z_4)} Vg$$

En el equilibrio:

$$\Delta Vd = \frac{\Delta Z_3 Z_2}{(Z_3 + Z_1)(Z_2 + Z_4)} Vg$$

$$\Delta Vd = \frac{\frac{\Delta Z_3}{Z_3}}{(\frac{Z_1}{Z_3} + 1)(\frac{Z_4}{Z_2} + 1)} Vg$$

Como

$$\frac{Z_4}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_1}$$

Entonces si $A = \frac{Z_2}{Z_4}$ análogamente

$$\Delta Vd = -\frac{2}{9} \frac{\Delta Z_3}{Z_3} Vg$$

Y si $\delta_{Z_3} = \frac{\Delta Z_3}{Z_3}$ entonces al variar R_3

$$Z_3 = \frac{R_3 j X_3}{R_3 + j X_3}$$

$$\Delta Z_3 = \frac{(R_3 + \Delta R_3) j X_3}{(R_3 + \Delta R_3) + j X_3} - \frac{R_3 j X_3}{R_3 + j X_3}$$

Asumimos que $R_3 \gg \Delta R_3$

$$\Delta Z_3 = \frac{R_3 j X_3 + \Delta R_3 j X_3 - R_3 j X_3}{R_3 + j X_3} = \frac{\Delta R_3 j X_3}{R_3 + j X_3}$$

$$\delta_{R_3} = \frac{\Delta Z_3}{Z_3} = \frac{\Delta R_3}{R_3}$$

2.2. Mediciones

Para las mediciones se utilizó el amplificador de instrumentación ya que este nos brinda la posibilidad de quitar el ruido que tienen en común las señales V^+ y V^- . Además el mismo amplifica la tensión V_d (lo cual nos da más precisión ya que queremos medir cuando se anula) y por último medimos esa tensión diferencial de salida en el osciloscopio.

Fijamos $C = 3.3nf$ y tanto R_1 como R_3 se varían de forma tal que se mantenga la igualdad entre ellas.

Frecuencia Medida (Hz)	$R_1(\Omega)$	$R_3(\Omega)$	Frecuencia calculada (Hz)	Error (%)
4620	9654	9648	5000.39	7.61
9280	4831	4828	9985.25	7.06
14000	3225	3222	14977.88	6.53
18800	2413	2410	20011.94	6.06
23600	1920	1920	29918,96	4,41
33500	1373	1374	35113,78	4,60
38400	1201	1203	40090,42	4,22
43300	1072	1075	44926,70	3,62
48500	964	965	50003,92	3,01

Figure 3: Tabla de valores medidos

Se realizan los correspondientes gráficos de las curvas de nivel del módulo de $H(s)$:

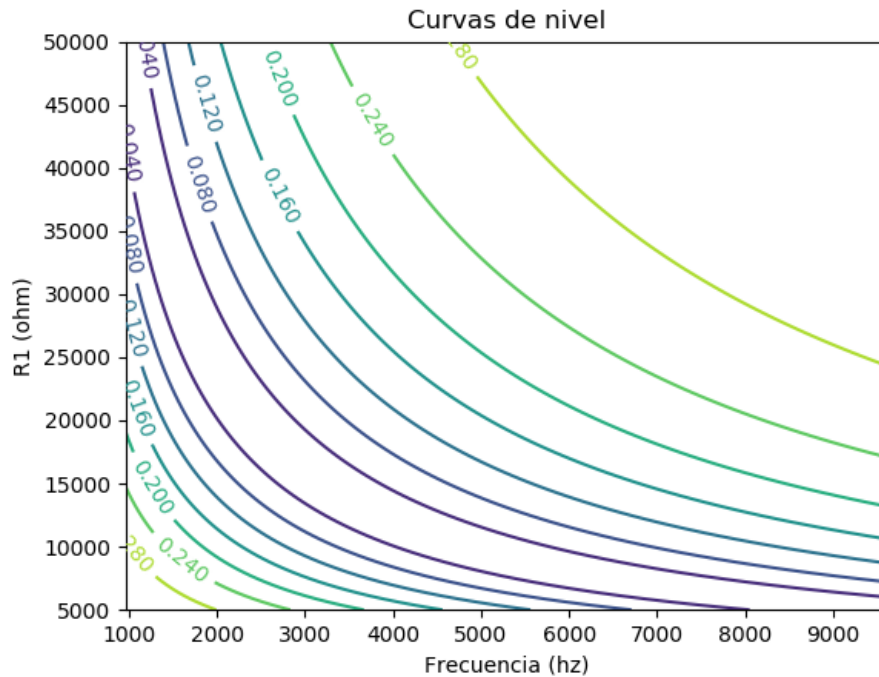


Figure 4: Curvas de nivel del módulo de $H(s)$

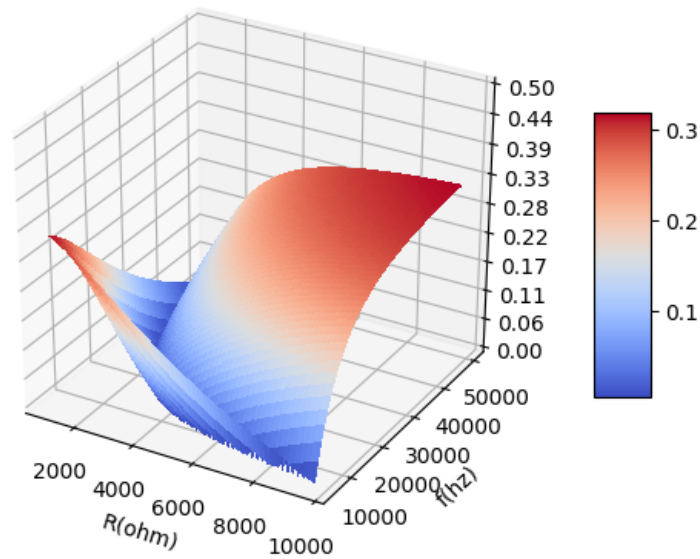


Figure 5: Gráfico del módulo de $H(s)$

Se puede observar en la Figura 5 que para cada R y f existe un único mínimo del módulo de $H(s)$ en el rango de medición. Por lo cual no hace falta desarrollar un método adicional para medir en este puente.

2.3. Conclusiones

Dada las mediciones y el análisis de sensibilidad se pudo observar que al medir frecuencias en el rango de 5KHz - 50KHz el peor error fue de 7.61%, lo cual en principio no resulta tan importante si se quiere realizar una medición estimativa de una frecuencia. Por lo tanto, se considera que el puente diseñado cumple correctamente con permitir la medición de frecuencias.

3. Puente de Hay (L)

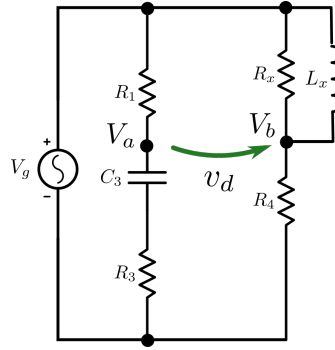


Figura 6: Puente de Hay (L)

En esta sección se implementa un puente de Hay para la medición de inductancias cuyos parámetros se encuentran en los siguientes rangos:

Inductancia	Q
[1.9mH - 8.1mH]	[12.5 - 50]

Figura 7: Intervalo de valores medibles por el puente

3.1. Análisis de Sensibilidades

Dado:

$$Vd = \frac{Z_3 Z_2 - Z_4 Z_1}{(Z_3 + Z_1)(Z_2 + Z_4)} Vg$$

Siendo $V_d = V_a - V_b$. Es necesario ver cómo y cuánto varía la tensión V_d frente a cambios en las variables de ajuste. Para eso, se analiza dicha sensibilidad respecto de R_1 por un lado y respecto R_3 por otro.

Siendo ΔV_{d1} la sensibilidad de V_d respecto de R_1 ,

$$Vd + \Delta V_{d1} = \frac{Z_3 Z_2 - Z_4 (Z_1 + \Delta Z_1)}{(Z_3 + (Z_1 + \Delta Z_1))(Z_2 + Z_4)} Vg$$

$$Vd + \Delta V_{d1} = \frac{Z_3 Z_2 - Z_4 Z_1}{(Z_3 + (Z_1 + \Delta Z_1))(Z_2 + Z_4)} Vg - \frac{Z_4 \Delta Z_1}{(Z_3 + (Z_1 + \Delta Z_1))(Z_2 + Z_4)} Vg$$

Considerando $\Delta Z_1 \ll Z_1$,

$$Vd + \Delta V_{d1} = \frac{Z_3 Z_2 - Z_4 Z_1}{(Z_3 + Z_1)(Z_2 + Z_4)} Vg - \frac{Z_4 \Delta Z_1}{(Z_3 + Z_1)(Z_2 + Z_4)} Vg$$

Entonces

$$\Delta V_{d1} = -\frac{Z_4 \Delta Z_1}{(Z_3 + Z_1)(Z_2 + Z_4)} Vg = -\frac{\frac{\Delta Z_1}{Z_1}}{(\frac{Z_3}{Z_1} + 1)(\frac{Z_2}{Z_4} + 1)} Vg$$

Llamando $A = \frac{Z_2}{Z_4}$ y dado que en el equilibrio del puente $Z_3 Z_2 = Z_4 Z_1$:

$$\Delta V_{d1} = -\frac{A}{(A+1)^2} \frac{\Delta Z_1}{Z_1} Vg$$

Donde $\frac{-A}{(A+1)^2}$ se denomina factor cabeza de puente.

Análogamente, siendo ΔV_{d3} la sensibilidad de V_d respecto de R_3 :

$$\Delta V_{d3} = -\frac{A}{(A+1)^2} \frac{\Delta Z_3}{Z_3} Vg$$

En este caso, en el equilibrio se tiene que:

$$\left| \frac{\Delta Z_3}{Z_3} \right| = \frac{\Delta R_3}{|Z_3|} = \frac{\Delta R_3}{\sqrt{R_3^2 + \left(\frac{1}{\omega C_3}\right)^2}} = \frac{\frac{\Delta R_3}{R_3}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega C_3 R_3}\right)^2}}$$

Considerando que $\frac{1}{\omega C_3 R_3} \gg 1$, se obtiene:

$$\left| \frac{\Delta Z_3}{Z_3} \right| = \frac{\Delta R_3}{R_3} \frac{1}{\frac{1}{\omega C_3 R_3}} = \frac{\Delta R_3}{R_3} \omega C_3 R_3$$

Entonces resulta:

$$\Delta V_{d3} = -\frac{A}{(A+1)^2} \frac{\Delta R_3}{R_3} \omega C_3 R_3 Vg$$

$$L_x = C_3 R_1 R_4 \quad Q_x = \frac{1}{2\pi f C_3 R_3} R_x = \frac{R_1 R_4}{R_3}$$

Se prueban varios valores para C_3 y para R_4 de manera tal que la variación de V_d sea similar tanto al variar R_1 como R_3 ; y que dicha variación tenga un comportamiento homogéneo para todo el rango de cada una de las variables de ajuste. Así es como se terminan eligiendo $C_3 = 3,9nF$ y $R_4 = 270\Omega$ fijas. Con dichos valores, y utilizando el intervalo de inductancias y Q de diseño, se obtienen los rangos de variación de R_1 y R_3 , siendo

$$R_1 \in [1.9K\Omega - 8.1K\Omega] \quad R_3 \in [82\Omega - 326\Omega]$$

De manera tal que, para R_1 se utiliza un preset de $10K\Omega$, con una resistencia en serie de $1.8K\Omega$ (para establecer el mínimo) y un preset de 500Ω para ajuste fino. Para R_3 , se utiliza un preset de $1K\Omega$, con una resistencia en serie de 270Ω (también para establecer el mínimo), y un preset de 100Ω para ajuste fino.

A continuación se pueden ver los gráficos de la sensibilidad de V_d respecto de R_1 en la Figura 8 y la sensibilidad de V_d respecto de R_3 en la Figura 9.

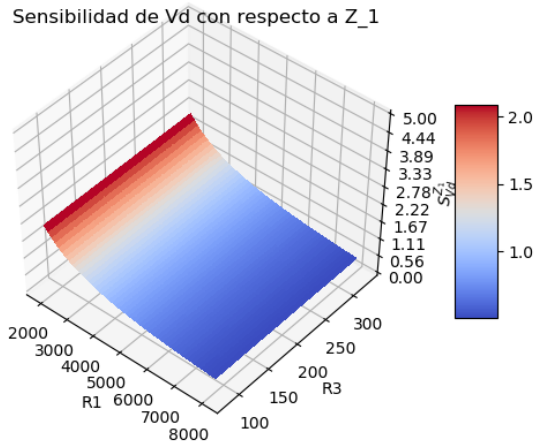
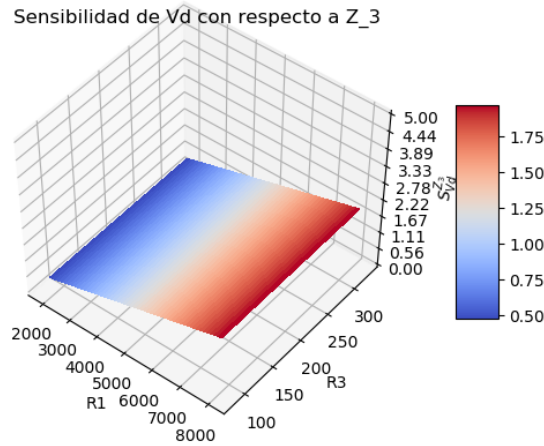


Figure 8: Sensibilidad de V_d respecto de R_1

Figure 9: Sensibilidad de V_d respecto de R_3 .

En los cuales puede observarse que las variaciones en V_d son aproximadamente lineales en casi todo el rango de variación de ambos parámetros.

3.2. Equivalente paralelo de la bobina

Para el puente utilizado, se emplea el modelo de resistencia en paralelo para la bobina:

$$Z_x = \frac{R_x \cdot j\omega L_x}{R_x + j\omega L_x} = \frac{R_x L_x^2 \omega^2}{R_x^2 + \omega L_x^2} + j \frac{R_x^2 L_x \omega}{R_x^2 + \omega L_x^2}$$

Por lo que para calcular el valor de φ :

$$\varphi = \arctg\left(\frac{R_x^2 L_x \omega}{R_x L_x^2 \omega^2}\right) = \arctg\left(\frac{R_x}{\omega L_x}\right) = \arctg(Q)$$

3.3. Medición de las inductancias

Para efectuar las mediciones, se utilizó el amplificador de instrumentación desarrollado en la materia «Teoría de circuitos», conectando las salidas del puente (V_a y V_b) del puente a la entrada diferencial y midiendo la salida del mismo. En los siguientes cuadros se muestran las mediciones obtenidas para los distintos casos.

Valor Nominal	$f = 1KHz$			$f = 10KHz$			$f = 100KHz$		
	$L(mH)$	Q	$\varphi(^{\circ})$	$L(mH)$	Q	$\varphi(^{\circ})$	$L(mH)$	Q	$\varphi(^{\circ})$
L Mínima	2,02	30,23	88,1°	2,37	15,1	86,2°	5,57	1,52	56,7°
L Media	4,06	30,23	88,1°	5,01	15,9	86,4°	8,12	1,52	56,7°
L Máxima	6,77	30,23	88,1°	8,01	15,0	86,2°	13,36	1,52	56,7°
L Fuera de rango	1,86	30,23	88,1°	1.86	3,0	71,6°	4,81	0,78	37,9°

Cuadro 1: Valores medidos con el puente

Valor Nominal	$f = 1KHz$			$f = 10KHz$			$f = 100KHz$		
	$L(mH)$	Q	$\varphi(^{\circ})$	$L(mH)$	Q	$\varphi(^{\circ})$	$L(mH)$	Q	$\varphi(^{\circ})$
L Mínima	1,94	2,1	64,5°	2,09	15,2	86,2°	2,30	69,4	88,5°
L Media	4,27	2,7	69,8°	4,51	17,0	86,6°	4,85	78,2	89,3°
L Máxima	8,05	4,6	77,7°	8,40	11,1	84,9°	7,92	66,5	89,1°
L Fuera de rango	0,97	6,3	81°	0,96	54,2	88,9°	0,95	84,1	89,3°

Cuadro 2: Valores medidos con el analizador de impedancias

3.4. Precisión del puente

Para estimar la precisión del puente, se busca primero la mínima tensión medida durante las mediciones efectuadas, que fue de $V_d \approx 34mV$. Teniendo en cuenta que la ganancia del amplificador de instrumentación es de 150 en veces, resulta que en el puente $\Delta V_d = \frac{V_d}{150} \approx 0,23mV$. Desplazándonos en un entorno a dicho valor, se puede considerar que el error producido en V_d es aproximadamente proporcional (lineal) respecto a la variación en R_1 .

De los gráficos de sensibilidades se toman los peores casos, es decir los máximos de cada uno, resultando:

$$\frac{\Delta V_d}{V_g}(R_1) = 2,15 \quad \frac{\Delta V_d}{V_g}(R_3) = 1,98$$

Despejando de las expresiones de sensibilidades (con máximo R_1 y mínima R_3):

$$\Delta R_1 = \frac{A}{(1+A)^2} R_1 \frac{\Delta V_d}{V_g} = 172\Omega$$

$$\Delta R_3 = \frac{A}{(1+A)^2} R_3 \frac{\Delta V_d}{V_g} = 6,4\Omega$$

Por lo tanto:

$$\Delta L_x = C_3 R_4 \Delta R_1 = 0,18mH \quad \Delta Q_x \approx \frac{\Delta R_3}{2\pi f C_3 (R_3)^2} = 0,24$$

3.5. Manual de usuario

El circuito propuesto permite medir inductancias de alto Q , comprendidas entre $1,9mH$ y $8,1mH$, y el Q comprendido entre 12,5 y 50, tomando como variables de ajuste a R_1 y R_3 . Los rangos de dichas variables de ajuste son:

$$R_1 \in [1.9K\Omega - 8.1K\Omega] \quad R_3 \in [82\Omega - 326\Omega]$$

Para efectuar las mediciones, se conecta la bobina a medir y se excita al circuito con una señal senoidal de $10KHz$ y $100mV_{pp}$, midiendo la tensión V_d . Se ajusta primeramente el valor de R_1 con el preset de $10K\Omega$ hasta hallar el mínimo valor de V_d , realizando luego un ajuste más fino con el preset de 500Ω . Posteriormente, se ajusta R_3 con el preset de $1K\Omega$, hasta hallar el mínimo de V_d correspondiente, realizando luego un ajuste fino con el preset de 100Ω . Finalmente, con el mínimo valor de V_d posible establecido, se desconecta el circuito de la señal de entrada y se miden los valores resultantes de R_1 y R_3 , de manera tal que para obtener L_x y Q_x se emplean las ecuaciones:

$$L_x = C_3 R_1 R_4 \quad Q_x = \frac{1}{2\pi f C_3 R_3}$$

Para el proceso de ajuste de V_d mínima, se aclara que para un conjunto dado L_x ; Q_x , la combinación de valores de R_1 y R_3 que minimizan V_d es única.

3.6. Conclusiones

En base a los resultados obtenidos, se observó que el diseño propuesto cumple su propósito adecuadamente para la frecuencia de trabajo considerada de 10KHz y los rangos de diseño. En el caso a 10KHz , en los valores mínimo, medio y máximo los resultados respecto a los obtenidos con el analizador de impedancias son bastante similares, con un error relativo máximo del 14 %. En el caso de una inductancia fuera de rango, el error cometido es considerablemente mayor.

Para una frecuencia de 1KHz , se comete error tanto en el valor de la inductancia como en el valor de Q_x , principalmente en el de Q_x debido a que para dicha frecuencia éste se encuentra bastante fuera del rango de diseño por debajo del mínimo, tomando de referencia el valor indicado por el analizador de impedancias. Por el otro lado, a una frecuencia de 100KHz , se comete también error en ambos valores, siendo mayor en el Q_x dado que también está fuera del rango de diseño pero en este caso por encima del máximo, tomando de referencia el valor indicado por el analizador de impedancias.