# Notas clase 3/19/2018

(Ariel Nowik: anowik@itba.edu.ar )

Si $X$ tiene discontinuidad tipo salto en $t$

$$\frac{x(t^+)+x(t^-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{in2\pi t/T}$$

Observacion: Si $X$ es derivable

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{in2\pi t/T}$$

## Se demuestra con fourier

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

Usando

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{sin(nt)}{n}$$

## Convergencia uniforme

Pedimos el mismo $n$ para todo $t^*$

Podemos conseguir el mismo error con el mismo $n$ en toda la funcion

$X$ continua en $[to, to+T]$ $x(to) = x(to+T)$ -> convergencia uniforme
El resto de las hipotesis aseguran que converge al valor de la funcion

$x(t) = |t|$ $t \, \epsilon \, (-\pi, \pi)$ -> aplica teorema de convergencia uniforme

$$x(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n\geq 1} \frac{cos((2n-1)t)}{(2n-1)^2}$$

converge uniformemente y al ritmo de $1/n^2$

## Derivación

$$\frac{x'(t^+)+x'(t^-)}{2} = \sum_{n\neq 0} inw_0 C_n e^{inw_o t}$$

$$x'(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n\geq 1} \frac{sin((2n-1)t)}{2n-1}$$

# Integracion

$$\int_{t_0}^{t} x(t)dt = c_0(t - t_0) + \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{inw_0}(e^{inw_0 t} - e^{inw_0 t_0})$$

$$t \epsilon [t_0, t_0 + T]$$

# Transformada de Fourier

Transformada de $x$ en $f$

$$F[x(t)](f) = X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

cuando esta integral existe

Transformada inversa de $X(f)$ en $x$

$$F^{-1}[X(f)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{i2pift}df$$

cuando esta integral existe

$$x(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

Para que exista ala transfoprmada pedimos que $x$ cumpla que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty$$

Si pasa eso, ademas $X(f)$ sera *uniformemente continua*

# Ejemplo

$$X(e^{-a|t|}) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$$

(cuenta)

# Propiedad

Si $x$ es integrable, y cuadrado integrable, luego $X(f) \epsilon L^2$

## Vale la formula de Parseval

si $x, y \epsilon L^2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df$$

En particular, si $x = y$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f))|^2 df$$

$$\sum_n |X_n|^2 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt$$

Es decir, la transformada de fourier mantinene el concepto de energia

## Otro teorema

Si $x \epsilon L^2$

$$\lim_{L \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - (\int_{-L}^{L} X(f) e^{i2\pi ft} dt)|^2 dt = 0$$

Si $x \epsilon L'$ o $x \epsilon L^2$

$$\frac{x(t^+) + t(2-)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

## Se corrige la definicion de transformada de Fourier para funciones generalizadas

Sea $x$ una funcion generalizada, definimos su transformada

$$F(x(t))(f) = \langle X(f), \phi(f) \rangle = \langle x(t), F(\phi(t) \rangle$$

En princpio para $\phi \epsilon C_0^{\infty}$ pero para las funciones que trabajamos se puede ampliar (ej: con la delta de Dirac)

$$\hat{\phi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(f) e^{-i2\pi ft} df$$

$$\hat{\phi}(0) = \langle 1, \phi(t) \rangle$$