Recopilacion de propiedades de funciones generalizadas

(Incompleto, falta pulir , emprolijar, completar)

(Ariel Nowik: anowik@itba.edu.ar)

Por hacer: un resumen de las propiedades de funciones generalizadas

Integrales delta de Dirac

(Revisado ✓)

Sea f continua a trozos, continua en t_0

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f(t)dt = f(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-t_0)f(t)dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f^{(n)}(t)dt$$

$$\int_{a}^{b} \delta(t-t_0)f(t)dt = \begin{cases} f(t_o), & a < t_0 < b \\ 0 & t_0 < a \vee t_0 > b \\ ?? & sino \end{cases}$$

Fourier

Serie trigonometrica

(Revisado ✓)

Sea $X(t)$ periodica de periodo T, frecuencia f_0

$$w_n = 2\pi f_0 n = w_0 n$$

$$x(t) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(w_n t) + b_n sin(w_n t)$$

Donde

$$\begin{cases} a_0 = 1/T \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)dt \\ a_n = 2/T \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)cos(w_n t)dt \\ b_n = 2/T \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)sin(w_n t)dt \end{cases}$$

Parseval serie trigonometrica

$$2|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt$$

Serie exponencial

(Revisado ✓)

$$x(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_k e^{iw_n t}$$

Donde

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-iw_n t} dt \qquad \forall n \, \epsilon \, R$$

Parseval serie exponencial

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 = \frac{1}{T} \int_{to}^{to+T} |x(t)|^2 dt$$

Relacion Exponencial-Trigonometrica

(Revisado ✓)

$$a_0 = X_0$$

$$X_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

$$a_n = 2Re(C_n)$$

$$b_n = -2Im(C_n)$$

Relgas relacionadas con los coeficientes de Fourier

$$Im(x(t)) = 0 \implies X_n = X^*_{-n}$$

$$x(t) = x(-t) \implies \begin{cases} b_n = 0 \\ X_n = X_{-n} = a_n/2 \end{cases}$$

$$x(t) = -x(-t) \implies \begin{cases} a_n = 0 \\ X_n = -X_{-n} = -ib_n/2 \end{cases}$$

Convergencia

Puntual

- X continua a trozos en $I = [t_0, t_0 + T]$

- Existen en $t \epsilon I$ tanto $X'(t^+)$,$X'(t^-)$
  Luego

$$S[X](t) \to \frac{X(t^+) + X(t^-)}{2}$$

$$\forall t \ \epsilon \ [t_0, t_0 + T]$$

Uniforme

- X continua en $I = [t_0, t_0 + T]$
- X' continua a trozos en $I = [t_0, t_0 + T]$
- $X(t_0) = X(t_0 + T)$

Luego

$$S[X] \to X(uniforme) \ en \ I$$

Derivación

- X continua en $I = [t_0, t_0 + T]$
- X' continua a trozos en $I = [t_0, t_0 + T]$
- Existen en $t \epsilon I$ tanto $X''(t^+)$,$X''(t^-)$

Luego

$$S'[X](t) \to \frac{X'(t^+) + X'(t^-)}{2}$$

$$\forall t \ \epsilon \ [t_0, t_0 + T]$$

Donde $S'[X]$ es la serie de fourier de X pero derivada termino a termino

Integración

- X continua a trozos en $I = [t_0, t_0 + T]$

$$s[X](t) \to \int_{t_0}^{t} X(u)du$$

Donde s es la serie obtenida de integrar termino a termino la serie de X entre t_0 y $t_0 + t$.

s es una serie de fourier si y solo si $X_0 = 0$