Formulas Nelly 3/19/2018

Convergencia en media cuadratica

$$dist^2(f, S_n(f)) = \lim_{n\to\infty} ||f - S_n(f)||^2 = 0$$

Convergencia puntual

Se pide f contiinua a trozos en $[a, b]$, y que en cada punto existan derivadas laterales finitas

La convergencia puntual nos dice que vale que

$$S_n(t) \to \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

conforme $n \to \infty$
En particular si f es continua en R, $S_n(t) \to f(t)$

Nota 1 sobre convergencia puntual de la Serie

f' continua a trozos en $[a, b]$ es equivalente a decir que en cada punto existe derivadas laterales finitas. (existen $f(x^+)$ y $f(x^-)$). (Hipotesis para condiciones de Dirichlet)

Convergencia uniforme

En un intervalo $I = [a, b]$
Se necesitan dos condiciones para que haya convergencia uniforme en I de la serie
f continua en I
f' continua a trozos en I
Convergencia uniforme $\to$ convergencia absoluta
$|S_n(t) - f(t)|| \leq \alpha_n \to 0$ conforme $n \to 0$ $\forall t \,\epsilon\, I$

Nota 2 sobre convergencia uniforme de la serie

Convergencia uniforme implica convergencia puntual y convergencia en media cuadratica

Notas sobre derivación de la serie de Fourier

Se pide f continua en I, f' continua a trozos en I
La derivacion nos dice que

$$f'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t)$$

Notar que la convergencia que existe no es necesariamente uniforme, por lo tanto en princpio no podemos decir nada de la continuidad de f'

Notar $f''(t_0^-)$,$f''(t_0^+)$ existen en cada punto

Conserguir serie de fourier teniendo la exponencial

Si f real : $c_n = c_{-n}, \forall n \; \epsilon \; Z$

$$c_0 = a_0$$

$$Re(c_n) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)cos(2\pi nt/T)dt = \frac{a_n}{2}$$

$$Im(C_n) = -\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)sin(2n\pi t/T) = -\frac{b_n}{2}$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

Nota 3

A veces tengo la serie de fourier pero necesito cambiarle el periodo sin calcular denuevo la serie

Sea $x(t)$ periodica de periodo T

$$x(t) \rightarrow X_n, n \; \epsilon \; Z$$

$$x(t) \sim X_n e^{i2n\pi t/T}$$

Suponemos $y(t) = x(at)$, el periodo de y es $\frac{T}{a}$ (se demuestra facil)

Ahora tenemos que hallar los coeficientes de $y(t)$ en terminos de X_n

$$Y_n = \frac{a}{T}\int_0^{T/a} y(t)e^{-i2n\pi at/T}dt = \frac{a}{T}\int_0^{T/a} x(at) * e^{-i2n\pi at/T}dt$$

$$Y_n = \frac{1}{T}\int_0^{T} x(t)e^{-i2n\pi t/T}dt = X_n$$

Ejercicio 17-b

Fue modificado por Nelly

$$w(t) = x(t)e^{i2\pi k f_0 t}$$

$$f_0 = 1/T_0$$

x periodica de periodo T_0
$k \; \epsilon \; Z$

W_n en terminos de X_n

Comentario sobre Laplace

$$Z(t) = x(t)cos(2pikf_0t) \; k\epsilon Z$$

encuentr los coeficientes de Z en funcion de los X

$$Z(t) = \frac{1}{2}x(t)[e^{i2k\pi f_0 t} + e^{-i2k\pi f_0 t}]$$

$$z_n = \frac{1}{2}[X_{n-k} + X_{n-k}]$$

Simetria de media onda

X periodica, periodo T, tiene simetria de media onda si

$$x(t + \frac{T}{2}) = -x(t), \forall t$$

Se enuncia entonces la propiedad

$$X(t + \frac{T}{2}) = -X(t) \implies X_{2n} = 0$$

La demostracion, es un ejercicio de mate 1

Necesitamos ver que

$$\int_0^T x(t)e^{-i4n\pi f_0 t} dt = 0$$

La partimos,

$$= \underbrace{\int_0^{T/2} x(t)e^{-i4n\pi f_0 t} dt}_{(1)} + \underbrace{\int_{T/2}^{T} x(t)e^{-i4n\pi f_0 t} dt}_{(2)}$$

Y hacemos un cambio de variable con (2), $t^* = t - T/2$

$$(2) = \int_0^{T/2} x(t^* + T/2)e^{-i4n\pi f_0 (t^* + T/2)} dt^*$$

$$= \int_0^{T/2} -x(t)e^{-i4\pi n f_0 t} \underbrace{e^{-i2n\pi}}_{=1} dt$$

por lo tanto $(2) = -(1)$

Ejercicio 21

Encontrar las series de fourier de δ_T y $\delta_{T'}$

$$\delta_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Serie exponencial de fourier

$$X_n = \frac{1}{T} \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t)e^{-i2n\pi t/T} dt}_{=1}$$

$$X_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)}_{\delta_t(t)} e^{-i2n\pi t/T}dt$$

$$X_n = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t-kT)e^{-i2n\pi t/T}}_{(1)}$$

$$(1) = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

$$\delta_T(t) \underbrace{=}_{?} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}e^{i2n\pi t/T}$$

$? \rightarrow$ en que sentido? Delta es una funcion generalizada, no tiene sentido pensar en su convergencia sobre puntos, sino en el sentido generalizado

$$X_n = \frac{1}{T}$$

$$|X_n| = \frac{1}{T} \rightarrow 0$$

(no pasa)

Nota

$$x(t) \rightarrow X_n$$

$$x'(t) \rightarrow Y_n = (in2\pi f_0)X_n$$

$$...$$

$$x^k(t) \rightarrow (i2n\pi f_0)^k X_n$$

$$Y_n = \frac{1}{T}\int_0^T x'(t)e^{-i2n\pi f_0 t}dt$$

$$Y_n = \frac{1}{T}x(t)e^{-i2n\pi f_0 t}|_0^T + \frac{1}{T}\int_0^T x(t)(i2n\pi f_0)e^{-i2n\pi f_0 t}$$

$$= \frac{1}{T}\underbrace{px(t)e^{-i2n\pi} - x(0)]}_{=0} + (i2n\pi f_0)\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-i2n\pi f_0 t}dt}_{X_n}$$

Por lo tanto

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{T}cos(\frac{2n\pi t}{T})$$

Correccion ejercicio 14

Dice $a_n^2 + b_n^2$

Ejercicio 10

$$x_1(t) = \sum_{n=\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + in\pi} e^{i(3n\pi t/2)}$$

La respuesta del item A es

$$T_0 = \frac{4}{3}$$

EL item B pide el valor medio de $X_1(t)$ en $[0, T_0]$, $X_0 = 1$

El item C pregunta si tiene algun tipo de simetria, lo tiene?

$$X_n = \frac{1}{1 + in\pi} = \frac{1 - in\pi}{1 + n^2\pi^2}$$

Notar

$$\begin{cases} Re(X_n) \neq 0 \rightarrow no\ impar \\ Im(X_n) \neq 0 \rightarrow no\ par \\ X_{2n} = 0 \rightarrow no\ sim\ de\ media\ onda \end{cases}$$

$$X_n = \frac{1}{1 - in\pi} = X_n^*$$

Por lo tanto por propiedad

$x_1(t)$ es real