Notas clase Nelly 3/26/2018

Sea $X : R \to C$

$$F[X](f) = X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt$$

(si converge)

$$X : R \to C$$

$$f \; \epsilon X(f)$$

$$X(f) \; \epsilon \; C$$

Propiedad

si $x \; \epsilon \; L^1(R) \implies$ existe X(f) y es uniformemente continua en R

En sentido clasico hay funciones no L1 con transformada
por ejempplo $sinc(t) = \frac{sin(\pi t)}{\pi t}$

Continua vs uniformemente continua

F es uniformemente continua

F es continua si
Cont en X_0: Dado $\epsilon > 0$ existe δ>0 :

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

δ varia segun x_0

Uniformemente continua

Dado ϵ>0, existe δ>0 tal que

$$\forall x, y \epsilon D : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

δ no varia segun x_0

Propiedades elementales transformada

- Linealidad
- Dualidad

$$X(t) \to (-f)$$

- Traslacion

$$X(t-t_0) \to X(f)e^{-i2\pi t_0 f}$$

$$x(t)e^{i2\pi f_0 t} \to X(f-f_0)$$

- Escalamiento

$$x(at) \to \frac{1}{|a|}X(f/a)$$

- Derivada

$$X^{(n)}(t) \to (i2\pi f)^{(n)}X(f)$$

$$t^{(n)}x(t) \to \frac{X^{(n)}(f)}{(-i2\pi)^{(n)}}$$

- Integral

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t')dt' \to \frac{X(f)}{i2\pi f} + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$$

Si conozco la transformada puedo conseguir la X?
No, no es inyectiva la transformada
Hay distintas funcioens con la misma transformada
En algunos espacios mas buenos como funciones C^∞ si vale y esto nos sirve para propositos practicos

$$x^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

Demostracion

(falta)

Transformadas utiles

$$\prod(\frac{t}{T}) \leftrightarrow Tsinc(fT)$$

$$\bigwedge(\frac{t}{T}) \leftrightarrow T^2 sinc^2(fT)$$

$$u(t) \to \frac{1}{i2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$$

Esta ultima es una **transformada en sentido generalizado**

$$\delta(t) \to 1$$

$$1 \to \delta(f)$$

$$signo(t) \to \frac{1}{i\pi f}$$

$$e^{-\alpha t}u(t) \to \frac{1}{\alpha + i2\pi f}$$

$$e^{-\alpha|t|} \leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$$

La integral suaviza, al ser L1 la transformada es uniformemente continua

Ejercicio 2 guia 3

$$x_a(t) = e^{-\alpha t} u(t)$$

$$X_a(f) \underbrace{=}_{calculo} \frac{1}{\alpha + i2\pi f}$$

$$x_b(t) = e^{\alpha t} u(-t)$$

$x_b(t) = x_a(-t) \implies X_b(f) = \frac{1}{|-1|} X_a(\frac{f}{-1})$

$$X_b(f) = \frac{1}{\alpha - i2\pi f}$$

$$x_c(t) = e^{-\alpha|t|}$$

Notar

$$x_c(t) = x_a(t) + x_b(t)$$

$$x_c(t) = e^{-\alpha t} u(t) + e^{\alpha t} u(-t)$$

$$X_c(f) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$$

Otro caso

$$y(t) = \frac{1}{t^2 + b^2}$$

$$F(y(t))$$

$$b \neq 0$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2 + b^2} e^{-i2\pi f t} dt$$

Usando mate 4 la podemos resolver pero vamos a utilizar dualidad, no usaremos las tecnicas con residuos de mate 4

$$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 t^2} \to e^{-\alpha|f|}$$

$$\frac{2\alpha}{4\pi^2 (t^2 + \frac{\alpha^2}{4\pi^2})} \to e^{-\alpha|f|}$$

$$\frac{1}{t^2 + \frac{\alpha^2}{4\pi^2}} \to \frac{2\pi^2}{\alpha} e^{-\alpha|f|}$$

$$Y(f) = F[\frac{1}{t^2+b^2}] = \frac{2\pi^2}{2\pi b}e^{-2\pi b|f|} = \frac{\pi}{b}e^{-2\pi b|f|}$$

$$\frac{\alpha^2}{2\pi^2} = b^2 \to \alpha = 2\pi b$$

$$(b > 0)$$

ejercicio 3 para hacer cuentas
el ejercicio 4b esta raro

Ejemplo

$$x(t) = cos(6\pi t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} cos(6\pi t)e^{-i2\pi ft}dt = I$$

Notar que I diverge
Por lo tanto solo podemos pensar en $X(f)$ en el sentido generalizado

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{i6\pi t} + \frac{1}{2}e^{-i6\pi t}$$

transformamos

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f-3) + \frac{1}{2}\delta(f+3)$$

Supongamos que

$$x(t) \to X(f)$$

defino

$$Y(t) = x(2t+5)$$

exprese la transformada de y en terminos de $X(f)$

$$y(t) = x(2(t+5/2))$$

$$Y(f) = \frac{1}{2}X(\frac{f}{2}e^{+i2\pi f5/2})$$

La definicion no falla jamas!

Quien es $Y(f)$ por defincion?

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(2t+5)e^{-i2\pi ft}dt$$

hacemos $\tau = 2t+5$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-i2\pi f(\tau-5)/2)}\frac{d\tau}{2}$$

$$Y(f) = \frac{1}{2}e^{-i2\pi f5/2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-i2\pi f\tau/2}d\tau}_{X(f/2)}$$

Antes de ir al ejercicio 5 algunas cuestiones

Supogamos que

$$x : R \to R, real \implies X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

La conjugada de la integral es la integral de la conjuntada

$$X^*(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt = X(-f)$$

Supongamos que

$$x : R- > R, par \implies$$
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)cos(2\pi ft)dt - i\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)cos(2\pi ft)dt}_{=0}$$

Por lo tanto $X(f)$ real y par

Analogamente

$$x : R \to R, impar \implies X(f)\ imaginaria\ pura\ e\ impar$$

Las transformadas de $\delta, 1, signo(t)$ son en el sentido generalizado

Ahora vamos al ejercicio 5

hacemos el 5-c

hay un dibujito

Lo escribimos en terminos de pulsos solamente

$$x_c(t) = \prod(\frac{t+3/2}{1}) + 2\prod(\frac{t-0}{2}) + \prod(\frac{t-3/2}{1})$$
$$x_c(t) = \prod(t+3/2) + 2\prod(t/2) + \prod(t-3/2)$$

transformamos

$$X_c(f) = e^{i2\pi f3/2}sinc(f) + 2 * 2sinc(2f) + e^{-i2\pi f3/2}sinc(f)$$
$$X_c(f) = 4sinc(2f) + sinc(f)(\underbrace{e^{i3\pi f} + e^{-i3\pi f}}_{2cos(3\pi f)})$$

Observar que es real y par, por lo tanto es razonable el resultado que obtuvimos

Se puede pensar como la suma de los pulsos tambien!

$$X_c(t) = \prod(\frac{t}{4}) + \prod(\frac{t}{2})$$

Otro ejemplo

$$X(t) = e^{-\alpha t^2} (\alpha > 0)$$

Observar que es conocido que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Un asco calcular la transformada por definicion

$$x'(t) = -2\alpha t e^{-\alpha t^2}$$

$$\begin{cases} x'(t) = -2\alpha t x(t) \leftrightarrow x'(t) + 2\alpha t x(t) = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

(Tenemos una edo)

$$i2\pi f X(f) = 2\alpha \frac{X'(f)}{+2i\pi}$$

$$\frac{\alpha}{\pi} X'(f) + 2\pi f X(f) = 0$$

$$X'(f) + \frac{2\pi^2}{\alpha f} X(f) = 0$$

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Recuerdo

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$$

$$x'(f) + \frac{2\pi^2}{\alpha} f X(f) = 0$$

$$\frac{X'(f)}{X(f)} = -\frac{2\pi^2}{\alpha} f$$

$$ln|X(f)| = -\frac{\pi^2}{\alpha} f^2 + k$$

$$X(f) = c e^{-\pi^2 f^2/\alpha}$$

$$X(0) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = c$$

Comentario: las gaussianas transformo fourier y se transformar en gaussianas

Y las respuesta del ejercicio

$$X(f) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-f^2 \pi^2 / \alpha}$$

las gaussianas auto funciones de la transformada de fourier, se transforman en si mismas

Segunda parte

Serie de fourier de $\delta_t(t)$ (tren de pulsos)

$$\delta_t(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{i 2 \pi n t / T}$$

$$F[\delta_T(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \delta(f - \frac{n}{T})$$

Para recordar!

Transformada para x periodica

asumimos $x(t)$ "buena", adminte d.s. fourier

$$x(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{i 2 n \pi t / T}$$

Recordar la transformada de la serie es la serie de las transformadas

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta(f - \frac{n}{T})$$

(transformada de una serie de fourier, **no es una serie de fourier**!)

Ejercicio

$$x_0(t) = \bigwedge(t)$$

$$F[x_0(t)] = sinc^2(f)$$

que es $(x * y)$? (si converge)

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) y(\tau) d\tau$$

la delta hace como **neutro** en la convolucion! el producto de convolucion con deltas

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$x(t) * \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) \delta(\tau - t_0) d\tau = x(t - t_0)$$

Resolvemos

$$x(t) = x_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-4n)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{x_0(t) * \delta(t-4n)}_{x_0(t-4n)}$$

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_o(t-4n)$$

como hallo $F[x(t)]$?

Hay varias formas

1ra forma:

Hallo s.exp. de fourier de $x(t)$

$$x(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{i2n\pi t/T}$$

Como vale que

$$F[\sum] = \sum F[]$$

Entonces

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n * \delta(f - \frac{n}{T})$$

**Nota: ** Esta mal hacer esto

$$F[\sum_{n\epsilon N} \delta(t-nT)] = \sum_{n\epsilon N} F[\delta(t-nT)]$$

Te queda una serie divergente, el problema esta relacionado con ello

2da forma

llamo

$$x(t) = x_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n\tau)$$

Luego

$$x(t) = x_0(t) * \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2n\pi t/T}$$

$$X(f) = X_0(f) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T})$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{T} X_0(\frac{n}{T})}_{X_n} \delta(f - \frac{n}{T})$$

COmentario de un caso
si conozco la transformada de fourier de una y ahora quiero encontrar la serie de fourier?
Son
$X_n = sinc^2(\frac{n}{4})$

Recordar transformada de una periodica quedan los deltas

Ejercicio 7b

$$x_0(t) = (1-t)u(t)u(1-t)$$

No tenemos ganas de hacer partes... uff cuenta para casa, da

$$X_0(t) = \int_0^1 (1-T)e^{-i2\pi f t} dt$$

sumo $x_0(t)$ y $x_0(-t)$ y obtengo el triangulito

$$x_1(t) = x_0(t+1) + x_0(-(t-1))$$

$$x_1(t) = x_0(t+1) + x_0(1-t)$$

$$x_1(f) = e^{i2\pi f 1} X_0(f) + e^{-i2\pi f} F[x_0(-t)]$$

$$= e^{i2\pi f} X_0(f) + e^{-i2\pi i f} X_0(-f)$$

Vamos a hacer parte de 13-14-15

Recordar

$$x_a(t) = e^{-\alpha t} u(t) \implies X_a(f) = \frac{1}{\alpha + i2\pi f}$$

$$x_b(t) = e^{\alpha t} u(-t) \implies \frac{1}{\alpha - i2\pi f}$$

$(\alpha > 0)$

Espectro de ampitud

que es el espectro de amplitud?

$$\begin{cases} |X_a(f)|; f \epsilon R & esp.\ de\ amplitud \\ arg(X_a(f)) & esp.\ de\ fase \end{cases}$$

$$|X_a(f)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}}$$

es una campana pero ojo que no es la campana de gauss

$$\frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3i}{13}$$

$$arg(X_a(f)) = arctg(-\frac{2\pi f}{\alpha})$$

ufff arctg no sirve en todos los casos

Ejercicio 8

Ejercicio 9

no se si van a poder

10 es de cuentas