Notas clase 3/19/2018

Si X tiene discontinuidad tipo salto en t

$$\frac{x(t^{+})+x(t^{-})}{2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{in2\pi t/T}$$

Observacion: Si X es derivable

$$X(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{in2\pi t/T}$$

Se demuestra con fourier

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

Usando

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{sin(nt)}{n}$$

Convergencia uniforme

Pedimos el mismo n para todo t^{*}

Podemos conseguir el mismo error con el mismo n en toda la funcion

X continua en $[to, to+T]$ $x(to)=x(to+T)$ -> convergencia uniforme
El resto de las hipotesis aseguran que converge al valor de la funcion

$x(t)=|t|$ $t\,\epsilon\,(-\pi,\pi)$ -> aplica teorema de convergencia uniforme

$$x(t)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{cos((2n-1)t)}{(2n-1)^2}$$

converge uniformemente y al ritmo de $1/n^2$

Derivación

$$\frac{x'(t^{+})+x'(t^{-})}{2}=\sum_{n\neq 0} inw_0 C_n e^{inw_o t}$$

$$x'(t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{sin((2n-1)t)}{2n-1}$$

Integracion

$$\int_{t_0}^{t} x(t)dt = c_0(t-t_0) + \sum_{n\neq 0} \frac{c_n}{inw_0}(e^{inw_0 t} - e^{inw_0 t_0})$$

$$t \,\epsilon\, [t_0, t_0 + T]$$

Transformada de Fourier

Transformada de x en f

$$F[x(t)](f) = X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

cuando esta integral existe

Transformada inversa de $X(f)$ en x

$$F^{-1}[X(f)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{i2pift}df$$

cuando esta integral existe

$$x(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

Para que exista ala transfoprmada pedimos que x cumpla que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty$$

Si pasa eso, ademas $X(f)$ sera *uniformemente continua*

Ejemplo

$$X(e^{-a|t|}) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$$

(cuenta)

Propiedad

Si x es integrable, y cuadrado integrable, luego $X(f) \,\epsilon\, L^2$

Vale la formula de Parseval

si $x, y \,\epsilon\, L^2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df$$

En particular, si $x = y$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f))|^2df$$

$$\sum_n |X_n|^2 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt$$

Es decir, la transformada de fourier mantinene el concepto de energia

Otro teorema

Si $x \epsilon L^2$

$$\lim_{L\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - (\int_{-L}^{L} X(f)e^{i2\pi ft}dt)|^2 dt = 0$$

Si $x \epsilon L'$ o $x \epsilon L^2$

$$\frac{x(t^+) + t(2-)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

Se corrige la definicion de transformada de Fourier para funciones generalizadas

Sea x una funcion generalizada, definimos su transformada

$$F(x(t))(f) = \langle X(f), \phi(f)\rangle = \langle x(t), F(\phi(t)\rangle$$

En princpio para $\phi \epsilon C_0^\infty$ pero para las funciones que trabajamos se puede ampliar (ej: con la delta de Dirac)

$$\hat{\phi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(f)e^{-i2\pi ft}df$$

$$\hat{\phi}(0) = \langle 1, \phi(t)\rangle$$