Clase 3/15/2018

E: Experimento aleatorio
S: Espacio muestral

$$X : S \to R_x$$

$$p_k = P(X = x_k)$$

$$F(x) = \sum_{X_k \leq x} p_k$$

$$E(X) = \sum_{R_x} x_k p_k$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Distribucion hipergeometrica

$$X \to H(N, R, n)$$

X: # de objetos de la clase I en la muestra

$$P(X = r) = \frac{\binom{R}{r} * \binom{N-R}{n-r}}{\binom{N}{n}}$$

$$V(x) = n(\frac{R}{N})(1 - \frac{R}{N})(\frac{N-n}{N-1})$$

$$E(X) = \frac{nR}{N}$$

$$r \ \epsilon \ (max(0, n - N + R), ..., min(R, n))$$

$n = N$: "censo"

$$r \geq n - N + R$$

$$R \geq 0$$

Distribución binomial

$$X \to Bin(n, p)$$

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{(n-r)}$$

$$r \ \epsilon \ (0, 1, ..., n)$$

$$E(x) = np$$

$$V(x) = np(1-p)$$

Ejemplo

E : experimento aleatorio

$$P(A) = p, \quad A \subset S$$

n repeticiones *Independientes* de E
X : Numero de exitos en las n repeticiones

$$P(X=r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}, r \, \epsilon (0, 1, ..., n)$$

Notas

- Cuando N >> n luego tanto muestrear con o sin reemplazo es equivalente.
- Con reemplazo es mas facil de analizar

Distribucion geométrica

$$X : Geom(p)$$

E: Experimento aleatorio

$$A \subset S, P(A) = p$$

Repeticiones independientes de E
X : Numero de repeticiones de E hasta la primera ocurrencia de A

$$P(X=1) = p$$

$$P(X=2) = (1-p)p$$

$$P(X=3) = (1-p)^2 p$$

$$...$$

$$P(X=r) = (1-p)^{(r-1)} p, \quad r \, \epsilon \, N$$

Nota: es una variable infinita

$$\sum_{r=1}^{\infty} (1-p)^{(r-1)} p = p \sum_{r=1}^{\infty} (1-p)^{(r-1)} = 1$$

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$V(x) = \frac{1-p}{p^2}$$

Demostracion esperanza

$$|q| < 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

derivamos

$$\sum_{k=0}^{\infty} kq^{(k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{(k-1)} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

Y haciendo un cambio de variable en E(x) queda
Ademas

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} p^r (1-p)^{(n-r)} = (p + (1-p))^n = 1$$

(formula 1)
Por lo tanto es una genuina funcion de probabilidad

si $p = 0.5$ observar

$$P(X = r) = \binom{n}{r} 0.5^n$$

y tambien

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

por lo tanto

$$P(X = r) = P(X = n - r)$$

(Simetria combinatorios)

$$E(x) = \sum_{r=0}^{n} r \binom{n}{r} p^r (1-p)^{(n-r)}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} r \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r (1-p)^{(n-r)} = \sum_{r=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(r-1)!((n-1)-(r-1)!)} pp^{r-1} (1-p)^{(n-1)-(r-1)}$$

$$= np \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(k!)(n-1-k)!} p^k (1-p)^{(n-1)-k}$$

Observar que el primer factor es un numero combinatorio para simplificar

$$= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{(n-1)-k} = np$$

(Acabamos de usar la formula 1)

Para $E(x^2)$ considerar $k^2 = k(k-1) + k$

Mas notas

- Probability distributions: Aplicacion de celular
- Ensayo de bernoulli Toma 1 o 0 (exito o fracaso)