Recopilacion de propiedades

(Incompleto, falta pulir , emprolijar, completar)

(Ariel Nowik: anowik@itba.edu.ar)

Por hacer: un resumen de las propiedades de funciones generalizadas

Integrales delta de Dirac

(Revisado ✓)

Sea f continua a trozos, continua en t_0

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f(t)dt = f(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-t_0)f(t)dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f^{(n)}(t)dt$$

$$\int_a^b \delta(t-t_0)f(t)dt = \begin{cases} f(t_o), & a < t_0 < b \\ 0 & t_0 < a \vee t_0 > b \\ ?? & sino \end{cases}$$

Fourier

Serie trigonometrica

(Revisado ✓)

Sea $X(t)$ periodica de periodo T, frecuencia f_0

$$w_n = 2\pi f_0 n = w_0 n$$

$$x(t) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(w_n t) + b_n sin(w_n t)$$

Donde

$$\begin{cases} a_0 = 1/T \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)dt \\ a_n = 2/T \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)cos(w_n t)dt \\ b_n = 2/T \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)sin(w_n t)dt \end{cases}$$

Parseval serie trigonometrica

$$2|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt$$

Serie exponencial

(Revisado ✓)

$$x(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_k e^{iw_n t}$$

Donde

$$X_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-iw_n t} dt \qquad \forall n \; \epsilon \; R$$

Parseval serie exponencial

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 = \frac{1}{T}\int_{to}^{to+T} |x(t)|^2 dt$$

Relacion Exponencial-Trigonometrica

(Revisado ✓)

$$a_0 = X_0$$

$$X_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, n > 0$$

$$X_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, n > 0$$

$$a_n = 2Re(X_n)$$

$$b_n = -2Im(X_n)$$

Reglas relacionadas con los coeficientes de Fourier

(Revisado ✓)

$$Im(x(t)) = 0 \implies X_n = X_{-n}^*$$

$$x(t) = x(-t) \implies \begin{cases} b_n = 0 \\ X_n = X_{-n} = a_n/2 \end{cases}$$

$$x(t) = -x(-t) \implies \begin{cases} a_n = 0 \\ X_n = -X_{-n} = -ib_n/2 \end{cases}$$

$$x(t) = -x(t + T/2) \implies X_{2n} = 0$$

Convergencia

(Revisado ✓)

Puntual

- X continua a trozos en $I = [t_0, t_0 + T]$
- Existen en $t \, \epsilon \, I$ tanto $X'(t^+)$,$X'(t^-)$
  Luego

$$S[X](t) \to \frac{X(t^+) + X(t^-)}{2}$$

$$\forall t \; \epsilon \; [t_0, t_0 + T]$$

Uniforme

- X continua en $I = [t_0, t_0 + T]$
- X' continua a trozos en $I = [t_0, t_0 + T]$
- $X(t_0) = X(t_0 + T)$

Luego

$$S[X] \to X(uniforme) \; en \; I$$

Derivación

- X continua en $I = [t_0, t_0 + T]$
- X' continua a trozos en $I = [t_0, t_0 + T]$
- Existen en $t \, \epsilon \, I$ tanto $X''(t^+)$,$X''(t^-)$

Luego

$$S'[X](t) \to \frac{X'(t^+) + X'(t^-)}{2}$$

$$\forall t \; \epsilon \; [t_0, t_0 + T]$$

Donde $S'[X]$ es la serie de fourier de X pero derivada termino a termino

Integración

- X continua a trozos en $I = [t_0, t_0 + T]$

$$s[X](t) \to \int_{t_0}^{t} X(u)du$$

Donde s es la serie obtenida de integrar termino a termino la serie de X entre t_0 y $t_0 + t$.

s es una serie de fourier si y solo si $X_0 = 0$

Transformada de Fourier

Algunas transformadas famosas

$$e^{-\alpha t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + i2\pi f}, \quad \alpha > 0$$

$$e^{\alpha t}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha - i2\pi f}, \alpha > 0$$

$$\prod(\frac{t}{T}) \leftrightarrow Tsinc(fT)$$

$$\bigwedge(\frac{t}{T}) \leftrightarrow T^2 sinc^2(fT)$$

$$u(t) \rightarrow \frac{1}{i2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$$

Propiedades

$$x(t - t_o) \leftrightarrow e^{i2\pi t_0 f}X(f)$$

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}X(f/a)$$

$$x'(t) \leftrightarrow i2\pi f X(f)$$

$$F[x(t)(-2i\pi t)^{(n)}] = X^{(n)}(f)$$

$$F[(x * y)(t)](f) = X(f)Y(f)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Paridades

x es real y par $\implies$ $X(f)$ es real y par
y vale

$$X(f) = 2\int_0^{\infty} x(t)cos(2\pi ft)dt$$

x es real e impar $\implies$ $X(f)$ es imaginaria e impar
y vale que

$$X(f) = -2i\int_0^{\infty} x(t)sin(2\pi ft)dt$$

x es real $\implies$ $X(f) = |X(f)|e^{j\theta(f)} = Re(f) + iIm(f)$
vale que

$$|X(f)|, Re(f) \rightarrow pares$$

$$\theta(f), Im(f) \rightarrow impares$$

Transformada de funciones periodias

$$x(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{i2n\pi t/T} \implies X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta(f - \frac{n}{T})$$