Clase 3/22/2018

Si X es V.A.C.

Algunas definiciones de repaso

$$R_x = (a,b) \ o \ R_x = \cup_i (a_i, b_i)$$

Se denomina $f_x(x)$ funcion densidad de probabilidad

Se define

$$P(X\epsilon(c,d)) = \int_c^d f_x(x)dx = F_x(d) - F_x(c)$$

Por otro lado vale que

$$\begin{cases} f_x(x) \geq 0 & \forall x \epsilon R \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx = 1 \end{cases}$$

Se define

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(t)dt$$

Valor esperado

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x)dx$$

En general

$$E(G(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x) f_x(x)dx$$

Varianza

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x)dx - (E(X))^2$$

Si X tiene distribucion uniforme vemos algunas cosas que suceden

Es decir, si

$$X \sim U(a,b)$$

$$X \sim Exp(b) \quad b > 0$$

Cuando

$$f_x(x) = Ce^{-bx} I_{(0,+\infty)} = \begin{cases} Ce^{-bx} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

entonces vale que

$$E(x) = \int_a^b \frac{xdx}{a-b} = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$V(X) = \int_a^b \frac{x^2 dx}{b-a} - \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{b-a}{\sqrt{12}} \approx 0.289(b-a)$$

Un caso facil, funcion triangular

$$f_x(x) = (1 - |x|) I_{(-1,1)}(x)$$

$$E(X) = 0$$

$$V(X) = E(X^2) = 2\int_0^1 x^2(1-x)dx = 2(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{6}$$

$$\sigma(X) = \frac{1}{\sqrt{6}} = \approx 0.408$$

Otro ejemplo

$$X \sim Exp(\lambda) \quad \lambda > 0$$

$$f_x(x) = Ce^{-b\lambda} I_{(0,+\infty)} = \begin{cases} Ce^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda > 0$$

$$\int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}$$

Por lo tanto

$$E(X) = \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

Seguimos haciendo calculos para sacar la varianza

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^3}$$

Por lo tanto

$$V(X) = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Se puede probar por induccion que dado $n \epsilon N$

$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{(n-1)!}{\lambda^n}$$

Propiedad

$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = (n-1)!$$

Definicion en base a la propiedad

Dado $z \epsilon R$, se define la funcion gamma como

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-\lambda x} dx$$

Entonces usando la propiedad anterior, si en particular, $z \epsilon N$, value que

$$\Gamma(z) = (z-1)!$$

La funcion gamma la pensamos como on **factorial generalizado**

Ejemplo de aplicacion

Definimos la variable aleatoria
T: Tiempo hasta la ocurrencia de la falla de un equipo

Que cumple que

$$T \sim Exp(\lambda)$$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}$$

A esta esperanza se la denomina **MTBF**: la media de los tiempos del bueno funcionamiento
mean time between failures en ingles

Otras caractersiticas de T

$$\sigma(T) = \frac{1}{\lambda}$$

$$P(E(T) - \sigma(T) < T < E(T) + \sigma(T)) = P(0 < T < 2/\lambda) = \underbrace{F_T(2/\lambda)}_{1-e^{-\lambda(2/\lambda)}} - \underbrace{F_T(0)}_{0} = 1 - e^{-2} \approx 0.865$$

Ejemplo

Si

$$\lambda = 10^3$$

El tiempo medio hasta que falla 1000 horas o ocurre una falla cada 1000 horas

Definicion conceptual acerca de la variable anterior

$\lambda(t)$: Promedio de falla por unidad de tiempo$

(Dibujo 4)

El dibujo muestra que en el primer sector hay

- **Fallas infantiles** (Γ alto), (Sector inicial)
- **Fallas al azar** (Γ muy bajo) (Sector medio)
- **Fallas por envegecimiento** (Γ alto) (Sector final)

Se dio un ejemplo con computadoras acer que fallan seguido

Se dio un ejemplo de la utilizacion del acronimo **MTBF** para discos rigidos

Propiedad ejercicio 8

Dice que

$$P(X > x_0 + d / X > x_0) = k \ \ \forall x_0$$

Es decir, la probabilidad de que un equipo no falle en un intervalo $(x_0, x_0 + d)$ es la misma sin importar el lugar del intervalo sino tan solo su tamanio

Demostracion de la propiedad

Por definicion

$$f_X(x) = P(X \leq x)$$

Sea

$$G_X(x) = P(X \geq x) = 1 - f_x(x)$$

Como

$$x \sim Exp(b)$$

Luego

$$F_x(x) = 1 - e^{-bx} \quad x > 0$$

$$G_X(x) = e^{-bx}$$

Por lo tanto

$$P(X > x_0 + d / X > x_0) \underbrace{=}_{Proporcion} \frac{P(X > x_0 + d)}{P(X > x_0)} = \frac{e^{-b(x_0+d)}}{e^{-bx_0}} = e^{-bd}$$

Ejercicio 10 (guia 4)

Notar $E(x) = 1000\ h$

Se plantea

$$P(X > X_g) = e^{-\frac{X_g}{1000}} = 0.95 \implies X_g \approx 5.13\ h$$

Item B

Necesitamos que funcione 100 o mas horas

$$[G_x(100)]^5 = (e^{-\frac{100}{1000}})^2 = e^{-\frac{5}{10}} \approx 0.61$$

Vale hacer el producto de ambos lados porque hay **Independencia**

A_k: el displositivo k dura $100h$ como minimo
B: el sistema dura $100h$ como minimo

$$B = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$$

$$P(A_k) = e^{\frac{100}{1000}}$$

$$P(B) = \prod_{k=1}^{5} P(A_k)$$

Y: Numero de sistemas que duran mas de 100 hs

$$Y \sim Bin(n = 5, p = e^{-1})$$

$$P(Y \geq 3)$$

lo deja para nosotros el calculo

Nota

El Ejercicio 13 es una generalizacion del 10

Lo comenzamos a resolver

A_k: el displositivo k dura t como minimo
B: el sistema dura t como minimo

$$k = 1, 2, ..., n$$

$$B = \cap A_i$$

$$P(A_k) = e^{-0.01t}, k = 1, 2, ..., n$$

$$P(B) = \prod_{k=1}^{5} P(A_k) = 1 - F(t)$$

Por lo tanto

$$e^{-0.1nt} = 1 - F(t)$$

$$F(t) = 1 - e^{-(0.01n)t}, \ \ t > 0$$

$$T \sim Exp(0.01n)$$

$$E(T) = \frac{1}{0.01n} = (\frac{1}{0.01})\frac{1}{n}$$

Suponemos en paralelo (ejercicio adicional)

El sistema falla antes de T si todos fallan antes de T

$$\overline{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_k}$$

$$P(\overline{A_k}) = 1 - e^{-0.01t}$$

Por independencia

$$\underbrace{P(\overline{B})}_{P(T<t)} = (1 - e^{-0.01t})^2$$

$$F(t) = (1 - e^{-0.01t})^n$$

Ejercicio 15 (guia 4)

Se hace un cociente de probabilidad, la fraccion de que la falla este en $(t, \triangle t)$ sabiendo que ya fallo despues de t

$$\frac{t < T < t + \triangle t}{\triangle t * P(T > t)} = \frac{\int_t^{t+\triangle t} f(x)dx}{\triangle t(1 - F(t))} = (1)$$

Notar que

$$t < \zeta < t + \triangle t$$

Entonces vale que

$$(1) = \frac{f(\zeta)\triangle t}{\triangle t(1 - F(t))} \to \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$