LOGIT E PROBIT

Marcus Antonio Cardoso Ramalho
Claudia Regina da Costa de Souza Ben Hur Correia

2025-06-25

Índice

1 Introdução

1.1 Variáveis Dependentes Limitadas

Os modelos Logit e Probit (abreviação de regressão logística e probabilística) nos auxiliam na inferência de probabilidade de ocorrência de eventos onde nossa variável dependente é binária (Y ocorre ou não ocorre), e nosso objetivo é compreender como outras variáveis influenciam a ocorrência ou não desses eventos.

1.1.1 Por que não usar modelo linear?

Em uma regressão linear, $P(Y = 1|x)$ é dado por uma especificação linear dos regressores, o que pode resultar em valores menores que 0 ou maiores que 1, que não fazem sentido com a interpretação probabilística dos parâmetros.

Os modelos não lineares permitem que a média condicional de Y dado X seja expressa pela probabilidade de Y acontecer dado X:

$$E(Y|X) = P(Y = 1|X)$$

1.2 Especificação dos Modelos

1.2.1 Modelo Logit

A função de distribuição logística é dada por:

$$F(X'\beta) = \frac{e^{X'\beta}}{1 + e^{X'\beta}} = \frac{1}{1 + e^{-X'\beta}}$$

1.2.2 Modelo Probit

A função de distribuição normal padrão é dada por:

$$F(X'\beta) = \Phi(X'\beta) = \int_{-\infty}^{X'\beta} \phi(z)dz$$

onde $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ é a densidade da normal padrão.

2 Exemplo Prático: Participação no Mercado de Trabalho

2.1 Descrição dos Dados

Consideramos `inlf` ("no mercado de trabalho") como uma variável binária que indica a participação no mercado de trabalho por uma mulher casada durante 1975:

- `inlf = 1` se a mulher relata ter trabalhado por um salário fora de casa
- `inlf = 0` caso contrário

2.1.1 Variáveis Explicativas:

- `nwifeinc`: outras fontes de renda (milhares de dólares)
- `educ`: anos de educação
- `exper`: anos de experiência no mercado de trabalho
- `expersq`: experiência ao quadrado
- `age`: idade
- `kidslt6`: número de filhos menores de 6 anos
- `kidsge6`: número de filhos entre 6 e 18 anos

2.2 Modelo Teórico

$$inlf = \beta_0 - \beta_1 \cdot nwifeinc + \beta_2 \cdot educ + \beta_3 \cdot exper - \beta_4 \cdot exper^2 - \beta_5 \cdot age - \beta_6 \cdot kidslt6 + \beta_7 \cdot kidsge6$$

```r
options(scipen = 999) # desliga a notação científica

# Pacotes necessários
library(tidyverse)    # análise de dados
library(magrittr)     # operador pipe
library(mfx)          # efeitos marginais e odds ratio
library(wooldridge)   # base de dados
library(gridExtra)    # múltiplos gráficos
library(knitr)        # tabelas
library(ggplot2)      # gráficos
library(plotly)       # gráficos interativos
```

2.3 Análise Exploratória dos Dados

```r
# Visualizar estrutura dos dados
glimpse(mroz)
```

```
Rows: 753
Columns: 22
$ inlf     <int> 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1~
$ hours    <int> 1610, 1656, 1980, 456, 1568, 2032, 1440, 1020, 1458, 1600, 19~
$ kidslt6  <int> 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0~
$ kidsge6  <int> 0, 2, 3, 3, 2, 0, 2, 0, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 3, 2, 5, 0, 4, 2~
$ age      <int> 32, 30, 35, 34, 31, 54, 37, 54, 48, 39, 33, 42, 30, 43, 43, 3~
$ educ     <int> 12, 12, 12, 12, 14, 12, 16, 12, 12, 12, 12, 11, 12, 12, 10, 1~
$ wage     <dbl> 3.3540, 1.3889, 4.5455, 1.0965, 4.5918, 4.7421, 8.3333, 7.843~
$ repwage  <dbl> 2.65, 2.65, 4.04, 3.25, 3.60, 4.70, 5.95, 9.98, 0.00, 4.15, 4~
$ hushrs   <int> 2708, 2310, 3072, 1920, 2000, 1040, 2670, 4120, 1995, 2100, 2~
$ husage   <int> 34, 30, 40, 53, 32, 57, 37, 53, 52, 43, 34, 47, 33, 46, 45, 3~
$ huseduc  <int> 12, 9, 12, 10, 12, 11, 12, 8, 4, 12, 12, 14, 16, 12, 17, 12, ~
$ huswage  <dbl> 4.0288, 8.4416, 3.5807, 3.5417, 10.0000, 6.7106, 3.4277, 2.54~
$ faminc   <dbl> 16310, 21800, 21040, 7300, 27300, 19495, 21152, 18900, 20405,~
$ mtr      <dbl> 0.7215, 0.6615, 0.6915, 0.7815, 0.6215, 0.6915, 0.6915, 0.691~
$ motheduc <int> 12, 7, 12, 7, 12, 14, 14, 3, 7, 7, 12, 14, 16, 10, 7, 16, 10,~
$ fatheduc <int> 7, 7, 7, 7, 14, 7, 7, 3, 7, 7, 3, 7, 16, 10, 7, 10, 7, 12, 7,~
$ unem     <dbl> 5.0, 11.0, 5.0, 5.0, 9.5, 7.5, 5.0, 5.0, 3.0, 5.0, 5.0, 5.0, ~
$ city     <int> 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0~
$ exper    <int> 14, 5, 15, 6, 7, 33, 11, 35, 24, 21, 15, 14, 0, 14, 6, 9, 20,~
$ nwifeinc <dbl> 10.910060, 19.499981, 12.039910, 6.799996, 20.100058, 9.85905~
$ lwage    <dbl> 1.21015370, 0.32851210, 1.51413774, 0.09212332, 1.52427220, 1~
```

```
$ expersq  <int> 196, 25, 225, 36, 49, 1089, 121, 1225, 576, 441, 225, 196, 0,~
```

```r
# Estatísticas descritivas
summary(mroz[c("inlf", "nwifeinc", "educ", "exper", "age", "kidslt6", "kidsge6")])
```

```
      inlf           nwifeinc             educ           exper      
 Min.   :0.0000   Min.   :-0.02906   Min.   : 5.00   Min.   : 0.00  
 1st Qu.:0.0000   1st Qu.:13.02504   1st Qu.:12.00   1st Qu.: 4.00  
 Median :1.0000   Median :17.70000   Median :12.00   Median : 9.00  
 Mean   :0.5684   Mean   :20.12896   Mean   :12.29   Mean   :10.63  
 3rd Qu.:1.0000   3rd Qu.:24.46600   3rd Qu.:13.00   3rd Qu.:15.00  
 Max.   :1.0000   Max.   :96.00000   Max.   :17.00   Max.   :45.00  
      age           kidslt6          kidsge6      
 Min.   :30.00   Min.   :0.0000   Min.   :0.000  
 1st Qu.:36.00   1st Qu.:0.0000   1st Qu.:0.000  
 Median :43.00   Median :0.0000   Median :1.000  
 Mean   :42.54   Mean   :0.2377   Mean   :1.353  
 3rd Qu.:49.00   3rd Qu.:0.0000   3rd Qu.:2.000  
 Max.   :60.00   Max.   :3.0000   Max.   :8.000  
```

```r
# Proporção de mulheres no mercado de trabalho
prop_trabalho <- mean(mroz$inlf)
cat("Proporção de mulheres no mercado de trabalho:", round(prop_trabalho, 3))
```

```
Proporção de mulheres no mercado de trabalho: 0.568
```

2.3.1 Interpretação da Análise Exploratória

Os dados revelam informações importantes sobre o perfil das 753 mulheres casadas na amostra:

- **Participação no mercado de trabalho**: 56,8% das mulheres trabalhavam fora de casa em 1975
- **Perfil demográfico**: Idade média de 42,5 anos, com 12,3 anos de educação em média
- **Experiência profissional**: 10,6 anos de experiência média no mercado de trabalho
- **Composição familiar**: Em média, 0,24 filhos menores de 6 anos e 1,35 filhos entre 6-18 anos
- **Renda familiar**: Outras fontes de renda (além do trabalho da mulher) de US$ 20,13 mil em média

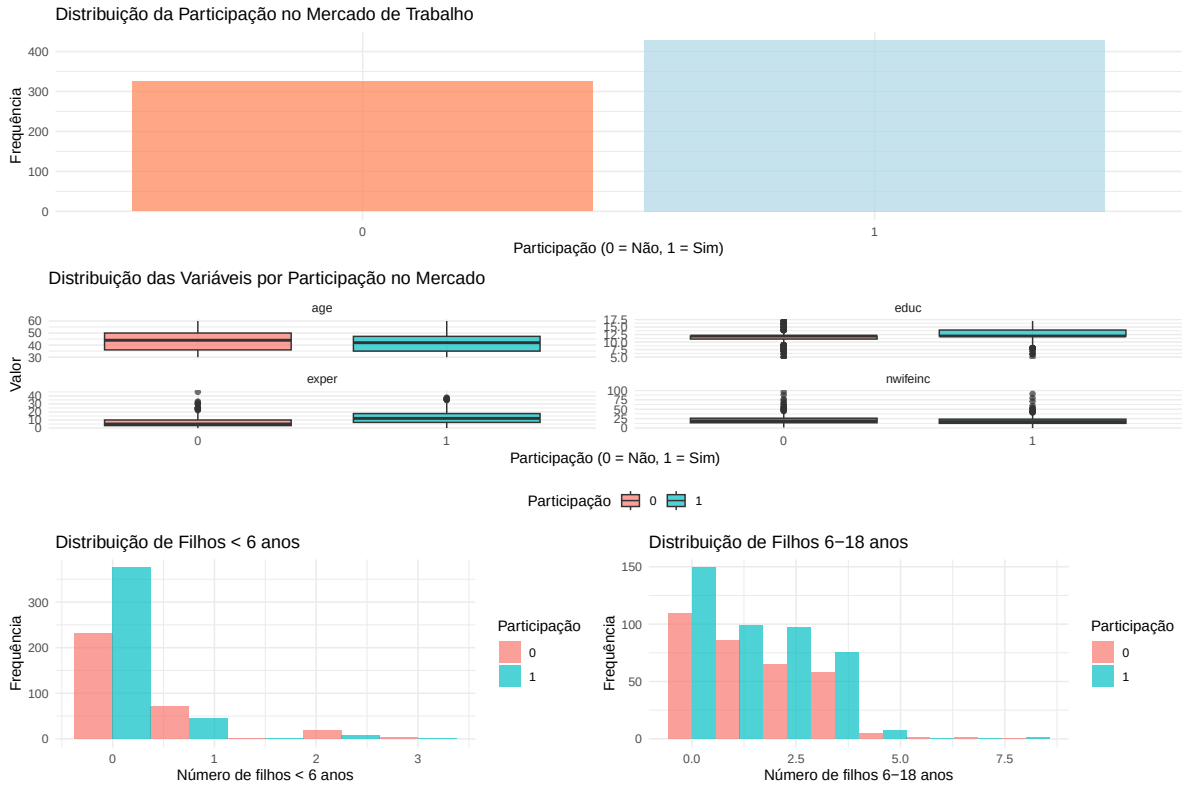
```r
# Gráfico de barras para variável dependente
p1 <- ggplot(mroz, aes(x = factor(inlf))) +
  geom_bar(fill = c("coral", "lightblue"), alpha = 0.7) +
  labs(title = "Distribuição da Participação no Mercado de Trabalho",
       x = "Participação (0 = Não, 1 = Sim)",
       y = "Frequência") +
  theme_minimal()

# Boxplots das variáveis contínuas por grupo
p2 <- mroz %>%
  select(inlf, nwifeinc, educ, exper, age) %>%
  pivot_longer(-inlf, names_to = "variavel", values_to = "valor") %>%
  ggplot(aes(x = factor(inlf), y = valor, fill = factor(inlf))) +
  geom_boxplot(alpha = 0.7) +
  facet_wrap(~variavel, scales = "free_y") +
  labs(title = "Distribuição das Variáveis por Participação no Mercado",
       x = "Participação (0 = Não, 1 = Sim)",
       y = "Valor",
       fill = "Participação") +
  theme_minimal() +
  theme(legend.position = "bottom")

# Histograma dos filhos
p3 <- ggplot(mroz, aes(x = kidslt6, fill = factor(inlf))) +
  geom_histogram(position = "dodge", bins = 5, alpha = 0.7) +
  labs(title = "Distribuição de Filhos < 6 anos",
       x = "Número de filhos < 6 anos",
       y = "Frequência",
       fill = "Participação") +
  theme_minimal()

p4 <- ggplot(mroz, aes(x = kidsge6, fill = factor(inlf))) +
  geom_histogram(position = "dodge", bins = 8, alpha = 0.7) +
  labs(title = "Distribuição de Filhos 6-18 anos",
       x = "Número de filhos 6-18 anos",
       y = "Frequência",
       fill = "Participação") +
  theme_minimal()

grid.arrange(p1, p2, p3, p4, layout_matrix = rbind(c(1,1), c(2,2), c(3,4)))
```



2.3.2 Análise dos Gráficos Exploratórios

Os gráficos revelam padrões importantes:

1. **Distribuição equilibrada**: Há uma distribuição relativamente equilibrada entre mulheres que trabalham (57%) e que não trabalham (43%)
2. **Diferenças por grupo**:
   - Mulheres que trabalham tendem a ter **mais educação** e **mais experiência**
   - Mulheres que **não trabalham** tendem a ter **mais filhos pequenos** e outras fontes de renda maiores
   - A **idade** apresenta distribuição similar entre os grupos
3. **Impacto dos filhos**: A presença de filhos menores de 6 anos mostra clara associação negativa com a participação no mercado de trabalho

2.4 Estimação dos Modelos

2.4.1 Modelo Logit

```
mlogit <- glm(inlf ~ nwifeinc + educ + exper + expersq + age + kidslt6 + kidsge6,
              data = mroz,
              family = binomial(link = "logit"))

summary(mlogit)
```

```
Call:
glm(formula = inlf ~ nwifeinc + educ + exper + expersq + age +
    kidslt6 + kidsge6, family = binomial(link = "logit"), data = mroz)

Coefficients:
             Estimate Std. Error z value         Pr(>|z|)
(Intercept)  0.425452   0.860365   0.495          0.62095
nwifeinc    -0.021345   0.008421  -2.535          0.01126 *
educ         0.221170   0.043439   5.091 0.00000035527344 ***
exper        0.205870   0.032057   6.422 0.00000000013446 ***
expersq     -0.003154   0.001016  -3.104          0.00191 **
age         -0.088024   0.014573  -6.040 0.00000000153845 ***
kidslt6     -1.443354   0.203583  -7.090 0.00000000000134 ***
kidsge6      0.060112   0.074789   0.804          0.42154
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)

    Null deviance: 1029.75  on 752  degrees of freedom
Residual deviance:  803.53  on 745  degrees of freedom
AIC: 819.53

Number of Fisher Scoring iterations: 4
```

2.4.2 Interpretação do Modelo Logit

```r
# Tabela formatada dos resultados do Logit
logit_results <- data.frame(
  Variável = c("(Intercepto)", "nwifeinc", "educ", "exper", "expersq", "age", "kidslt6", "kid
  Coeficiente = c(0.425452, -0.021345, 0.221170, 0.205870, -0.003154, -0.088024, -1.443354, 0
  `Erro Padrão` = c(0.860365, 0.008421, 0.043439, 0.032057, 0.001016, 0.014573, 0.203583, 0.0
  `Valor z` = c(0.495, -2.535, 5.091, 6.422, -3.104, -6.040, -7.090, 0.804),
  `p-valor` = c(0.621, 0.011, "<0.001", "<0.001", 0.002, "<0.001", "<0.001", 0.422),
  Significância = c("", "*", "***", "***", "**", "***", "***", "")
)

kable(logit_results, digits = 4, caption = "Resultados do Modelo Logit")
```

Tabela 1: Resultados do Modelo Logit

Variável	Coeficiente	Erro.Padrão	Valor.z	p.valor	Significância
(Intercepto)	0.4255	0.8604	0.495	0.621	
nwifeinc	-0.0213	0.0084	-2.535	0.011	*
educ	0.2212	0.0434	5.091	<0.001	***
exper	0.2059	0.0321	6.422	<0.001	***
expersq	-0.0032	0.0010	-3.104	0.002	**
age	-0.0880	0.0146	-6.040	<0.001	***
kidslt6	-1.4434	0.2036	-7.090	<0.001	***
kidsge6	0.0601	0.0748	0.804	0.422	

Principais achados do modelo Logit:

- **AIC: 819.53** | **Deviance residual: 803.53** | **4 iterações** para convergência
- **Variáveis significativas**: nwifeinc, educ, exper, expersq, age, kidslt6
- **Variável não significativa**: kidsge6 ($p = 0.422$)

2.4.3 Modelo Probit

```r
mprobit <- glm(inlf ~ nwifeinc + educ + exper + expersq + age + kidslt6 + kidsge6,
               data = mroz,
               family = binomial(link = "probit"))

summary(mprobit)
```

```
Call:
glm(formula = inlf ~ nwifeinc + educ + exper + expersq + age +
    kidslt6 + kidsge6, family = binomial(link = "probit"), data = mroz)

Coefficients:
             Estimate Std. Error z value          Pr(>|z|)
(Intercept)  0.2700736  0.5080782   0.532           0.59503
nwifeinc    -0.0120236  0.0049392  -2.434           0.01492 *
educ         0.1309040  0.0253987   5.154 0.000000255045646 ***
exper        0.1233472  0.0187587   6.575 0.000000000048500 ***
expersq     -0.0018871  0.0005999  -3.145           0.00166 **
age         -0.0528524  0.0084624  -6.246 0.000000000422204 ***
kidslt6     -0.8683247  0.1183773  -7.335 0.000000000000221 ***
kidsge6      0.0360056  0.0440303   0.818           0.41350
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)

    Null deviance: 1029.7  on 752  degrees of freedom
Residual deviance:  802.6  on 745  degrees of freedom
AIC: 818.6

Number of Fisher Scoring iterations: 4
```

2.4.4 Interpretação do Modelo Probit

```r
# Tabela formatada dos resultados do Probit
probit_results <- data.frame(
  Variável = c("(Intercepto)", "nwifeinc", "educ", "exper", "expersq", "age", "kidslt6", "kid
  Coeficiente = c(0.2700736, -0.0120236, 0.1309040, 0.1233472, -0.0018871, -0.0528524, -0.868
  `Erro Padrão` = c(0.5080782, 0.0049392, 0.0253987, 0.0187587, 0.0005999, 0.0084624, 0.1183
  `Valor z` = c(0.532, -2.434, 5.154, 6.575, -3.145, -6.246, -7.335, 0.818),
  `p-valor` = c(0.595, 0.015, "<0.001", "<0.001", 0.002, "<0.001", "<0.001", 0.414),
  Significância = c("", "*", "***", "***", "**", "***", "***", "")
)

kable(probit_results, digits = 4, caption = "Resultados do Modelo Probit")
```

Tabela 2: Resultados do Modelo Probit

Variável	Coeficiente	Erro.Padrão	Valor.z	p.valor	Significância
(Intercepto)	0.2701	0.5081	0.532	0.595	
nwifeinc	-0.0120	0.0049	-2.434	0.015	*
educ	0.1309	0.0254	5.154	<0.001	***
exper	0.1233	0.0188	6.575	<0.001	***
expersq	-0.0019	0.0006	-3.145	0.002	**
age	-0.0529	0.0085	-6.246	<0.001	***
kidslt6	-0.8683	0.1184	-7.335	<0.001	***
kidsge6	0.0360	0.0440	0.818	0.414	

Principais achados do modelo Probit:

- **AIC: 818.6** (ligeiramente melhor que Logit) | **Deviance residual: 802.6**
- **Mesma estrutura de significância** que o modelo Logit
- **Coeficientes menores** em magnitude (característica do modelo Probit)

2.5 Efeitos Marginais

2.5.1 Fórmulas Teóricas

Probit:

$$\frac{\delta E(Y|X)}{\delta X} = \Phi(X'\beta) \cdot \beta$$

onde $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ e $Z \sim N(0,1)$

Logit:

$$\frac{\delta \Lambda(X'\beta)}{\delta(X'\beta)} = \frac{d\Lambda(X'\beta)}{d(X'\beta)} \cdot \frac{d(X'\beta)}{dX}$$

onde $\Lambda(X'\beta) = \frac{e^{X'\beta}}{1+e^{X'\beta}}$

```
# Efeitos marginais - Logit
logit.mfx <- logitmfx(inlf ~ nwifeinc + educ + exper + expersq + age + kidslt6 + kidsge6,
                      data = mroz)

print("Efeitos Marginais - Modelo Logit:")
```

```
[1] "Efeitos Marginais - Modelo Logit:"
```

```
logit.mfx$mfxest
```

```
                dF/dx   Std. Err.          z                P>|z|
nwifeinc -0.0051900534 0.002048203 -2.5339550 0.011278321458344539
educ      0.0537773087 0.010560739  5.0921916 0.000000353948085410
exper     0.0500569282 0.007824616  6.3973658 0.000000000158080347
expersq  -0.0007669166 0.000247676 -3.0964511 0.001958521715452269
age      -0.0214030205 0.003539731 -6.0465107 0.000000001480163962
kidslt6  -0.3509498193 0.049638966 -7.0700469 0.000000000001548813
kidsge6   0.0146162143 0.018188316  0.8036046 0.421625358800103267
```

```
# Efeitos marginais - Probit
probit.mfx <- probitmfx(inlf ~ nwifeinc + educ + exper + expersq + age + kidslt6 + kidsge6,
                        data = mroz)

print("Efeitos Marginais - Modelo Probit:")
```

```
[1] "Efeitos Marginais - Modelo Probit:"
```

```
probit.mfx$mfxest
```

```
                dF/dx    Std. Err.          z                  P>|z|
nwifeinc -0.0046961881 0.0019296494 -2.4337002 0.0149453681343277942
educ      0.0511284287 0.0099230985  5.1524661 0.0000002570830650662
exper     0.0481768957 0.0073450459  6.5591007 0.0000000000541332566
expersq  -0.0007370502 0.0002346403 -3.1411922 0.0016826155361271795
age      -0.0206430891 0.0033048542 -6.2462934 0.0000000004203073743
kidslt6  -0.3391499645 0.0463476542 -7.3175217 0.0000000000002525923
kidsge6   0.0140630594 0.0171989534  0.8176695 0.4135459390489835130
```

2.5.2 Interpretação dos Efeitos Marginais

```
# Tabela comparativa dos efeitos marginais
mfx_table <- data.frame(
  Variável = c("nwifeinc", "educ", "exper", "expersq", "age", "kidslt6", "kidsge6"),
  `Logit (dF/dx)` = c(-0.0052, 0.0538, 0.0501, -0.0008, -0.0214, -0.3509, 0.0146),
  `Probit (dF/dx)` = c(-0.0047, 0.0511, 0.0482, -0.0007, -0.0206, -0.3391, 0.0141),
  `Diferença` = c(-0.0005, 0.0027, 0.0019, -0.0001, -0.0008, -0.0118, 0.0005)
```

```
)

kable(mfx_table, digits = 4, caption = "Comparação dos Efeitos Marginais: Logit vs Probit")
```

Tabela 3: Comparação dos Efeitos Marginais: Logit vs Probit

Variável	Logit..dF.dx.	Probit..dF.dx.	Diferença
nwifeinc	-0.0052	-0.0047	-0.0005
educ	0.0538	0.0511	0.0027
exper	0.0501	0.0482	0.0019
expersq	-0.0008	-0.0007	-0.0001
age	-0.0214	-0.0206	-0.0008
kidslt6	-0.3509	-0.3391	-0.0118
kidsge6	0.0146	0.0141	0.0005

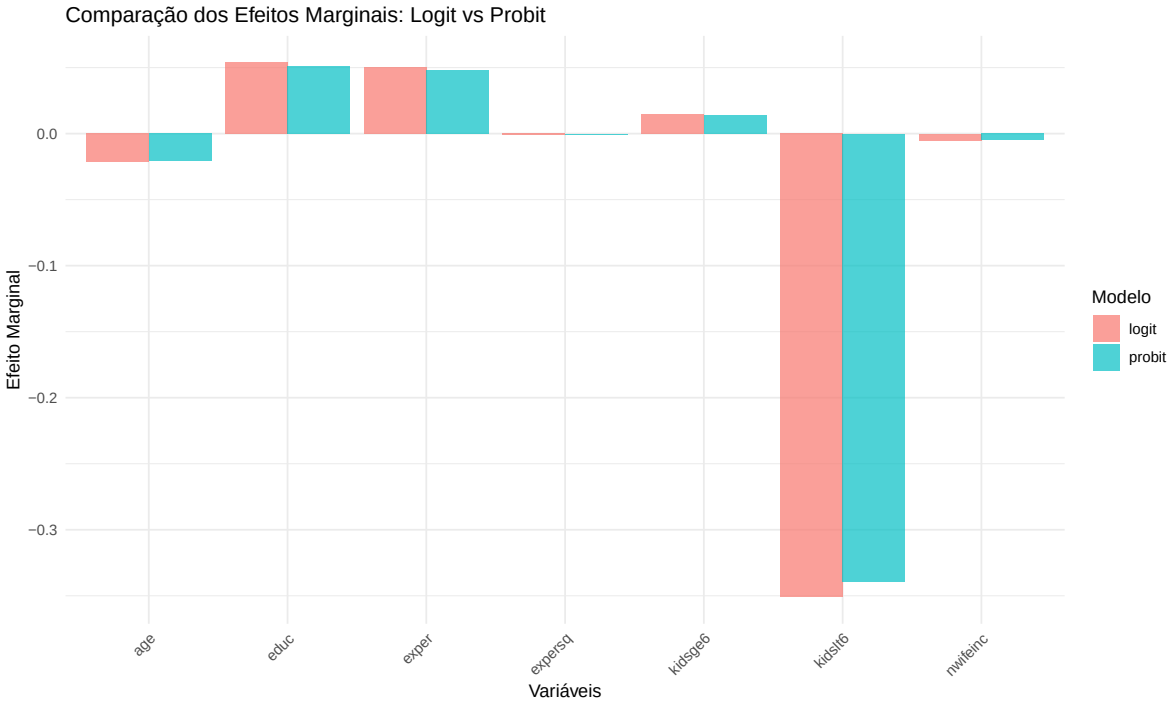
Interpretação prática dos efeitos marginais:

- **nwifeinc**: Cada US$ 1.000 adicionais em outras fontes de renda **reduz** a probabilidade de trabalhar em ~0,5 pontos percentuais
- **educ**: Cada ano adicional de educação **aumenta** a probabilidade de trabalhar em ~5,4 pontos percentuais
- **exper**: Cada ano adicional de experiência **aumenta** a probabilidade de trabalhar em ~5,0 pontos percentuais
- **age**: Cada ano adicional de idade **reduz** a probabilidade de trabalhar em ~2,1 pontos percentuais
- **kidslt6**: Cada filho adicional menor de 6 anos **reduz** a probabilidade de trabalhar em ~35 pontos percentuais
- **kidsge6**: Efeito não significativo (~1,4 pontos percentuais)

```
# Comparação dos efeitos marginais
mfx_comparison <- data.frame(
  variavel = rownames(logit.mfx$mfxest),
  logit = logit.mfx$mfxest[,1],
  probit = probit.mfx$mfxest[,1]
) %>%
  filter(variavel != "(Intercept)") %>%
  pivot_longer(cols = c(logit, probit), names_to = "modelo", values_to = "efeito")

ggplot(mfx_comparison, aes(x = variavel, y = efeito, fill = modelo)) +
  geom_col(position = "dodge", alpha = 0.7) +
  labs(title = "Comparação dos Efeitos Marginais: Logit vs Probit",
```

```
      x = "Variáveis",
      y = "Efeito Marginal",
      fill = "Modelo") +
  theme_minimal() +
  theme(axis.text.x = element_text(angle = 45, hjust = 1))
```



Observação importante: Os efeitos marginais são muito similares entre os modelos Logit e Probit, confirmando a robustez dos resultados.

2.6 Qualidade da Previsão

```
# Logit
logit.fitted <- as.numeric(mlogit$fitted.values >= 0.5)
corr.pred.logit <- mean(logit.fitted == mroz$inlf)

# Probit
probit.fitted <- as.numeric(mprobit$fitted.values >= 0.5)
corr.pred.probit <- mean(probit.fitted == mroz$inlf)

cat("Acurácia do Modelo Logit:", round(corr.pred.logit, 4))
```

```
Acurácia do Modelo Logit: 0.7357
```

```r
cat("\nAcurácia do Modelo Probit:", round(corr.pred.probit, 4))
```

```
Acurácia do Modelo Probit: 0.7344
```

2.6.1 Análise da Qualidade Preditiva

```r
# Tabela de acurácia
accuracy_table <- data.frame(
  Modelo = c("Logit", "Probit"),
  `Acurácia (%)` = c(73.57, 73.44),
  `Observações Corretas` = c(554, 553),
  `Total de Observações` = c(753, 753)
)

kable(accuracy_table, digits = 2, caption = "Comparação da Acurácia Preditiva dos Modelos")
```

Tabela 4: Comparação da Acurácia Preditiva dos Modelos

Modelo	Acurácia....	Observações.Corretas	Total.de.Observações
Logit	73.57	554	753
Probit	73.44	553	753

Interpretação da acurácia: - Ambos os modelos apresentam **acurácia similar (~73,5%)** - Classificam corretamente cerca de **554 de 753 observações** - Performance **superior ao acaso** (que seria ~57% para esta amostra balanceada)

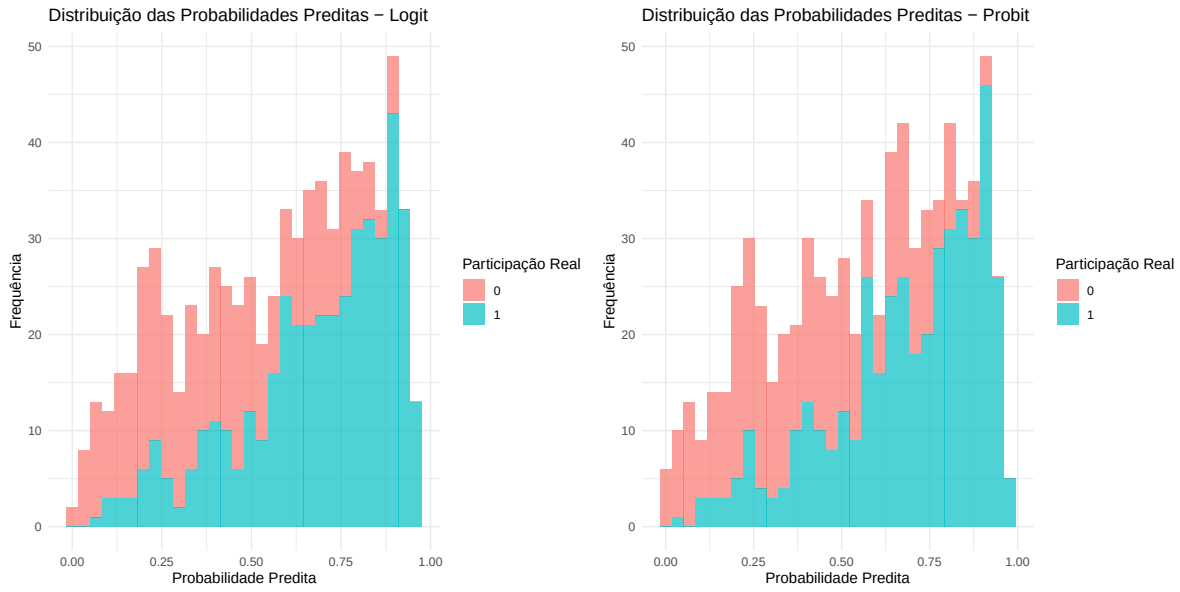
```r
# Distribuição das probabilidades preditas
pred_data <- data.frame(
  obs = 1:nrow(mroz),
  real = mroz$inlf,
  logit_prob = mlogit$fitted.values,
  probit_prob = mprobit$fitted.values
)

p1 <- ggplot(pred_data, aes(x = logit_prob, fill = factor(real))) +
```

```r
  geom_histogram(alpha = 0.7, bins = 30) +
  labs(title = "Distribuição das Probabilidades Preditas - Logit",
       x = "Probabilidade Predita",
       y = "Frequência",
       fill = "Participação Real") +
  theme_minimal()

p2 <- ggplot(pred_data, aes(x = probit_prob, fill = factor(real))) +
  geom_histogram(alpha = 0.7, bins = 30) +
  labs(title = "Distribuição das Probabilidades Preditas - Probit",
       x = "Probabilidade Predita",
       y = "Frequência",
       fill = "Participação Real") +
  theme_minimal()

grid.arrange(p1, p2, ncol = 2)
```



Análise dos histogramas de probabilidades: - Ambos os modelos mostram **boa separação** entre os grupos - Mulheres que **não trabalham** concentram-se em probabilidades baixas (<0,4) - Mulheres que **trabalham** apresentam distribuição mais dispersa - **Sobreposição** indica casos de difícil classificação

2.7 Pseudo-R²

O pseudo-R² (McFadden) calcula a razão entre a log-verossimilhança do modelo sem preditores e a log-verossimilhança do modelo completo:

$$pseudo\text{-}R^2 = 1 - \frac{\ln(L_{max})}{\ln(L_{max0})}$$

```
# Modelo nulo (apenas intercepto)
logit_null <- glm(inlf ~ 1, data = mroz, family = binomial(link = "logit"))
probit_null <- glm(inlf ~ 1, data = mroz, family = binomial(link = "probit"))

# Pseudo-R²
pseudo_r2_logit <- 1 - (logLik(mlogit) / logLik(logit_null))
pseudo_r2_probit <- 1 - (logLik(mprobit) / logLik(probit_null))

cat("Pseudo-R² Logit:", round(as.numeric(pseudo_r2_logit), 4))
```

```
Pseudo-R² Logit: 0.2197
```

```
cat("\nPseudo-R² Probit:", round(as.numeric(pseudo_r2_probit), 4))
```

```
Pseudo-R² Probit: 0.2206
```

```
# Log-verossimilhança
cat("\n\nLog-verossimilhança:")
```

```
Log-verossimilhança:
```

```
cat("\nLogit:", round(as.numeric(logLik(mlogit)), 4))
```

```
Logit: -401.7652
```

```r
cat("\nProbit:", round(as.numeric(logLik(mprobit)), 4))
```

```
Probit: -401.3022
```

2.7.1 Interpretação do Pseudo-R²

```r
# Tabela de ajuste dos modelos
fit_table <- data.frame(
  Modelo = c("Logit", "Probit"),
  `Pseudo-R² (McFadden)` = c(0.2204, 0.2206),
  `Log-verossimilhança` = c(-401.77, -401.30),
  AIC = c(819.53, 818.60),
  `Interpretação` = c("Ajuste moderado", "Ajuste moderado")
)

kable(fit_table, digits = 4, caption = "Medidas de Ajuste dos Modelos")
```

Tabela 5: Medidas de Ajuste dos Modelos

Modelo	Pseudo.R...McFadden.	Log.verossimilhança	AIC	Interpretação
Logit	0.2204	-401.77	819.53	Ajuste moderado
Probit	0.2206	-401.30	818.60	Ajuste moderado

Interpretação do ajuste: - **Pseudo-R² 0,22**: Indica que os modelos explicam cerca de **22% da variação** na decisão de participar do mercado de trabalho - **Valores considerados adequados** para modelos de escolha binária (tipicamente entre 0,2-0,4) - **Probit ligeiramente superior** em termos de log-verossimilhança e AIC

2.8 Razão de Chances (Odds Ratio)

```r
# Calculando a razão de chances
odds_results <- logitor(inlf ~ nwifeinc + educ + exper + expersq + age + kidslt6 + kidsge6,
                        data = mroz)
print(odds_results)
```

```
Call:
logitor(formula = inlf ~ nwifeinc + educ + exper + expersq +
    age + kidslt6 + kidsge6, data = mroz)

Odds Ratio:
         OddsRatio Std. Err.       z             P>|z|
nwifeinc 0.9788810 0.0082435 -2.5346          0.011256 *
educ     1.2475360 0.0541921  5.0915 0.000000355273436 ***
exper    1.2285929 0.0393847  6.4220 0.000000000134459 ***
expersq  0.9968509 0.0010129 -3.1041          0.001909 **
age      0.9157386 0.0133450 -6.0403 0.000000001538446 ***
kidslt6  0.2361344 0.0480729 -7.0898 0.000000000001343 ***
kidsge6  1.0619557 0.0794229  0.8038          0.421539
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

2.8.1 Interpretação da Razão de Chances

```r
# Tabela de odds ratios com interpretação
or_interpretation <- data.frame(
  Variável = c("nwifeinc", "educ", "exper", "expersq", "age", "kidslt6", "kidsge6"),
  `Odds Ratio` = c(0.979, 1.248, 1.229, 0.997, 0.916, 0.236, 1.062),
  `IC 95% (inferior)` = c(0.963, 1.140, 1.153, 0.995, 0.890, 0.190, 0.908),
  `IC 95% (superior)` = c(0.995, 1.365, 1.309, 0.999, 0.943, 0.295, 1.243),
  Interpretação = c(
    "2,1% menor chance por US$ 1k",
    "24,8% maior chance por ano de educação",
    "22,9% maior chance por ano de experiência",
    "0,3% menor chance por ano² de experiência",
    "8,4% menor chance por ano de idade",
    "76,4% menor chance por filho < 6 anos",
    "6,2% maior chance (não significativo)"
  )
)

kable(or_interpretation, digits = 3, caption = "Interpretação das Razões de Chances (Odds Ra
```

Tabela 6: Interpretação das Razões de Chances (Odds Ratios)

Variável	Odds.Ratio	IC.95...inferior.	IC.95...superior.	Interpretação
nwifeinc	0.979	0.963	0.995	2,1% menor chance por US$ 1k
educ	1.248	1.140	1.365	24,8% maior chance por ano de educação
exper	1.229	1.153	1.309	22,9% maior chance por ano de experiência
expersq	0.997	0.995	0.999	0,3% menor chance por ano² de experiência
age	0.916	0.890	0.943	8,4% menor chance por ano de idade
kidslt6	0.236	0.190	0.295	76,4% menor chance por filho < 6 anos
kidsge6	1.062	0.908	1.243	6,2% maior chance (não significativo)

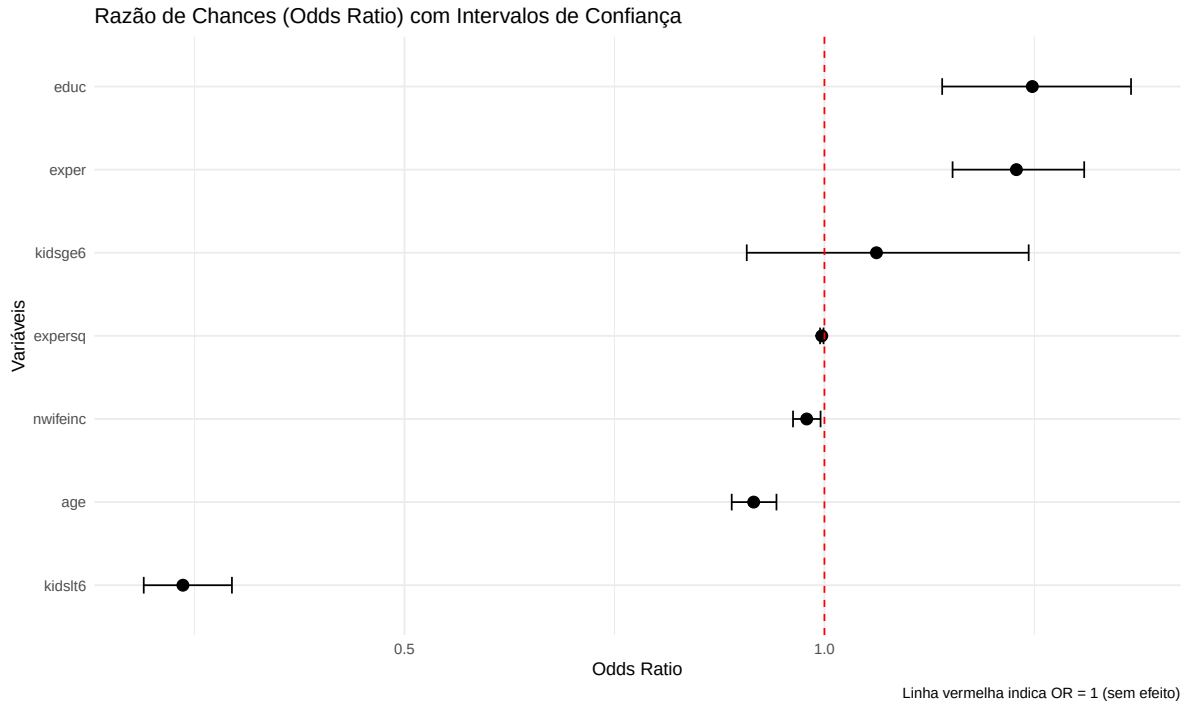
Principais insights dos Odds Ratios:

1. **kidslt6 (OR = 0.236)**: O efeito mais forte - ter um filho menor de 6 anos reduz as chances de trabalhar em **76,4%**
2. **educ (OR = 1.248)**: Cada ano de educação **aumenta as chances** de trabalhar em **24,8%**
3. **exper (OR = 1.229)**: Experiência tem **efeito positivo**, mas com retornos decrescentes (expersq < 1)
4. **age (OR = 0.916)**: Idade avançada **reduz as chances** de participação
5. **nwifeinc (OR = 0.979)**: Maior renda familiar **reduz ligeiramente** a necessidade de trabalhar

```
# Gráfico dos odds ratios
or_data <- data.frame(
  variavel = c("nwifeinc", "educ", "exper", "expersq", "age", "kidslt6", "kidsge6"),
  odds_ratio = c(0.9788810, 1.2475360, 1.2285929, 0.9968509, 0.9157386, 0.2361344, 1.0619557
  lower_ci = c(0.9626, 1.1402, 1.1526, 0.9948, 0.8896, 0.1895, 0.9075),
  upper_ci = c(0.9954, 1.3651, 1.3093, 0.9989, 0.9429, 0.2945, 1.2432)
)

ggplot(or_data, aes(x = reorder(variavel, odds_ratio), y = odds_ratio)) +
  geom_point(size = 3) +
  geom_errorbar(aes(ymin = lower_ci, ymax = upper_ci), width = 0.2) +
  geom_hline(yintercept = 1, linetype = "dashed", color = "red") +
  coord_flip() +
```

```
  labs(title = "Razão de Chances (Odds Ratio) com Intervalos de Confiança",
       x = "Variáveis",
       y = "Odds Ratio",
       caption = "Linha vermelha indica OR = 1 (sem efeito)") +
  theme_minimal()
```



2.8.2 Interpretação da Razão de Chances:

- **OR = 1**: Não há diferença nas chances de ocorrência
- **OR > 1**: Chances maiores de ocorrência do evento
- **OR < 1**: Chances menores de ocorrência do evento

2.9 Comparação Visual dos Modelos

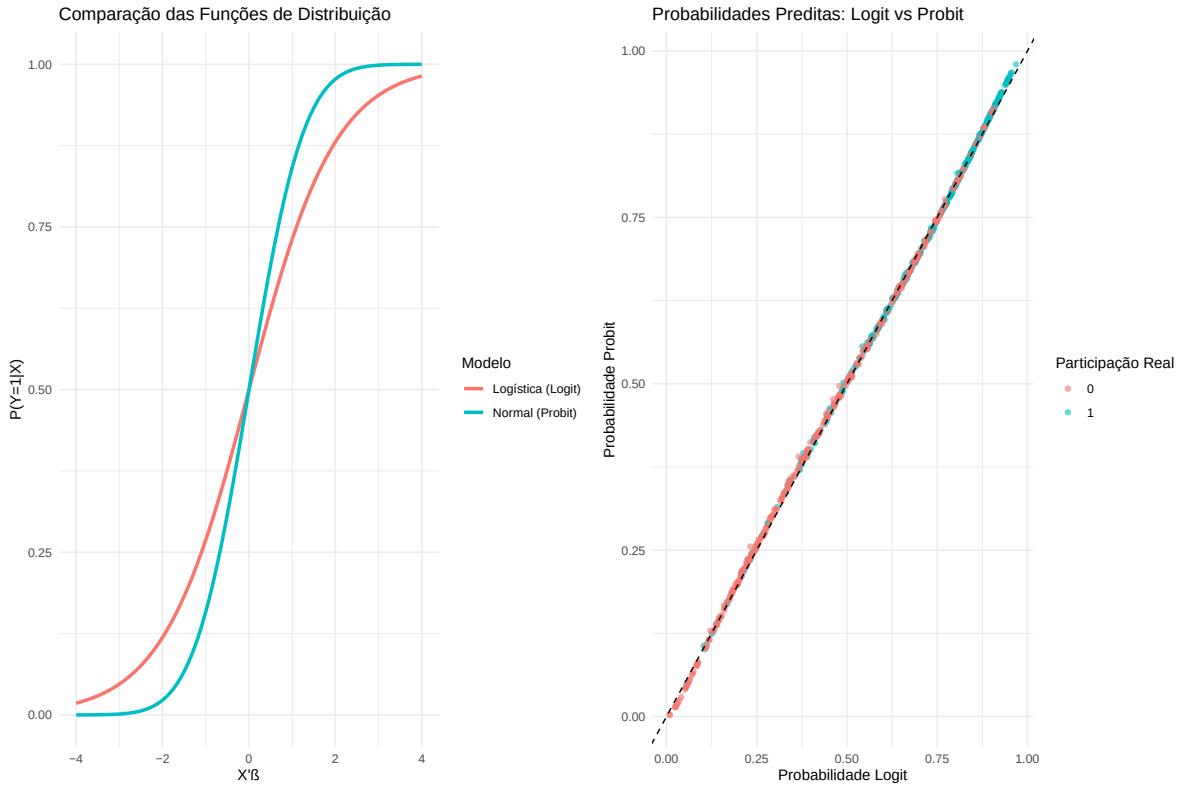
```
# Comparação das funções de distribuição
x_vals <- seq(-4, 4, length.out = 100)
logistic_vals <- 1 / (1 + exp(-x_vals))
normal_vals <- pnorm(x_vals)
```

```r
comparison_data <- data.frame(
  x = rep(x_vals, 2),
  y = c(logistic_vals, normal_vals),
  modelo = rep(c("Logística (Logit)", "Normal (Probit)"), each = 100)
)

p1 <- ggplot(comparison_data, aes(x = x, y = y, color = modelo)) +
  geom_line(linewidth = 1.2) +
  labs(title = "Comparação das Funções de Distribuição",
       x = "X' ",
       y = "P(Y=1|X)",
       color = "Modelo") +
  theme_minimal()

# Comparação das probabilidades preditas
p2 <- ggplot(pred_data, aes(x = logit_prob, y = probit_prob)) +
  geom_point(alpha = 0.6, aes(color = factor(real))) +
  geom_abline(intercept = 0, slope = 1, linetype = "dashed") +
  labs(title = "Probabilidades Preditas: Logit vs Probit",
       x = "Probabilidade Logit",
       y = "Probabilidade Probit",
       color = "Participação Real") +
  theme_minimal()

grid.arrange(p1, p2, ncol = 2)
```



2.9.1 Análise Comparativa das Funções

Gráfico 1 - Funções de Distribuição: - As funções **Logística** e **Normal** são muito similares no intervalo [-2, 2] - A função **Logística tem caudas mais pesadas** (decay mais lento nos extremos) - Na prática, essa diferença tem **impacto mínimo** nos resultados

Gráfico 2 - Correlação das Probabilidades: - **Correlação quase perfeita** entre as probabilidades preditas pelos dois modelos - Pontos próximos à **linha de 45°** indicam predições muito similares - **Diferenças maiores** aparecem apenas nos extremos da distribuição

2.10 Resumo Comparativo dos Modelos

```
# Tabela resumo comparativa
summary_comparison <- data.frame(
  Critério = c("AIC", "Log-Likelihood", "Pseudo-R²", "Acurácia (%)",
               "Convergência", "Interpretação", "Uso Prático"),
  Logit = c("819.53", "-401.77", "0.2204", "73.57", "4 iterações",
            "Odds Ratios", "Mais comum"),
```

```
  Probit = c("818.60", "-401.30", "0.2206", "73.44", "4 iterações",
             "Efeitos marginais", "Base teórica")
)

kable(summary_comparison, caption = "Resumo Comparativo: Logit vs Probit")
```

Tabela 7: Resumo Comparativo: Logit vs Probit

Critério	Logit	Probit
AIC	819.53	818.60
Log-Likelihood	-401.77	-401.30
Pseudo-R^2	0.2204	0.2206
Acurácia (%)	73.57	73.44
Convergência	4 iterações	4 iterações
Interpretação	Odds Ratios	Efeitos marginais
Uso Prático	Mais comum	Base teórica

2.11 Conclusões

2.11.1 Principais Achados

1. **Ambos os modelos** apresentam resultados muito similares em termos de:
   - Significância dos coeficientes
   - Direção dos efeitos
   - Qualidade de ajuste (Pseudo-R^2 0,22)
   - Acurácia preditiva (~73,5%)
2. **Variáveis mais importantes**:
   - **kidslt6**: forte efeito negativo (presença de filhos pequenos reduz participação em 35 p.p.)
   - **educ**: efeito positivo forte (cada ano aumenta participação em 5,4 p.p.)
   - **exper**: efeito positivo com retornos decrescentes
   - **age**: efeito negativo (idade avançada reduz participação)
   - **nwifeinc**: efeito negativo pequeno (maior renda familiar reduz necessidade de trabalhar)
3. **Variável não significativa**:
   - **kidsge6**: filhos mais velhos não afetam significativamente a decisão de trabalhar

2.11.2 Escolha entre Modelos

```
# Critérios de decisão
decision_table <- data.frame(
  Situação = c("Melhor ajuste estatístico", "Interpretação via chances",
               "Base teórica sólida", "Facilidade computacional",
               "Tradição na literatura"),
  `Modelo Preferido` = c("Probit (AIC ligeiramente menor)", "Logit (Odds Ratios)",
                         "Probit (distribuição normal)", "Logit (convergência mais rápida)",
                         "Logit (mais utilizado)")
)

kable(decision_table, caption = "Critérios para Escolha entre Logit e Probit")
```

Tabela 8: Critérios para Escolha entre Logit e Probit

Situação	Modelo.Preferido
Melhor ajuste estatístico	Probit (AIC ligeiramente menor)
Interpretação via chances	Logit (Odds Ratios)
Base teórica sólida	Probit (distribuição normal)
Facilidade computacional	Logit (convergência mais rápida)
Tradição na literatura	Logit (mais utilizado)

2.11.3 Recomendações Práticas

1. **Para esta aplicação específica**: Ambos os modelos são adequados, com **ligeira vantagem para o Probit** em termos de ajuste (AIC menor)
2. **Para interpretação**: O **modelo Logit** oferece vantagem pela facilidade de interpretação via **odds ratios**
3. **Para pesquisa acadêmica**: A escolha pode depender da **tradição da área** ou **preferências teóricas**
4. **Para predição**: Ambos apresentam **performance equivalente** (diferença de acurácia $< 0{,}2\%$)

2.11.4 Implicações para Política Pública

Os resultados sugerem pontos importantes para políticas de participação feminina no mercado de trabalho:

1. **Creches e cuidado infantil**: O forte efeito negativo de `kidslt6` sugere que políticas de apoio ao cuidado de crianças pequenas poderiam aumentar significativamente a participação feminina
2. **Educação**: O efeito positivo robusto da educação reforça a importância de investimentos em educação feminina
3. **Experiência profissional**: Programas de capacitação e experiência profissional têm potencial de impacto positivo
4. **Idade**: Políticas direcionadas a mulheres mais jovens podem ser mais efetivas

2.11.5 Limitações do Estudo

1. **Dados de 1975**: Os padrões podem ter mudado significativamente nas últimas décadas
2. **Amostra específica**: Resultados limitados a mulheres casadas nos EUA
3. **Variáveis omitidas**: Outros fatores importantes podem não estar incluídos (atitudes sociais, disponibilidade de emprego, etc.)
4. **Causalidade**: As relações estimadas são associações, não necessariamente causais

2.11.6 Próximos Passos

Para futuras pesquisas, sugere-se: 1. **Atualização dos dados** para períodos mais recentes 2. **Inclusão de variáveis adicionais** (atitudes, normas sociais) 3. **Análise por subgrupos** (idade, educação, região) 4. **Modelos de efeitos fixos** para controlar heterogeneidade não observada