算法竞赛中的数学问题——例题

东北育才学校　张昕海

February 5, 2018

Contents

1 因数与倍数

1.1 哈希函数

给定正整数 h，求有多少对非负整数 (x,y) 满足 $h=xy+x+y$.

T 组数据.

$T\leqslant 10,000$，$h\leqslant 10^8$.

整理得 $h+1=(x+1)(y+1)$. 即求 $h+1$ 的正因子个数.

欧拉筛预处理得到 $1\sim 10^4$ 之间的所有质数，进而得到 $h+1$ 的质因子分解式.

如果用所有找到的质数试除之后 $h>1$，则剩下的 h 必为质数（即原 h 的最大质因子）.

注意到若 $h+1=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，则 $h+1$ 的正因子个数为 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$.

1.2 [UOJ48] 核聚变反应强度

给出 n 个正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，计算 a_1 与每个 a_i 的次大公约数（能同时整除 x,y 的正整数中第二大的数），如果没有输出 -1.

$n\leqslant 10^5$，$a_i\leqslant 10^{12}$.

对于两个正整数 a_1 和 a_i，它们的公约数必为 $\gcd(a_1,a_i)$ 的公约数. 即求 $\gcd(a_1,a_i)$ 的次大公约数.

欧拉筛预处理出质数数列.

对于每个 a_i，欧几里得算法求出 $\gcd(a_1,a_i)$，之后从小到大用质数试除，找到最小的 $p\mid\gcd(a_1,a_i)$，输出 $\dfrac{\gcd(a_1,a_i)}{p}$.

1.3 [BZOJ2299] 向量

给你一对数 a,b，你可以任意使用 $(a,b),(a,-b),(-a,b),(-a,-b),(b,a),(b,-a),(-b,a),(-b,-a)$ 这些向量，问你能不能拼出另一个向量 (x,y).

T 组数据.

$T\leqslant 50,000$，$-2\times 10^9\leqslant a,b,x,y\leqslant 2\times 10^9$.

相当于有三种操作：

- 给 x 或 y 加上或减去 $2a$ 或 $2b$.
- `x=x+a,y=y+b`.
- `x=x+b,y=y+a`.

后两种操作可以使用 0 次或 1 次.

枚举后两种操作是否使用，之后用裴蜀定理判定能否拼成.

1.4 [POJ3696] The Luckiest Number

对于给定的整数 L，找出 L 能整除最短的全 8 序列的长度.

注：全 8 序列为形如 $\underbrace{888\cdots 8}_{n\text{个}8}$.

多组数据.

$1\leqslant L\leqslant 2\times 10^9$.

$\underbrace{888\cdots 8}_{n\text{个}8}=\dfrac{8}{9}\left(10^n-1\right)=L\cdot p$，即 $10^x-1=\dfrac{9Lp}{8}$.

设 $m=\dfrac{9L}{\gcd(L,8)}$，则存在 p' 使得 $10^x-1=mp'$，即求 $10^x\equiv 1\pmod m$ 的最小解.

当 $\gcd(10,m)\neq 1$ 时，无解.

当 $\gcd(10,m)=1$ 时，由于 $10^{\varphi(m)}\equiv 1\pmod m$，只需考虑 $\varphi(m)$ 的因子.

对 $\varphi(m)$ 质因数分解.

对每个质因子 p_i，执行 $n=n/p_i$ 直到以下情形之一被满足：(1) $p_i \nmid n$；(2) $x^n \not\equiv 1 \pmod{m}$.
考虑过全部质因子后即得解.

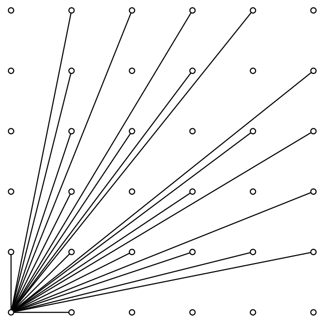
2 欧拉函数

2.1 [BZOJ2818] Gcd

给定整数 N，求 $1 \leqslant x,y \leqslant N$ 且 $\gcd(x,y)$ 为素数的数对 (x,y) 有多少对？
$1 \leqslant N \leqslant 10^7$.
欧拉筛法预处理质数数列及 $\varphi(n)$ 前缀和.
题目等价于求 $1 \leqslant x,y \leqslant \left\lfloor \dfrac{N}{p} \right\rfloor$ 且 $\gcd(x,y)=1$ 的数对的个数，其中 p 为质数.

2.2 [BZOJ2190] 仪仗队

一个 $N \times N$ 的方阵，问从最后方的点能看到多少个点.



$1 \leqslant N \leqslant 40,000$.
满足以下情形之一的点可被看到：
(1) 该点为 $(0,1),(1,0),(1,1)$ 之一；
(2) $2 \leqslant x,y \leqslant n-1$ 且 $\gcd(x,y)=1$.
所求即 $3+\sum\limits_{i=2}^{n-1}\varphi(i)$.
欧拉筛求欧拉函数，求和.

2.3 [BZOJ3884] 上帝与集合的正确用法

求 $2^{2^{2^{\cdots}}} \bmod p$ 的值.
T 组数据.
$T \leqslant 1,000$，$1 \leqslant p \leqslant 10^7$.
欧拉筛预处理欧拉函数值.
设 $p=2^k \cdot q$，其中 q 为奇数. 则 $2^{2^{2^{\cdots}}} \bmod p = 2^k\left(2^{2^{2^{\cdots}}-k} \bmod q\right)$.
由欧拉定理 $2^k\left(2^{2^{2^{\cdots}}-k} \bmod q\right) = 2^k\left[2^{\left(2^{2^{\cdots}}-k\right) \bmod \varphi(q)} \bmod q\right]$.
递归计算，直至 $q=1$.

2.4 离散对数问题

已知 a,b,n，解同余方程 $a^x \equiv b \pmod{n}$，其中 $\gcd(a,n)=1$.
由欧拉定理，$a^x \equiv a^{x+\varphi(n)} \pmod{n}$. 因此只需枚举 $0 \leqslant x < \varphi(n)$.

分块优化. 设 $x = p\lceil\varphi(n)\rceil - q$，这里 $0 < p,q \leqslant \lceil\varphi(n)\rceil$.

则 $a^{p\lceil\varphi(n)\rceil - q} \equiv b \pmod n$ 等价于 $a^{p\lceil\varphi(n)\rceil} \equiv b \cdot a^q \pmod n$.

枚举 $0 < q \leqslant \lceil\varphi(n)\rceil$，用 hash 表记录余数与 q 值的关系.

再枚举 p，找到使 x 最小的 p,q.

以上算法也被称为大步小步法 (BSGS).

3 三分法

3.1 [BZOJ1857] 传送带

在二维平面上有两个线段型传送带 AB 和 CD，小明在传送带 AB 上的速度为 P，在传送带 CD 上的速度为 Q，在平面其余位置的速度为 R，求小明从 A 走到 B 需要的最短时间.

$1 \leqslant P,Q,R \leqslant 10$，各点坐标 $\leqslant 1,000$.

三分套三分.