

# NOIP 提高班——数学专项练习讲评

东北育才学校 张昕海

February 5, 2018

① 哈希函数

② 向量

③ 仪仗队

# 1 哈希函数

## 2 向量

## 3 仪仗队

# 哈希函数

给定正整数  $h$ , 求有多少对非负整数  $(x,y)$  满足  $h = xy + x + y$ .

# 哈希函数

给定正整数  $h$ , 求有多少对非负整数  $(x,y)$  满足  $h = xy + x + y$ .  
 $T$  组数据.

# 哈希函数

给定正整数  $h$ , 求有多少对非负整数  $(x, y)$  满足  $h = xy + x + y$ .  
 $T$  组数据.

$T \leq 10,000, h \leq 10^8$ .

# 哈希函数

给定正整数  $h$ , 求有多少对非负整数  $(x, y)$  满足  $h = xy + x + y$ .  
 $T$  组数据.

$T \leq 10,000, h \leq 10^8$ .

整理得  $h + 1 = (x + 1)(y + 1)$ . 即求  $h + 1$  的正因子个数.

# 哈希函数

给定正整数  $h$ , 求有多少对非负整数  $(x, y)$  满足  $h = xy + x + y$ .  
 $T$  组数据.

$T \leq 10,000, h \leq 10^8$ .

整理得  $h + 1 = (x + 1)(y + 1)$ . 即求  $h + 1$  的正因子个数.

欧拉筛预处理得到  $1 \sim 10^4$  之间的所有质数, 进而得到  $h + 1$  的质因子分解式.



# 哈希函数

给定正整数  $h$ , 求有多少对非负整数  $(x, y)$  满足  $h = xy + x + y$ .  
 $T$  组数据.

$T \leq 10,000, h \leq 10^8$ .

整理得  $h + 1 = (x + 1)(y + 1)$ . 即求  $h + 1$  的正因子个数.

欧拉筛预处理得到  $1 \sim 10^4$  之间的所有质数, 进而得到  $h + 1$  的质因子分解式.

如果用所有找到的质数试除之后  $h > 1$ , 则剩下的  $h$  必为质数 (即原  $h$  的最大质因子).

# 哈希函数

给定正整数  $h$ , 求有多少对非负整数  $(x, y)$  满足  $h = xy + x + y$ .  
 $T$  组数据.

$T \leq 10,000, h \leq 10^8$ .

整理得  $h + 1 = (x + 1)(y + 1)$ . 即求  $h + 1$  的正因子个数.

欧拉筛预处理得到  $1 \sim 10^4$  之间的所有质数, 进而得到  $h + 1$  的质因子分解式.

如果用所有找到的质数试除之后  $h > 1$ , 则剩下的  $h$  必为质数 (即原  $h$  的最大质因子).

注意到若  $h + 1 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ , 则  $h + 1$  的正因子个数为  $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$ .

① 哈希函数

② 向量

③ 仪仗队

# 向量

给你一对数  $a, b$ , 你可以任意使用

$(a, b), (a, -b), (-a, b), (-a, -b), (b, a), (b, -a), (-b, a), (-b, -a)$  这些向量, 问你能不能拼出另一个向量  $(x, y)$ .

# 向量

给你一对数  $a, b$ , 你可以任意使用

$(a, b), (a, -b), (-a, b), (-a, -b), (b, a), (b, -a), (-b, a), (-b, -a)$  这些向量, 问你能不能拼出另一个向量  $(x, y)$ .

$T$  组数据.

# 向量

给你一对数  $a, b$ , 你可以任意使用

$(a, b), (a, -b), (-a, b), (-a, -b), (b, a), (b, -a), (-b, a), (-b, -a)$  这些向量, 问你能不能拼出另一个向量  $(x, y)$ .

$T$  组数据.

$T \leq 50,000, -2 \times 10^9 \leq a, b, x, y \leq 2 \times 10^9$ .

# 向量

给你一对数  $a, b$ , 你可以任意使用

$(a, b), (a, -b), (-a, b), (-a, -b), (b, a), (b, -a), (-b, a), (-b, -a)$  这些向量, 问你能不能拼出另一个向量  $(x, y)$ .

$T$  组数据.

$T \leq 50,000, -2 \times 10^9 \leq a, b, x, y \leq 2 \times 10^9$ .

相当于有三种操作:

# 向量

给你一对数  $a, b$ , 你可以任意使用

$(a, b), (a, -b), (-a, b), (-a, -b), (b, a), (b, -a), (-b, a), (-b, -a)$  这些向量, 问你能不能拼出另一个向量  $(x, y)$ .

$T$  组数据.

$T \leq 50,000, -2 \times 10^9 \leq a, b, x, y \leq 2 \times 10^9$ .

相当于有三种操作:

- 给  $x$  或  $y$  加上或减去  $2a$  或  $2b$ .



# 向量

给你一对数  $a, b$ , 你可以任意使用

$(a, b), (a, -b), (-a, b), (-a, -b), (b, a), (b, -a), (-b, a), (-b, -a)$  这些向量, 问你能不能拼出另一个向量  $(x, y)$ .

$T$  组数据.

$T \leq 50,000, -2 \times 10^9 \leq a, b, x, y \leq 2 \times 10^9$ .

相当于有三种操作:

- 给  $x$  或  $y$  加上或减去  $2a$  或  $2b$ .
- $x = x + a, y = y + b$ .

# 向量

给你一对数  $a, b$ , 你可以任意使用

$(a, b), (a, -b), (-a, b), (-a, -b), (b, a), (b, -a), (-b, a), (-b, -a)$  这些向量, 问你能不能拼出另一个向量  $(x, y)$ .

$T$  组数据.

$T \leq 50,000, -2 \times 10^9 \leq a, b, x, y \leq 2 \times 10^9$ .

相当于有三种操作:

- 给  $x$  或  $y$  加上或减去  $2a$  或  $2b$ .
- $x = x + a, y = y + b$ .
- $x = x + b, y = y + a$ .

# 向量

给你一对数  $a, b$ , 你可以任意使用

$(a, b), (a, -b), (-a, b), (-a, -b), (b, a), (b, -a), (-b, a), (-b, -a)$  这些向量, 问你能不能拼出另一个向量  $(x, y)$ .

$T$  组数据.

$T \leq 50,000, -2 \times 10^9 \leq a, b, x, y \leq 2 \times 10^9$ .

相当于有三种操作:

- 给  $x$  或  $y$  加上或减去  $2a$  或  $2b$ .
- $x = x + a, y = y + b$ .
- $x = x + b, y = y + a$ .

后两种操作可以使用 0 次或 1 次.

# 向量

给你一对数  $a, b$ , 你可以任意使用

$(a, b), (a, -b), (-a, b), (-a, -b), (b, a), (b, -a), (-b, a), (-b, -a)$  这些向量, 问你能不能拼出另一个向量  $(x, y)$ .

$T$  组数据.

$T \leq 50,000, -2 \times 10^9 \leq a, b, x, y \leq 2 \times 10^9$ .

相当于有三种操作:

- 给  $x$  或  $y$  加上或减去  $2a$  或  $2b$ .
- $x = x + a, y = y + b$ .
- $x = x + b, y = y + a$ .

后两种操作可以使用 0 次或 1 次.

枚举后两种操作是否使用, 之后用裴蜀定理判定能否拼成.

1 哈希函数

2 向量

3 仪仗队

# 仪仗队

一个  $N \times N$  的方阵, 问从最后方的点能看到多少个点.

# 仪仗队

一个  $N \times N$  的方阵, 问从最后方的点能看到多少个点.  
 $1 \leq N \leq 40,000$ .

# 仪仗队

一个  $N \times N$  的方阵, 问从最后方的点能看到多少个点.  
 $1 \leq N \leq 40,000$ .

满足以下情形之一的点可被看到:



# 仪仗队

一个  $N \times N$  的方阵, 问从最后方的点能看到多少个点.  
 $1 \leq N \leq 40,000$ .

满足以下情形之一的点可被看到:

(1) 该点为  $(0,1), (1,0), (1,1)$  之一;

# 仪仗队

一个  $N \times N$  的方阵, 问从最后方的点能看到多少个点.  
 $1 \leq N \leq 40,000$ .

满足以下情形之一的点可被看到:

- (1) 该点为  $(0, 1), (1, 0), (1, 1)$  之一;
- (2)  $2 \leq x, y \leq n - 1$  且  $\gcd(x, y) = 1$ .

# 仪仗队

一个  $N \times N$  的方阵, 问从最后方的点能看到多少个点.  
 $1 \leq N \leq 40,000$ .

满足以下情形之一的点可被看到:

- (1) 该点为  $(0, 1), (1, 0), (1, 1)$  之一;
- (2)  $2 \leq x, y \leq n-1$  且  $\gcd(x, y) = 1$ .

所求即  $3 + \sum_{i=2}^{n-1} \varphi(i)$ .

# 仪仗队

一个  $N \times N$  的方阵, 问从最后方的点能看到多少个点.  
 $1 \leq N \leq 40,000$ .

满足以下情形之一的点可被看到:

- (1) 该点为  $(0, 1), (1, 0), (1, 1)$  之一;
- (2)  $2 \leq x, y \leq n-1$  且  $\gcd(x, y) = 1$ .

所求即  $3 + \sum_{i=2}^{n-1} \varphi(i)$ .

欧拉筛求欧拉函数, 求和.

谢谢大家.