北京大学中学生数学奖

个人能力挑战赛——试题

2016 年 7 月

本试卷共 4 题, 每题 30 分, 满分 120 分. 考试时间 180 分钟.

1. 已知锐角 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=60^\circ$, P 为 AB 中点, Q 为外接圆上 AC(不含点 B) 的中点, H 为 $\triangle ABC$ 的垂心. 如果 P、H、Q 三点共线, 求 $\angle A$.

2. 求所有的整系数多项式 $P(x)$, 使得存在一个无穷项整数数列 $\{a_n\}$, 其中任意两项互不相等, 且满足

$$P(a_1)=0, P(a_{k+1})=a_k(k=1,2,\cdots).$$

3. 给定正整数 n, 有 $2n$ 张纸牌叠成一堆, 从上到下依次编号为 $1\sim 2n$. 我们进行这样的操作: 每次将所有从上往下数偶数位置的牌抽出来, 保持顺序放到牌堆的下方. 例如 $n=3$ 时, 初始顺序为 123456, 操作后依次得到

$$135246、154326、142536、123456.$$

证明: 对任意正整数 n, 操作不超过 $2n-2$ 次后, 这堆牌的顺序会变回初始状态.

4. 给定正整数 p、q, 数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1=a_2=1, a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n(n=1,2,\cdots).$$

求证: 要使得对任意正整数 m、n, 均有 $(a_m,a_n)=a_{(m,n)}$, 当且仅当 $p=1$ 时成立.