Необходимые сведения из алгебры: группы и подгруппы, примеры конечных групп, порядок элемента, циклические группы и их порождающие

Задача 1.

Какие из указанных множеств квадратных вещественных матриц фиксированного порядка образуют группу:

a) Множество ненулевых матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ \lambda y & x \end{pmatrix}$, $(x, y \in \mathbb{R})$, где λ – фиксированное вещественное число, относительно умножения;

b) Множество всех ортогональных матриц относительно умножения.

Решение 1. Пусть $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ \lambda y & x \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

a)
1) Корректность операции:
$$\forall \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \lambda y_1 & x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ \lambda y_2 & x_2 \end{pmatrix} \in M \quad \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \lambda y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ \lambda y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 + \lambda y_1 y_2 & x_1 y_2 + y_1 x_2 \\ \lambda(y_1 x_2 + x_1 y_2) & x_1 x_2 + \lambda y_1 y_2 \end{pmatrix} \in M$$
2) Ассоциативность: Из ассоциативности перемножения матриц.
3) Единица: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$
4) Обратный элемент: $\forall \begin{pmatrix} x & y \\ \lambda y & x \end{pmatrix} \in M \quad \begin{pmatrix} x & y \\ \lambda y & x \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{x^2 - \lambda y^2} \begin{pmatrix} x & -y \\ -\lambda y & x \end{pmatrix} \in M$

Все условия группы выполнены. Значит множество M – группа.

b) $M = \left\{ Q \;\middle|\; QQ^T = Q^T Q = E \right\}$ – множество ортогональных матриц.

1) Корректность операции: $\forall A, B \in M \quad AB(AB)^T = ABB^T A^T = AA^T = E \Longrightarrow AB \in M$
2) Ассоциативность: Из ассоциативности перемножения матриц.
3) Единица: $EE^T = E^T E = E \Longrightarrow E \in M$
4) Обратный элемент: $\forall A \in M \quad AA^T = A^T A = E \Longrightarrow A^{-1} = A^T \in M$

Все условия группы выполнены. Значит множество M – группа.

Задача 2.

Найти порядок элемента группы:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in S_6$;

b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \in \mathbb{C}^*$.

Решение 2. a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (12345) \in S_6$

$\operatorname{ord} \sigma = \text{НОК(длин циклов)} = \text{НОК}(5,\, 1) = 5$

b) $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \sin\frac{7\pi}{4}i\right)$

$x^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \sin\frac{7\pi}{4}i\right)\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\left(\cos\frac{7\pi n}{4} + \sin\frac{7\pi n}{4}i\right)$

Для того, чтобы $x^n = 1$, необходимо, чтобы выполнялось $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 1 \iff n \in \varnothing \implies \operatorname{ord} x = \infty$