Задача 1.

Плотность распределения СВ ξ имеет вид:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} c(1-x^2), & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

Найти:

a) константу c

b) функцию распределения СВ ξ

c) построить график функции плотности распределения СВ и график функции распределения СВ

d) $\mathbb{E}(2-\xi)(4+3\xi)$

e) $\mathbb{D}(5-2\xi)$

f) $\mathbb{P}(\xi > 0.5)$

Решение 1.

a) Найдем константу из условия нормировки :

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = \int_{-1}^{1} c(1-x^2)dx = c\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = c\left(1-\frac{1}{3}\right) - c\left(-1+\frac{1}{3}\right) = c\cdot\frac{4}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$c = \frac{3}{4}$$

b) $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ \int_{-1}^{x} \frac{3}{4}(1-t^2)dt, & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & x < -1 \end{cases}$

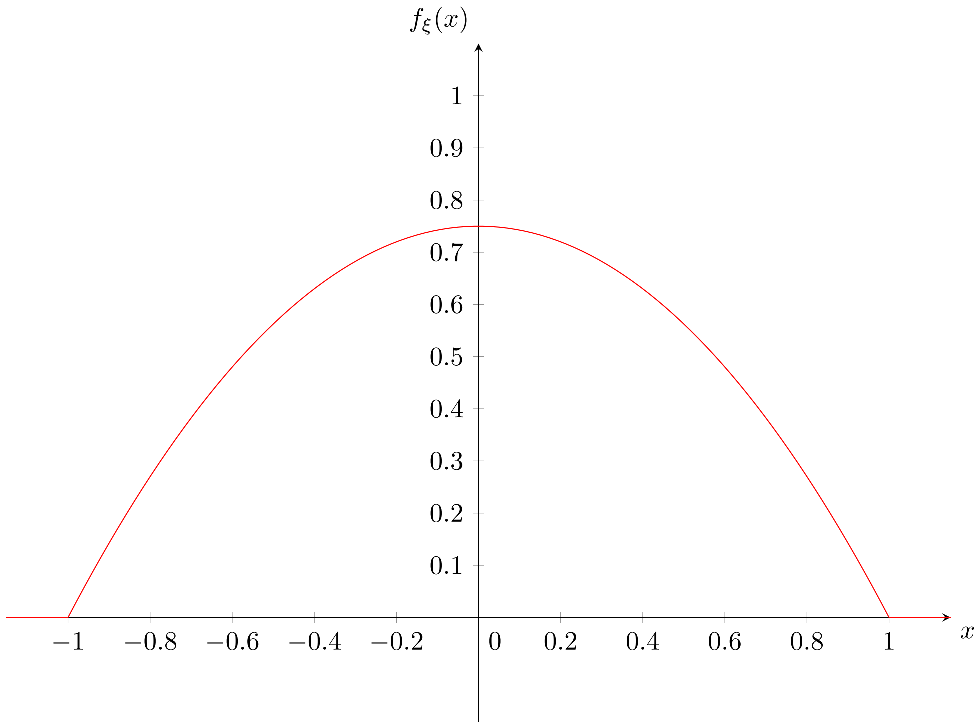
Отдельно:

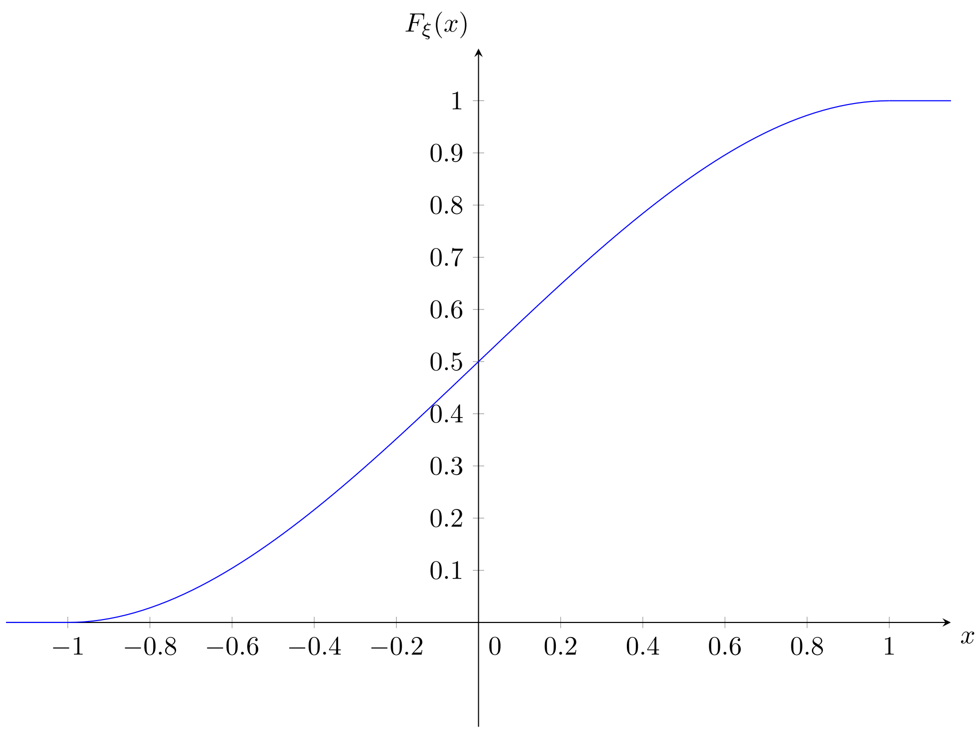
$$\int_{-1}^{x} \frac{3}{4}(1-t^2)dt = \frac{3}{4}\left(t - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{x} = \frac{3}{4}\left(x - \frac{x^3}{3}\right) - \frac{3}{4}\left(-1+\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4}\left(x-\frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{2}$$

Тогда функция распределения:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ \frac{3}{4}\left(x - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{2}, & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & x < -1 \end{cases}$$

c)





d)

$$\mathbb{E}(2-\xi)(4+3\xi) = \mathbb{E}(8+2\xi-3\xi^2) = 8 + 2\mathbb{E}\xi - 3\mathbb{E}\xi^2$$

Найдем отдельно $\mathbb{E}(\xi)$:

$$\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{3}{4}(1-x^2)dx = \frac{3}{4}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 0$$

Найдем отдельно $\mathbb{E}(\xi^2)$:

$$\mathbb{E}\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \frac{3}{4}(1-x^2)dx = \frac{3}{4}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{15} = \frac{1}{5}$$

Тогда:

$$\mathbb{E}(8 + 2\xi - 3\xi^2) = 8 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{37}{5}$$

e) $\mathbb{D}(5 - 2\xi) = \mathbb{D}5 + \mathbb{D}(-2\xi) = 0 + 4\mathbb{D}\xi = 4\left(\mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2\right) = 4\left(\frac{1}{5} - 0\right) = \frac{4}{5}$

f) $\mathbb{P}(\xi > 0.5) = 1 - \mathbb{P}(\xi \leqslant 0.5) = 1 - F_\xi(0.5) = 1 - \left(\frac{3}{4}\left(0.5 - \frac{0.5^3}{3}\right) + \frac{1}{2}\right) = 1 - 0.84375 = 0.15625$

Задача 2.

Случайная величина имеет плотность распределения:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F_Y(y)$ случайной величины $Y = kX,\ k > 0$

Решение 2. Найдем обратную функцию (x от y):

$$y = kx \Longleftrightarrow x = \frac{y}{k}$$

Найдем функцию плотности распределения СВ Y:

$$f_Y(y) = f_X\left(\tfrac{y}{k}\right) \cdot \left|\left(\frac{y}{k}\right)'\right| = \begin{cases} \frac{2}{k} \cdot e^{-\frac{2y}{k}}, & y \geqslant 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

Получили эспоненциальное распределение с константой $\frac{2}{k}$. Тогда функция распределения СВ Y:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{2y}{k}}, & y \geqslant 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$