Técnica dos Multiplicadores de Lagrange

Ney Lemke

Departamento de Biofísica e Farmacologia

2 de abril de 2025

Outline

Introdução

- Os multiplicadores de Lagrange são uma técnica poderosa para otimização com restrições
- Desenvolvida por Joseph-Louis Lagrange no século XVIII
- Amplamente utilizada em física, engenharia e economia

O Problema de Otimização com Restrições

- Objetivo: Maximizar ou minimizar uma função $f(x, y)$
- Sujeito a uma restrição $g(x, y) = c$
- Exemplo: Maximizar a área de um retângulo com perímetro fixo

A Técnica dos Multiplicadores de Lagrange

Multiplicadores de Lagrange

Problema: Max/min $f(x, y, \ldots)$ sujeito a $g(x, y, \ldots) = 0$

Ideia: $\nabla f = \lambda \nabla g$ (tangência das curvas de nível)

Sistema:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, \ldots) &= \lambda \nabla g(x, y, \ldots) \\ g(x, y, \ldots) &= 0 \end{aligned}$$

Solução: $(x, y, \ldots, \lambda)$ que satisfazem o sistema

Interpretação de λ: Sensibilidade de f em relação à restrição g

A Técnica dos Multiplicadores de Lagrange

1. Definir a função Lagrangiana:
   $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$
2. Calcular as derivadas parciais e igualá-las a zero:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

3. Resolver o sistema de equações
4. Verificar os pontos críticos encontrados

Exemplo: Maximização da Área de um Retângulo

- Função objetivo: $f(x, y) = xy$ (área)
- Restrição: $g(x, y) = 2x + 2y = P$ (perímetro)
- Lagrangiana: $L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(2x + 2y - P)$

Desenvolvimento do Exemplo: Passo 1

Definição do Problema

$$\text{Maximizar: } f(x, y) = xy \quad \text{(área do retângulo)}$$
$$\text{Sujeito a: } g(x, y) = 2x + 2y = P \quad \text{(perímetro fixo)}$$

Função Lagrangiana

$$\begin{aligned} L(x, y, \lambda) &= f(x, y) - \lambda(g(x, y) - P) \\ &= xy - \lambda(2x + 2y - P) \end{aligned}$$

Desenvolvimento do Exemplo: Passo 2

Condições de Primeira Ordem

Calculamos as derivadas parciais e igualamos a zero:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y - 2\lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = x - 2\lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(2x + 2y - P) = 0$$

Desenvolvimento do Exemplo: Passo 3

Resolução do Sistema

Da primeira equação: $y = 2\lambda$
Da segunda equação: $x = 2\lambda$

Portanto: $x = y$ (o retângulo é um quadrado)

Da terceira equação: $2x + 2y = P$
Substituindo $x = y$: $2x + 2x = P$
Simplificando: $4x = P$
Portanto: $x = \frac{P}{4}$

Solução

$x = y = \frac{P}{4}$ (quadrado)

Desenvolvimento do Exemplo: Passo 4

Análise da Matriz Hessiana

A matriz Hessiana da Lagrangiana é:

$$H(L) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

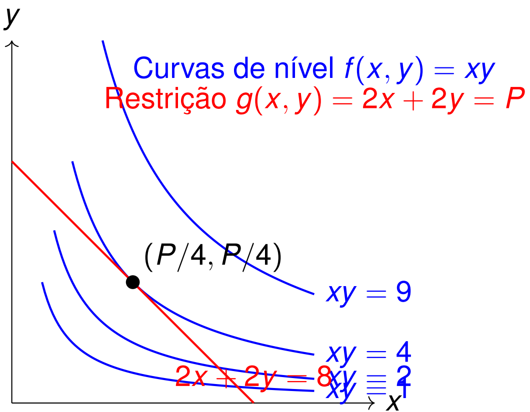
Desenvolvimento do Exemplo: Passo 4

Para verificar as condições de segunda ordem, analisamos o comportamento de $H(L)$ no espaço tangente à restrição.

Verificação do Ponto Crítico

- Determinante: $\det(H) = -1 < 0$, indicando um ponto de sela da Lagrangiana
- No espaço tangente à restrição: a forma quadrática é definida negativa
- Conclusão: o ponto $(x, y) = (\frac{P}{4}, \frac{P}{4})$ é um máximo local

Desenvolvimento do Exemplo: Visualização



Aplicações

- Física: Princípio do trabalho virtual, mecânica analítica
- Engenharia: Otimização de design, controle de sistemas
- Economia: Maximização de utilidade sob restrições orçamentárias
- Aprendizado de máquina: Otimização de funções de perda com regularização

Conclusão

- Os multiplicadores de Lagrange são uma ferramenta versátil para otimização com restrições
- Permitem transformar problemas com restrições em problemas sem restrições
- Amplamente aplicáveis em diversos campos da ciência e engenharia
- Compreender esta técnica é fundamental para abordar problemas complexos de otimização