VAJE IZ VERJETNOSTI Z MERO

Martin Raič

Datum zadnje spremembe: 10. januar 2019

Kazalo

1. Merljivost in mera

Merljivost množic in funkcij. Mera.

> *Za funkcijo $f\colon X \to Y$ in podmnožico $A \subseteq X$ definiramo* **sliko** *množice A glede na f kot množico:*
>
> $$f(A) := \{f(x) \,;\, x \in A\}\,.$$

1. Dani sta funkcija $f(x) = x^2$ in množica $A = [-2, 3)$. Določite $f(A)$.

> *Za funkcijo $f\colon X \to Y$ in podmnožico $B \subseteq Y$ definiramo* **prasliko** *množice B glede na f kot množico:*
>
> $$f^{-1}(B) := \{x \in X \,;\, f(x) \in B\}\,.$$

V nalogah od 2. do 4. določite praslike vseh intervalov $B_b := (-\infty, b]$ glede na dano funkcijo f (ki je definirana povsod, kjer ima ustrezni izraz pomen).

2. $f(x) = e^{-x}$.
3. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.
4. $f(x) = \operatorname{ctg}(x^2)$.

> **σ-algebra** *na množici Ω je družina podmnožic $\mathcal{F}$ te množice, ki ima naslednje lastnosti:*
>
> - *$\emptyset \in \mathcal{F}$.*
> - *Za vsak $A \in \mathcal{F}$ je tudi $A^{\mathrm{c}} := \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$.*
> - *Za vsako zaporedje množic $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ je tudi $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \in \mathcal{F}$.*
>
> *Množici, opremljeni s σ-algebro, pravimo* **merljivi prostor**, *elementom izbrane σ-algebre pa* **merljive množice**.
>
> *Vsaka σ-algebra $\mathcal{F}$ na Ω ima še naslednje lastnosti:*
>
> - *$\Omega \in \mathcal{F}$.*
> - *Za vsako zaporedje množic $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ je tudi $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \in \mathcal{F}$.*
> - *Za poljubni množici $A, B \in \mathcal{F}$ je tudi $A \setminus B = A \cap B^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}$.*
>
> *Družina $\{\emptyset, \Omega\}$ je najmanjša, potenčna množica 2^Ω pa največja σ-algebra na Ω.*
>
> *Presek poljubne neprazne družine σ-algeber na Ω je tudi σ-algebra na Ω.*
>
> *Za vsako družino $\mathcal{A}$ podmnožic dane množice Ω obstaja najmanjša σ-algebra, ki vsebuje $\mathcal{A}$: to je presek vseh σ-algeber na Ω, ki vsebujejo $\mathcal{A}$. Najmanjšo σ-algebro, ki vsebuje $\mathcal{A}$, označimo s $\sigma(\mathcal{A})$. Če je $\mathcal{A} = \mathcal{F}$, pravimo, da $\mathcal{A}$* **generira** *$\mathcal{F}$.*

5. Dana je množica $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Ali sta množici

$$\mathcal{F} = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\big\}$$
$$\mathcal{G} = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\big\}$$

σ-algebri na Ω? Če katera od teh dveh množic ni σ-algebra, poiščite najmanjšo σ-algebro, ki jo vsebuje.

6. Na množici $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ določite najmanjšo σ-algebro, ki vsebuje množici $\{1, 2\}$ in $\{2, 3\}$. Koliko elementov ima?

7. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ označimo z $\mathcal{A}_n$ najmanjšo σ-algebro na množici $\mathbb{N}$, ki vsebuje množice $\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}$.
   a) Dokažite, da je, če je $m < n$, $\mathcal{A}_m$ prava poddružina družine $\mathcal{A}_n$.
   b) Definirajmo $\mathcal{A} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$. Dokažite, da $\mathcal{A}$ ni σ-algebra.
   c) Določite najmanjšo σ-algebro, ki vsebuje $\mathcal{A}$.

8. Naj bo Ω poljubna neprazna množica. Določite najmanjšo σ-algebro, ki vsebuje vse enoelementne podmnožice množice Ω.

9. Naj bo $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$ in naj bo $\mathcal{M}$ najmanjša σ-algebra, ki vsebuje vse pravokotnike oblike $M_\alpha := (0, \cos\alpha] \times (0, \sin\alpha]$, kjer je $0 < \alpha < \pi/2$. Ali $\mathcal{M}$ vsebuje množico $T := \{(x, y) \in \Omega \; ; \; x + y \le 1\}$?

10. Naj bo zdaj $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x \ge 0, y \ge 0, x^2 + y^2 \le 1\}$, za $\mathcal{M}$ pa vzamemo najmanjšo σ-algebro, ki vsebuje vse pravokotnike oblike $[0, \cos\alpha] \times [0, \sin\alpha]$, kjer je $0 < \alpha < \pi/2$. Ali zdaj $\mathcal{M}$ vsebuje množico $T := \{(x, y) \in \Omega \; ; \; x + y \le 1\}$?

Borelova[1] **σ-algebra** *na* $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, *je:*

- *najmanjša σ-algebra, ki vsebuje vse intervale;*
- *najmanjša σ-algebra, ki vsebuje vse odprte intervale;*
- *najmanjša σ-algebra, ki vsebuje vse zaprte intervale;*
- *najmanjša σ-algebra, ki vsebuje vse poltrake* $(-\infty, b]$;
- *najmanjša σ-algebra, ki vsebuje vse poltrake* $(-\infty, b)$;
- *najmanjša σ-algebra, ki vsebuje vse poltrake* $[a, \infty)$;
- *najmanjša σ-algebra, ki vsebuje vse poltrake* (a, ∞).

Pri tem lahko a in b pretečeta vso realno os ali pa tudi določeno povsod gosto množico, denimo racionalna števila.

Elementom Borelove σ-algebre pravimo **Borelove množice**.

11. Dokažite, da za vsako Borelovo množico $B \subseteq \mathbb{R}$ in za vsak $c \in \mathbb{R}$ velja, da je tudi množica $B + c = \{x + c \; ; \; x \in B\}$ Borelova.

[1] Félix Édouard Justin Émile Borel (1871–1956), francoski matematik

Naj bosta $(X, \mathcal{F})$ in $(Y, \mathcal{G})$ merljiva prostora. Preslikava $f\colon X \to Y$ je **merljiva** *(glede na izbrani σ-algebri $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}$), če za vsako množico $B \in \mathcal{G}$ velja, da je $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.*

Če $\mathcal{A}$ generira $\mathcal{G}$, je za merljivost preslikave $f\colon X \to Y$ dovolj že, da za vsako množico $B \in \mathcal{A}$ velja, da je $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Če se ne dogovorimo drugače, pri funkcijah, ki slikajo v $\mathbb{R}$, tam vzamemo Borelovo σ-algebro. Če je torej $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor, je funkcija $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ merljiva natanko tedaj, ko:

- *za vsak interval I velja, da je $f^{-1}(I) \in \mathcal{F}$;*
- *za poljubna $a < b$ velja, da je $\{\omega \in \Omega\,;\, a < f(\omega) < b\} \in \mathcal{F}$;*
- *za poljubna $a < b$ velja, da je $\{\omega \in \Omega\,;\, a \le f(\omega) \le b\} \in \mathcal{F}$;*
- *za vsak $b \in Q$ velja, da je $\{\omega \in \Omega\,;\, f(\omega) \le b\} \in \mathcal{F}$;*
- *za vsak $b \in Q$ velja, da je $\{\omega \in \Omega\,;\, f(\omega) < b\} \in \mathcal{F}$;*
- *za vsak $a \in Q$ velja, da je $\{\omega \in \Omega\,;\, f(\omega) \ge a\} \in \mathcal{F}$;*
- *za vsak $a \in Q$ velja, da je $\{\omega \in \Omega\,;\, f(\omega) > a\} \in \mathcal{F}$.*

Pri tem je lahko Q poljubna množica, ki je gosta v $\mathbb{R}$.

12. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor in $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ funkcija z največ števno zalogo vrednosti.

    a) Pokažite, da je f merljiva natanko tedaj, ko so vse množice $f^{-1}(\{y\})$ merljive.

    b) Pokažite, da brez predpostavke o števnosti zaloge vrednosti funkcije f ti dve trditvi nista ekvivalentni.

Včasih je ugodno realnim številom priključiti neskončnost. Če ločimo pozitivno in negativno neskončnost, dobimo linearno urejeno množico $[-\infty, \infty]$. Borelova σ-algebra na $[-\infty, \infty]$, $\mathcal{B}([-\infty, \infty])$, je:

- *najmanjša σ-algebra, ki vsebuje vse poltrake $[-\infty, b]$;*
- *najmanjša σ-algebra, ki vsebuje vse poltrake $[-\infty, b)$;*
- *najmanjša σ-algebra, ki vsebuje vse poltrake $[a, \infty]$;*
- *najmanjša σ-algebra, ki vsebuje vse poltrake $(a, \infty]$.*

Pri tem lahko a in b spet pretečeta vso realno os ali pa tudi določeno povsod gosto množico, denimo racionalna števila. Elementom te σ-algebre spet pravimo Borelove množice.

Borelovi množici sta tudi $\{\infty\}$ in $\{-\infty\}$. Nasploh je množica $B \subseteq [-\infty, \infty]$ Borelova natanko tedaj, ko je $B \cap \mathbb{R}$ Borelova gledano na $\mathbb{R}$. Z drugimi besedami, velja $\mathcal{B}([-\infty, \infty]) = \{B \subseteq [-\infty, \infty]\,;\, B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

Ko gledamo merljivost, tudi pri funkcijah, ki slikajo v $[-\infty, \infty]$, če se ne dogovorimo drugače, tam vzamemo Borelovo σ-algebro.

13. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor in $f, g\colon \Omega \to [-\infty, \infty]$ merljivi funkciji. Dokažite, da so množice:

$$\{\omega \in \Omega\,;\, f(\omega) < g(\omega)\}\,, \quad \{\omega \in \Omega\,;\, f(\omega) > g(\omega)\}\,, \quad \{\omega \in \Omega\,;\, f(\omega) \le g(\omega)\}\,,$$
$$\{\omega \in \Omega\,;\, f(\omega) \ge g(\omega)\} \quad \text{in} \quad \{\omega \in \Omega\,;\, f(\omega) = g(\omega)\}$$

merljive.

14. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor in $f_1, f_2, \ldots\colon \Omega \to [-\infty, \infty]$ merljive funkcije. Dokažite, da so tudi $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\limsup_{n\to\infty}$ in $\liminf_{n\to\infty}$ (vse definirano po točkah) merljive funkcije.

15. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor in naj bodo $f_1, f_2, \ldots\colon \Omega \to \mathbb{R}$ merljive funkcije.

    a) Dokažite, da je množica točk, kjer to zaporedje konvergira v $\mathbb{R}$, merljiva.

    b) Naj bo g še ena merljiva funkcija. Dokažite, da je tudi funkcija:

$$f(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\omega) & ;\ f_n(\omega) \text{ konvergira} \\ g(\omega) & ;\ \text{sicer} \end{cases}$$

    merljiva.

16. Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *z desne zvezna* funkcija: za vsak $x \in \mathbb{R}$ in vsak $\varepsilon > 0$ naj obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $y \in (x, x+\delta)$ velja $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Dokažite, da je množica točk, kjer je f (obojestransko) zvezna, Borelovo merljiva.

    Namig: če je f z desne zvezna, za vsako padajoče zaporedje $x_1, x_2, \ldots$ z limito x velja $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

Pozitivna mera *na merljivem prostoru* $(\Omega, \mathcal{F})$ *je funkcija* $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, \infty]$, *ki ima naslednji dve lastnosti:*

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- *Če so* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ *paroma disjunktne množice z unijo* A, *velja* $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

17. *Diracova*[2] *mera* na množici Ω, ki pripada točki $a \in \Omega$, je funkcija $\delta_a\colon 2^\Omega \to \{0, 1\}$, definirana po predpisu:

$$\delta_a(A) = \mathbf{1}(a \in A) = \begin{cases} 1 & ;\ a \in A \\ 0 & ;\ a \notin A \end{cases}$$

Dokažite, da je to res pozitivna mera.

[2]Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984), angleški teoretični fizik

18. Naj bo Ω neprazna množica in $f\colon\ \Omega \to [0, \infty]$ poljubna funkcija. Dokažite, da je:

$$\mu(A) := \sum_{a \in A} f(a) = \sum_{a \in \Omega} f(a)\, \mathbf{1}(a \in A)$$

mera na $\left(\Omega, 2^\Omega\right)$.

19. Naj bo Ω neštevna množica $\mathcal{F}$ pa σ-algebra množic, ki so bodisi števne bodisi njihovi komplementi. Definiramo $\mu(A) = 0$, če je μ števna množica, in $\mu(A) = 1$, če je A komplement števne množice. Dokažite, da je μ pozitivna mera na $(\Omega, \mathcal{F})$.

20. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero in naj bosta $f, g\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ merljivi funkciji. Za vsak $c \in \mathbb{R}$ naj bo $\mu\big(\{\omega\ ;\ f(\omega) > c > g(\omega)\}\big) = 0$. Dokažite, da je tudi $\mu\big(\{\omega\ ;\ f(\omega) > g(\omega)\}\big) = 0$.

$$\boxed{\begin{aligned} A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \quad &\Longrightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \\ \mu(A_1) < \infty\,,\quad A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \quad &\Longrightarrow \quad \mu\left(\bigcap_{n=1}^\infty A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \end{aligned}}$$

21. Dokažite, da zgornje pravilo ne velja nujno, če izpustimo pogoj $\mu(A_1) < \infty$.

22. Naj bo $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ *končna* družina podmnožic množice Ω.

   a) Označimo s $\mathcal{P}$ družino vseh možnih presekov oblike $\tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2 \cap \cdots \cap \tilde{A}_n$, kjer za vsak $k = 1, 2, \ldots, n$ velja bodisi $\tilde{A}_k = A_k$ bodisi $\tilde{A}_k = A_k^{\mathrm{c}}$. Dokažite, da je $\sigma(\mathcal{A})$ množica vseh možnih unij množic iz $\mathcal{P}$, vključno s prazno unijo, ki je po definiciji prazna množica. Za kakšne unije gre?

   b) Označimo z $\mathcal{R}$ družino množic, ki vsebuje družino $\mathcal{A}$ in vse množice, ki jih lahko po končno mnogo korakih dobimo iz množic iz $\mathcal{A}$ le z uporabo operacije razlike množic, pri čemer mora biti odštevanec vselej vsebovan v zmanjševancu. Dokažite: če je $\mathcal{A}$ zaprta za končne preseke, je tudi $\mathcal{R}$ zaprta za končne preseke in še za *vsakršne* razlike.

   c) Privzemimo spet, da je $\mathcal{A}$ zaprta za končne preseke, in še, da pokrije Ω. Dokažite, da je $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{R}$.

   d) Še vedno privzemamo, da je $\mathcal{A}$ zaprta za končne preseke in da pokrije Ω. Dokažite, da se poljubni dve pozitivni meri, ki se ujemata na $\mathcal{A}$ in sta tam končni, ujemata tudi na $\sigma(\mathcal{A})$.

   e) Dokažite, da prejšnja trditev ne velja, če izpustimo predpostavko o zaprtosti za preseke.

Lebesgueova[3] **mera** *na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ je edina mera λ_1, za katero velja, da je:*

$$\lambda_1\big((a,b)\big) = b - a\,,$$

brž ko je $a < b$. Pri tem lahko namesto odprtih intervalov (a,b) vzamemo tudi intervale $[a,b)$, $(a,b]$ ali $[a,b]$, za a in b pa je dovolj, da pretečeta določeno povsod gosto množico, denimo racionalna števila; slednja množica je lahko za a in b različna.
Lebesgueova mera na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ je edina mera λ_d, za katero velja, da je:

$$\lambda_d\big((a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\cdots\times(a_d,b_d)\big) = (b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_d-a_d)\,,$$

brž ko je $a_k < b_k$ za vse $k = 1,2,\ldots,d$. Spet lahko namesto odprtih intervalov vzamemo polodprte ali zaprte, za a_k in b_k pa je dovolj, da pretečejo števne povsod goste množice.

23. *Cantorjeva*[4] *množica* je množica $C = \bigcap_{n=1}^\infty A_n$, kjer je:

$$A_n = \bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} \Big(\big[3k\cdot 3^{-n},\ (3k+1)\cdot 3^{-n}\big] \cup \big[(3k+2)\cdot 3^{-n},\ (3k+3)\cdot 3^{-n}\big]\Big)\,.$$

   a) Koliko znaša njena Lebesgueova mera?
   b) Konstruirajte množico s poljubno Lebesgueovo mero, ki ne vsebuje nobenega intervala.

Lebesgueova mera in afine transformacije

Naj bo $\mathbf{M}\colon\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ linearna transformacija, $b \in \mathbb{R}^d$ in $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

- *Če je $\mathbf{M}$ neizrojena, je tudi $\mathbf{M}B + b \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ in $\lambda_d(\mathbf{M}B + b) = |\det\mathbf{M}|\,\lambda_d(B)$.*
- *Če je $\mathbf{M}$ izrojena in $\mathbf{M}B + b \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, je $\lambda_d(\mathbf{M}B + b) = 0$.*

24. Konstruirajte odprto povsod gosto množico na realni osi s poljubno strogo pozitivno, a končno Lebesgueovo mero.

   Namig: izhajajte iz množice racionalnih števil, ki je števna in povsod gosta.

[3]Henri-Léon Lebesgue (1875–1941), francoski matematik
[4]Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918), nemški matematik

2. Lebesgueov integral

Integral enostavnih funkcij z vrednostmi v $[0, \infty]$. Integral merljivih funkcij z vrednostmi v $[0, \infty]$, izrek o monotoni konvergenci, števna aditivnost. Integral merljivih realnih funkcij, izrek o dominirani konvergenci, števna aditivnost.

Integral enostavnih funkcij z vrednostmi v $[0, \infty]$

Enostavna funkcija *je taka, ki se da zapisati v obliki:*

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \, \mathbf{1}_{A_k} ,$$

kjer so A_k merljive množice. Če so a_k iz intervala $[0, \infty]$, je Lebesgueov integral integral funkcije f po meri μ definiran kot:

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int f(\omega) \, \mathrm{d}\mu(\omega) = \int f(\omega) \, \mu(\mathrm{d}\omega) := \sum_{k=1}^{n} a_k \, \mu(A_k) .$$

Pri tem je vrednost neodvisna od izbire vrednosti a_k in A_k, odvisen je le od funkcije same.

Zapis $\int_A f \, \mathrm{d}\mu$ pomeni integral funkcije f po zožitvi mere μ na množico A (natančneje, zožitvi mere na vse merljive podmnožice množice A). Velja $\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathbf{1}_A \, \mathrm{d}\mu$.

Za poljubno konstanto $c \in [0, \infty]$ in enostavno funkcijo s z vrednostmi v $[0, \infty]$ velja $\int (cf) \, \mathrm{d}\mu = c \int f \, \mathrm{d}\mu$.

Za poljubni enostavni funkciji f, g z vrednostmi v $[0, \infty]$, ki slikata iz istega merljivega prostora, je tudi $f + g$ enostavna funkcija in velja $\int (f + g) \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu + \int g \, \mathrm{d}\mu$.

1. Funkcija $f \colon \mathbb{R} \to [0, \infty]$ je definirana po predpisu:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & ; x \le 1 \\ 1 & ; 1 < x \le 3 \\ 4 & ; 3 < x \le 5 \\ 1 & ; 5 < x \le 8 \\ 0 & ; x > 8 . \end{cases}$$

Izračunajte $\int f \, \mathrm{d}\lambda_1$.

2. *Harmonična števila* so vsote:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\,.$$

Definirajmo funkcije $f_n\colon\ \mathbb{R} \to [0, \infty]$ po predpisu:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & ;\ x \le 0 \\ H_k & ;\ k-1 < x \le k\,,\ k = 1, 2, \ldots, n \\ 0 & ;\ x > n\,. \end{cases}$$

a) Zapišite vsoto, ki odgovarja integralu $\int f_n \,\mathrm{d}\lambda_1$ po definiciji.

b) Poiščite alternativen zapis funkcije, ki integral $\int f_n \,\mathrm{d}\lambda_1$ izrazi s H_n.

Integral merljivih funkcij z vrednostmi v $[0, \infty]$

Lebesgueov integral merljive funkcije f z vrednostmi v $[0, \infty]$ po meri μ je enak:

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int s \,\mathrm{d}\mu\ ;\ 0 \le s \le f \right\}.$$

Če je f enostavna funkcija, se integral po novi definiciji ujema z integralom po stari definiciji.

Če je $f \le g$, je tudi $\displaystyle\int f \,\mathrm{d}\mu \le \int g \,\mathrm{d}\mu$.

3. Izračunajte $\displaystyle\int_{(0,1]} \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}\lambda_1(x)$.

Izrek o monotoni konvergenci in števna aditivnost

Če zaporedje merljivih funkcij $0 \le f_1 \le f_2 \le \ldots$ po točkah konvergira k funkciji f z vrednostmi v $[0, \infty]$, velja:

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Poleg tega za poljubno zaporedje merljivih funkcij $g_1, g_2, \ldots$ z vrednostmi v $[0, \infty]$ velja:

$$\int \left(\sum_{k=1}^{\infty} g_k \right) \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int g_k \,\mathrm{d}\mu\,.$$

4. Izračunajte $\displaystyle\int_{[0,2)} x^2 \,\mathrm{d}\lambda_1(x)$.

5. Naj bo $a \geq 0$. Kakšen rezultat da izrek o monotoni konvergenci za funkcije $f_n(k) := \binom{n}{k}\left(\frac{a}{n}\right)^k$, ki jih integriramo po meri na $\mathbb{N}_0$, ki šteje, torej po μ_0? Pri tem se dogovorimo, da je $\binom{n}{k} = 0$, brž ko je $k > n$. Utemeljite tudi, da so pogoji izreka izpolnjeni.

Naj bo na prostoru z mero $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ definiran predikat P. Pravimo, da je P pravilen **skoraj povsod** *ali da je izjava $P(\omega)$ pravilna* **za skoraj vse** *ω glede na mero μ, če je množica tistih ω, kjer je P napačen, vsebovana v neki množici $N \in \mathcal{F}$, za katero je $\mu(N) = 0$.*

6. Dokažite, da je poljubna merljiva funkcija f z vrednostmi v $[0, \infty]$ skoraj povsod enaka nič natanko tedaj, ko je njen Lebesgueov integral enak nič (vse seveda glede na izbrano mero μ).

Ujemanje Riemannovega in Lebesgueovega integrala

Naj bo $-\infty \leq a < b \leq \infty$ in $f\colon (a,b) \to [0, \infty)$ merljiva funkcija. Če obstaja posplošeni Riemannov integral te funkcije po intervalu (a,b), se le-ta ujema z Lebesgueovim po Lebesgueovi meri:

$$\int_{(a,b)} f \, \mathrm{d}\lambda_1 = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

Če je f klasično Riemannovo integrabilna na vsakem zaprtem podintervalu intervala (a,b) in gredo ti Riemannovi integrali proti neskončno, ko gresta meji proti a in b, velja $\int_{(a,b)} f \, \mathrm{d}\lambda_1 = \infty$.

7. Za $\beta \in (0, \infty)$ izračunajte limito

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{\beta - 1} \, \mathrm{d}x \, .$$

Lebesgueov integral realnih funkcij

Lebesgueov integral je možno definirati tudi za funkcije $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, ki pripadajo razredu $L^1(\mu)$, kar pomeni, da so merljive in da je $\int |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$.

Če definiramo $f_+(\omega) := \max\{f(\omega), 0\}$ in $f_-(\omega) = -\min\{f(\omega), 0\}$, velja $f = f_+ - f_-$. Poleg tega je $f \in L^1(\mu)$ natanko tedaj, ko je $f_+ \in L^1(\mu)$ in $f_- \in L^1(\mu)$.

Za take funkcije f definiramo:

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \int f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int f_- \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Če f slika v $[0, \infty)$, se integral po novi definiciji ujema z integralom po stari definiciji.

Integral je linearen: če je $f, g \in L^1(\mu)$ in $a, b \in \mathbb{R}$, je tudi $af + bg \in L^1(\mu)$ in velja $\displaystyle\int \big(af + bg\big) \,\mathrm{d}\mu = a \int f \,\mathrm{d}\mu + b \int g \,\mathrm{d}\mu$.

8. Izpeljite *načelo vključitev in izključitev* za končne pozitivne mere: če je μ taka mera in $A_1, A_2, \ldots, A_n$ poljubne množice, velja:

$$\begin{aligned}\mu(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots + \mu(A_n) &- \\ - \mu(A_1 \cap A_2) - \mu(A_1 \cap A_3) - \cdots - \mu(A_{n-1} \cap A_n) &+ \\ \cdots & \\ + (-1)^{n+1} \mu(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) &\end{aligned}$$

Namigi:

- $\mu(A) = \int \mathbf{1}_A \,\mathrm{d}\mu$;
- $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)^{\mathrm{c}} = A_1^{\mathrm{c}} \cap A_2^{\mathrm{c}} \cap \cdots \cap A_n^{\mathrm{c}}$;
- $\mathbf{1}_{A^{\mathrm{c}}} = 1 - \mathbf{1}_A$;
- $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

Izrek o dominirani konvergenci

Naj zaporedje merljivih funkcij $f_1, f_2, \ldots$ z vrednostmi v $\mathbb{R}$ skoraj povsod konvergira k merljivi funkciji f z vrednostmi v $\mathbb{R}$. Če je:

$$\int \big(\sup_n |f_n|\big) \,\mathrm{d}\mu < \infty\,, \tag{$*$}$$

velja:

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Pogoj $(*)$ je izpolnjen, če obstaja taka funkcija F z vrednostmi v $[0, \infty]$, da je $\int F \,\mathrm{d}\mu < \infty$ in da za vse n in ω velja $|f_n(\omega)| \le F(\omega)$.

9. Izračunajte limito:
$$\lim_{n\to\infty}\int_{1+1/n}^{\infty}\frac{1}{x^2+\sin(x/n)}\,\mathrm{d}x\,.$$

10. Izpeljite *Stirlingov obrazec*:
$$\lim_{a\to\infty}\Gamma(a)\,\frac{e^a}{a^{a-1/2}}=\sqrt{2\pi}\,.$$

Namigi:

- V standardno integralsko izražavo $\Gamma(a)=\displaystyle\int_0^\infty x^{a-1}\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$ vpeljite substitucijo $u=\dfrac{x-a}{\sqrt{a}}$.
- Za vse $t>-1$ velja $t-\dfrac{t^2}{2(1-t_-)}\le\ln(1+t)\le t-\dfrac{t^2}{2(1+t_+)}$, kjer je $t_+=\max\{t,0\}$ in $t_-=\max\{-t,0\}$.
- Pri ocenjevanju lahko privzamete, da je $a\ge 4$.
- Velja $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

Števna aditivnost Lebesgueovega integrala realnih funkcij

Naj bodo $g_1,g_2,\ldots$ funkcije iz $L^1(\mu)$. Če je:
$$\sum_{k=1}^{\infty}\int|g_k|\,\mathrm{d}\mu<\infty\,,$$
vrsta $\sum_{k=1}^{\infty}g_k(\omega)$ konvergira za skoraj vsak ω, torej obstaja merljiva funkcija g, za katero skoraj povsod velja $g=\sum_{k=1}^{\infty}g_k$. Vsaka taka funkcija je v $L^1(\mu)$ in velja:
$$\int g\,\mathrm{d}\mu=\sum_{k=1}^{\infty}g_k\,\mathrm{d}\mu\,.$$

11. Izrazite vsoto:
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a^{2n}}{n!\,(2n+1)}$$
z *Gaussovim verjetnostnim integralom*:
$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}\,\mathrm{d}z\,.$$

Namig: $\dfrac{1}{m+1}=\displaystyle\int_0^1 t^m\,\mathrm{d}t$.

3. Operacije z merami

Množenje mere s funkcijo. Potisk mere. Enoličnost mer. Potisk Lebesgueove mere, pomnožene s funkcijo, vzdolž preslikave z neizrojeno Jacobijevo matriko in vzdolž projekcije.

Množenje mere s funkcijo

Za mero μ na merljivem prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ in za merljivo funkcijo $g\colon \Omega \to [0, \infty]$ lahko definiramo mero $g \cdot \mu$ po predpisu:

$$(g \cdot \mu)(A) := \int_A g \, \mathrm{d}\mu \, .$$

1. Izračunajte $\displaystyle\int_{[0,\infty)} f \, \mathrm{d}(g \cdot \lambda_1)$, kjer je $f(x) = 2^{\lfloor x \rfloor}$ in $g(x) = 3^{-x}$.

Za poljubno mero μ ter merljivi funkciji f in g, ki slikata v $[0, \infty]$, velja:

$$\int f \, \mathrm{d}(g \cdot \mu) = \int f g \, \mathrm{d}\mu \, . \tag{$*$}$$

Če pa f slika v $\mathbb{R}$, g pa še vedno v $[0, \infty]$, je $f \in L^1(g \cdot \mu)$ natanko tedaj, ko je $fg \in L^1(\mu)$. Če je slednje res, še vedno velja $(*)$.

Naj bo $\varphi\colon (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega', \mathcal{F}')$ merljiva preslikava in μ mera na $\Omega, \mathcal{F})$. **Potisk** *mere μ vzdolž preslikave φ je mera μ_φ na prostoru $(\Omega', \mathcal{F}')$, definirana po predpisu:*

$$\mu_\varphi(B) := \mu\big(\varphi^{-1}(B)\big) \, .$$

2. Izračunajte potisk mere $\mu = 2\,\delta_{-1} + 4\,\delta_0 + 3\,\delta_1 + 8\,\delta_2$, definirane na prostoru $\Omega = \mathbb{Z}$, vzdolž preslikave $\varphi\colon \Omega \to \Omega' := \mathbb{N}_0$, definirane po predpisu $\varphi(x) = x^2$. Za σ-algebro na obeh prostorih vzamemo potenčno množico.

Enoličnost pozitivnih mer

Naj bosta μ in ν meri na $(\omega, \mathcal{F})$, ki se ujemata na družini $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$, ki je zaprta za končne neprazne preseke. Obstaja naj zaporedje množic $A_1, A_2, \ldots$ iz $\mathcal{A}$, ki pokrije Ω in na katerih sta meri μ in ν končni. Tedaj se μ in ν ujemata tudi na $\sigma(\mathcal{A})$.

V nalogah od 3. do 10. vse mere jemljemo na realni osi z Borelovo σ-algebro.

3. Izračunajte $(\lambda_1)_\varphi$, kjer je $\varphi(x) = e^{-x}$.

4. Izračunajte $(g \cdot \lambda_1)_\varphi$, kjer je:

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{in} \quad \varphi(x) = \begin{cases} 0 & ; x \le 0 \\ x^2 & ; x \ge 0 \,. \end{cases}$$

Naj bo $B \subseteq \mathbb{R}$ Borelova množica, $g\colon B \to [0, \infty]$ in $\varphi\colon B \to \mathbb{R}$ pa merljivi funkciji. Naj bo $D \subseteq B$ odprta množica, naj bo φ na D zvezno odvedljiva in naj bo $\varphi(x) \neq 0$ za vse $x \in D$. Nadalje naj bo:

$$(g \cdot \lambda_1)(B \setminus D) = \int_{B \setminus D} g \, \mathrm{d}\lambda_1 = 0 \,.$$

Tedaj velja $(g \cdot \lambda_1)_\varphi := \Big(g \cdot \big(\lambda_1\big|_B\big)\Big)_\varphi = h \cdot \lambda_1$, kjer je:

$$h(y) = \sum_{\substack{x \in D \\ \varphi(x) = y}} \frac{g(x)}{|\varphi'(x)|} \,.$$

5. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena standardno normalno. Določite porazdelitev slučajne spremenljivke $Y = (X-1)^2$.

Naj bodo:

- $g\colon \mathbb{R} \to [0, \infty]$ *merljiva funkcija;*
- $D, D' \subseteq \mathbb{R}$ *odprti množici;*
- $\varphi\colon D \to D'$ *bijektivna funkcija;*
- $\varphi^{-1}\colon D' \to D$ *zvezno odvedljiva funkcija.*

Tedaj velja $(g \cdot \lambda_1)_\varphi := \big((g \cdot \lambda_1)\big|_D\big)_\varphi = h \cdot \lambda_1$, kjer je:

$$h(y) = \begin{cases} g\big(\varphi^{-1}(y)\big)\big|(\varphi^{-1})'(y)\big| & ; y \in D' \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

Pri tem se je treba zavedati, da slikamo z množice D in ne morda s kakšne večje množice, s katere zožimo funkcijo φ. Če je φ zožitev funkcije $\bar{\varphi}$, se meri $(g \cdot \lambda_1)_\varphi$ in $(g \cdot \lambda_1)_{\bar{\varphi}}$ ujemata, brž ko je:

$$(g \cdot \lambda_1)(\mathbb{R} \setminus D) = \int_{\mathbb{R} \setminus D} g \, \mathrm{d}\lambda_1 = 0 \,.$$

6. Izračunajte $(g \cdot \lambda_1)_\varphi$, kjer je $g(x) = x^4$ in $\varphi(x) = x^3$.

$$\boxed{(a\mu)_\varphi = a\,\mu_\varphi, \quad (\mu+\nu)_\varphi = \mu_\varphi + \nu_\varphi}$$

7. *Ponovno.* Slučajna spremenljivka X je porazdeljena standardno normalno. Določite porazdelitev slučajne spremenljivke $Y = (X-1)^2$.

8. *Ponovno, le malo drugače.* Za $a, b > 0$ definirajmo funkciji:

$$g_{a,b}(x) = e^{-a^2x^2 - b^2/x^2} \quad \text{in} \quad \varphi(x) = ax - \frac{b}{x}\,.$$

   a) Izračunajte mero $(g_{a,b} \cdot \lambda_1)_\varphi$.

   b) Izračunajte integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2 - b^2/x^2}\,\mathrm{d}x$.

9. *Ponovno.* Izračunajte $(g \cdot \lambda_1)_\varphi$, kjer je:

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{in} \quad \varphi(x) = \begin{cases} 0 & ; x \le 0 \\ x^2 & ; x \ge 0\,. \end{cases}$$

Naj bodo:

- $g\colon\ \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ *merljiva funkcija;*
- $D, D' \subseteq \mathbb{R}^n$ *odprti množici;*
- $\varphi\colon\ D \to D'$ *bijektivna preslikava;*
- $\varphi^{-1}\colon\ D' \to D$ *parcialno zvezno odvedljiva preslikava.*

Tedaj velja $(g \cdot \lambda_1)_\varphi = \big((g \cdot \lambda_1)\big|_D\big)_\varphi = h \cdot \lambda_1$*, kjer je:*

$$h(y) = \begin{cases} g\big(\varphi^{-1}(y)\big)\big|J\varphi^{-1}(y)\big| & ; y \in D' \\ 0 & ; \text{sicer,} \end{cases}$$

$J\varphi^{-1}$ *pa je determinanta Jacobijeve matrike: če je* $\varphi^{-1} = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$*, je:*

$$J\varphi^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\psi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Spet se je treba zavedati, da slikamo z množice D in ne morda s kakšne večje množice.

10. Naj bosta X in Y neodvisni standardni normalni slučajni spremenljivki in naj bodo (R, Θ) polarne koordinate slučajnega vektorja (X, Y), t. j. $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ in $\Theta = \arg(X, Y) \in (-\pi, \pi]$. Določite porazdelitev slučajnega vektorja (R, Θ).

4. Mera in konvergenca

Vrste konvergence funkcij: skoraj povsod, po meri, v L^p. Jensenova neenakost.

Konvergenca funkcij

Zaporedje merljivih realnih funkcij $f_1, f_2, \ldots$, definiranih na istem prostoru z mero μ, konvergira proti funkciji f:

- **skoraj povsod** *glede na μ ($f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.p.}(\mu)} f$), če za skoraj vse ω glede na μ velja $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$;*
- **po meri** *μ ($X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} X$), če za vsak $\varepsilon > 0$ velja $\lim_{n\to\infty} \mu\big(\{\omega \,;\, |f_n(\omega) - f(\omega)| \ge \varepsilon\}\big) = 0$;*
- **v** *$L^p(\mu)$ ($f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p(\mu)} f$) za $p \in (0, \infty)$, če velja $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p \, \mathrm{d}\mu = 0$;*
- **v** *$L^\infty(\mu)$ ($f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^\infty(\mu)} f$), če obstaja taka merljiva množica E, da je $\mu(E^{\mathrm{c}}) = 0$ in da zaporedje na E konvergira enakomerno (t. j. $\lim_{n\to\infty} \sup_E |f_n - f| = 0$).*

Za vse zgornje tipe konvergence je limitna funkcija določena skoraj enolično: če zaporedje konvergira proti dvema funkcijama, se le-ti skoraj povsod ujemata.

Za poljuben p iz konvergence v $L^p(\mu)$ sledi konvergenca po meri μ.

Iz konvergence v $L^\infty(\mu)$ sledi konvergenca skoraj povsod glede na μ.

Konvergenci v $L^\infty(\mu)$ bi bilo sicer smiselno reči *skoraj enakomerna* konvergenca, a slednji izraz je že rezerviran za šibkejšo lastnost: zaporedje funkcij $f_1, f_2, \ldots$ konvergira proti f skoraj enakomerno, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka množica E, da je $\mu(E^{\mathrm{c}}) < \varepsilon$ in da zaporedje na E konvergira enakomerno.

1. Za dana zaporedja funkcij, definiranih na realni osi, opremljeni z Lebesgueovo mero, določite, na katere načine konvergirajo proti nič:

   a) $f_n = \mathbf{1}_{(n,n+1]}$;

   b) $f_n = 2^n \, \mathbf{1}_{[0,3^{-n}]}$;

   c) $f_n(x) = \dfrac{1}{n} \, e^{-x^2/n^3}$;

   d) $f_n(x) = e^{-n^2 x} \, \mathbf{1}\left(x \ge -\dfrac{1}{n}\right)$;

   e) $f_n(x) = \dfrac{1}{nx} \, \mathbf{1}\left(\dfrac{1}{n} \le x \le n\right)$.

Jensenova[5] neenakost

Če je X slučajna spremenljivka in φ konveksna funkcija, velja:

$$\varphi\big(E(X)\big) \le E\big[\varphi(X)\big] \,.$$

2. Dokažite, da za poljubni pozitivni slučajni spremenljivki X in Y, za kateri je $XY \geq 1$, velja $E(X)\,E(Y) \geq 1$.

3. Naj bo $X \geq 0$ slučajna spremenljivka. Dokažite neenakost:

$$\min\bigl\{E(X), \bigl(E(X)\bigr)^2\bigr\} \leq E\bigl[\min\bigl\{2X, X^2\bigr\}\bigr] \,.$$

   Namig: uporabite Jensenovo neenakost za primerno konveksno funkcijo φ, za katero bo veljalo $\min\{x, x^2\} \leq \varphi(x) \leq \min\{2x, x^2\}$.

4. Naj bo $f\colon\ (0, \infty) \to [0, \infty)$ funkcija, za katero velja $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = 1$. Dokažite neenakost:

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_0^\infty x^3 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/4} .$$

[5] Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859–1925), danski matematik

5. Produktne mere

Tonellijev in Fubinijev izrek

Naj bosta $(S, \mathcal{S})$ in $(T, \mathcal{T})$ merljiva prostora. **Produktna σ-algebra $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$** *na $S \times T$ je σ-algebra, generirana z vsemi merljivimi pravokotniki $A \times B$, kjer je $A \in \mathcal{S}$ in $B \in \mathcal{T}$.*

Naj bo μ σ-končna mera na $(S, \mathcal{S})$, ν pa σ-končna mera na $(T, \mathcal{T})$. **Produktna mera** *je mera $\mu \times \nu$ na produktnem prostoru $(S \times T, \mathcal{S} \otimes \mathcal{T})$, karakterizirana z lastnostjo:*

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\, \nu(B)\,.$$

Če $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ identificiramo z $\mathbb{R}^{m+n}$, produktna algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ustreza kar Borelovi σ-algebri $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})$, produktna mera $\lambda_m \times \lambda_n$ pa $(m+n)$-razsežni Lebesgueovi meri λ_{m+n}.

Tonellijev[6] izrek

Za poljubno produktno merljivo funkcijo f z vrednostmi v $[0, \infty]$ velja:

$$\int f \,\mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int \int f(x, y)\, \mathrm{d}\mu(x)\, \mathrm{d}\nu(y) = \int \int f(x, y)\, \mathrm{d}\nu(y)\, \mathrm{d}\mu(x)\,.$$

1. Za poljubna $a, b \in \mathbb{R}$ izračunajte integral $\displaystyle\int_0^\infty \ln \frac{x^2 + b^2}{x^2 + a^2}\, \mathrm{d}x$.

2. Izračunajte $\displaystyle\int_0^1 \frac{2\ln(1+x) - \ln(4x)}{1-x}\, \mathrm{d}x$.

   Namig: integrand zapišite kot primeren določeni integral funkcije $f(x, y) = \dfrac{1}{(1+y)(x+y)}$.

Fubinijev[7] izrek

Za poljubno funkcijo $f \in L^1(\mu \times \nu)$ velja:

$$\int f \,\mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int \int f(x, y)\, \mathrm{d}\mu(x)\, \mathrm{d}\nu(y) = \int \int f(x, y)\, \mathrm{d}\nu(y)\, \mathrm{d}\mu(x)\,.$$

3. Izračunajte $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x-1)\, e^x + (x+1)\, e^{-x}}{x^2}\, \mathrm{d}x$.

   Namig: integrand zapišite kot primeren določeni integral funkcije $f(x, y) = y\, e^{xy}$.

[6] Leonida Tonelli (1885–1946), italijanski matematik
[7] Guido Fubini (1879–1943), italijanski matematik

REŠITVE

1. Merljivost in mera

1. $[0, 9)$.

2. Velja $f^{-1}(B_b) = \{x \in \mathbb{R} \,;\, e^{-x} \le b\}$. Za $b \le 0$ ta neenačba ni izpolnjena nikjer, torej je $f^{-1}(B_b) = \emptyset$. Za $b > 0$ pa je ta neenačba izpolnjena za $x \ge -\ln b$, torej je $f^{-1}(B_b) = [-\ln x, \infty)$.

3. Spet moramo za vse $b \in \mathbb{R}$ rešiti neenačbo $x + \frac{1}{x} \le b$. Ločimo tri primere glede na x:

- Za $x = 0$ neenačba nima pomena.
- Za $x > 0$ je neenačba ekvivalentna neenačbi $x^2 - bx + 1 \le 0$. Za $|b| < 2$ ta neenačba nima rešitve, za $b = 2$ je edina rešitev $x = \frac{1}{2}b$, za $|b| > 2$ pa je njena rešitev $\frac{1}{2}\left(b - \sqrt{b^2 - 4}\right) \le x \le \frac{1}{2}\left(b + \sqrt{b^2 - 4}\right)$. Opazimo še, da za $b < -2$ velja $\frac{1}{2}\left(b + \sqrt{b^2 - 4}\right) < 0$, medtem ko za $b > 2$ velja $\frac{1}{2}\left(b - \sqrt{b^2 - 4}\right) > 0$. Sledi:

$$f^{-1}(B_b) \cap (0, \infty) = \begin{cases} \emptyset & ; \, b < 2 \\ \{1\} & ; \, b = 2 \\ \left[\frac{1}{2}\left(b - \sqrt{b^2 - 4}\right), \, \frac{1}{2}\left(b + \sqrt{b^2 - 4}\right)\right] & ; \, b > 2 \, . \end{cases}$$

- Za $x < 0$ je neenačba ekvivalentna neenačbi $x^2 - bx + 1 \ge 0$. Za $|b| \ge 2$ ta neenačba velja za vse x, za $|b| > 2$ pa je njena rešitev $x \le \frac{1}{2}\left(b - \sqrt{b^2 - 4}\right)$ ali $x \ge \frac{1}{2}\left(b + \sqrt{b^2 - 4}\right)$. Ob isti primerjavi krajišč z 0 kot prej dobimo:

$$\begin{aligned} & f^{-1}(B_b) \cap (-\infty, 0) = \\ & \quad = \begin{cases} \left(-\infty, \, \frac{1}{2}\left(b - \sqrt{b^2 - 4}\right)\right] \cup \left[\frac{1}{2}\left(b + \sqrt{b^2 - 4}\right), \, 0\right) & ; \, b < -2 \\ (-\infty, 0) & ; \, b \ge -2 \, . \end{cases} \end{aligned}$$

Združimo skupaj in dobimo:

$$f^{-1}(B_b) = \begin{cases} \left(-\infty, \, \frac{1}{2}\left(b - \sqrt{b^2 - 4}\right)\right] \cup \left[\frac{1}{2}\left(b + \sqrt{b^2 - 4}\right), \, 0\right) & ; \, b < -2 \\ (-\infty, 0) & ; \, -2 \le b < 2 \\ (-\infty, 0) \cup \{1\} & ; \, b = 2 \\ (-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{2}\left(b - \sqrt{b^2 - 4}\right), \, \frac{1}{2}\left(b + \sqrt{b^2 - 4}\right)\right] & ; \, b > 2 \, . \end{cases}$$

4. $\bigcup_{n=0}^{\infty}\Big(\big(-\sqrt{(n+1)\pi}, -\sqrt{n\pi + \operatorname{arcctg} b}\,\big] \cup \big[\sqrt{n\pi + \operatorname{arcctg} b}, \sqrt{(n+1)\pi}\,\big)\Big)$.

5. Množica $\mathcal{F}$ ni σ-algebra, množica $\mathcal{G}$ pa je. Najmanjša σ-algebra, ki vsebuje $\mathcal{F}$, je kar 2^{Ω}.

6. To so vse podmnožice, za katere velja, da vsebujejo število 4 natanko tedaj, ko vsebujejo število 5. Ta σ-algebra ima 16 elementov.

7. a) $\mathcal{A}_m$ je natančno družina množic, za katere velja, da množico $\{m+1, m+2, \ldots\}$ bodisi v celoti vsebujejo bodisi imajo z njo prazen presek. To pa ne velja za množico $\{n\} \in \mathcal{A}_n$.

b) $\mathcal{A}$ je družina vseh množic, ki so bodisi same končne bodisi je končen njihov komplement. Množica sodih števil ni taka množica.

c) $2^{\mathbb{N}}$.

8. To je družina vseh podmnožic, ki so bodisi števne bodisi so števni njihovi komplementi.

9. Najprej opazimo, da $\mathcal{M}$ vsebuje vse preseke:

$$\begin{aligned}\big((0, \cos\alpha] \times (0, \sin\alpha]\big) \cap \big((0, \cos\beta] \times (0, \sin\beta]\big) = \\ = \big((0,\ \min\{\cos\alpha, \cos\beta\}] \times (0,\ \min\{\sin\alpha, \sin\beta\}]\big) .\end{aligned}$$

To pa so vsi pravokotniki $(0, u] \times (0, v]$, kjer je $u, v > 0$ in $u^2 + v^2 \leq 1$: za dana u, v namreč lahko vzamemo $\alpha = \arccos u$ in $\beta = \arcsin v$ (velja $\sin\alpha \geq v = \sin\beta$ in $\cos\beta \geq u = \cos\alpha$).

Nadalje opazimo, da $\mathcal{M}$ vsebuje vse množice oblike $T_n = \{(x, y) \in \Omega\ ;\ x+y < 1+\frac{1}{n}\}$, saj je T_n unija vseh pravokotnikov $(0, u] \times (0, v]$, kjer je $u, v \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q}$, $u^2+v^2 \leq 1$ in $u + v < 1 + \frac{1}{n}$. Končno, ker je T presek vseh množic T_n, kjer je $n \in \mathbb{N}$, mora pripadati $\mathcal{M}$.

10. Ne. Definirajmo $L := \{(\cos\alpha, \sin\alpha)\ ;\ 0 < \alpha < \pi/2\}$ in $\partial L := \{(1, 0), (0, 1)\}$. Nadalje naj bo $\mathcal{N}$ družina množic, ki bodisi ne sekajo ∂L, L pa sekajo v števno mnogo točkah, bodisi vsebujejo ∂L in še vse točke iz L razen števno mnogo. Opazimo, da je $\mathcal{N}$ σ-algebra, ki vsebuje vse pravokotnike M_α, torej je $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. Množica T pa ne pripada $\mathcal{N}$, torej tudi ne pripada $\mathcal{M}$.

11. Fiksirajmo c. Očitno trditev velja, če je množica B poltrak: za $B = (-\infty, b]$ je namreč $B + c = (-\infty, b+c]$. Označimo z $\mathcal{B}_c$ družino množic B, za katero je množica $B + c$ Borelova. Ta družina je σ-algebra, ki vsebuje vse poltrake $B = (-\infty, b]$, potem pa mora vsebovati tudi vso Borelovo σ-algebro.

12. a) Ker so vse enoelementne množice $\{y\}$ Borelove, morajo biti, če je f merljiva, tudi njihove praslike merljive. Obratno, če ima f števno zalogo vrednosti C, lahko za vsako množico $B \subseteq \mathbb{R}$ zapišemo:

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B \cap C} f^{-1}\big(\{y\}\big) ,$$

kar je merljiva množica.

b) Za protiprimer za f vzemimo identiteto na $\mathbb{R}$, pri čemer za σ-algebro na $\mathbb{R}$ kot *domeni* (definicijskem območju) vzamemo družino vseh množic, ki so bodisi števne bodisi komplementi števnih; na $\mathbb{R}$ kot *kodomeni* pa kot običajno vzamemo Borelovo σ-algebro. Interval $[0, 1]$ je Borelova množica, torej merljiva v σ-algebri, vezani na kodomeno. Ker je f identiteta, je interval $[0,1]$ sam svoja praslika. Ker pa ni niti sam števen niti njegov komplement ni števen, ni merljiv v σ-algebri, vezani na domeno.

13. Opazimo, da je $f(\omega) < g(\omega)$ natanko tedaj, ko obstaja tak $q \in \mathbb{Q}$, da je $f(\omega) < q < g(\omega)$. Torej je:

$$\{\omega \in \Omega\,;\, f(\omega) < g(\omega)\} = \bigcap_{q\in\mathbb{Q}} \Big(f^{-1}\big([-\infty, q)\big) \cap g^{-1}\big((q,\infty]\big) \Big)\,,$$

kar je merljiva množica (tu se ne moremo neposredno sklicati na merljivost razlike funkcij, ker slikata v $[-\infty,\infty]$). Če zamenjamo vlogi funkcij f in g, vidimo, da je tudi druga množica merljiva. Merljivost ostalih sledi iz izražav:

$$\begin{aligned}
\{\omega \in \Omega\,;\, f(\omega) \le g(\omega)\} &= \{\omega \in \Omega\,;\, f(\omega) > g(\omega)\}^{\mathrm{c}}\,,\\
\{\omega \in \Omega\,;\, f(\omega) \ge g(\omega)\} &= \{\omega \in \Omega\,;\, f(\omega) < g(\omega)\}^{\mathrm{c}}\,,\\
\{\omega \in \Omega\,;\, f(\omega) = g(\omega)\} &= \{\omega \in \Omega\,;\, f(\omega) \le g(\omega)\} \cap \{\omega \in \Omega\,;\, f(\omega) \ge g(\omega)\}\,.
\end{aligned}$$

14. Opazimo, da je $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(\omega) \le b$ natanko tedaj, ko za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $f_n(\omega) \le b$. Če torej označimo $g := \sup_{n\in\mathbb{N}} f$, je $g^{-1}\big([-\infty,b]\big) = \bigcap_{n=1}^\infty f_n^{-1}\big([-\infty,b]\big)$, kar je merljiva množica. Ker je Borelova σ-algebra na $[0,\infty]$ generirana že s poltraki $[-\infty,b]$, je tudi funkcija $g = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ merljiva.

Podobno je $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(\omega) \ge a$ natanko tedaj, ko za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $f_n(\omega) \ge a$. Če torej označimo $h := \inf_{n\in\mathbb{N}} f$, je $h^{-1}\big([a,\infty]\big) = \bigcap_{n=1}^\infty f_n^{-1}\big([a,\infty]\big)$, kar je merljiva množica. Ker je Borelova σ-algebra na $[0,\infty]$ generirana že s poltraki $[a,\infty]$, je tudi funkcija $h = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ merljiva.

Zadnji dve funkciji pa sta merljivi, ker se izražata v obliki $\limsup_{n\to\infty} f_n(\omega) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\in\{m,m+1,\dots\}} f_m(\omega)$ in $\liminf_{n\to\infty} f_n(\omega) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\in\{m,m+1,\dots\}} f_m(\omega)$.

15. a) *Prvi način*: uporabimo, da je zaporedje konvergentno natanko tedaj, ko je Cauchyjevo[8]. Če torej s K označimo množico točk ω, kjer zaporedje $f_1(\omega), f_2(\omega), \dots$ konvergira v $\mathbb{R}$, velja:

$$K = \bigcap_{j=1}^\infty \bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{r=n}^\infty \bigcap_{s=n}^\infty \left(\left\{ \omega \in \Omega\,;\, f(\omega) < g(\omega) + \frac{1}{j} \right\} \cap \left\{ \omega \in \Omega\,;\, g(\omega) < f(\omega) + \frac{1}{j} \right\} \right)\,,$$

kar je merljiva množica.

Drugi način. Če te funkcije gledamo kot funkcije iz Ω v $[-\infty,\infty]$, so še vedno merljive. Zaporedje $f_1(\omega), f_2(\omega), \dots$ konvergira v $\mathbb{R}$ natanko tedaj, ko je $-\infty < \liminf_{n\to\infty} f_n(\omega) = \limsup_{n\to\infty} f_n(\omega) < \infty$. Iz prejšnjih dveh nalog sledi, da je množica točk ω, kjer to drži, merljiva.

b) V definiciji funkcije f smemo limito $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$ zamenjati z $f_+(\omega) := \limsup_{n\to\infty} f_n(\omega)$. Potem pa za vsak $b \in \mathbb{R}$ velja:

$$f^{-1}\big((-\infty,b]\big) = \Big(f_+^{-1}\big((-\infty,b]\big) \cap K \Big) \cup \Big(g^{-1}\big((-\infty,b]\big) \setminus K \Big)\,,$$

[8]baron Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), francoski matematik

kar je merljiva množica. To pa je dovolj za merljivost funkcije f.

16. Funkcija f je zvezna v x natanko tedaj, ko za vsak $j \in \mathbb{N}$ obstaja tak $k \in \mathbb{N}$, da za vsak $y \in \left(x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}\right)$ velja $|f(y) - f(x)| \le \frac{1}{j}$. Toda za vsak y iz intervala $\left(x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}\right)$ obstaja zaporedje racionalnih števil $q_1, q_2, \ldots$ iz tega intervala, ki konvergira k x. Zaradi desne zveznosti funkcije f je potem tudi $\lim_{n\to\infty} f(q_n) = f(x)$. Potem pa je za to, da za vsak $y \in \left(x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}\right)$ velja $|f(y) - f(x)| \le \frac{1}{j}$, dovolj, da slednje velja za vsak $y \in \left(x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}\right) \cap \mathbb{Q}$. Še drugače, funkcija f je zvezna v x natanko tedaj, ko za vsak $j \in \mathbb{N}$ obstaja tak $k \in \mathbb{N}$, da za $y \in \mathbb{Q}$ velja bodisi $y - x \ge \frac{1}{k}$ bodisi $x - y \le \frac{1}{k}$ bodisi $f(y) - \frac{1}{j} \le f(x) \le f(y) + \frac{1}{j}$. To pomeni, da se množica točk x, kjer je f zvezna, izraža v obliki:

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{y\in\mathbb{Q}} \left(\left[y + \frac{1}{k},\, \infty\right) \cup \left(-\infty,\, y - \frac{1}{k}\right] \cup f^{-1}\left(\left(f(y) - \frac{1}{j},\, f(y) + \frac{1}{j}\right)\right)\right),$$

kar je res Borelovo merljiva množica.

17. Očitno je $\delta_a(\emptyset) = \emptyset$. Naj bo zdaj $A_1, A_2, \ldots$ zaporedje paroma disjunktnih množic z unijo A. Če a ni element množice A, a ni element nobene množice A_k, torej je $\delta_a(A) = 0$ in $\delta_a(A_k) = 0$ za vse k. Sledi $\delta_a(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_a(A_k) = 0$. Če pa je a element množice A, je a element natanko ene množice A_k. Tedaj je $\delta_a(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_a(A_k) = 1$. V vsakem primeru je $\delta_a(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_a(A_k)$.

18. Očitno je $\mu(\emptyset) = \sum_{a\in\emptyset} f(a) = 0$. Naj bo zdaj $A_1, A_2, \ldots$ zaporedje paroma disjunktnih množic z unijo A. Iz prejšnje naloge sledi, da je:

$$\mathbf{1}(a \in A) = \delta_a(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_a(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}(a \in A_k)\,,$$

torej je:

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \sum_{a\in\Omega} f(a)\,\mathbf{1}(a \in A) = \\
&= \sum_{a\in\Omega} f(a) \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}(a \in A_k) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{a\in\Omega} f(a)\,\mathbf{1}(a \in A_k) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)\,.
\end{aligned}$$

19. Ker je prazna množica števna, je $\mu(\emptyset) = 0$. Naj bo zdaj $A_1, A_2, \ldots$ zaporedje paroma disjunktnih množic z unijo A. Če so vse množice A_k števne, je tudi A števna. Tedaj velja $\mu(A) = 0$ in $\mu(A_k) = 0$ za vse k, torej $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = 0$. Če pa obstaja tak l, da je A_l komplement števne množice, so vse ostale množice A_k, $k \ne l$, števne, saj so podmnožice števne množice A_l^c. Torej je $\mu(A_l) = 1$ in $\mu(A_k) = 0$ za vse $k \neq l$. Tudi množica A je komplement števne množice, saj je tudi A^c podmnožica števne množice A_l^c, torej je $\mu(A) = 1$. Sledi $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = 1$. V vsakem primeru je $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

20. Zveza $f(\omega) > g(\omega)$ velja natanko tedaj, ko obstaja tako racionalno število $c \in \mathbb{Q}$, da je $f(\omega) > c > g(\omega)$. Torej je:

$$\{\omega\ ;\ f(\omega) > g(\omega)\} = \bigcup_{c \in \mathbb{Q}} \{\omega\ ;\ f(\omega) > c > g(\omega)\}\,.$$

Sledi $\mu\big(\{\omega\ ;\ f(\omega) > g(\omega)\}\big) \leq \sum_{c \in \mathbb{Q}} \mu\big(\{\omega\ ;\ f(\omega) > c > g(\omega)\}\big) = 0$, torej tudi $\mu\big(\{\omega\ ;\ f(\omega) > g(\omega)\}\big) = 0$.

21. Vzemimo $\Omega = \mathbb{N}$, za σ-algebro vzemimo potenčno množico, μ pa naj bo mera, ki šteje. Nadalje naj bo $A_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$. Tedaj za vse n velja $\mu(A_n) = \infty$, medtem ko je $\mu(A) = 0$, saj je $A = \emptyset$.

22. a) Opazimo, da je $\mathcal{P}$ particija množice Ω. Vse unije množic iz $\mathcal{P}$ so torej disjunktne. Označimo družino teh unij (vključno s prazno unijo) z $\mathcal{U}$. Velja torej $\mathcal{U} = \big\{\bigcup S\ ;\ S \subseteq \mathcal{P}\big\}$. Očitno je $\mathcal{U} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$. Družina $\mathcal{U}$ pa je tudi σ-algebra: vsebuje prazno množico, je zaprta za unije, ker so unije disjunktne, pa velja tudi $\big(\bigcup S\big)^c = \bigcup(\mathcal{P} \setminus S)$. To pa pomeni, da je tudi $\mathcal{U} \supseteq \sigma(\mathcal{A})$. Sklep: $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{U}$.

b) Najprej bomo pokazali, da za vsak $A \in \mathcal{A}$ in vsak $B \in \mathcal{R}$ velja $A \cap B \in \mathcal{R}$. Po predpostavki to velja, če je $B \in \mathcal{A}$. Nadalje opazimo, da za poljubni množici $B \supseteq C$, za kateri je $A \cap B \in \mathcal{R}$ in $A \cap C \in \mathcal{R}$, velja $A \cap B \supseteq A \cap C$, torej je tudi $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = A \cap (B \setminus C) \in \mathcal{R}$. Z indukcijo dobimo, da res za vsak $A \in \mathcal{A}$ in vsak $B \in \mathcal{R}$ velja $A \cap B \in \mathcal{R}$.

Nadalje pokažimo, da za vsak $A \in \mathcal{R}$ in vsak $B \in \mathcal{R}$ velja $A \cap B \in \mathcal{R}$. Za primer, ko je $A \in \mathcal{A}$, smo to pravkar dokazali. Vzemimo sedaj množico $C \in \mathcal{R}$ ter poljubni množici $A \supseteq B$, za kateri je $A \cap C \in \mathcal{R}$ in $B \cap C \in \mathcal{R}$. Spet velja $A \cap C \supseteq B \cap C$, torej je tudi $(A \cap C) \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap C \in \mathcal{R}$. Z indukcijo dobimo zahtevano trditev.

Končno lahko za poljubni množici $A, B \in \mathcal{R}$ zapišemo $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$. Ker je $A \cap B \subseteq A$ in $A \cap B \in \mathbb{R}$, je $A \setminus B$ tudi prava razlika množic iz $\mathcal{R}$, zato pripada $\mathcal{R}$.

c) Vsako množico $D \in \mathcal{P}$ lahko zapišemo tudi v obliki $D_1 \cap \cdots \cap D_r \cap D_{r+1}^c \cap \cdots \cap D_n^c$, kjer je zaporedje $D_1, \ldots D_n$ permutacija zaporedja $A_1, \ldots, A_n$ in $r = 0, 1, \ldots, n$. Za $r = 0$ dobimo $D_1 \cap \cdots \cap D_n = A_1 \cap \cdots \cap A_n$, kar pripada $\mathcal{R}$, saj je le-ta zaprta za končne preseke. Za $r = n$ dobimo $A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c = (A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c = \emptyset$, ker prav tako pripada $\mathcal{R}$, ker je to enako $A_1 \setminus A_1$. Sicer pa lahko množico zapišemo v obliki:

$$(\tilde{D} \setminus D_{r+1}) \cap \cdots \cap (\tilde{D} \setminus D_n)\,,$$

kjer je $\tilde{D} = D_1 \cap \cdots \cap D_r$. Ker je $\mathcal{R}$ zaprta za končne preseke in razlike, mora vsebovati tudi množico D.

d) Če je μ pozitivna mera, $A \supseteq B$ merljivi množici in $\mu(B) < \infty$, je $\mu(A \setminus B) =$

$\mu(A) - \mu(B)$. Od tod z indukcijo dobimo, da se poljubni meri, ki se na $\mathcal{A}$ ujemata in sta tam končni, ujemata tudi na $\mathcal{R}$, torej tudi na $\mathcal{P}$. V točki a) smo videli, da je vsaka množica iz $\sigma(\mathcal{A})$ disjunktna unija množic iz $\mathcal{P}$; ta unija pa je tudi končna, saj je množica $\mathcal{P}$ končna. To pa pomenim da se morata poljubni meri, ki se ujemata na $\mathcal{P}$, ujemati tudi na $\sigma(\mathcal{A})$.

e) Vzemimo $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ in $\mathcal{A} = \big\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\big\}$. Ni težko preveriti, da je $\sigma(\mathcal{A}) = 2^\Omega$. Seveda $\mathcal{A}$ pokrije Ω. Definirajmo $\mu(A) := \delta_1(A)+\delta_4(A)$ in $\nu(A) := \delta_2(A) + \delta_3(A)$. Ni težko preveriti, da sta μ in ν pozitivni meri. Velja $\mu\big(\{1, 2\}\big) = \nu\big(\{1, 2\}\big) = \mu\big(\{1, 3\}\big) = \nu\big(\{1, 3\}\big) = 1$ in $\mu\big(\{1, 2, 3, 4\}\big) = \nu\big(\{1, 2, 3, 4\}\big) = 2$, torej se μ in ν ujemata na $\mathcal{A}$. Ne ujemata pa se na $\sigma(\mathcal{A}) = 2^\Omega$, saj je $\mu\big(\{1\}\big) = 1$, medtem ko je $\nu\big(\{1\}\big) = 0$.

23. a) Definirajmo $C_n := A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$. Velja:

$$C_n = \bigcup_{(a_1,\ldots,a_n)\in\{0,1\}^n} \left[2\sum_{k=1}^n a_k 3^{-k}\,,\ 2\sum_{k=1}^n a_k 3^{-k} + 3^{-n}\right],$$

kar je unija 2^n disjunktnih intervalov dolžine 3^{-n}, torej ima Lebesgueovo mero $(2/3)^n$. Ker je $C = \bigcap_{n=1}^\infty C_n$, je $\lambda_1(C) = \lim_{n\to\infty} \lambda_1(C_n) = 0$.

b) Posplošimo konstrukcijo na naslednji način: izberimo zaporedje števil $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \ldots) \in \left(0, \frac{1}{2}\right)^{\mathbb{N}}$ in definirajmo:

$$C_n^{\boldsymbol{q}} := \bigcup_{(a_1,\ldots,a_n)\in\{0,1\}^n} \left[\sum_{k=1}^n a_k q_1 q_2 \cdots q_{k-1}(1-q_k)\,, \sum_{k=1}^n a_k q_1 q_2 \cdots q_{k-1}(1-q_k) + q_1 q_2 \cdots q_n\right].$$

Prvi dve množici:

$$\begin{aligned} C_1^{\boldsymbol{q}} &= [0, q_1] \cup [1 - q_1, 1]\,,\\ C_2^{\boldsymbol{q}} &= [0, q_1 q_2] \cup [q_1(1 - q_2), q_1] \cup [1 - q_1, 1 - q_1 + q_1 q_1] \cup [1 - q_1 q_2, 1]\,. \end{aligned}$$

To je unija 2^n disjunktnih intervalov dolžine $q_1 q_2 \cdots q_n$, torej ima Lebesgueovo mero $2^n q_1 q_2 \cdots q_n$; standardno Cantorjevo množico dobimo za $q_n = \frac{1}{3}$. Če zdaj izberemo padajoče zaporedje $1 = l_0 > l_1 > l_2 > \cdots$ in izberemo $q_n := \frac{l_n}{2 l_{n-1}}$, ima množica $C_n^{\boldsymbol{q}}$ dolžino l_n. Množice $C_n^{\boldsymbol{q}}$ še vedno tvorijo padajoče zaporedje, torej ima njihov presek $C^{\boldsymbol{q}} := \bigcap_{n=1}^\infty C_n^{\boldsymbol{q}}$ Lebesgueovo mero $l := \lim_{n\to\infty} l_n$, ne vsebuje pa nobenega intervala.

Na ta način smo za poljuben $l \in [0, 1)$ konstruirali poljubno množico, ki ima Lebesgueovo mero l in ne vsebuje nobenega intervala. Za poljuben $k > 0$ ima množica $k\, C^{\boldsymbol{q}}$ dolžino kl. Tako torej konstruiramo množico s poljubno končno Lebesgueovo mero, ki ne vsebuje nobenega intervala. Množico z neskončno Lebesgueovo mero, ki ne vsebuje nobenega intervala, pa dobimo tako, da za določen $l > 0$ vzamemo unijo $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \big(C^{\boldsymbol{q}} + n\big)$.

Opomba. Če še ne vemo, da je $\lambda_1(kA + b) = |k|\, \lambda_1(A)$, lahko prejšnje sklepanje še vedno utemeljimo s tem, da je $\lambda_1\big(C_n^{\boldsymbol{q}} + n\big) = l_n$.

24. Ker je množica racionalnih števil števna, jo lahko zapišemo v obliki $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$. Množica $U := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigl(q_n - 2^{-n}, q_n + 2^{-n}\bigr)$ je prav tako povsod gosta, a tudi odprta. Ker je $U \supseteq \bigl(q_1 - \frac{1}{2}, q_1 + \frac{1}{2}\bigr)$, je $\lambda_1(U) \geq 1$, velja pa tudi $\lambda_1(U) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_1\Bigl(\bigl(q_n - 2^{-n}, q_n + 2^{-n}\bigr)\Bigr) = 2$. Množica $\frac{l}{\lambda_1(U)} U$ ima torej Lebesgueovo mero l ter je prav tako odprta in povsod gosta.

2. Lebesgueov integral

1. *Prvi način*: iz $f = 0 \cdot \mathbf{1}_{(-\infty,1]} + 1 \cdot \mathbf{1}_{(1,3]} + 4 \cdot \mathbf{1}_{(3,5]} + 1 \cdot \mathbf{1}_{(5,8]} + 0 \cdot \mathbf{1}_{(8,\infty)}$ dobimo $\int f \, \mathrm{d}\lambda_1 = 0 \cdot \infty + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot \infty = 13$.

Drugi način: iz $f = 1 \cdot \mathbf{1}_{(1,3] \cup [5,8)} + 4 \cdot \mathbf{1}_{(3,5]}$ dobimo $\int f \, \mathrm{d}\lambda_1 = 1 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = 13$.

Tretji način: iz $f = 1 \cdot \mathbf{1}_{(1,8]} + 3 \cdot \mathbf{1}_{(3,5]}$ dobimo $\int f \, \mathrm{d}\lambda_1 = 1 \cdot 7 + 3 \cdot 2 = 13$.

2. a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_k$.

b) Iz zapisa $f = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \, \mathbf{1}_{(k-1,n]}$ dobimo:

$$\int f_n \, \mathrm{d}\lambda_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{k} = (n+1)H_n - n \, .$$

Torej je:

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n \, .$$

3. Naj bo $f(x) := 1/x^2$; to gledamo kot funkcijo, ki slika iz $(0,1] v [0,\infty]$. Za vsak $\varepsilon \in (0,1]$ lahko ocenimo $0 \le s_\varepsilon \le f$, kjer je:

$$s_\varepsilon(x) := \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^2} & ; \, 0 < x \le \varepsilon \\ 0 & ; \, \varepsilon < x \le 1 \, . \end{cases}$$

Torej je $\displaystyle\int_{(0,1]} \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}\lambda_1(x) = \int f \, \mathrm{d}\lambda_1 \ge \int s_\varepsilon \, \mathrm{d}\lambda_1 = \frac{1}{\varepsilon}$. Ker to velja za vsak $\varepsilon \in (0,1]$, ni druge možnosti, kot da je $\displaystyle\int_{(0,1]} \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}\lambda_1(x) = \infty$.

4. Funkcija $f(x) = x^2 \, \mathbf{1}(0 \le x < 2)$ je limita naslednjega naraščajočega zaporedja enostavnih funkcij:

$$f_n := \sum_{k=0}^{2 \cdot 2^n - 1} \left(k \cdot 2^{-n}\right)^2 \mathbf{1}_{[k \cdot 2^{-n}, (k+1) \cdot 2^{-n})} \, .$$

Izračunajmo:

$$\int f_n \, \mathrm{d}\lambda_1 = \sum_{k=0}^{2 \cdot 2^n - 1} \left(k \cdot 2^{-n}\right)^2 \cdot 2^{-n} = 2^{-3n} \sum_{k=0}^{2 \cdot 2^n - 1} k^2 \, .$$

Spomnimo se, da je:

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \, , \qquad \sum_{k=0}^{m-1} k^2 = \frac{m(m-1)(2m-1)}{6} \, .$$

Torej je:

$$\int f_n \, \mathrm{d}\lambda_1 = 2^{-3n} \cdot \frac{2 \cdot 2^n \big(2 \cdot 2^n - 1\big)\big(4 \cdot 2^n - 1\big)}{6} = \frac{\big(2 - 2^{-n}\big)\big(4 - 2^{-n}\big)}{3}$$

in po izreku o monotoni konvergenci dobimo $\displaystyle\int_{[0,2)} x^2 \, \mathrm{d}\lambda_1(x) = \int f \mathrm{d}\lambda_1 = \frac{8}{3}$.

5. Velja:

$$\int f_n \, \mathrm{d}\mu_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{a}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{a}{n}\right)^k = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n .$$

Iz zapisa:

$$f_n(k) = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) a^k$$

je razvidno, da funkcije f_n tvorijo naraščajoče zaporedje, ki po točkah konvergira k funkciji $f(k) := \frac{a^k}{k!}$. Velja:

$$\int f_n \, \mathrm{d}\mu_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} .$$

Izrek o monotoni konvergenci nam torej pove, da je:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} .$$

To sta dve možni definiciji naravne eksponentne funkcije $\exp(a)$.

Opomba. Dokazana zveza ne velja le za $a \ge 0$, temveč tudi za poljuben kompleksen a, možne pa so tudi nadaljnje posplošitve, npr. na Banachove algebre.

6. Naj bo $P := \{\omega \,;\, f(\omega) > 0\}$. Funkcija f je skoraj povsod enaka nič natanko tedaj, ko je $\mu(P) = 0$. Če je slednje res, je $f \le \infty \cdot \mathbf{1}_P$, torej je $\int f \, \mathrm{d}\mu \le \int \big(\infty \cdot \mathbf{1}_P\big) \, \mathrm{d}\mu = \infty \cdot \mu(P) = \infty \cdot 0 = 0$.

Privzemimo sedaj obratno, torej da je $\int f \, \mathrm{d}\mu = 0$. Velja $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, kjer je $P_n = \big\{\omega \,;\, f(\omega) \ge \frac{1}{n}\big\}$. Velja tudi $f \ge \frac{1}{n} \mathbf{1}_{P_n}$, torej je $0 = \int f \, \mathrm{d}\mu \ge \int \big(\frac{1}{n} \mathbf{1}_{P_n}\big) \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{n} \mu(P_n)$, od koder sledi $\mu(P_n) = 0$. Iz subaditivnosti sledi $\mu(P) = 0$.

7. Če definiramo funkcije $f_n \colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ po predpisu:

$$f_n(x) := \begin{cases} \big(1 - \frac{x}{n}\big)^n x^{\beta - 1} & ;\ 0 < x < n \\ 0 & ;\ x > n \,, \end{cases}$$

zaradi ujemanja Riemannovega in Lebesgueovega integrala velja:

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{\beta - 1} \, \mathrm{d}x = \int_{(0,n)} f_n \, \mathrm{d}\lambda_1 = \int_{(0,\infty)} f_n \, \mathrm{d}\lambda_1 .$$

Funkcije f_n slikajo v $[0, \infty)$. Pokažimo, da tvorijo nepadajoče zaporedje, t. j. da za vsak $x > 0$ in vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$. Če je $x > n$, je $f_n(x) = f_{n+1}(x) = 0$.

Če je $n < x \le n+1$, je $0 = f_n(x) \le f_{n+1}(x)$. Preostane še pokazati, da za vse $0 \le x < n$ velja $\bigl(1 - \frac{x}{n}\bigr)^n \le \bigl(1 - \frac{x}{n+1}\bigr)^{n+1}$. To gre na vsaj dva načina.

Prvi način. Neenakost logaritmiramo in dobimo $n \ln\bigl(1-\frac{x}{n}\bigr) \le (n+1)\ln\bigl(1-\frac{x}{n+1}\bigr)$. Za vsak $x > 0$ definirajmo funkcijo $g_x\colon\ (x,\infty) \to \mathbb{R}$ po predpisu $g_x(\alpha) := \alpha \ln\bigl(1 - \frac{x}{\alpha}\bigr)$. Njen odvod je enak:

$$\ln\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) + \frac{1}{1 - \frac{x}{\alpha}}\,\frac{x}{\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^k \ge 0\,,$$

od koder sledi, da so funkcije g_x nepadajoče, torej zahtevana neenakost res velja.

Drugi način. Neenakost zapišemo v obliki $\bigl(1 - \frac{x}{n}\bigr)^{-n} \ge \bigl(1 - \frac{x}{n+1}\bigr)^{-n-1}$ in razvijemo:

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k}\left(-\frac{x}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 + \frac{k}{n}\right).$$

Iz slednje oblike se vidi, da je zgornji izraz nenaraščajoča funkcija spremenljivke n, torej zahtevana neenakost velja.

Zdaj lahko uporabimo izrek o monotoni konvergenci – velja:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{\beta-1}\,\mathrm{d}x &= \int_{(0,\infty)} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{\beta-1}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_{(0,\infty)} e^{-x}\,x^{\beta-1}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^{\infty} x^{\beta-1}\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \\
&= \Gamma(\beta)\,.
\end{aligned}$$

8. Izrazimo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n} &= 1 - \mathbf{1}_{(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)^{\mathrm{c}}} = \\
&= 1 - \mathbf{1}_{A_1^{\mathrm{c}}\cap A_2^{\mathrm{c}}\cap\cdots\cap A_n^{\mathrm{c}}} = \\
&= 1 - \mathbf{1}_{A_1^{\mathrm{c}}}\,\mathbf{1}_{A_2^{\mathrm{c}}}\cdots\mathbf{1}_{A_n^{\mathrm{c}}} = \\
&= 1 - (1 - \mathbf{1}_{A_1})(1 - \mathbf{1}_{A_2})\cdots(1 - \mathbf{1}_{A_n}) = \\
&= 1 - 1 + \mathbf{1}_{A_1} + \mathbf{1}_{A_2} + \cdots + \mathbf{1}_{A_n} - \\
&\qquad - \mathbf{1}_{A_1\cap A_2} - \mathbf{1}_{A_1\cap A_3} - \cdots - \mathbf{1}_{A_{n-1}\cap A_n} + \\
&\qquad + \mathbf{1}_{A_1\cap A_2\cap A_3} + \mathbf{1}_{A_1\cap A_2\cap A_4} + \cdots + \mathbf{1}_{A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n} - \\
&\qquad\qquad \cdots \\
&\qquad + (-1)^{n+1}\,\mathbf{1}_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}
\end{aligned}$$

Zdaj pa integriramo po meri μ, upoštevamo linearnost integrala in dobimo.

9. Iz izreka o ujemanju Lebesgueovega in Riemannovega integrala sledi:

$$\int_{1+1/n}^{\infty} \frac{1}{x^2 + \sin(x/n)} \, \mathrm{d}x = \int_{(1,\infty)} f_n \, \mathrm{d}\lambda \,,$$

kjer je:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & ; 1 \le x \le 1 + a \\ \frac{1}{x^2+\sin(x/n)} & ; x > 1 + 1/n \end{cases}$$

Mimogrede opazimo, da so funkcije f_n dobro definirane. Za $1 < x \le \pi$ namreč velja $\sin(x/n) \ge 0$, torej imenovalec ni enak nič. Še več, lahko ocenimo $f_n(x) \le \frac{1}{x^2}$. Za $x > \pi$ pa je imenovalec enak najmanj $\pi^2 - 1$ in torej prav tako ne more biti enak nič. Tokrat lahko ocenimo $f_n(x) \le \frac{1}{x^2-1}$. Za vse $n \in \mathbb{N}$ in vse $x \in (1, \infty)$ je torej:

$$f_n(x) \le F(x) := \begin{cases} \frac{1}{x^2} & ; 1 \le x \le \pi \\ \frac{1}{x^2-1} & ; x \ge \pi \,. \end{cases}$$

Funkcija F pripada $L^1\big(\lambda_1\big|_{(1,\infty)}\big)$, saj je:

$$\int_1^{\pi} \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x + \int_{\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 1} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\bigg|_1^{\pi} + \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}\bigg|_{\pi}^{\infty} = 1 - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \ln \frac{\pi + 1}{\pi - 1} < \infty \,.$$

Torej lahko uporabimo izrek o dominirani konvergenci, po katerem je:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{1+1/n}^{\infty} \frac{1}{x^2 + \sin(x/n)} \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{(1,\infty)} f_n \, \mathrm{d}\lambda_1 = \int_{(1,\infty)} f \, \mathrm{d}\lambda_1 = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = 1 \,.$$

10. Po vpeljavi substitucije iz namiga in ureditvi dobimo:

$$\Gamma(a) \, \frac{e^a}{a^{a-1/2}} = \int_{-\sqrt{a}}^{\infty} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{a}}\right)^{a-1} e^{-u\sqrt{a}} \, \mathrm{d}u \,.$$

Po izreku o ujemanju Riemannovega in Lebesgueovega integrala lahko zapišemo tudi $\Gamma(a) = \int_{\mathbb{R}} g_a \, \mathrm{d}\lambda_1$, kjer je:

$$g_a(u) = \begin{cases} 0 & ; u \le -\sqrt{a} \,, \\ \big(1 + \frac{u}{\sqrt{a}}\big)^{a-1} e^{-u\sqrt{a}} & ; u > -\sqrt{a} \,. \end{cases}$$

Iz namiga razberemo, da za $u > -\sqrt{a}$ velja:

$$\frac{1}{1 + \frac{u}{\sqrt{a}}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\big(1 - \frac{u_-}{\sqrt{a}}\big)}\right) \le g_a(u) \le \frac{1}{1 + \frac{u}{\sqrt{a}}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\big(1 + \frac{u_+}{\sqrt{a}}\big)}\right) .$$

Tako zgornja kot spodnja meja za $g_a(u)$ gresta za fiksen u proti $g(u) := e^{-u^2/2}$, ko gre a proti neskončno (prej ali slej je $u > -\sqrt{a}$). Pokažimo še, da so funkcije g_a za $a \ge 4$ enakomerno omejene s funkcijo, ki je v $L^1(\lambda_1)$. Za $u \ge 0$ ocenimo:

$$g_a(u) \le \exp\left(-\frac{u^2}{2 + u}\right) ,$$

za $-\sqrt{a} < u < 0$ pa najprej ocenimo:

$$\ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{a}}\right) \le \frac{u}{\sqrt{a}} - \frac{u^2}{2a}\,,$$

nato:

$$(a-1)\ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{a}}\right) \le u\sqrt{a} - \frac{u^2}{2} - \frac{u}{\sqrt{a}} + \frac{u^2}{2a} \le u\sqrt{a} - \frac{3u^2}{8} - \frac{u}{2}\,,$$

in končno:

$$g_a(u) \le \exp\left(-\frac{3u^2}{8} - \frac{u}{2}\right).$$

Ta ocena avtomatično velja tudi za $u \le -\sqrt{a}$. Za vse $a \ge 4$ torej velja $g_a(u) \le G(u)$, kjer je:

$$G(u) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{3u^2}{8} - \frac{u}{2}\right) & ;\ u < 0\,, \\ \exp\left(-\frac{u^2}{2+u}\right) & ;\ u \ge 0\,. \end{cases}$$

Preverimo, da je $G \in L^1(\lambda_1)$. Ker je G pozitivna in omejena, je dovolj preveriti, da obstajata posplošena Riemannova integrala $\int_{-\infty}^{-2} G(u)\,\mathrm{d}u = \int_2^\infty G(-v)\,\mathrm{d}v$ in $\int_2^\infty G(u)\,\mathrm{d}u$. Za $u \ge 2$ velja $G(u) \le e^{-u^2/(u+u)} \le e^{-u/2}$ in integral $\int_2^\infty e^{-u/2}\,\mathrm{d}u$ obstaja. Za $v \ge 2$ pa velja $G(-v) = e^{v/2-3v^2/8} \le e^{v/2-3v/4} \le e^{-v/4}$ in integral $\int_2^\infty e^{-v/4}\,\mathrm{d}v$ spet obstaja. Torej je res $G \in L^1(\lambda_1)$.

Izrek o dominirani konvergenci uporabimo tako, da vzamemo poljubno zaporedje $a_1, a_2, a_3, \ldots$ števil, večjih ali enakih 4, ki gredo proti neskončno. Za vse $u \in \mathbb{R}$ velja $\lim_{n\to\infty} g_{a_n}(u) = e^{-u^2/2}$ in $|g_{a_n}(u)| \le G(u)$, torej so pogoji izreka izpolnjeni in velja $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_{a_n}\,\mathrm{d}\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}} g\,\mathrm{d}\lambda_1$. Sledi:

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to\infty} \Gamma(a)\,\frac{e^a}{a^{a-1/2}} &= \int_{\mathbb{R}} g\,\mathrm{d}\lambda_1 = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \\
&= 2\int_0^\infty e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \\
&= \sqrt{2}\int_0^\infty x^{-1/2}e^{-x}\,\mathrm{d}x = \\
&= \sqrt{2}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \\
&= \sqrt{2\pi}\,.
\end{aligned}$$

11. Če dano vsoto označimo z $F(a)$, velja:

$$F(a) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{a^{2n}}{n!} \int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{a^{2n}}{n!}\, t^{2n}\,\mathrm{d}t\,,$$

kar utemeljimo z izrekom o ujemanju Lebesgueovega in Riemannovega integrala ter s tem, da je:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \left| (-1)^n \frac{a^{2n}}{n!} t^{2n} \right| \mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{n!} \int_0^1 t^{2n} \, \mathrm{d}t = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{n!\,(2n+1)} \le \\
&\le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{n!} = \\
&= e^{a^2} < \infty \,.
\end{aligned}
$$

Nadaljujemo račun, tako da seštejemo eksponentno vrsto:

$$
F(a) = \int_0^1 e^{-a^2 t^2} \, \mathrm{d}t \,.
$$

Za $a \neq 0$ z vpeljavo substitucije $z = at\sqrt{2}$ dobimo:

$$
F(a) = \frac{1}{a\sqrt{2}} \int_0^{a\sqrt{2}} e^{-z^2/2} \, \mathrm{d}z = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \, \Phi\big(a\sqrt{2}\big) \,,
$$

za $a = 0$ pa neposredno iz prvotne definicije z vsoto dobimo, da je $F(0) = 0$.

Opomba. Iz definicije z vrsto in nekaj osnovne teorije vrst sledi, da je F definirana na vsej realni osi in tam tudi zvezna (da se celo razširiti v celo analitično funkcijo). Pri izražavi z Gaussovom verjetnostnim integralom pa smo funkcijo v izhodišču izračunali posebej. A s pomočjo L'Hôpitalovega pravila lahko zveznost funkcije F v izhodišču razberemo tudi iz končne oblike (limita, ko gre a proti nič, je v resnici kar odvod funkcije Φ v izhodišču, pomnožen s $\sqrt{2\pi}$, slednje pa je enako 1).

Opomba. Iz definicije z vrsto vidimo tudi, da je funkcija F soda. To se prav tako vidi tudi iz končne oblike in lihosti funkcije Φ.

3. Operacije z merami

1. Funkcija f slika v $[0,\infty]$. Za $x \in [n,n+1)$ je $f(x) = 2^n$, torej lahko funkcijo na $[0,\infty)$ zapišemo v obliki $f = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \, \mathbf{1}_{[n,n+1)}$. Sledi:

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\infty)} f \, \mathrm{d}(g \cdot \lambda_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,\infty)} 2^n \, \mathbf{1}_{[n,n+1)} \, \mathrm{d}(g \cdot \lambda_1) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (g \cdot \lambda_1)\big([n,n+1)\big) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \int_{[n,n+1)} g \, \mathrm{d}\lambda_1 = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \int_n^{n+1} 3^{-x} \, \mathrm{d}x = \\
&= \frac{2}{3 \ln 3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = \\
&= \frac{2}{\ln 3} \, .
\end{aligned}$$

2. Naj bo $\nu := \mu_f$. Dovolj je za vsak $y \in \mathbb{N}_0$ izračunati $\nu(\{y\}) = \mu\big\{\varphi^{-1}(y)\big\}$. Če je y popoln kvadrat, t. j. $y = x^2$, kjer je $x \in \mathbb{N}_0$, je $\nu(\{y\}) = \mu(\{-x,x\}) = \mu(\{x\}) + \mu(\{-x\})$, sicer pa je $\nu(\{y\}) = 0$. Tako dobimo:

$$\nu(\{0\}) = 4 \, , \quad \nu(\{1\}) = 5 \, , \quad \nu(\{4\}) = 8 \, ,$$

za vse $y \notin \{0,1,4\}$ pa je $\nu(\{y\}) = 0$. Sledi $\nu = 4\,\delta_0 + 5\,\delta_1 + 8\,\delta_4$.

Opomba. Enako mero bi dobili tudi, če bi za Ω in Ω' vzeli realno os z Borelovo σ-algebro.

3. Mero $\nu := (\lambda_1)_\varphi$ bomo najprej izračunali na dveh vrstah intervalov:

- Če je $0 < a < b$, je $\nu\big([a,b]\big) = \lambda_1\big([\ln a, \ln b]\big) = \ln b - \ln a$.
- Če je $a < b \le 0$, pa je $\nu\big([a,b]\big) = \lambda_1(\emptyset) = 0$.

Opazimo, da v obeh primerih velja $\nu\big([a,b]\big) = \int_{[a,b]} g \, \mathrm{d}\lambda_1$, kjer je:

$$g(y) = \begin{cases} 0 & ; \, y \le 0 \\ \frac{1}{y} & ; \, y > 0 \, . \end{cases}$$

Z drugimi besedami, na vseh intervalih $[a,b]$, kjer je bodisi $0 < a < b$ bodisi $a < b \le 0$, se mera ν ujema z mero $g \cdot \lambda_1$. Družina teh intervalov pa je zaprta za končne neprazne preseke, generira Borelovo σ-algebro, meri ν in $g \cdot \lambda_1$ pa sta na vseh množicah iz te družine končni. Poleg tega intervali $[-n,0]$ in $\left[\frac{1}{n}, n\right]$ iz te družine pokrijejo realno os. Sledi $\nu = g \cdot \lambda_1$.

4. Mero $\nu := (\lambda_1)_\varphi$ bomo najprej izračunali na treh vrstah množic:

- Če je $0 < a < b$ in $B = [a, b]$, je:

$$\nu(B) = (g \cdot \lambda_1)\big([\sqrt{a}, \sqrt{b}\,]\big) = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \operatorname{arctg}\sqrt{b} - \operatorname{arctg}\sqrt{a}\,.$$

- Če je $a < b < 0$ in spet $B = [a, b]$, je $\nu(B) = (g \cdot \lambda_1)(\emptyset) = 0$.
- Če pa je $B = \{0\}$, je:

$$\nu(B) = (g \cdot \lambda_1)\big((\infty, 0]\big) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Opazimo, da za vse množice B iz družine:

$$\mathcal{A} := \big\{[a, b]\ ;\ 0 < a < b\big\} \cup \big\{[a, b]\ ;\ a < b < 0\big\} \cup \big\{\{0\}\big\}$$

velja $\nu(B) = \frac{\pi}{2}\,\mathbf{1}(0 \in B) + \int_B g\,\mathrm{d}\lambda_1$, kjer je:

$$g(y) = \begin{cases} 0 & ;\ y \le 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}(1 + y)} & ;\ y > 0\,. \end{cases}$$

Z drugimi besedami, na vseh množicah iz družine $\mathcal{A}$ se mera ν ujema z mero $\frac{\pi}{2}\,\delta_0 + g \cdot \lambda_1$. Družina $\mathcal{A}$ pa je zaprta za končne neprazne preseke, generira Borelovo σ-algebro, meri ν in $\frac{\pi}{2}\,\delta_0 + g \cdot \lambda_1$ pa sta na vseh množicah iz te družine končni. Poleg tega množice $\big[-n, -\frac{1}{n}\big]$, $\{0\}$ in $\big[\frac{1}{n}, n\big]$ iz družine $\mathcal{A}$ pokrijejo realno os. Sledi $\nu = \frac{\pi}{2}\,\delta_0 + g \cdot \lambda_1$.

5. Porazdelitev slučajne spremenljivke X je mera $\mu := g \cdot \lambda_1$, kjer je:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\,.$$

Porazdelitev slučajne spremenljivke Y pa je mera $\nu := \mu_\varphi$, kjer je $\varphi(x) = (x - 1)^2$. Funkcija φ je definirana in tudi zvezno odvedljiva na množici $B := \mathbb{R}$, odvod pa je različen od nič na odprti množici $D := \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Velja $\lambda_1(B \setminus D) = \lambda_1(\{1\}) = 0$, torej je tudi $(g \cdot \lambda_1)(B \setminus D) = 0$. Sledi $\nu = h \cdot \lambda_1$, kjer za $y > 0$ velja:

$$\begin{aligned} h(y) &= \sum_{\substack{x \ne 1 \\ (x-1)^2 = y}} \frac{g(x)}{|\varphi'(x)|} = \\ &= \sum_{x \in \{1+\sqrt{y}, 1-\sqrt{y}\}} \frac{g(x)}{|\varphi'(x)|} = \\ &= \frac{g\big(1 + \sqrt{y}\,\big)}{\big|\phi'\big(1 + \sqrt{y}\,\big)\big|} + \frac{g\big(1 - \sqrt{y}\,\big)}{\big|\phi'\big(1 + \sqrt{y}\,\big)\big|} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}} \Big(e^{-(1+\sqrt{y})^2/2} + e^{-(1-\sqrt{y})^2/2}\Big)\,, \end{aligned}$$

za $y \le 0$ pa lahko postavimo $h(y) = 0$. Slučajna spremenljivka Y je torej porazdeljena zvezno z gostoto:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi y}}\Big(e^{-(1+\sqrt{y})^2/2} + e^{-(1-\sqrt{y})^2/2}\Big) & ; \; y > 0 \\ 0 & ; \text{ sicer} \end{cases}$$

6. Funkcija φ je sicer strogo naraščajoča in bijektivno realno os na realno os, toda njen inverz $\varphi^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ ni povsod zvezno odvedljiv. Toda ker je $(g \cdot \lambda_1)(\{0\}) = 0$, lahko funkcijo φ zožimo na odprto množico $D := \mathbb{R} \setminus \{0\}$: če je φ_1 ustrezna zožitev, je $(g \cdot \lambda_1)_\varphi = (g \cdot \lambda_1)_{\varphi_1}$. Funkcija φ_1 množico D bijektivno preslika spet na D. Njen inverz φ_1^{-1} je tam zvezno odvedljiv z odvodom $\varphi_1^{-1}(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$. Sledi $(g \cdot \lambda_1)_\varphi = h \cdot \lambda_1$, kjer je $h(y) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{y^2}$.

7. Porazdelitev slučajne spremenljivke X je mera $\mu := g \cdot \lambda_1$, kjer je:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\,.$$

Porazdelitev slučajne spremenljivke Y pa je mera $\nu := \mu_\varphi$, kjer je $\varphi(x) = (x-1)^2$. Funkcija φ je definirana na celi realni osi, ni pa injektivna in tudi ne obstaja odprta množica D, na kateri bi bila φ injektivna in za katero bi veljalo še $(g \cdot \nu)(\mathbb{R} \setminus D) = 0$.

Pač pa je možno mero μ razdeliti: velja $\mu = \mu_1 + \mu_2$, kjer je $\mu_1 = g_1 \cdot \lambda_1$, $\mu_2 = g_2 \cdot \lambda_1$ in:

$$g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\,\mathbf{1}(x < 1)\,, \qquad g_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\,\mathbf{1}(x > 1)\,.$$

Naj bo φ_1 zožitev funkcije φ na odprto množico $D_1 := (-\infty, 1)$, φ_2 pa zožitev funkcije φ na odprto množico $D_2 := (1, \infty)$. Ker je $\mu_1(\mathbb{R} \setminus D_1) = \mu_2(\mathbb{R} \setminus D_2) = 0$, je:

$$\mu_\varphi = (\mu_1)_\varphi + (\mu_2)_\varphi = (\mu_1)_{\varphi_1} + (\mu_2)_{\varphi_2}\,.$$

Funkcija φ_1 oziroma φ_2 bijektivno preslika množico D_1 oziroma D_2 na odprto množico $D_1' = D_2' := (0, \infty)$. Nadalje je:

$$\varphi_1^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y}\,, \qquad \varphi_2^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y}$$

in obe funkciji sta na $(0, \infty)$ zvezno odvedljivi z odvodoma:

$$\big(\varphi_1^{-1}\big)'(y) = -\frac{1}{2\sqrt{y}}\,, \qquad \big(\varphi_2^{-1}\big)'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\,.$$

Sledi $(\mu_1)_{\varphi_1} = h_1 \cdot \lambda_1$ in $(\mu_2)_{\varphi_2} = h_2 \cdot \lambda_1$, kjer je:

$$h_1(y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}}\, e^{-(1+\sqrt{y})^2/2}\,\mathbf{1}(y > 0)\,, \qquad h_2(y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}}\, e^{-(1-\sqrt{y})^2/2}\,\mathbf{1}(y > 0)\,.$$

Seštejemo in dobimo, da je slučajna spremenljivka Y porazdeljena zvezno z gostoto:

$$h(y) = h_1(y) + h_2(y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}}\Big(e^{-(1-\sqrt{y})^2/2} + e^{-(1+\sqrt{y})^2/2}\Big)\,\mathbf{1}(y > 0)\,.$$

8. a) Funkcija φ je definirana na odprti množici $D := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a na njej ni injektivna in tudi ne obstaja odprta množica D, na kateri bi bila φ injektivna in za katero bi veljalo še $(g \cdot \nu)(\mathbb{R} \setminus D) = 0$. Pač pa je možno mero $g_{a,b} \cdot \lambda_1$ razdeliti: če definiramo $D_1 := (-\infty, 0)$ in $D_2 := (0, \infty)$ ter $g_{a,b,1} := g_{a,b} \cdot \mathbf{1}_{D_1}$ in $g_{a,b,2} := g_{a,b} \cdot \mathbf{1}_{D_2}$, velja $g_{a,b} = g_{a,b,1} + g_{a,b,2} \cdot \mathbf{1}_{D_2}$ in posledično tudi $g_{a,b} \cdot \lambda_1 = g_{a,b,1} \cdot \lambda_1 + g_{a,b,2} \cdot \lambda_1$. Naj bo φ_1 zožitev funkcije φ na D_1, φ_2 pa zožitev funkcije φ na množico D_2. Ker je $(g_{a,b,1} \cdot \lambda_1)(\mathbb{R} \setminus D_1) = (g_{a,b,2} \cdot \lambda_1)(\mathbb{R} \setminus D_2) = 0$, je:

$$(g_{a,b} \cdot \lambda_1)_\varphi = (g_{a,b,1} \cdot \lambda_1)_\varphi + (g_{a,b,2} \cdot \lambda_1)_\varphi = (g_{a,b,1} \cdot \lambda_1)_{\varphi_1} + (g_{a,b,2} \cdot \lambda_1)_{\varphi_2} .$$

Množici D_1 in D_2 sta odprti in funkciji φ_1 in φ_2 ju bijektivno preslikata na realno os. Krajši račun pokaže, da je:

$$\varphi_1^{-1}(y) = \frac{y - \sqrt{y^2 + 4ab}}{2a} , \qquad (\varphi_1^{-1})'(y) = \frac{1}{2a} - \frac{y}{2a\sqrt{y^2 + 4ab}} ,$$
$$\varphi_2^{-1}(y) = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4ab}}{2a} , \qquad (\varphi_2^{-1})'(y) = \frac{1}{2a} + \frac{y}{2a\sqrt{y^2 + 4ab}} .$$

(opazimo, da je $\sqrt{y^2 + 4ab} > |y|$ ter zato $\varphi_1^{-1}(y) < 0$, $\varphi_2^{-1}(y) > 0$, $(\varphi_1^{-1})'(y) > 0$ in $(\varphi_2^{-1})'(y) > 0$). Nadalje opazimo še, da je:

$$g_{a,b}(x) = e^{-(ax-b/x)^2 - 2ab} .$$

Sledi $(g_{a,b,1} \cdot \lambda_1)_{\varphi_1} = h_{a,b,1} \cdot \lambda_1$ in $(g_{a,b,2} \cdot \lambda_1)_{\varphi_2} = h_{a,b,2} \cdot \lambda_1$, kjer je:

$$h_{a,b,1}(y) = \left(\frac{1}{2a} - \frac{y}{2a\sqrt{y^2 + 4ab}} \right) e^{-y^2 - 2ab} ,$$
$$h_{a,b,2}(y) = \left(\frac{1}{2a} + \frac{y}{2a\sqrt{y^2 + 4ab}} \right) e^{-y^2 - 2ab} .$$

Seštejemo in dobimo $(g_{a,b} \cdot \lambda_1)_\varphi = h_{a,b} \cdot \lambda_1$, kjer je:

$$h_{a,b}(y) = \frac{1}{a} \, e^{-y^2 - 2ab} .$$

b) Velja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2 - b^2/x^2} \, \mathrm{d}x = (g_{a,b} \cdot \lambda_1)(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = (g_{a,b} \cdot \lambda_1)\big(\varphi^{-1}(\mathbb{R})\big) = (g_{a,b} \cdot \lambda_1)_\varphi(\mathbb{R}) =$$
$$= \frac{1}{a} \, e^{-2ab} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \, \mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \, e^{-2ab} .$$

Opomba. Zgornji izračun integrala je v resnici uvedba nove spremenljivke, preoblečena v teorijo mere in potiske. Izračun bi bil v osnovi enak, če bi integral najprej razdelili na dva dela (od $-\infty$ do 0 in od 0 do ∞), nakar bi uvedli novo spremenljivko $y = ax - \frac{b}{x}$.

9. Funkcija φ je definirana na celi realni osi, ni pa injektivna in tudi ne obstaja odprta množica D, na kateri bi bila φ injektivna in za katero bi veljalo še $(g \cdot \nu)(\mathbb{R} \setminus D) = 0$. Pač pa je možno mero $\mu := g \cdot \lambda_1$ razdeliti: velja $\mu = \mu_1 + \mu_2$, kjer je $\mu_1 = g_1 \cdot \lambda_1$, $\mu_2 = g_2 \cdot \lambda_1$ in:

$$g_1(x) = \frac{1}{1+x^2}\,\mathbf{1}(x > 0)\,, \qquad g_2(x) = \frac{1}{1+x^2}\,\mathbf{1}(x \le 0)\,.$$

Naj bo φ_1 zožitev funkcije φ na množico $D_1 := (0, \infty)$, φ_2 pa zožitev funkcije φ na množico $D_2 := (-\infty, 0]$. Ker je $(g_1 \cdot \lambda_1)(\mathbb{R} \setminus D_1) = (g_2 \cdot \lambda_1)(\mathbb{R} \setminus D_2) = 0$, je $(\mu_1)_\varphi = (\mu_1)_{\varphi_1}$ in $(\mu_2)_\varphi = (\mu_2)_{\varphi_2}$.

Funkcija φ_1 bijektivno preslika odprto množico D_1 na odprto množico $D_1' := (0, \infty)$, njen inverz $\varphi_1^{-1}(y) = \sqrt{y}$ pa je zvezno odvedljiv z odvodom $\left(\varphi_1^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$. Sledi $(\mu_1)_{\varphi_1} = h_1 \cdot \lambda_1$, kjer je:

$$h_1(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}(1+y)} & ; y > 0 \\ 0 & ; y \le 0\,. \end{cases}$$

Funkcija φ_2 pa je konstantna in potisk mere μ_2 vzdolž nje izračunamo neposredno:

$$(\mu_2)_{\varphi_2}(B) = \mu_2\big(\varphi_2^{-1}(B)\big)\,.$$

Če je $0 \in B$, je $\varphi_2^{-1}(B) = (-\infty, 0]$ in:

$$(\mu_2)_{\varphi_2}(B) = \mu_2\big(\varphi_2^{-1}(B)\big) = \int_{(-\infty,0]} g_2 \,\mathrm{d}\lambda_1 = \int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Če je pa $0 \in B$, je $\varphi_2^{-1}(B) = \emptyset$ in $\mu_2\big(\varphi_2^{-1}(B)\big) = \emptyset$. Sledi $(\mu_2)_{\varphi_2}(B) = \mu_2\big(\varphi_2^{-1}(B)\big) = \frac{\pi}{2}\,\mathbf{1}(0 \in B) = \frac{\pi}{2}\,\delta_0(B)$, torej je $(\mu_2)_{\varphi_2} = \delta_0$. Iskana mera pa je enaka:

$$\mu_\varphi = \mu_{1\varphi_1} + \mu_{2\varphi_2} = h_1 \cdot \lambda_1 + \frac{\pi}{2}\,\delta_0\,.$$

10. Porazdelitev slučajnega vektorja (X, Y) je mera $\mu := g \cdot \lambda_2$, kjer je:

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi}\,e^{-(x^2+y^2)/2}\,.$$

Preslikava $\varphi(x, y) = \left(\sqrt{x^2+y^2},\ \arg(x, y)\right)$ je sicer naravno definirana na $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, toda njena slika $(0, \infty) \times (-\pi, \pi]$ ni odprta množica. Če pa preslikavo φ zožimo na množico odprto množico $D := \mathbb{R}^2 \setminus \big((-\infty, 0] \times \{0\}\big)$, je slika $D' := \varphi(D) = (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ odprta množica. Na potisku se to ne bo poznalo, saj je $P\big((X, Y) \notin D\big) = (g \cdot \lambda_1)(\mathbb{R}^2 \setminus D) = 0$, ker je tudi $\lambda_1(\mathbb{R}^2 \setminus D) = 0$.

Velja:

$$\varphi^{-1}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)\,.$$

Preslikava φ^{-1} je na D' parcialno zvezno odvedljiva z Jacobijevo determinanto:

$$J\varphi^{-1} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\,.$$

Porazdelitev slučajnega vektorja (R, Θ) je torej mera $\mu_\varphi = h \cdot \lambda_2$, kjer je:

$$h(r, \theta) = \frac{r}{2\pi}\, e^{-r^2/2}\, \mathbf{1}(r > 0,\ -\pi < \theta < \pi)\,.$$

Z drugimi besedami, slučajni vektor (R, Θ) je porazdeljen zvezno z gostoto h. To pomeni tudi, da sta R in Θ neodvisni, pri čemer je Θ porazdeljena enakomerno na intervalu $(-\pi, \pi)$, R pa zvezno z gostoto $f_R(r) = r\, e^{-r^2/2}\, \mathbf{1}(r > 0)$.

Opomba. Tako je možno generirati psevdonaključna števila z normalno porazdelitvijo. Če sta namreč U in V neodvisni slučajni spremenljivki, porazdeljeni enakomerno na intervalu $(0, 1)$, izračunamo:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{-2\ln U}\,, & \Theta &= \pi(2V - 1)\,, \\ X &= R\cos\Theta\,, & Y &= R\sin\Theta\,. \end{aligned}$$

Da se preveriti, da imata v tem primeru R in Θ ustrezni porazdelitvi. Tako sta potem tudi X in Y neodvisni in porazdeljeni standardno normalno.

4. Mera in konvergenca

1. a) Brž ko je $n \geq x$, je $f_n(x) = 0$, zato za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Zaporedje torej konvergira ne le skoraj povsod, temveč prav povsod.

Nadalje za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $\lambda_1\big(\{x\,;\,|f_n(x)| \geq 1\}\big) = 1$, torej zaporedje ne konvergira po meri. Ker ne konvergira po meri, tudi ne konvergira v $L^p(\lambda_1)$.

b) Brž ko je $x < 0$ ali $n \geq -\log_3 x$, je $f_n(x) = 0$, zato za vsak $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ velja $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Za $x = 0$ pa zaporedje divergira, a še vedno konvergira skoraj povsod.

Za vsak $\varepsilon > 0$ velja $\{x\,;\,|f_n(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq \big[0, 3^{-n}\big]$, torej je $\lambda_1\big(\{x\,;\,|f_n(x)| \geq \varepsilon\}\big) \leq 3^{-n}$, od koder sledi $\lim_{n\to\infty} \lambda_1\big(\{x\,;\,|f_n(x)| \geq \varepsilon\}\big) = 0$, torej zaporedje konvergira po meri.

Za $p \in (0, \infty)$ velja $\int_{\mathbb{R}} |f_n|^p \mathrm{d}\lambda_1 = 2^{np}\, 3^{-n} = e^{n(p \ln 2 - \ln 3)}$, kar gre proti nič natanko tedaj, ko je $p < \ln 3/\ln 2$. Nadalje, če je $\mu(E^{\mathrm{c}}) = 0$, ima E z vsakim intervalom $\big[0, 3^{-n}\big]$ neprazen presek, torej je $\sup_{x\in E} |f_n(x)| = 2^n$, potem pa zaporedje na E ne konvergira enakomerno. Sklep: Zaporedje konvergira v $L^p(\lambda_1)$ natanko tedaj, ko je $p < \ln 3/\ln 2$.

c) Ker za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $|f_n(x)| \leq 1/n$, zaporedje proti nič konvergira enakomerno, od koder sledi, da konvergira v $L^\infty(\lambda_1)$, skoraj povsod in po meri. Nadalje za $p \in (0, \infty)$ velja:

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n|^p \,\mathrm{d}\lambda_1 = \frac{1}{n^p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-px^2/n^3} \,\mathrm{d}x = \frac{n^{3/2}}{n^p} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}\,,$$

kar gre proti nič natanko tedaj, ko je $p > 3/2$: natanko za te p zaporedje konvergira v $L^p(\lambda_1)$.

d) Če je $x < 0$, je $f_n(x) = 0$, brž ko je $n > -\frac{1}{x}$. Nadalje za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $f_n(x) = 1$. Če pa je $x > 0$, je $f_n(x) = e^{-n^2 x}$. Sledi, da zaporedje konvergira proti nič skoraj povsod (prav povsod pa konvergira proti $\mathbf{1}_{\{0\}}$).

Ker za vsak $\varepsilon \in (0, 1]$ velja $\{x\,;\,|f_n(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq \big[-\frac{1}{n}, \frac{\ln \varepsilon}{n^2}\big]$, je $\lambda_1\big(\{x\,;\,|f_n(x)| \geq \varepsilon\}\big) \leq \frac{1}{n} + \frac{\ln \varepsilon}{n^2}$, od koder sledi, da zaporedje konvergira po meri.

Če je $\mu(E^{\mathrm{c}}) = 0$, ima E z intervalom $\big[-\frac{1}{n}, 0\big]$ neprazen presek. Sledi $\sup_{x\in E} |f_n(x)| \geq 1$, torej zaporedje na množici E ne more enakomerni konvergirati proti nič. Zaporedje torej v $L^\infty(\lambda_1)$ ne konvergira proti nič.

Za $p \in (0, \infty)$ pa velja:

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n|^p \,\mathrm{d}\lambda_1 = \int_{-1/n}^{\infty} e^{-pn^2 x} \,\mathrm{d}x = \frac{e^{np}}{n^2 p}\,,$$

kar gre vselej proti neskončno, ko gre n proti neskončno. Zaporedje torej za noben p ne konvergira proti nič v $L^p(\lambda_1)$.

e) Če je $x \leq 0$, je $f_n(x) = 0$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Če pa je $x > 0$, je $|f_n(x)| \leq 1/n$, torej zaporedje povsod konvergira proti nič.

Za vsak $x \in \mathbb{R}$ in vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $|f_n(x)| \le 1$. Toda če je $0 < \varepsilon < 1$ in $\mu(E^{\mathrm{c}}) = 0$, ima E z intervalom $\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n\varepsilon}\right]$ neprazen presek. Sledi $\sup_{x\in E} |f_n(x)| \ge \varepsilon$. Torej zaporedje funkcij f_n na E ne konvergira enakomerno, potem pa ne konvergira v $L^\infty(\lambda_1)$.

Za $p \in (0,\infty) \setminus \{1\}$ pa velja:

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n|^p \,\mathrm{d}\lambda_1 = \frac{1}{n^p} \int_{1/n}^{n} x^{-p} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-p}\left(n^{1-2p} - n^{-1}\right)$$

in nadalje velja:

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n| \,\mathrm{d}\lambda_1 = \frac{1}{n} \int_{1/n}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{2\ln n}{n}\,.$$

Sledi, da zaporedje konvergira v $L^p(\lambda_1)$ natanko tedaj, ko je $\frac{1}{2} < p < \infty$. Torej konvergira tudi po meri.

Povzetek:

	skoraj povsod	po meri	v L^p
a)	DA	NE	za noben p
b)	DA	DA	za $p < \ln 3/\ln 2$
c)	DA	DA	za $p > 3/2$
d)	DA	DA	za noben p
e)	DA	DA	za $\frac{1}{p} < p < \infty$

2. Ker je $XY \ge 1$, je $Y \ge 1/X$. Ker je funkcija $\varphi(x) = 1/x$ konveksna na $(0,\infty)$, po Jensenovi neenakosti velja $E(Y) \ge E(1/X) \ge 1/\,E(X)$.

3. Definirajmo:

$$\varphi(x) := \begin{cases} x^2 & ; x \le 1 \\ 2x - 1 & ; x \ge 1\,. \end{cases}$$

Funkcija φ je odvedljiva, njen odvod:

$$\varphi'(x) := \begin{cases} 2x & ; x \le 1 \\ 2 & ; x \ge 1 \end{cases}$$

pa je nepadajoča funkcija, zato je φ konveksna. Nadalje opazimo naslednje:

- Za $x \le 1$ je $\varphi(x) = x^2 = \min\{x, x^2\} = \min\{2x, x^2\}$.
- Za $x \ge 1$ je $\varphi(x) = 2x - 1 \ge x = \min\{x, x^2\}$.
- Za $1 \le x \le 2$ je $\varphi(x) = 2x - 1 \le x^2 = \min\{2x, x^2\}$.
- Za $x \ge 2$ je $\varphi(x) = 2x - 1 \le 2x = \min\{2x, x^2\}$.

Sledi $\min\{x, x^2\} \le \varphi(x) \le \min\{2x, x^2\}$ (izkaže se, da je φ *edina* funkcija, ki ustreza vsem zahtevam). Po Jensenovi neenakosti je:

$$\min\left\{E(X), \big(E(X)\big)^2\right\} = \varphi\big(E(X)\big) \le E\big[\varphi(X)\big] \le E\big[\min\left\{2X, X^2\right\}\big] .$$

4. Ker je $\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = 1$ in je f nenegativna funkcija, je $P := g \cdot \lambda_1$, kjer je $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, verjetnostna mera na $(0, \infty)$. Neenakost prepišemo v obliki:

$$\int_0^\infty x\, g(x)\,\mathrm{d}x \le \left(\int_0^\infty x^4 g(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/4} .$$

Če je X kar identiteta na $(0, \infty)$, torej slučajna spremenljivka s porazdelitvijo P, neenakost dobi obliko:

$$E(X) \le \big[E(X^4)\big]^{1/4}$$

oziroma:

$$\big[E(X)\big]^4 \le E(X^4)\,,$$

kar je Jensenova neenakost za konveksno funkcijo $\varphi(x) = x^4$.

5. Produktne mere

1. Z odvajanjem:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln(x^2 + t^2) = \frac{2t}{x^2 + t^2}$$

dobimo:

$$\int_0^\infty \ln \frac{x^2 + b^2}{x^2 + a^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \int_a^b \frac{2t}{x^2 + t^2} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \, .$$

Najprej privzemimo, da je $0 \le a \le b$. Tedaj imamo opravka z integralom nenegativne funkcije:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^2 + b^2}{x^2 + a^2} \, \mathrm{d}x &= \int_{(0,\infty)} \int_{(a,b)} \frac{2t}{x^2 + t^2} \, \mathrm{d}\lambda_1(t) \, \mathrm{d}\lambda_1(x) = \\
&= \int_{(0,\infty)\times(a,b)} \frac{2t}{x^2 + t^2} \, \mathrm{d}(\lambda_1 \times \lambda_1)\big(t, x\big) = \\
&= \int_{(a,b)} \int_{(0,\infty)} \frac{2t}{x^2 + t^2} \, \mathrm{d}\lambda_1(x) \, \mathrm{d}\lambda_1(t) = \\
&= \int_a^b \int_0^\infty \frac{2t}{x^2 + t^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \\
&= \int_a^b \pi \, \mathrm{d}t = \\
&= \pi(b - a) \, .
\end{aligned}$$

Upoštevajoč, da tako začetni kot tudi končni izraz prevrže znak, če zamenjamo a in b, dobimo, da enakost velja za poljubna $a, b \ge 0$. Za splošna realna a, b pa velja:

$$\int_0^\infty \frac{x^2 + b^2}{x^2 + a^2} \, \mathrm{d}x = \pi\big(|b| - |a|\big) \, .$$

2. Najprej izračunamo nedoločeni integral:

$$\int f(x, y) \, \mathrm{d}y = \frac{\ln(x + y) - \ln(1 + y)}{1 - x} + C =: I(y) + C$$

(velja, če je $y > -1$ in $y > -x$). Krajši račun pokaže, da je:

$$\frac{2 \ln(1 + x) - \ln(4x)}{1 - x} = I(1) - I(x) \, ,$$

torej je

$$\int_0^1 \frac{2 \ln(1 + x) - \ln(4x)}{1 - x} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \int_x^1 f(x, y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \, .$$

Funkcija f je za $0 < x < 1$ in $x < y < 1$ oziroma za $0 < x < y < 1$ nenegativna, torej po Tonellijevem izreku velja:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2\ln(1+x) - \ln(4x)}{1-x}\,\mathrm{d}x &= \iint_{0<x<y<1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_0^1 \int_0^y \frac{1}{(1+y)(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(2y) - \ln y}{1+y}\,\mathrm{d}y = \\ &= (\ln 2)^2\,.\end{aligned}$$

3. Spet najprej izračunamo nedoločeni integral:

$$\int f(x,y)\,\mathrm{d}y = \frac{(xy-1)\,e^{xy}}{x^2} + C =: I(y) + C\,.$$

Krajši račun pokaže, da je:

$$\frac{2\ln(1+x) - \ln(4x)}{1-x} = I(1) - I(-1)\,,$$

torej je

$$\int_0^1 \frac{(x-1)\,e^x + (x+1)\,e^{-x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_{-1}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,.$$

Ker je funkcija f na zaprtem pravokotniku $[0,1] \times [-1,1]$ zvezna, je omejena. Ker je tudi omenjeni pravokotnik omejen, je $f \in L^1\big(\lambda_2\big|_{[0,1]\times[-1,1]}\big)$ (in spomnimo se še, da je $\lambda_2 = \lambda_1 \times \lambda_1$). Po Fubinijevem izreku je:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(x-1)\,e^x + (x+1)\,e^{-x}}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \iint_{\substack{0\le x\le 1\\ -1\le y\le 1}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_{-1}^1 \int_0^1 y\,e^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_{-1}^1 \big(e^x - 1\big)\,\mathrm{d}x = \\ &= e - e^{-1} - 2\,.\end{aligned}$$