VPRAŠANJA:

22.6.2005

4. FATOUJEVA LEMA ✓

(a) Formuliraj Fatoujevo lemo!

Naj bodo $f_n : X \longrightarrow [0,\infty]$ merljive funkcije, $n \in \mathbb{N}$

Potem velja: $\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} (\int_X f_n) d\mu$

(b) Dokaži lemo! Izreka LMK ni potrebno dokazati.

Definirajmo zaporedje $g_n := \inf_{k \geq n} f_k$. Potem je po definiciji $\liminf_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n$ in $\{g_n\}$ je naraščajoče zaporedje.

Ker je $g_n \leq f_n$, je $\int_X f_n \, d\mu \geq \int_X g_n \, d\mu$ in je zato

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu \overset{g_n \uparrow}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu \overset{LMK}{=} \int_X \lim_{n\to\infty} g_n \, d\mu =$$
$$= \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \qquad \square.$$

(c) Naj bo μ mera štetja točk na množici naravnih števil. Izračunaj levo in desno stran v neenakosti za zaporedje funkcij $f_n = \chi_{\{n\}}$ ($n \in \mathbb{N}$). Vse izračune natančno utemelji!

$f_n = \chi_{\{n\}}$

$\int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu = \int_{\mathbb{N}} \chi_{\{n\}} \, d\mu = 1$

$\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ s.p.

$$\int_{\mathbb{N}} \underbrace{(\liminf_{n\to\infty} \chi_{\{n\}})}_{\| \atop 0} d\mu \overset{?}{\leq} \underbrace{\liminf_{n\to\infty}}_{\| \atop 1} (\underbrace{\int_X \chi_{\{n\}}}_{1}) d\mu \quad ✓$$

$k = 7$

$f_1(7) = \chi_{\{1\}}(7) = 0$
$f_2(7) = 0$
$f_3(7) = 0$
$f_4(7) = 0$
$f_5(7) = 0$
$f_6(7) = 0$
$f_7(7) = \chi_{\{7\}}(7) = 1$
$f_8(7) = 0$
$f_9(7) = 0$

$k \in \mathbb{N}$

$\{f_n(k)\}_{n\in\mathbb{N}} \to$ si pogledamo zaporedje

$f_1(k) = \chi_{\{1\}}(k) \begin{cases} 0 ; & k \neq 1 \\ 1 ; & k = 1 \end{cases}$

$\hookrightarrow 0, 0, \ldots, 0, \underset{\uparrow k}{1}, 0, 0, \ldots$

5. PRODUKTNA σ-ALGEBRA IN PRODUKTNA MERA

(a) Navedi definicije naslednjih pojmov: merljiv pravokotnik, elementarna množica, produktna σ-algebra in monotoni razred!

MERLJIV PRAVOKOTNIK: $(X,\mathcal{S})$ in $(Y,\mathcal{T})$ merljiva prostora, $\mathcal{S},\mathcal{T}$ σ-algebri. Če je $A\in\mathcal{S}$ in $B\in\mathcal{T}$, je $A\times B$ merljiv pravokotnik.

ELEMENTARNA MNOŽICA: E je el. mn., če je unija paroma disjunktnih merljivih pravokotnikov $E=P_1\cup P_2\cup\dots\cup P_m$

PRODUKTNA σ-ALGEBRA: To je najmanjša σ-algebra na $X\times Y$, ki vsebuje vse merljive pravokotnike: OZNAKA $\mathcal{S}\times\mathcal{T}$ več kot kart. produkt

MONOTONI RAZRED: Družina $\mathcal{M}$ podmnožic množice X je monoton razred, če je zaprta za unije naraščajočih zaporedij ali za preseke padajočih zaporedij:

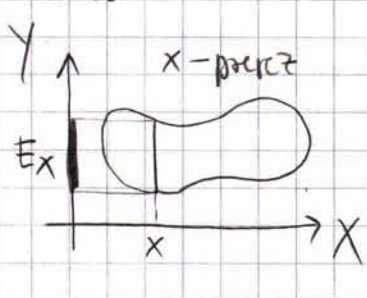
$$A_1\subseteq A_2\subseteq A_3\subseteq\dots,\ A_i\in\mathcal{M}\Rightarrow\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{M}$$

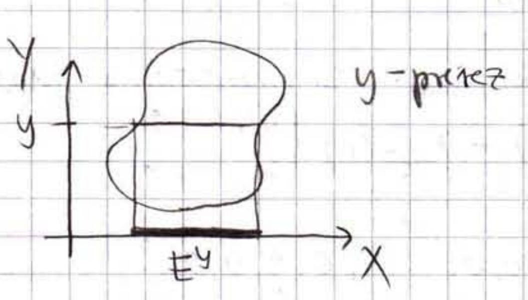
$$B_1\supseteq B_2\supseteq B_3\supseteq\dots,\ B_i\in\mathcal{M}\Rightarrow\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i\in\mathcal{M}$$

(Vsaka σ-algebra je monoton razred)

(b) Kako opišemo produktno σ-algebro v družini vseh monotonih razredov? Kateka ni potrebno dokazati!

- $\left.\begin{array}{l} E_x=\{y\in Y;\ (x,y)\in E\}\ \text{x-prerez mn. } E \\ E^y=\{x\in X,\ (x,y)\in E\}\ \text{y-prerez mn. } E\end{array}\right\}\ E\subseteq X\times Y$
- Če $E\in\mathcal{S}\times\mathcal{T}\Rightarrow E_x\in\mathcal{T}\ \forall x\in X$ in $E^y\in\mathcal{S}\ \forall y\in Y$
- $\mathcal{S}\times\mathcal{T}$ je najmanjši monoton razred, ki vsebuje vse elementarne množice.





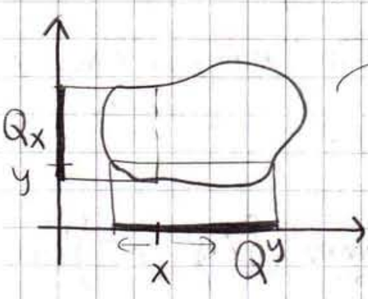
(c) Navedi mali Fubinijev izrek in potem definicijo produktne mere! S sliko utemelji smiselnost definicije.

MALI FUBINI: $(X, \mathcal{S}, \mu)$ in $(Y, \mathcal{T}, \lambda)$ σ-končna merljiva prostora in μ, λ pozitivni meri. Za $Q \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$ definirajmo funkciji $\varphi(x) := \lambda(Q_x), x \in X$ in $\psi(y) := \mu(Q^y), y \in Y$. Potem je φ $\mathcal{S}$-merljiva in ψ je $\mathcal{T}$-merljiva in velja:

$$\int_X \varphi \, d\mu = \int_Y \psi \, d\lambda$$

PRODUKTNA MERA:

$$\begin{array}{ccc} (\mu \times \lambda)(Q) := \int_X \lambda(Q_x)\, d\mu(x) & = & \int_Y \mu(Q^y)\, d\lambda(y) \\ \| & & \| \\ \int_X d\mu(x) \int_Y \chi_Q(x,y)\, d\lambda(y) & & \int_Y d\lambda(y) \int_X \chi_Q(x,y)\, d\mu(x) \end{array}$$



Fiksiramo npr. x, pogledamo Q_x, $\lambda(Q_x)$ in potem seštejemo po vseh x-ih. Izrek pove, da je vseeno ali najprej integriramo po x ali po y. (potrebna je le σ-končnost).

(d) Ali je produktna mera σ-končna? Odgovor utemelji.

DA. Naj bo $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, kjer je $\mu(X_n) < \infty \ \forall n$. Naj bo $Y = \bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m$, kjer je $\lambda(Y_m) < \infty \ \forall m$. Potem je: $X \times Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} X_n \times Y_m$ in $(\mu \times \lambda)(X_n \times Y_m) = \mu(X_n) \cdot \lambda(Y_m) < \infty \ \forall n, m$.

5.9.2005 **4.** **LEBESGUEOV IZREK O DOMINIRANI KONVERGENCI (LDK)**

(a) Formuliraj izrek LDK!

Naj bodo $\{f_n\}$ kompleksne merljive funkcije in naj za $\forall x \in X$ velja: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Naj $\exists$ funkcija $g \in L^1(\mu)$ taka, da je $|f_n(x)| \leq g(x)$ za $\forall x \in X$ in $\forall n \in \mathbb{N}$.

Potem je $\underset{①}{f \in L^1(\mu)}$, $\underset{②}{\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0}$ in $\underset{③}{\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu}$

(b) Dokaži izrek! Za katero zaporedje funkcij se uporabi Fatoujeva lema (ki je ni potrebno dokazati)?

① ker je $|f| \leq g$, je $\int_X |f| d\mu \leq \int_X g d\mu < \infty$, torej $f \in L^1(\mu)$ ✓

② za $\forall n \in \mathbb{N}$ velja $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq g + g = 2g$, zato je funkcija $h_n := 2g - |f_n - f|$ nenegativna merljiva. Po Fatoujevi lemi je

$\int_X \liminf_{n\to\infty} h_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X h_n d\mu$. $\Rightarrow$

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} (2g - |f_n - f|) d\mu = \int_X \cancel{2g} d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X \cancel{2g} d\mu - \int_X |f_n - f| d\mu \right)$$

$$0 \leq - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu \quad \text{oz.} \quad \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu \leq 0$$

$0 \leq \liminf \int |f_n - f| d\mu \leq \limsup \int |f_n - f| d\mu \leq 0 \Rightarrow$ liminf in limsup sta enaka 0, torej limita obstaja in je enaka 0.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

③ za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni: \int_X |f_n - f| d\mu < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$. Potem pa za $\forall n \geq n_0$ velja: $\left|\int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu\right| = \left|\int_X (f_n - f) d\mu\right| \leq \int_X |f_n - f| d\mu < \varepsilon$, torej je $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$

Fatoujeva lema se uporabi za zaporedje $h_n := 2g - |f_n - f|$

(c) Naj bo μ mera štetja točk na množici naravnih števil $\mathbb{N}$. Ali za zaporedje funkcij $f_n = 2^{-n}\cdot \chi_{\{1,2,\dots,n\}}$ $(n\in\mathbb{N})$ veljajo predpostavke izreka LDK? Ali veljajo zaključki izreka?

PREDPOSTAVKE: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n}\chi_{\{1,\dots,n\}}(x) = 0,\ x\in\{1,\dots,\infty\}$

$$\text{Naj bo } g = 1 \Rightarrow |f_n(x)| = 2^{-n} = \frac{1}{2^n} \le \underset{g}{\overset{\shortparallel}{1}} \checkmark$$

ZAKLJUČKI: $\int\limits_{\mathbb{N}} g\,d\mu = \int\limits_{\mathbb{N}} 1\,\chi_{\{1,\dots,n\}}\,d\mu = n < \infty$

$$\int\limits_{\mathbb{N}} |f|\,d\mu = 0,\ f\in L^1(\mu)$$

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{N}} |f_n - f|\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{N}} f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\{1,\dots,n\}} \frac{1}{2^n}\cdot\chi_{\{1,2,\dots,n\}}\,d\mu =$$

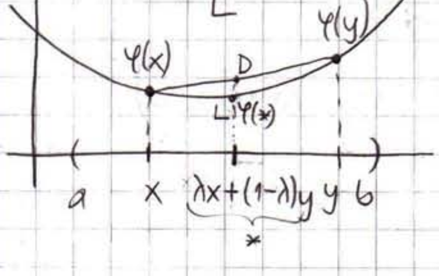
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\,\mu(\{1,\dots,n\}) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = 0 \quad \checkmark$$

5. JENSENOVA NEENAKOST:

(a) Kdaj pravimo, da je realna funkcija φ na (a,b) $(-\infty \le a < b \le \infty)$ konveksna? Definicijo konveksnosti prikaži tudi grafično! Kako za neskončnokrat odvedljivo funkcijo φ najlažje ugotovimo ali je konveksna?

Funkcija $\varphi: (a,b)\to\mathbb{R}$ je konveksna, če je:

$$\underbrace{\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y)}_{L} \le \underbrace{\lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)}_{D};\quad x,y\in(a,b),\ \lambda\in[0,1].$$



Izračunamo φ'' in preverimo $\varphi'' > 0$.

(b) Formuliraj izrek o Jensenovi neenakosti! Izreka ni potrebno dokazati.

Naj bo μ verjetnostna mera na $(X,\mathcal{A})$, torej $\mu(X) = 1$. Naj bo $f\in L^1(\mu)$ realna in $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}$ konveksna. Če je $f(x)\in(a,b)$ $\forall x\in X$, potem je $\varphi\left(\int\limits_X f\,d\mu\right) \le \int\limits_X (\varphi\circ f)\,d\mu$.

(c) Z uporabo izreka izpelji neenakost med aritmetično in geometrično sredino pozitivnih števil $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Naj bo $X = \{p_1, \dots, p_m\}$ in $\mu(\{p_k\}) = \alpha_k > 0$, $k = 1, \dots, m$. Ker je $\mu(X) = 1$, je $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1$. Po Jensenovi neenakosti sledi:

$\varphi\left(\sum_{k=1}^{m} f(p_k)\cdot\alpha_k\right) \leq \sum_{k=1}^{m} \varphi(f(p_k))\cdot\alpha_k$. Če pišemo $x_k := f(p_k)$, $k = 1, \dots, m$,

potem dobimo: $\varphi\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \varphi(x_k)$. Vzemimo $\varphi(x) = e^x$,

$\Rightarrow e^{\sum_{k=1}^{m}\alpha_k x_k} \leq \alpha_1 e^{x_1} + \dots + \alpha_m e^{x_m}$, $x_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_k \geq 0$ in $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1$.

Če pišemo $y_k := e^{x_k} \Rightarrow y_1^{\alpha_1} \cdot y_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot y_m^{\alpha_m} \leq \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_m y_m$, $\forall y_k > 0$.

Če vzamemo za $\alpha_k = \frac{1}{m}$, $\forall k$, dobimo:

$$\sqrt[m]{y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_m} \leq \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_m}{m}.$$

✓

19.9.2005 $\boxed{4.}$ $\boxed{\text{NORMIRAN PROSTOR } L^\infty(\mu)}$ ✓

(a) Kako je definirana L^∞-norma $\|f\|_\infty$ merljive funkcije $f : X \to \mathbb{C}$?

$\|f\|_\infty := \text{ess sup}(|f|) \to$ bistveni supremum(f)

$S = \{\alpha \geq 0 ; \mu(f^{-1}((\alpha, \infty])) = 0\}$, $f(x) \in (\alpha, \infty] \Leftrightarrow f(x) > \alpha$

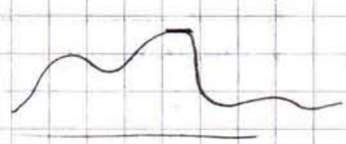
$$\|f\|_\infty = \begin{cases} \inf S ; & S \neq \emptyset \\ \infty ; & S = 0 \end{cases}$$

(b) Pokaži, da je $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ skoraj za vsak $x \in X$

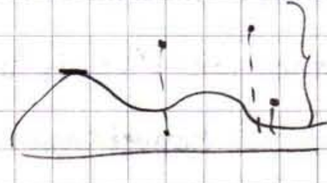
$|f(x)| \leq \text{ess sup}|f| = \|f\|_\infty$ skoraj povsod

(v nekaj točkah to ne velja - a je tam mera 0)

Če f zvezna: gledamo $\sup_{x \in X} |f(x)|$



Če f ni zvezna:



točke imajo mero 0

(c) Katere lastnosti norme veljajo za L^∞-normo in katera v splošnem ne velja? Dokaži vse lastnosti, ki veljajo.

- $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

$|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ s.p. in $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ s.p. $\Rightarrow$

$\Rightarrow |(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ s.p.

$\Rightarrow \|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

- $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$

($\leq$) $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ s.p. $\Rightarrow |(\lambda f)(x)| = |\lambda| \cdot |f(x)| \leq |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$ s.p.

$\Rightarrow \|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$

($\geq$) $\lambda \neq 0$: $\|f\|_\infty = \|\frac{1}{\lambda}(\lambda f)\|_\infty \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \|\lambda f\|_\infty \quad \backslash \cdot |\lambda|$

$\Rightarrow |\lambda| \cdot \|f\|_\infty \leq \|\lambda f\|_\infty$

($=$) $\Rightarrow \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$

- $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0$ skoraj povsod
- $\|f\|_\infty \geq 0$

(d) Na kakšen način vseeno dobimo normiran prostor $L^\infty(\mu)$?

V $L^\infty(\mu)$ vpeljemo ekvivalenčno relacijo:

$f \sim g \Leftrightarrow f = g$ s.p. $[\mu]$

Torej velja tudi
- $f \sim f_1,\ g \sim g_1 \Rightarrow (f+g) \sim (f_1 + g_1)$
- $\lambda f \sim \lambda f_1 \ (\lambda \in \mathbb{C})$
- $\|f\|_\infty = \|f_1\|_\infty$

$L^\infty(\mu)/_\sim$ je vektorski prostor, ki je normiran, če definiramo

$\|[f]\|_\infty = \|f\|_\infty$

5. APROKSIMACIJA MERLJIVIH FUNKCIJ Z ENOSTAVNIMI IN ZVEZNIMI

(a) Za katera števila $p \in [1,\infty]$ je množica enostavnih merljivih funkcij iz $L^p(\mu)$ gosta v $L^p(\mu)$? Izrek formuliraj in ga dokaži!

IZREK: Naj bo $\mathcal{S}$ razred vseh enostavnih merljivih funkcij $s: X \to \mathbb{C}$ $\mu(\{x : s(x) \neq 0\}) < \infty$. Potem je $\mathcal{S}$ gost podprostor v $L^p(\mu)$ za $1 \leq p < \infty$.

DOKAZ: ① $\mathcal{S} \subseteq L^p(\mu)$ podprostor (očitno)

② $\mathcal{S}$ je gost v $L^p(\mu)$ oz. $\overline{\mathcal{S}} = L^p(\mu)$

Naj bo $f \in L^p(\mu)$ nenegativna funkcija. Potem obstaja zaporedje (po točkah) enostavnih merljivih funkcij $s_n : X \to [0,\infty)$, da $s_n \uparrow f$. Ker je $0 \leq s_n \leq f$, je $s_n \in L^p(\mu)$ in zato $s_n \in \mathcal{S}$. Ker je $0 \leq (f-s_n)^p \leq f^p$ za $\forall n \in \mathbb{N}$, je po LDK: $\lim_{n\to\infty} \int_X (f-s_n)^p \, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} (f-s_n)^p \, d\mu = 0$ (po normi)

Torej $\|f - s_n\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$ oz. $f \in \overline{\mathcal{S}}$.

Naj bo sedaj $f \in L^p(\mu)$ poljubna. Potem je $f = u + iv = u^+ - u^- + iv^+ - iv^-$, kjer so $u^\pm, v^\pm \in L^p(\mu)$ nenegativne.

Po zgornjem dokazu $\Rightarrow u^\pm, v^\pm \in \overline{\mathcal{S}}$. Ker je $\overline{\mathcal{S}}$ podprostor, je potem $f \in \overline{\mathcal{S}}$. Torej $\overline{\mathcal{S}} = L^p(\mu)$.

(b) Za katera števila $p \in [1,\infty]$ je prostor $\mathcal{C}_c(X)$ vseh zveznih funkcij s kompaktnim nosilcem gost podprostor v prostoru $L^p(X,\mu)$? Tukaj je X lokalno kompakten Hausdorffov topološki prostor in μ pozitivna Borelova mera na X, dobljena po Rieszovem izreku o reprezentaciji. Izrek samo formuliraj.

Za $1 \leq p < \infty$ je prostor $\mathcal{C}_c(X)$ gost podprostor v $L^p(\mu)$.

1.3.2006

4. FATOUJEVA LEMA

(a) ✓

(b) ✓

(c) Naj bo μ mera štetja točk na $\mathbb{N}$. Izračunaj levo in desno stran v neenakosti za zaporedje funkcij $f_n = \frac{1}{n} \chi_{\{1,2,\dots,n\}} (n \in \mathbb{N})$. Vse izračune natančno utemelji.

$f_n = \frac{1}{n} \chi_{\{1,\dots,n\}}$

$\int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu = \int_{\mathbb{N}} \frac{1}{n} \chi_{\{1,\dots,n\}} \, d\mu = \int_{\mathbb{N}} \frac{1}{n} \mu(\{1,2,\dots,n\}) = \frac{n}{n} = 1$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$ po točkah.

izberemo $k \in \mathbb{N}$ in si pogledamo zaporedje:

$\{f_n(k)\}_{n \in \mathbb{N}} : \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-1}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}, \dots$

$k = 7$
$f_1(7) = \frac{1}{1} \chi_{\{1\}}(7) = 0$
$f_2(7) = \frac{1}{2} \chi_{\{1,2\}}(7) = 0$
$f_3(7) = 0$
$f_4(7) = 0$
$f_5(7) = 0$
$f_6(7) = 0$
$f_7(7) = \frac{1}{7} \overbrace{\chi_{\{1,2,\dots,7\}}(7)}^{1} = \frac{1}{7}$
$f_8(7) = \frac{1}{8} \chi_{\{1,\dots,8\}}(7) = \frac{1}{8}$

F.L.: $\int_X \liminf_{n \to \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu$

$$\underbrace{\int_{\mathbb{N}} \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \chi_{\{1,\dots,n\}} \, d\mu}_{=0} \leq \underbrace{\liminf_{n \to \infty} \int_{\mathbb{N}} \frac{1}{n} \chi_{\{1,\dots,n\}} \, d\mu}_{=1}$$

$0 \qquad 1$

5. $\boxed{\text{KOMPLEKSNE MERE}}$ ✓

(a) Kako je definirana totalna variacija $|\mu|$ (absolutna vrednost) kompleksne mere μ? Kakšne lastnosti ima? Napiši in dokaži temeljno neenakost med merama $|\mu|$ in μ.

$|\mu|(E) = \sup \{ \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| ; \{E_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ particija za } E \}$?

to je najmanjša pozitivna mera z lastnostjo $\underbrace{|\mu(E)| \leq |\mu|(E)}_{\text{1 od lastnosti}} \ \forall E \in \mathcal{M}$

LASTNOSTI:
- $|\mu| : \mathcal{M} \to [0, \infty]$
- $|\mu|(\emptyset) = 0$
- Če je μ končna pozitivna mera $\Rightarrow |\mu| = \mu$
- Če je $E \subseteq F$, potem je $|\mu|(E) \leq |\mu|(E)$ oz. $|\mu|(E) + |\mu|(F - E) \leq |\mu|(F)$
- $|\mu|$ je pozitivna mera na $\mathcal{M}$

(b) Kako definiramo normo na vektorskem prostoru vseh kompleksnih mer na dani σ-algebri $\mathcal{M}$? Dokaži, da ima vse lastnosti norme.

V množico $M(X, \mathcal{M})$ vseh kompleksnih mer na $(X, \mathcal{M})$ vpeljemo strukturo vektorskega prostora:

- $(\lambda + \mu)(E) := \lambda(E) + \mu(E)$
- $(c\lambda)(E) := c \cdot \lambda(E)$, $\lambda, \mu \in M(X, \mathcal{M})$, $E \in \mathcal{M}$, $c \in \mathbb{C}$

$M(X, \mathcal{M})$ je normiran prostor in sicer $\|\mu\| := |\mu|(X) < \infty$

① $\|\mu\| \geq 0$: $|\mu|(X) \geq 0$ saj pozitivna mera

② $\|\mu\| = 0 \iff |\mu|(X) = 0 \iff X = \emptyset$

③ $\|\mu + \lambda\| = |\mu + \lambda|(X) \leq |\mu|(X) + |\lambda|(X) = \|\mu\| + \|\lambda\|$

④ $\|c\mu\| = |c\mu|(X) = c \cdot |\mu|(X) = c \cdot \|\mu\|$

(c) Kateremu znanemu normiranemu prostoru je izometrično izomorfen normiran prostor vseh kompleksnih mer na potenčni množici $P(\mathbb{N})$ množice naravnih števil? Odgovor utemelji!

23.6.2006 $\boxed{4.}$ FATOUJEVA LEMA

(a) ✓

(b) ✓

(c) Naj bo μ mera štetja točk na množici naravnih števil. Izračunaj levo in desno stran v neenakosti za zaporedje funkcij $f_n = \frac{1}{n}\cdot \chi_{\{1,2,3,\dots,2n\}}$ $(n\in\mathbb{N})$. Vse izračune natančno utemelji!

$$f = \frac{1}{n}\cdot \chi_{\{1,2,3,\dots,2n\}}$$

$$\int_{\mathbb{N}} f_n\, d\mu = \int_{\mathbb{N}} \frac{1}{n}\cdot \chi_{\{1,2,\dots,2n\}}\, d\mu = \int_{\mathbb{N}} \frac{1}{n}\cdot \mu(\{1,2,\dots,2n\}) = \frac{2n}{n} = 2$$

$f_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ po točkah

$\{f_n(k)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $k\in\mathbb{N}$

$$f_1(k) = \frac{1}{1}\cdot \chi_{\{1,2\}}(k) = 0$$
$$f_2(k) = \frac{1}{2}\cdot \chi_{\{1,2,3,4\}}(k) = 0$$

$\frac{k}{2}-1$

$$f_{\frac{k}{2}}(k) = \frac{1}{\frac{k}{2}}\cdot \overbrace{\chi_{\{1,2,\dots,k\}}(k)}^{1} = \frac{2}{k}$$
$$f_{\frac{k}{2}+1}(k) = \frac{1}{\frac{k}{2}+1}\cdot \overbrace{\chi_{\{1,2,\dots,k+2\}}(k)}^{1} = \frac{2}{k+2}$$

$$f_n(k) = \frac{1}{n}\cdot \overbrace{\chi_{\{1,2,\dots,2n\}}(k)}^{1} = \frac{1}{n}$$

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n)\, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X f_n\right) d\mu$$

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot \chi_{\{1,2,\dots,2n\}}\, d\mu \qquad \liminf_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{N}} \frac{1}{n}\chi_{\{1,2,\dots,2n\}}\, d\mu\right)$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$0 \qquad\qquad 2$$

$\boxed{5.}$ JENSENOVA NEENAKOST

(a) ✓

(b) ✓

(c) ✓

22.9.2006 $\boxed{4.}$ LDK

(a) ✓

(b) ✓

(c) Naj bo μ mera štetja točk na množici $\mathbb{N}$. Ali za zaporedje funkcij $f_n = \frac{1}{n} \cdot \chi_{\{n\}}$ $(n \in \mathbb{N})$ veljajo predpostavke izreka? Ali veljajo zaključki?

PREDPOSTAVKE: $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \chi_{\{n\}}(x) = 0$, $x \in \{1, \dots, \infty\}$

Naj bo $g = 1 \Rightarrow |f_n(x)| = \frac{1}{n} \leq 1$ ✓

ZAKLJUČKI: $\int_{\mathbb{N}} g \, d\mu = \int_{\mathbb{N}} 1 \cdot \chi_{\{n\}} \, d\mu = 1 < \infty$

$\int_{\mathbb{N}} |f| \, d\mu = 0$, $f \in L^1(\mu)$

$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{N}} |f_n - f| \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{N}} \frac{1}{n} \cdot \chi_{\{n\}} \, d\mu =$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \mu(\{n\}) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ ✓

$$\underbrace{\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu}_{=0} = \underbrace{\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu}_{=0} \quad ✓$$

$\boxed{5.}$ **APROKSIMACIJA MERLJIVIH FUNKCIJ Z ZVEZNIMI**

Naj bo X lokalno kompakten T_2 prostor in μ pozitivna Borelova mera na X, dobljena po Rieszovem izreku o reprezentaciji.

(a) Brez dokaza navedi Luzinov izrek!

Naj bo $f: X \to \mathbb{C}$ merljiva funkcija, $A \in \mathcal{M}$ z mero $\mu(A) < \infty$ in naj bo $f(x) = 0$ za $x \notin A$. Potem $\forall \varepsilon > 0 \; \exists g \in \mathcal{C}_c(X)$, da je $\mu(\{x \in X; f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$ in $\sup_{x \in X} |g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$

(b) Za katera števila $p \in [1,\infty]$ je prostor $\mathcal{C}_c(X)$ gost podprostor prostora $L^p(X,\mu)$? Izrek samo formuliraj. Pojasni kaj pomeni "gost podprostor". Či za kak $p \in [1,\infty]$ prostor $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ ni gost podprostor prostora $L^p(\mathbb{R})$, to tudi dokaži.

Za $1 \le p < \infty$ je prostor $\mathcal{C}_c(X)$ gost podprostor v $L^p(\mu)$.

Gost podprostor pomeni, da je njegovo zaprtje kar enako $L^p(\mu)$ oz. $\overline{\mathcal{C}_c(X)} = L^p(X,\mu)$.

$\overline{\mathcal{C}_c(\mathbb{R})} \neq L^\infty(\mathbb{R},\mu)$

<u>14. 2. 2007</u> $\boxed{4}$ FATOUJEVA LEMA

(a) ✓

(b) ✓

(c) Naj bo μ mera štetja točk na množici $\mathbb{N}$. Izračunaj levo in desno stran v neenakosti za zaporedje funkcij $f_n = \frac{1}{n} \cdot \chi_{\{1,2,\dots,n+1\}}$ $(n\in\mathbb{N})$. Vse izračune natančno utemelji!

$f_n = \frac{1}{n}\cdot \chi_{\{1,2,\dots,n+1\}}$

$$\int_{\mathbb{N}} f_n\, d\mu = \int_{\mathbb{N}} \frac{1}{n}\chi_{\{1,2,\dots,n+1\}}\, d\mu = \int_{\mathbb{N}} \frac{1}{n}\cdot \mu(\{1,2,\dots,n+1\})\, d\mu = \frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n}$$

$f_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ po točkah

$k\in\mathbb{N}$ in $\{f_n(k)\}_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow \underbrace{0,0,0,\dots,0}_{k-2},\frac{1}{k-1},\frac{1}{k},\frac{1}{k+1},\dots$

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \le \liminf_{n\to\infty}\left(\int_X f_n\right) d\mu$$

$$\int_{\mathbb{N}}\left(\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\chi_{\{1,2,\dots,n+1\}}\right)d\mu \qquad \liminf\left(\int_{\mathbb{N}}\frac{1}{n}\chi_{\{1,2,\dots,n+1\}}\,d\mu\right)$$

$$0 \qquad\qquad 1+\frac{1}{n}$$

5. PRODUKTNA σ-ALGEBRA IN PRODUKTNA MERA

(a) ✓

(b) ✓

(c) ✓

(d) Utemelji števno aditivnost produktne mere!

$\mu \times \lambda$ je pozitivna mera. Če je $Q_1, Q_2, \ldots$ particija množica Q, potem je $\chi_Q = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{Q_n}$ in zato zaradi aditivnosti integrala velja:

$$(\mu \times \lambda)(Q) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X d\mu(x) \int_Y \chi_{Q_n}(x,y)\, d\lambda(y) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu \times \lambda)(Q_n)$$

✓

15.6.2007

4. $\boxed{\text{LEBESGUEOV IZREK O MONOTONI KONVERGENCI (LMK)}}$ ✓

(a) Formuliraj izrek! Izreka ni potrebno dokazati.

Naj bo $f_n : X \to [0, \infty]$ zaporedje merljivih funkcij, za katero velja:

(1) $f_1(x) \le f_2(x) \le f_3(x) \le \ldots \quad \forall x \in X$

(2) $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$

Potem je f merljiva in velja: $\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$

(b) Katero enakost dobimo iz izreka v posebnem primeru, ko je $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje karakterističnih funkcij merljivih množic?

X, $x_0 \in X$, Diracova mera $\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1; & x_0 \in E \\ 0; & x_0 \notin E \end{cases}$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$

$f, X \to [0, \infty]$

Dobimo enakost: $\int_X f \, d\delta_{x_0} = f(x_0)$, $f = s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \chi_{A_k}$

(c) ?

5. PRODUKTNA σ-ALGEBRA IN PRODUKTNA MERA

(a) ✓

(b) ✓

(c) ✓

(d) ✓

27.8.2007

4. NORMIRAN PROSTOR $L^\infty(\mu)$

(a) ✓

(b) ✓

(c) ✓

(d) ✓

5. KONVERGENCE ZAPOREDIJ MERLJIVIH FUNKCIJ ✓

Naj bo μ pozitivna mera na X, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje kompleksnih merljivih funkcij na X in f kompleksna merljiva funkcija na X.

(a) Kdaj $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira skoraj povsod proti f in kdaj skoraj enakomerno?

- $\{f_n\} \to f$ skoraj povsod, če je $\mu(\{x : \{f_n(x)\} \not\to f\}) = 0$
- $\{f_n\} \to f$ skoraj enakomerno, če za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists E \in \mathcal{M}$ z $\mu(E^c) < \varepsilon$ $\ni:$ zaporedje $\{f_n\}$ enakomerno konvergira proti f na množici E.

(b) Katera od teh dveh konvergenc implicira drugo? Trditev tudi dokaži. S primerom pokaži, da obratna implikacija v splošnem ne velja.

Če $f_n \to f$ skoraj enakomerno $\Rightarrow$ $f_n \to f$ skoraj povsod

DOKAZ: Za $\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists E_m \in \mathcal{M} \ni: \mu(E_m^c) < \frac{1}{m}$ in $f_n \to f$ enakomerno na E_m. Definirajmo $A := \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$. Potem $f_n \to f$ po točkah na množici A. Ker je $\mu(A^c) = \mu(\bigcap_{m=1}^{\infty} E_m^c) \le \mu(E_k^c) < \frac{1}{k}$ $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu(A^c) = 0$. Torej $f_n \to f$ skoraj povsod.

PRIMER: Obratna implikacija v splošnem ne velja, saj mora biti mera μ končna. Poglejmo si primer, ko obratna imp. ne velja:
$X = \mathbb{N}$, μ mera štetja točk, $f_n = \chi_{\{n,n+1,n+2,\ldots\}}$
$f_n \to 0$ povsod, saj za $k \in \mathbb{N}$ je zaporedje $\{f_n(k)\}$ naslednje:
$\underbrace{1,1,\ldots,1}_{k},0,0,0,\ldots$, vendar pa f ne konvergira enakomerno proti f. Def. enakom. konvergence je $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ni: \forall n \geq n_0:$
$|f_n(k) - f(k)| < \varepsilon\ \forall k \in \mathbb{N}$. Dokazati želimo, da $\exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N} \ni:$
$\exists n \geq n_0 : |f_n(k)| \geq \varepsilon$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Vzemimo torej $\varepsilon = 1$,
$n = n_0$, $k = n_0$: $f_{n_0}(n_0) = 1 \geq \varepsilon$.

(c) Brez dokaza navedi izrek Jegorova
Naj bo $\mu(X) < \infty$ in $f_n \to f$ skoraj povsod. Potem $f_n \to f$ tudi skoraj enakomerno

17.9.2007 $\boxed{4.}$ FATOUJEVA LEMA

(a) ✓

(b) ✓

(c) $f_n = (1+(-1)^n)\cdot \chi_{\{n\}}$ $(n \in \mathbb{N})$

$$\int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu = \int_{\mathbb{N}} (1+(-1)^n)\cdot \chi_{\{n\}} \, d\mu = \int_{\mathbb{N}} \chi_{\{n\}} \, d\mu + \int_{\mathbb{N}} (-1)^n \chi_{\{n\}} \, d\mu =$$

$$= \int_{\mathbb{N}} \mu(\{n\}) + \int_{\mathbb{N}} (-1)^n \mu(\{n\}) = 1 + (-1)^n$$ od visno ali n sod ali lih.

$f_n \to 0$ $\{f_n(k)\}$: $0,0,\ldots,\underset{k}{\overset{k \text{ lih/k sod}}{0 \text{ ali } 1}},0,0,\ldots$

Na levi je 0, na desni je tudi 0. $0 \leq 0$ ✓

$\boxed{5.}$ KOMPLEKSNE MERE

(a) ✓

(b) ✓

(c) ✓