UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Neža Kržan

Statistika v kazenskem pravu

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izr. prof. Jaka Smrekar

Ljubljana, 2022

Kazalo

1. Bayesova statistika

Bayesova statistika je statistična veja, ki nam s pomočjo matematičnih pristopov omogoča uporabo verjetnosti pri reševanju statističnih problemov. V svoje modele vključuje pogojno verjetnost, katero izračunamo z uporabo Bayesovega pravila.

Zlasti Bayesovo sklepanje razlaga verjetnost kot merilo verjetnosti ali zaupanja, ki ga lahko ima posameznik glede nastanka določenega dogodka. O nekem dogodku lahko že imamo predhodno prepričanje oziroma apriorno prepričanje, ki pa se lahko spremeni, ko se pojavijo novi dokazi. Bayesova statistika nam daje matematične modele za vključevanje naših apriornih prepričanj in dokazov za ustvarjenje novih prepričanj oziroma za pridobitev aposteriornega prepričanja, ki se lahko uporabi za kasnejše odločitve.

1.1. **Bayesovo pravilo.** Bayesovo sklepanje temelji na Bayesovim pravilom, ki izraža verjetnost nekega dogodka z verjetnostjo dveh dogodkov in obrnejnje pogojne verjetnosti. Pogojna verjetnost predstavlja verjetnost dogodka, glede na drug dogodek.

Definicija 1.1. Pogojna verjetnost dogodka H, glede na dogodek E, je

$$P(H|E) = \frac{P(H \cap E)}{P(E)}, \tag{1}$$

ob predpostavki, da je $P(E) > 0$.

Formula (1) pove, da je verjetnost dogodka H ob pogoju, da se je zgodil dogodek E, enaka razmerju verjetnosti, da se zgodita oba dogodka in verjetnosti, da se je zgodil dogodek E.

Potem pogojno verjetnost uporabimo še v števcu formule (1) in dobimo Bayesovo pravilo:

$$P(H|E) = \frac{P(E|H) \times P(H)}{P(E)}, \tag{2}$$

Verjetnost dogodka E lahko še razpišemo in dobimo:

$$P(H|E) = \frac{P(E|H) \times P(H)}{P(E|H)P(H) + P(E|\neg H)P(\neg H)}. \tag{3}$$

Obstaja še ena formulacija Bayesovega pravila, ki olajša izračune in je pogosto uporabljena pri Bayesovi analizi DNK dokazov:

$$\frac{P(H|E)}{P(\neg H|E)} = \frac{P(E|H)}{P(E|\neg H)} \times \frac{P(H)}{P(\neg H)}. \tag{4}$$

1.2. **Bayesovo posodabljanje.** Bayesovo pravilo se razlikuje od Bayesovega posodabljanja. Prvo je matematični izrek, drugo pa logična trditev, kako se sčasoma posodabljajo apriorne verjetnosti dokazov glede na novo zbrane dokaze oziroma prepričanja.

Bayesovo posodabljanje pravi:

Trditev 1.2. *Če se dogodek E zgodi ob času $t_1 > t_0$, potem je $P_1(H) = P_0(H|E)$.*

Ob času t_0 dogodku H dodelimo verjetnost $P_0(H)$; to se imenuje predhodna verjetnost oziroma apriorna verjetnost. Ko se zgodi dogodek E ob času t_1, ki vpliva na naša prepričanja o dogodku H, Bayesovo posodabljanje pravi, da je potrebno apriorno verjetnost dogodka H v času t_1 enačiti z pogojno verjetnostjo dogodka H glede na dogodek E v času t_0.

Recimo, da je dogodek H neka hipoteza oziroma prepričanje o zločinu in dogodek E dokazi, zbrani za ta zložin. Pri Bayesovem posodabljanju je videti, kot da je dokaz E nesporno resničen. Z drugimi besedami, predpostavka je, da moramo imeti po zbiranju dokazov E stopnjo zaupanja v E enako 1, torej če so dokazi zbarni v času t_1, je $P_1(E) = 1$.

2. Primer - Taksi podjetja

Za lažje razumevanje Bayesovega pravila si poglejmo primer.

Obstajata dve taksi podjetji, Zeleni Taksi in Modri taksi, katerih vozila so pobarvana zeleno oziroma modro. Podjetje Zeleni taksi pokriva 85 odstotokov trga, podjetje Modri taksi pa preostanek. Predpostavimo še, da v okolici ni drugih taksi podjetij. V meglenem dnevu taksi trči v mimoidočega pešca in ga poškoduje, vendar odpelje s kraja nesreče. Priča nesreče poroča, da je bilo vozilo modre barve. Priča ima prav le v 80 odstotokih primerov, kar pomeni, da je njegova zanesljivost enaka $0,8$. Kolikšna je verjetnost, da je bil taksi, ki je povzročil nesrečo, modre barve glede na poročilo priče?

Vpeljimo oznake:
Z ... hipoteza, da je bil taksi zelen,
M ... hipoteza, da je bil taksi moder,
W_m ... dokaz, t.j. poročanje priče, da je bil taksi moder.

Problem je določiti pogojno verjetnost hipoteze M, ob pogoju, da je dokaz W_m resničen, torej $P(M|W_m)$.

Za uporabo Bayesovega pravila potrebujemo tri elemente: verjetnost dokazov glede na hipotezo, verjetnost dokazov in verjetnost hipoteze. Podjetje Zeleni taksi pokriva 85 odstotkov trga, zato je verjetnost $P(Z) = 0,85$. Po definiciji verjetnosti, je potem $P(M) = 1-P(Z) = 0,15$. Vemo tudi, da ima priča v 80 odstotkih primerov prav, torej $P(W_m|M) = 0,8$ in $P(W_m|Z) = 0,2$. Izračunajmo še verjetnost dokaza $P(W_m)$:

$$P(W_m) = P(W_m|B)P(M) + P(W_m|Z)P(Z) = 0,8 \times 0,15 + 0,2 \times 0,85 = 0,29.$$

Sedaj lahko uporabimo Bayesovo pravilo:

$$P(M|W_m) = \frac{P(W_m|M)P(M)}{P(W_m|M)P(M) + P(W_m|Z)P(Z)} = \frac{0,8 \times 0,15}{0,29} = \frac{12}{29} \approx 0,41.$$

verjetnost, da je bil taksi glede na pričanje dejansko modre barve, je precej majhna, tudi če ima priča v 80 odstotokih primerov prav. Razlog za to je, da je verjetnost M, ne glede na dokaze, majhna ($P(M) = 0,15$). Spodnja tabela kaže, da lahko s spreminjanjem verjetnosti M dobimo različne pogojne verjetnosti $P(M|W_m)$, pri čemer je zanesljivost priče nespremenjena:

$P(M)$	$P(Z)$	$P(W_m\|M)$	$P(M\|W_m)$
0,15	0,85	0,8	0,41
0,25	0,75	0,8	0,57
0,35	0,65	0,8	0,68
0,45	0,55	0,8	0,76
0,50	0,50	0,8	0,80
0,55	0,45	0,8	0,83
0,65	0,35	0,8	0,88
0,75	0,25	0,8	0,92
0,85	0,15	0,8	0,95