Domača naloga 3

Neža Kržan, Tom Rupnik Medjedovič

1 Cilji naloge

Želiva preučiti uporabo metode ponovnega vzorčenja, v primeru ko klasičnimi testom ne moremo popolno zaupati zaradi kršenja predpostavk. Generirala bova podatke, na katerih bova izračunala intervale zaupanja koeficientov linearne regresije.

Za uporabno linearne regresije je potrebno izpolniti določene predpostavke, da imamo veljaven model. Te so:

- linearna odvisnost: *obstoj linearne povezanosti med napovednimi (pojasnjevalnimi) spremenljivkami in odzivno (ciljno) spremenljivko*,
- normalna porazdeljenost napak in neodvisnost napak,
- homoskedastičnost: *varianca napak mora biti konstantna*,
- brez multikolinearnosti: *neodvisne spremenljivke ne smejo biti preveč povezane med seboj*,
- zadostno število podatkov.

Podatke bova generirala tako, da bodo nekatere izmed teh predpostavk kršene(opisano v naslednjem poglavju) in zaradi tega bova s pomočjo testa `boxCox` izvedla primerno transformacijo odzivne spremenljivke (ta bo v vseh primerih `log` transformacija). Na koncu bova med seboj primerjala intervale zaupanja dobljene z linearno regresijo (`lm`) in metodo ponovnega vzorčenja(bootstrap in permutacijski test). Primerjavo bova naredila tako na rezultatih pred in po transformaciji, vendar pa moramo paziti, saj rezultati pred in po transformaciji med seboj niso primerljivi.

Pričakujeva, da bomo z metodo ponovnega vzorčenja dobili boljše rezultate.

2 Generiranje podatkov

Podatke sva generirala tako, da je v linearnem regresiji kršena predpostavka linearne odvisnosti odzivne spremenljivke od napovednih in kršena homoskedastičnost (konstantna varianca napak). Enačba, ki sva jo uporabila za generiranje odzivne spremenljivke je enaka:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_{1i} + \beta_2 \cdot x_{2i}^{\gamma} + \epsilon_i$$

pri čemer:

- β_0-konstanta enaka 100,
- β_1-koeficient spremenljivke x_1 enak 3,
- β_2-koeficient spremenljivke x_2 enak 2,
- γ-eksponent, ki ga bova spreminjala (določa nelinearno zvezo),
- ϵ-napaka, ki generirana iz porazdelitve $N(0, x_1 \cdot \alpha)$ (α določa povezanost s spremenljivko x_1),

torej

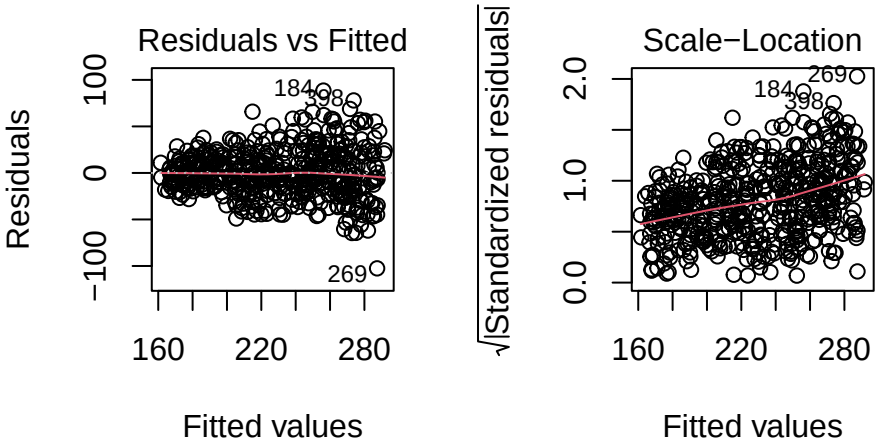
$$y_i = 100 + 3 \cdot x_{1i} + 2 \cdot x_{2i}^{\gamma} + \epsilon_i.$$

Kot sva že omenila bova spreminjala faktorja γ in α. S faktorjem γ bomo kršili prespostavko o linearni zvezi, saj bo ta zavzel vrednosti 0.8 in 1.4. S faktorjem α pa bomo kršili predpostavko konstantne variance napak, saj se ta z večanjem vrednosti x_1 povečuje. Ta zavzame vrednosti $\alpha \in \{0.6, 1, 1.2\}$.

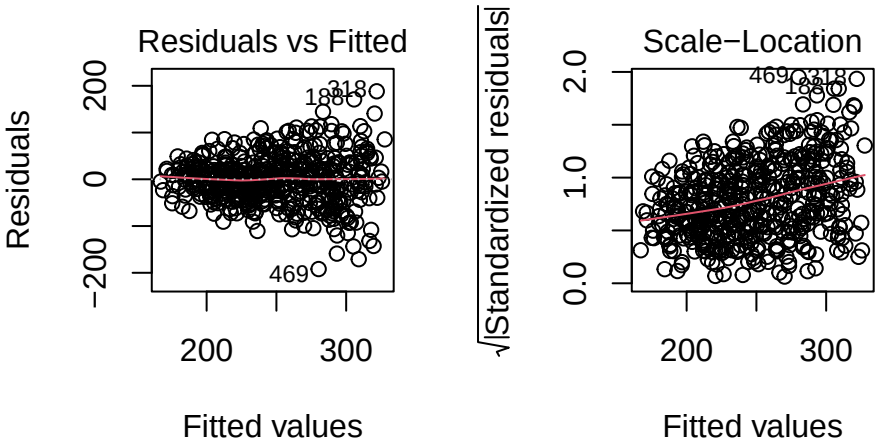
Velikost vzorca pa enak $n = (20, 200, 500)$, ker naju zanima kako se bo bootstrap metoda obnesla tudi na zelo majhnem vzorcu - s tem je tudi kršena predpostavka o dovolj velikem vzorcu pri linearni regresiji.

Pri generiranju posameznih vrednosti v enačbi linearne regresije(x_{1i}, x_{2i}) sva se odločila za generiranje iz enakomerne porazdelitve, in sicer $x_{1i} \sim Unif(20, 60)$ ter $x_{2i} \sim Unif(2, 10)$, torej, da imamo v podatkih majhne vrednosti in nekoliko večje.

Narišimo grafe ostankov za nekaj kombinacij faktorjev, da se prepričamo o kršenju predpostavk, velikost vzorca je v *vseh* primerih nastavljena na 500.



Slika 1: Grafi ostankov pri paramatrih alpha=0,6 in gamma=0,8.



Slika 2: Grafi ostankov pri paramatrih alpha=1,2 in gamma=1,4.

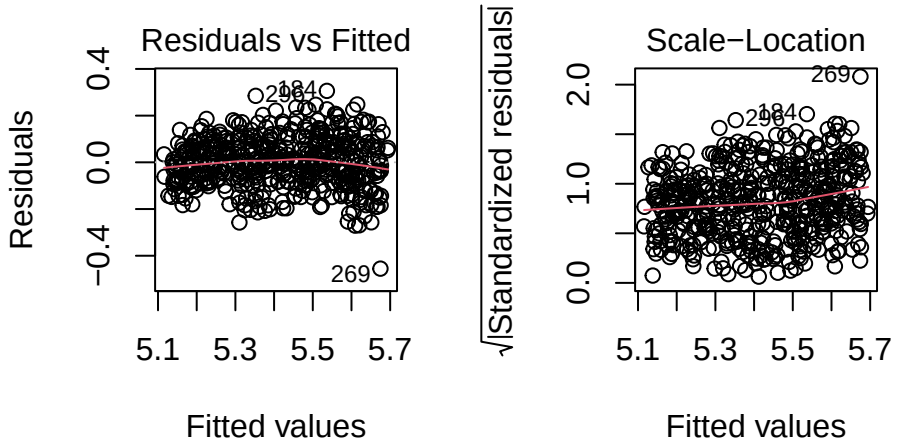
V obeh primerih lahko na desnem grafu opazimo, da se z večanjem vrednosti povečuje tudi variabilnost napak (naraščajoč trend). To lahko opazimo, tudi iz levega grafa, saj se od leve proti desni s povečevanjem vrednosti, povečuje tudi variabilnost ostankov. Prav tako je vidna razlika, ko povečamo vrednost parametra α, saj se vrednosti ostankov povečajo (variabilnost se poveča).

Kot sva že napisala zgoraj, bova zaradi kršenja dveh predpostavk(linerana odvisnost in homoskedastičnost) podatke ustrezno transformirala. Za tako kršene predpostavke ponavadi uporabljamo logaritemske transfor-

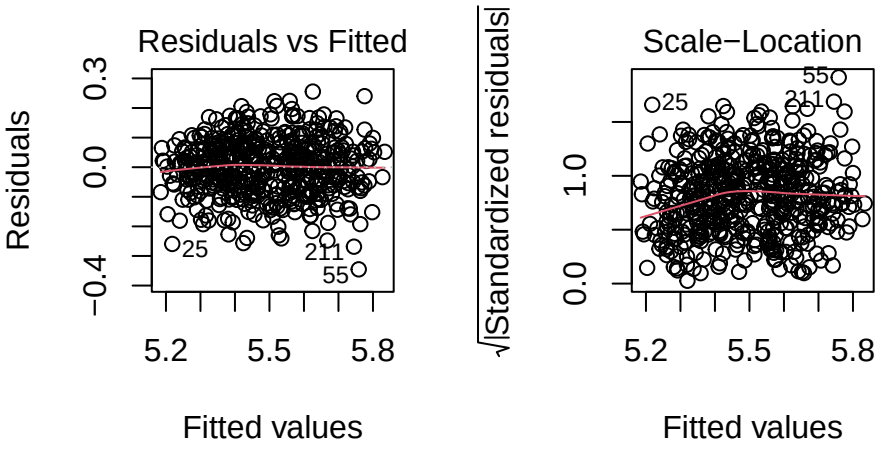
macije podatkov.
Za izbiro primerne transformacije si bova pomagala s `boxCox` testom - za vsako kombinacijo parametrov preverimo ali se vrednost $\lambda = 0$ (`log` transformacija) nahaja znotraj 95% intervala optimalnega parametra λ, ki ga vrne funkija `powerTransform`. V spodnji tabeli lahko vidimo, da je $\lambda = 0$ res vsebovana v vseh 95% intervalih zaupanja, razen v zadnjem primeru, torej je primerna transformacija podatkov logaritemska. Pri zadnjem primeru, pa je spodnja meja 95% intervala zaupanja tako blizu vrendosti 0, da prav tako lahko uporabimo logaritemsko transformacijo, ker bomo dobili boljše rezultate in bodo predopstavke bolje izpolnjene.

alpha	gamma	spodnja meja IZ	zgornja meja IZ
0.6	0.8	-0.623	0.030
0.6	1.4	-0.342	0.302
1.0	0.8	-0.143	0.429
1.0	1.4	-0.137	0.444
1.2	0.8	-0.012	0.441
1.2	1.4	0.026	0.524

Če si sedaj ponovno pogledamo grafe ostankov transformiranih podatkov z istimi kombinacijami faktorjev kot na zgornjih grafih ostankov, vidimo, da so ostanki na grafih razpršeni naključno, torej predpostavki(linearna odvisnost in homoskedastičnost) nista kršeni.



Slika 3: Grafi ostankov transformiranih podatkov pri paramatrih alpha=0,6 in gamma=0,8.



Slika 4: Grafi ostankov transformiranih podatkov pri paramatrih alpha=0,6 in gamma=1,4.

3 Klasični test in metoda ponovnega vzorčenja

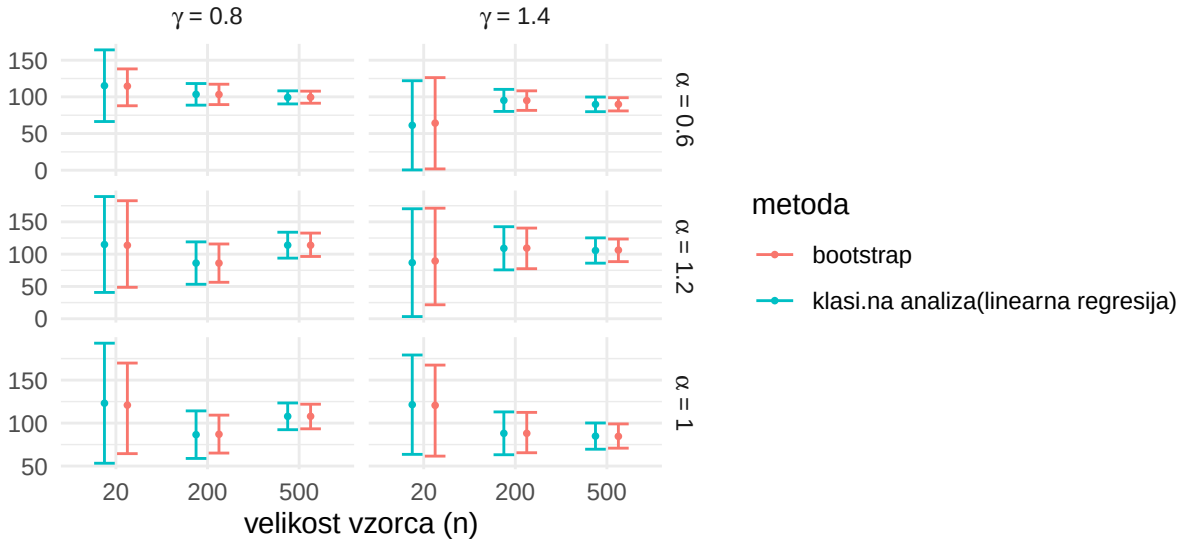
Pri ponovnem vzorčenju bova uporabila metodo bootstrap, pri kateri bo število bootstrap vzorcev enako $m = 1000$.

Za vsako kombinacijo faktorjev(*alpha*, *gamma* in *velikost vzorca*) sva generirala podatke, na katerih sva za vsako kombinacijo faktorjev torej izvedla linearno regresijo in poračunala intervale zaupanja za vse tri koeficiente(`Intercept`, `x1`, `x2`).
Enak postopek sva ponovila z metodo ponovnega vzorčenja bootstrap - naključno sva iz generiranih podatkov za vse kombinacije faktorjev izbrala podatke, na katerih sva potem izvedla linearno regresijo in izračunala intervale zaupanja za vse tri koeficiente (`Intercept`, `x1`, `x2`). Tak postopek ponovnega vzorčenja sva ponovila $m = 1000$, zato smo torej imeli 1000 bootstrap vzorcev.

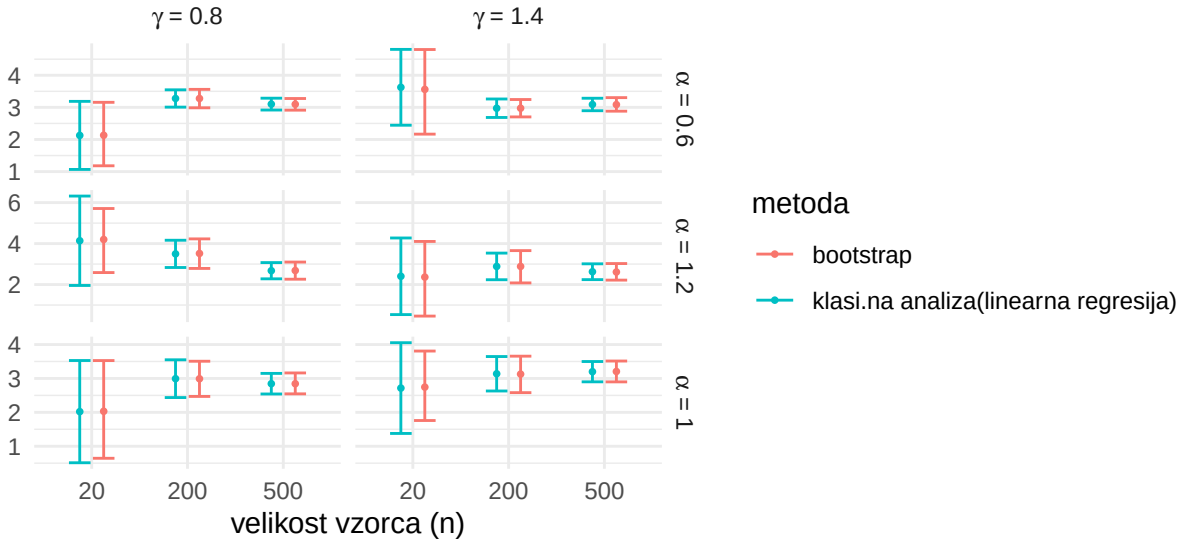
3.1 Analiza rezultatov podatkov brez transformacije

Jasno nam torej je, da se na rezultate, pridobljene s podatki pred transformacijo ne moremo ravno zanesti, saj kršenje predpostavk pri linearni regresiji močno vpliva na intervale zaupanja(tudi na ocene koeficientov). Pri majhnem vzorcu($n = 20$) seveda pričakujemo najširše intervale zaupanja, ki pa se potem z večanjem vzorca ožajo. Verjetno bodo intervali zaupanja pri obeh metodah približno enako široki.

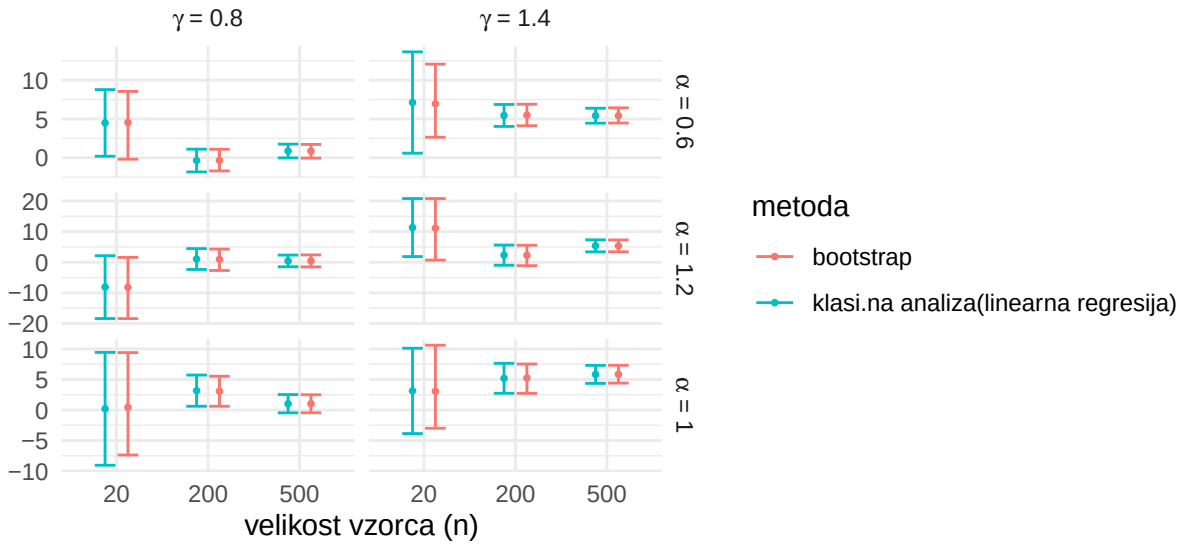
Na spodnjih grafih vidimo, da se intervazli z večanjem vzorca res manjšajo, razlike med intervali s klasično analizo in bootstrapom pa so minimalne, največja razlika v širini intervala se opazi pri majhnem vzorcu($n = 20$).



Slika 5: Grafi intervalov zaupanja za prosti koeficient(Intercept) - podatki brez transformacije.



Slika 6: Grafi intervalov zaupanja za koeficient pri x1(beta1) - podatki brez transformacije.

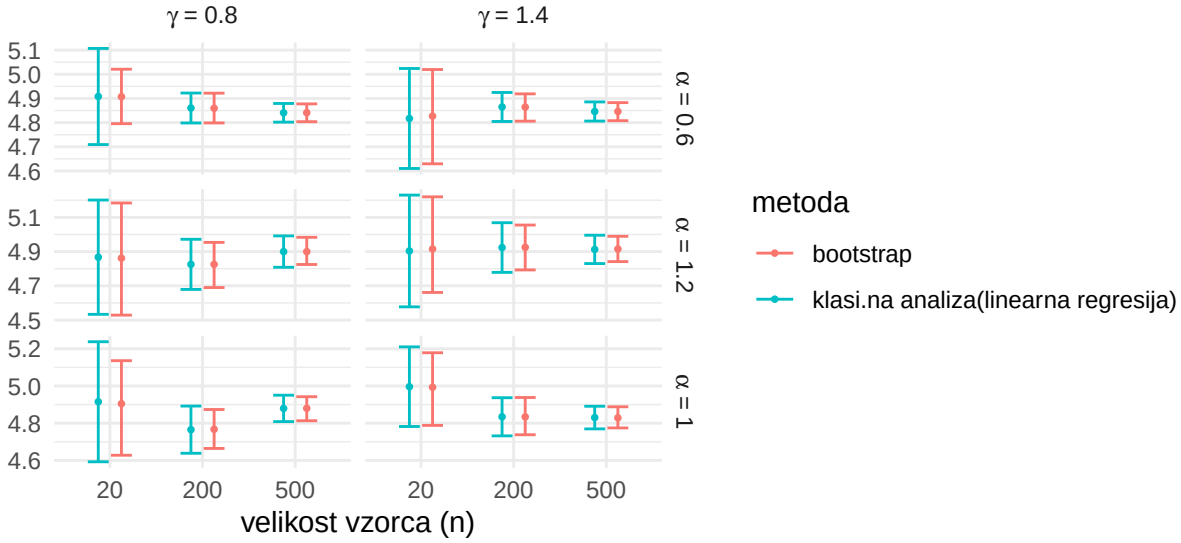


Slika 7: Grafi intervalov zaupanja za koeficient pri x2(beta2) - podatki brez transformacije.

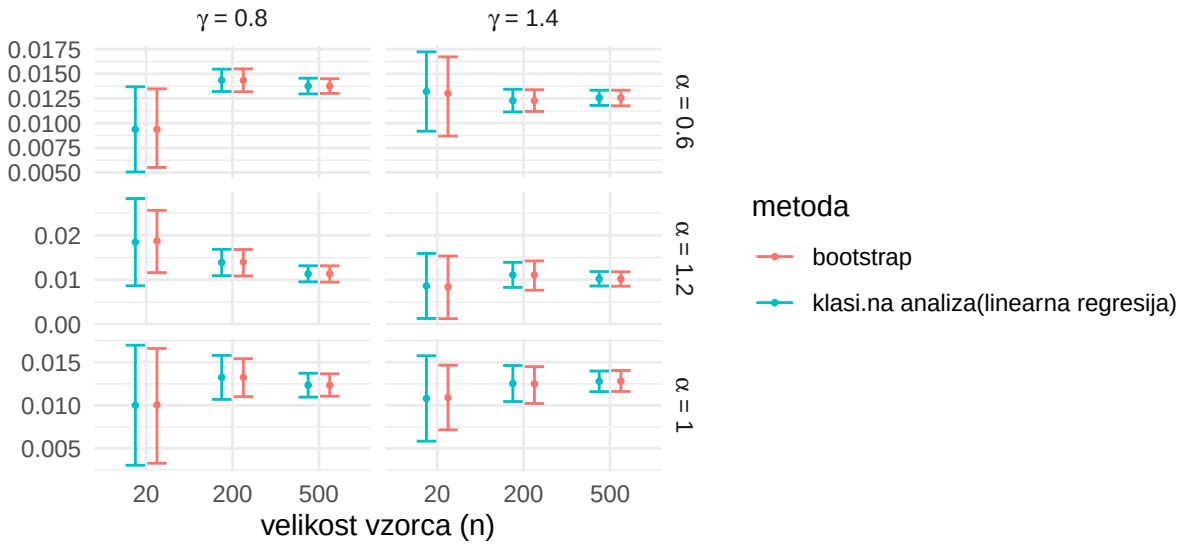
3.2 Analiza rezultatov transformiranih podatkov

Ker so podatki transformirani z ustrezno transformacijo(logaritemska) pričakujemo, da so rezultati linearne regresije pravilni in zanesljivi, torej dobimo pravile intervale zaupanja. Ponovno pričakujeva, da se bodo intervali zaupanja ožali z večanjem vzorca in da bo zožitev intervala zaupanja zelo majhna med velikostjo vzorca $n = 200$ in $n = 500$. Razlika med metodama se bo verjetno opazno razlikovala le pri majhnem vzorcu($n = 20$).

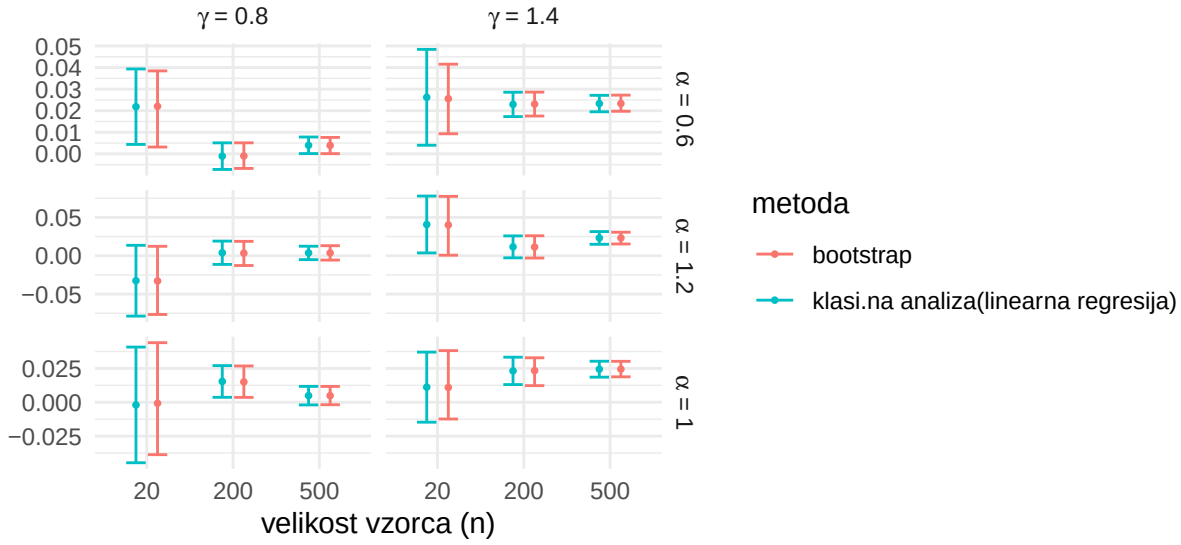
Na spodnjih grafih opazimo točno to, kar smo pričakovali - ožanje intervalov z večanjem vzorca in opazne razlike med metodama pri majhnem številu podatkov($n = 20$).



Slika 8: Grafi intervalov zaupanja za prosti koeficient(Intercept) - transformirani podatki.



Slika 9: Grafi intervalov zaupanja za koeficient pri x1(beta1) - transformirani podatki.

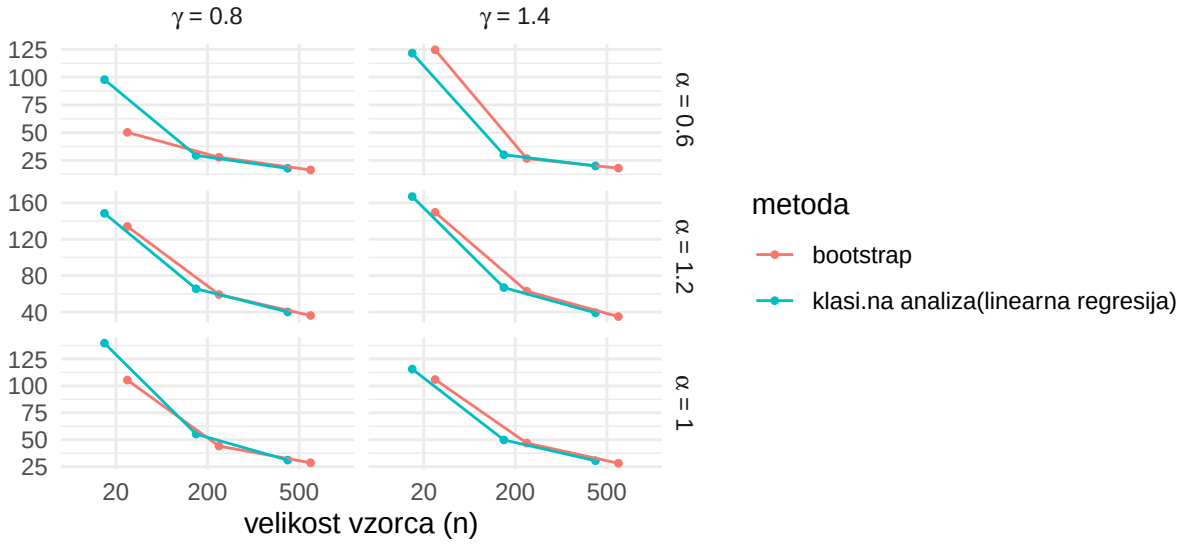


Slika 10: Grafi intervalov zaupanja za koeficient pri x2(beta2) - transformirani podatki.

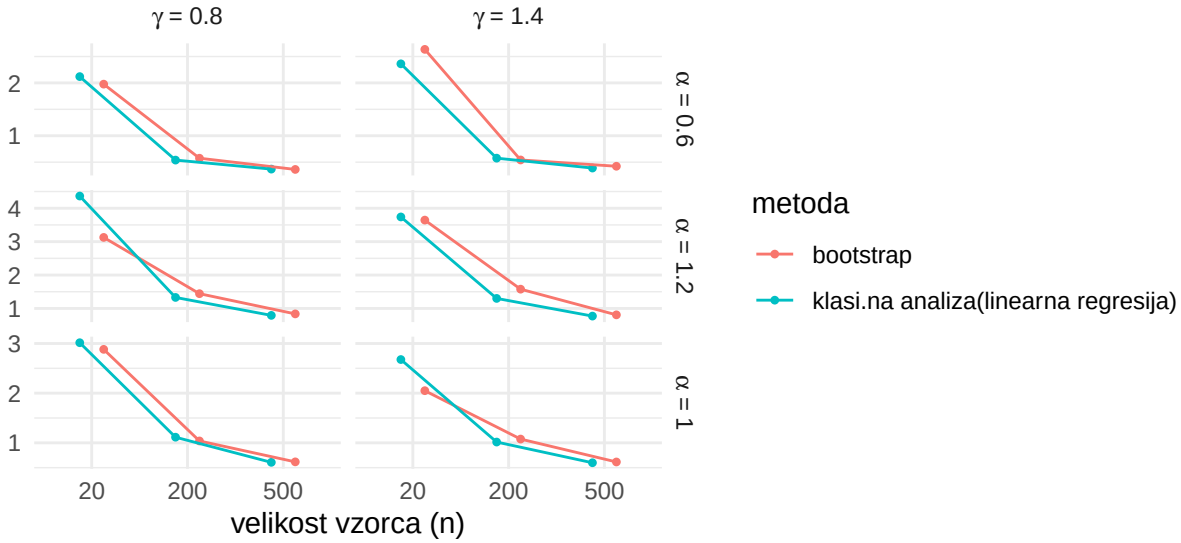
3.3 Primerjava

Ker smo pri zgornji analizi opazili, da so intervali zaupaja različno široki glede na vzorec, si poglejmo njihove širine tudi glede na metodo in vrsto podatkov(ne transformirani ali transformirani podatki).

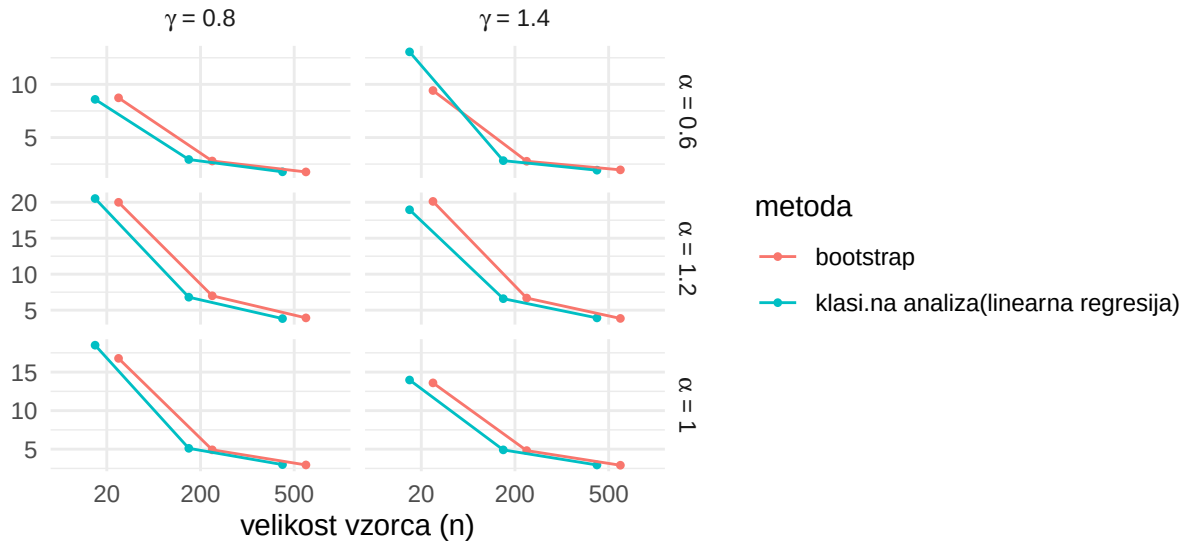
Na spodnjem grafu je še bolj opazna razlika v širini intervala pri majhnem vzorcu podatkov($n = 20$) glede na metodo, opazimo pa tudi to kako linearna odvisnot vpliva na podatke oz. posamezne koeficiente linearne regresije - npr. pri koeficientu prostega člena(β_0 oz. `Intercept`) je razlika v širini intervalov glede na metodo opazna še posebaj pri majhnem vzorcu podatkov($n = 20$), s tem ko za ostala dva koeficienta težko rečemo, da faktor linerne odvisnosti(γ) ali heteroskedastičnost(α) glede na metodo kako značilno vpliva na širino intervala. Pri le-tem dvem koeficientu je tudi širina intervala zaupanja dokaj podobna glede na metodo.



Slika 11: Širina intervalov zaupanja za koeficient pri prostem členu(intercept).



Slika 12: Širina intervalov zaupanja za koeficient pri koeficientu x1(beta1).



Slika 13: Širina intervalov zaupanja za koeficient pri koeficientu x2(beta2).

4 Zaključek

Pri primerjavi intervalov zaupanja "klasične" metode (*linearne regresije*), ko so predpostavke te kršene, in metode ponovnega vzorčenja (*bootstrap*), nisva opazila drastičnih razlik. Intervali zaupanja so bili pri metodi ponovnega vzorčenja nekoliko ožji, največja razlika v širini intervala pa se opazi pri majhnem vzorcu ($n = 20$). Enako analizo sva ponovila še na transponiranih podatkih, s čimer sva kršenje predpostavk linearne regresije odpravila ali pa vsaj zmanjšala. Vendar tudi v tem primeru so bili intervali zaupanja skoraj enaki. Največji vpliv na širino intervalov je imela velikost vzorcev.

Glede na analizo bi težko rekla, da je ena metoda veliko boljša od druge. Vendar pa bi vseeno ob kršenju predpostavk uporabila metodo ponovnega vzorčenja, saj se je ta izkazala za malenkost boljšo in z velikim številom vzorev (vzorečenja) odstranimo ekstremne robne vrednosti.