Lema: Teorema da dedução: $\phi \cup \{\varphi\} \vdash \Psi \Longrightarrow \phi \vdash \varphi \rightarrow \Psi$.

*Demonstração.* Por indução do comprimento da derivação de $\Psi$ a apartir de $\phi \cup \varphi$.
Base: n=1. Então $\Psi \in \phi \cup \{\varphi\}$ ou $\varphi$ é axioma. Se $\Psi = \varphi$, então $\phi \vdash \varphi \rightarrow \Psi$ por c) do lema anterior. Se $\Psi \in \phi$ ou $\Psi$ é axioma, então $\phi \vdash \Psi$. Por b) do lema anterior , $\phi \vdash \Psi \rightarrow \varphi \rightarrow \Psi$. Por modus ponens: $\phi \vdash \varphi \rightarrow \Psi$.
Passo da indução: Supomos que a derivação tem comprimento n+1. Podemos supor que o ultimo passo da derivação foi aplicado o M.P. Isto é, $\phi \cup \varphi \vdash \chi$, $\phi \cup \{\varphi\} \vdash \chi \rightarrow \psi$. As derivações de $\zeta$ e $\zeta \rightarrow \Psi$ tem comprimento $\leq$ n. Por hipótese da indução, $\phi \vdash \varphi \rightarrow \zeta$ e $\phi \vdash \varphi \rightarrow (\zeta \rightarrow \psi)$. Aplicando duas vezes o modus ponens e A1 resultam em : $\phi \vdash \varphi \rightarrow \psi$. $\square$

Lema: $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$.

*Demonstração.* Por (A3) e (A4) e M.P,$\neg\neg\varphi \wedge \neg\varphi \vdash \neg\varphi$,$\neg\neg\varphi \wedge \neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi$. Seja $\tau$ qualquer fórmula tal que $\vdash \tau$. Por c) : $\phi \vdash \psi$ e $\phi \vdash \neg\psi \Longrightarrow$ em $\phi \vdash \varphi$($\varphi$ qualquer fórmula). Por a): $\vdash \tau \rightarrow \neg(\neg\neg\varphi \wedge \neg \varphi)(= \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi)$. $\square$

Lema: $\phi \cup \{\Psi\} \vdash \varphi$ e $\phi \cup \{\neg\Psi\} \vdash \varphi \Longrightarrow \phi \vdash \varphi$.

*Demonstração.* As hipóteses implicam em $\phi \cup \{\psi\} \vdash \neg\neg\varphi$ e $\phi \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg\neg\varphi$. Por d). Pelo teorema da dedução, $\phi \vdash \psi \rightarrow \neg\neg\varphi$, $\phi \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\neg\varphi$. Por a), $\phi \vdash \neg\psi$, $\phi \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi$. Então $\phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$,$\phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\psi$. Por e), $\phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\tau$, onde $\tau$ é fórmula tal que $\vdash \tau$.Por c) $\neg\psi \rightarrow \neg\neg\psi \rightarrow \neg\tau$. Logo, $\phi \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\tau$(teorema da dedução). Por a), $\phi \vdash \tau \rightarrow \neg\neg\varphi$. Por M.P: $\phi$ $\neg\neg\varphi$. Pelo teorema anterior : $\phi \vdash \varphi$. $\square$

Obs: $\vdash$ satisfaz as seguintes regras(onde uma regra tem a forma $\frac{\phi \vdash \varphi_1,\ldots,\phi_n \vdash \varphi_n}{\phi \vdash \varphi}$, temos tal regra como "se $\phi_1 \vdash \varphi_1$,...,$\phi_n \vdash \varphi_n$, então $\phi \vdash \varphi$").
(R1) $\frac{}{\varphi \vdash \varphi}$.
(R2) $\frac{\phi \vdash \varphi}{\phi' \vdash \varphi}$ se $\phi \subseteq \phi'$.
(R3) $\frac{\phi \vdash \varphi, \phi \vdash \psi}{\phi \vdash \varphi \wedge \psi}$. Por (A2).
(R4)$\frac{\phi \vdash \phi \wedge \psi}{\phi \vdash \varphi}$.Por (A3).
(R5)$\frac{\phi \vdash \phi \wedge \psi}{\phi \vdash \psi}$.Por (A4).
(R6)$\frac{\phi \vdash \varphi, \phi \vdash \neg\varphi}{\phi \vdash \psi}$. Por e).
(R7)$\frac{\phi \cup \varphi \vdash \psi, \phi \cup \neg\varphi \vdash \psi}{\phi \vdash \psi}$. Pelo ultimo lema.