Sobre a noção de conseqüência lógica

Patrícia Del Nero Velasco

Doutoranda PUC-SP

O objetivo desta comunicação é apresentar três formalizações da noção de conseqüência lógica, mostrando que todas as três cumprem algumas importantes propriedades intuitivamente esperadas do conceito em questão. Ademais, serão enunciados os resultados que atestam a equivalência das formalizações em questão. Cabe lembrar que a presente comunicação é parte de um dos capítulos da tese Sobre uma reconstrução do conceito semântico de valoração, a ser defendida pela autora na PUC-SP.

A noção de conseqüência lógica é amplamente discutida por filósofos, lógicos e afins. Importa-nos, em um primeiro momento, averiguar informalmente as definições usuais de conseqüência. Dizemos, por exemplo, que em um argumento, uma conclusão é conseqüência lógica das premissas se e somente se a verdade das premissas implica necessariamente a verdade da conclusão. Mas o que isto significa? Alguns poderiam dizer, em outras palavras, que uma conclusão é conseqüência lógica das premissas se e somente se é impossível que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão, falsa. De fato, ambas as definições apresentadas são usuais, todavia, pouco esclarecedoras, visto que não oferecem - como pretendido de uma definição - conceitos mais compreensivos do que aqueles que aparecem naquilo que se deseja definir, nesse caso, a noção de conseqüência lógica.

Por conseguinte, poderíamos ainda insistir, fazendo uma primeira generalização: suprimiríamos as noções de conclusão e premissa, admitindo apenas o conceito de fórmula. Deste modo, consideraríamos a noção de conseqüência como uma propriedade de fórmulas, ou seja, uma relação entre fórmulas e conjuntos de fórmulas. Obteríamos que uma dada fórmula é conseqüência lógica de um conjunto de fórmulas (que pode ser unitário) se e somente se é impossível que as fórmulas deste último sejam verdadeiras e a fórmula dada, falsa. Dito de outro modo: uma dada fórmula é conseqüência lógica de um conjunto de fórmulas se e somente se não existir situação em que as fórmulas deste último são verdadeiras e a fórmula em questão é falsa.

Ainda que tomássemos, como o faremos, a noção de fórmula como primitiva (não importando, assim, a estrutura interna de tal noção), permaneceríamos diante de uma definição de conseqüência lógica pouco esclarecedora, visto que esta pressupõe as definições de situação e de fórmula verdadeira em uma situação.

Portanto, as questões suscitadas por ocasião da definição apresentada consistem exatamente em precisar (1) o que é situação e (2) quando, dadas uma fórmula e uma situação, a primeira é verdadeira na situação em questão. (É obvio que ao respondermos esta segunda questão, saberemos também dizer quando uma fórmula é falsa em uma situação, posto que tomamos verdade e falsidade como antônimos.)

Um interlocutor mais pessimista observaria que estamos talvez ainda mais distantes de uma definição satisfatória de conseqüência lógica. E tal observação procede. Como, no entanto, abordaremos mais tarde e de modo formal ambas as questões levantadas, assumiremos, por hora, que estas estão bem resolvidas e passaremos a investigar algumas propriedades interessantes dessa definição informal (e usual) de conseqüência lógica.

Uma primeira propriedade da noção de conseqüência consiste em considerar que (i) qualquer fórmula de um dado conjunto de fórmulas é conseqüência do mesmo. De fato, para que uma fórmula de um conjunto não fosse conseqüência dele teria que haver uma situação em que as fórmulas do conjunto são verdadeiras e a fórmula dada falsa; o que é impossível, dado que a sentença pertence ao conjunto e portanto é verdadeira.

Uma segunda propriedade interessante, embora menos intuitiva, afirma que (ii) se uma fórmula pertence às conseqüências de um conjunto de fórmulas e este conjunto está contido em outro, a fórmula em questão pertence também às conseqüências deste último, *i.e.*, se uma fórmula é conseqüência de um conjunto então ela é conseqüência de qualquer outro conjunto que contenha o primeiro.

Novamente o argumento usado (agora para a justificação do fato (ii)) será o da redução ao absurdo: suponha uma fórmula que é conseqüência de um conjunto de fórmulas e um segundo conjunto de fórmulas que contenha o primeiro. Para que a fórmula não seja conseqüência desse segundo conjunto, deveria haver uma situação em que as fórmulas do segundo conjunto fossem verdadeiras e a situação dada fosse falsa. Mas, nessa mesma situação, como o primeiro conjunto está incluído no segundo, temos que as fórmulas do primeiro conjunto também são verdadeiras e a fórmula dada é falsa. E nesse caso a fórmula dada não é conseqüência do primeiro conjunto, o que contraria a hipótese. Logo, segue o resultado pretendido, a saber, se uma fórmula é conseqüência de um conjunto então ela é conseqüência de qualquer outro conjunto que contenha o primeiro.

A terceira propriedade aqui apresentada pode ser escrita do seguinte modo: (iii) se uma fórmula é conseqüência lógica de um conjunto e as fórmulas deste conjunto são conseqüência de um outro conjunto, então a fórmula dada é conseqüência deste outro conjunto.

De fato, suponha que uma fórmula é conseqüência lógica de um conjunto e as fórmulas deste conjunto são conseqüência de um segundo conjunto. Temos então que em todas as situações em que as fórmulas do segundo conjunto são verdadeiras, as fórmulas do primeiro também o são e, igualmente, em todas as situações em que as fórmulas do primeiro conjunto são verdadeiras, a fórmula dada também o é. Logo, decorre que em todas as situações em que as fórmulas do segundo conjunto são verdadeiras, a fórmula dada também é verdadeira. Dito de outra maneira, segue que a fórmula dada é conseqüência do segundo conjunto.

Embora existam diversas outras propriedades da noção de conseqüência, limitaremos nossa exposição às acima enunciadas. Seja o que for a noção de conseqüência lógica (e lembrando que as duas questões levantadas sobre uma tal noção permanecem sem resposta), diremos que a definição de conseqüência será materialmente adequada se e somente se cumprir as três propriedades supracitadas.

A fim de formalizar o critério de adequação material acima proposto, fixaremos um conjunto FOR de fórmulas, denotando por letras gregas minúsculas os elementos de FOR e por letras gregas maiúsculas os subconjuntos de FOR. Usaremos o símbolo $\models$ para indicar a operação de conseqüência e, deste modo, $\Gamma \models \alpha$ denota que a fórmula α é conseqüência do conjunto Γ de fórmulas da linguagem; igualmente, $\Gamma \models \Delta$ denota que para toda fórmula γ pertencente ao conjunto Δ, tem-se que $\Gamma \models \gamma$.

Expostas as notações, podemos postular o critério de adequação material para a noção de conseqüência lógica como segue:

Sejam α uma fórmula e Γ e Δ, conjuntos de fórmulas. Dizemos que $\models$ é materialmente adequada se e somente se:

(i) se $\alpha \in \Gamma$ então $\Gamma \models \alpha$;

(ii) se $\Gamma \models \alpha$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \alpha$;

(iii) se $\Gamma \models \Delta$ e $\Delta \models \alpha$, então $\Gamma \models \alpha$.

As condições acima enunciadas são conhecidas na literatura, respectivamente, como *reflexividade*, *monotonicidade* e *transitividade (generalizada)*. Uma vez exposto o critério de adequação material da noção de conseqüência, devemos voltar às questões anteriormente levantadas. No entanto, responder o que é situação e qual o critério de avaliação do valor de verdade de uma fórmula em uma situação dada demandaria um enorme conhecimento prévio acerca de diferentes autores e literaturas (o que não é o caso). Logo, ofereceremos a seguir não uma extensa abordagem filosófica acerca das noções de fórmula, situação e verdade, mas uma formalização possível da definição usual de conseqüência que faz uso da noção de situação.

1 Estrutura Situacional

Independentemente do que entendemos por situação, podemos formalizar a definição geral de conseqüência que usa a noção de situação a partir da definição de uma estrutura situacional.

Denotemos uma tal estrutrura situacional por $\mathbb{S}$. A primeira categoria de coisas a compor $\mathbb{S}$ é o conjunto não vazio FOR de fórmulas da linguagem e designaremos por letras gregas minúsculas os elementos de FOR e por maiúsculas, os subconjuntos de FOR. A segunda categoria de coisas que compõem $\mathbb{S}$ é a das situações. Denotaremos por SIT o conjunto não vazio de situações. A terceira e última categoria que compõe $\mathbb{S}$ é o conjunto dos valores de verdade, $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$, denotado por VAL. Assim, $VAL = \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$. Por fim, precisamos de uma função f_S que atribua a cada fórmula em uma dada situação, um valor de verdade.

Definição **1.** *Uma* ***estrutura situacional*** $\mathbb{S}$ *é uma quádrupla*

$$\mathbb{S} = \langle FOR, SIT, VAL, f_S \rangle, \textit{ tal que:}$$

$$\begin{aligned} f_S : \quad & FOR \times SIT \to VAL \\ & (\alpha, s) \mapsto f_S(\alpha, s) \end{aligned}$$

Deste modo, dizemos que uma dada fórmula α é verdadeira em uma situação s se e somente se $f_S(\alpha, s) = \mathbf{V}$. Finalmente, segue a definição formal da noção de conseqüência aqui sugerida.

Definição **2.** *Uma fórmula α é* ***conseqüência lógica*** *(na estrutura $\mathbb{S}$) de um conjunto Γ de fórmulas, em símbolos, $\Gamma \models_{\mathbb{S}} \alpha$, se e somente se $\forall s \in SIT$ tal que $f_S(\gamma, s) = \mathbf{V}$ para toda $\gamma \in \Gamma$, tem-se que $f_S(\alpha, s) = \mathbf{V}$.*

Conseqüentemente, espera-se que a definição supracitada cumpra os três critérios de adequação material da noção de conseqüência, a fim de que possa ser considerada por nós como aceitável; na presente comunicação, não serão apresentadas quaisquer demonstrações. Enunciaremos, contudo, o resultado que atesta a adequação material da definição de conseqüência via estrutura situacional:

Proposição 1. *Sejam α uma fórmula e Γ e Δ, conjuntos de fórmulas. Então, $\models_{\mathbb{S}}$ é materialmente adequada,* i.e.,

(i) se $\alpha \in \Gamma$ então $\Gamma \models_{\mathbb{S}} \alpha$;

(ii) se $\Gamma \models_{\mathbb{S}} \alpha$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models_{\mathbb{S}} \alpha$;

(iii) se $\Gamma \models_{\mathbb{S}} \Delta$ e $\Delta \models_{\mathbb{S}} \alpha$, então $\Gamma \models_{\mathbb{S}} \alpha$.

A partir da apresentação da estrutura situacional poderíamos pensar em um conjunto particular de fórmulas, a saber, o conjunto das situações nas quais todas as fórmulas de um dado conjunto são verdadeiras. Um tal conjunto particular poderia ser definido do seguinte modo:

Definição 3. *Seja $s \in SIT$ e $\Gamma \subseteq FOR$. Dizemos que s é* **modelo** *de Γ se e somente se $f_S(\gamma, s) = \mathbf{V}, \forall \gamma \in \Gamma$.*

Conseqüentemente, pode-se definir o conjunto dos modelos de Γ na estrutura $\mathbb{S}$, em símbolos, $MOD_{\mathbb{S}}(\Gamma)$, do seguinte modo:

$$MOD_{\mathbb{S}}(\Gamma) =_{def} \{s \in SIT : s \text{ é modelo de } \Gamma\}.$$

Uma vez estabelecido o que entendemos por modelo de um conjunto de fórmulas e lembrando a definição de conseqüência lógica na estrutura $\mathbb{S}$ (definição 2), encontramos uma outra caracterização possível para a noção-tema da presente comunicação: uma fórmula α é conseqüência lógica do conjunto Γ na estrutura $\mathbb{S}$ se e somente se todo modelo de Γ é também modelo de $\{\alpha\}$. Um tal resultado é formalizado na seguinte proposição:

Proposição 2. *$\Gamma \models_{\mathbb{S}} \alpha$ se e somente se $MOD_{\mathbb{S}}(\Gamma) \subseteq MOD_{\mathbb{S}}(\{\alpha\})$.*

Nota-se aqui que a proposição acima elimina da noção de conseqüência lógica os termos "verdade" e "situação", oferecendo uma caracterização ainda mais geral para a definição em questão. Logo, poderíamos pensar uma outra estrutura lógica na qual o conceito de modelo fosse primitivo e a definição de conseqüência prescindisse das noções de "verdade" e "situação". Desejaríamos, no entanto, que a definição de conseqüência nesta nova estrutura fosse materialmente adequada. A discussão de uma tal estrutura é a temática da seção subseqüente.

2 Estrutura modelar

Como supracitado, a proposição 2 motiva a construção de uma estrutura na qual o conceito de modelo é tomado como primitivo e a definição de conseqüência lógica coincide com a proposição em questão.

Denotemos uma tal estrutura - denominada *modelar* - por $\mathbb{M}$. Seja FOR o conjunto não vazio de fórmulas da linguagem (cujos elementos são designados por letras gregas minúsculas e os subconjuntos, por letras gregas maiúsculas) e MOD o conjunto não vazio de todos os modelos da nossa estrutura $\mathbb{M}$. Construiremos uma função f_M que atribui a cada elemento de MOD um subconjunto de fórmulas. Deste modo, a estrutura $\mathbb{M}$ é composta por dois objetos base (contra três da estrutura situacional $\mathbb{S}$) e a função f_M.

Definição **4.** *Uma* ***estrutura modelar*** $\mathbb{M}$ *é uma tripla*

$$\mathbb{M} = \langle FOR, MOD, f_M \rangle \text{ tal que:}$$

$$\begin{aligned} f_M : \quad & MOD \to \mathbb{P}(FOR) \\ & m \mapsto f_M(m) \end{aligned}$$

Uma vez apresentada a estrutura $\mathbb{M}$, podemos definir o conjunto dos modelos de Γ na estrutura $\mathbb{M}$:

Definição **5.** *Seja* $\Gamma \subseteq FOR$*. Definimos* ***o conjunto dos modelos de*** Γ ***na estrutura*** $\mathbb{M}$*, em símbolos,* $MOD_{\mathbb{M}}(\Gamma)$*, do seguinte modo:*

$$MOD_{\mathbb{M}}(\Gamma) = \{m \in MOD : \forall \gamma \in \Gamma, \gamma \in f_M(m)\}.$$

Feito isso, dispomos das ferramentas necessárias para definirmos conseqüência lógica na estrutura $\mathbb{M}$. Enunciaremos, igualmente, o resultado que atesta que a noção em questão cumpre as três propriedades estudadas e, desta forma, é materialmente adequada.

Definição **6.** *Uma fórmula* α *é* ***conseqüência lógica*** *(na estrutura* $\mathbb{M}$*) de um conjunto* Γ *de fórmulas, em símbolos,* $\Gamma \models_{\mathbb{M}} \alpha$*, se e somente se* $MOD(\Gamma) \subseteq MOD(\{\alpha\})$, i.e., *todo modelo de* Γ *é também modelo de* $\{\alpha\}$*.*

Proposição **3.** *Sejam* α *uma fórmula e* Γ *e* Δ*, conjuntos de fórmulas. Então,* $\models_{\mathbb{M}}$ *é materialmente adequada,* i.e.,

(i) se $\alpha \in \Gamma$ *então* $\Gamma \models_{\mathbb{M}} \alpha$*;*

(ii) se $\Gamma \models_{\mathbb{M}} \alpha$ *e* $\Gamma \subseteq \Delta$*, então* $\Delta \models_{\mathbb{M}} \alpha$*;*

(iii) se $\Gamma \models_{\mathbb{M}} \Delta$ *e* $\Delta \models_{\mathbb{M}} \alpha$*, então* $\Gamma \models_{\mathbb{M}} \alpha$*.*

Até o presente momento temos duas estruturas lógicas que formalizam a noção de conseqüência de modo materialmente adequado (cumprem as propriedades de reflexividade, monotonicidade e transitividade) e de forma extremamente geral, não fazendo qualquer especificação quanto a uma possível estrutura interna do conceito de fórmula (o qual é tomado como primitivo). Por conseguinte, colocamo-nos diante de uma inevitável pergunta: seriam as estruturas situacional e modelar, equivalentes? A resposta é afirmativa e pode ser formalizada do seguinte modo:

Teorema **1 (1º Teorema da Equivalência).** *Sejam* $\alpha \in FOR$ *e* $\Gamma \subseteq FOR$*. Além disso:*

(a) seja $\mathbb{S} = \langle FOR, SIT, VAL, f_S \rangle$ *uma estrutura situacional. Então, existe uma estrutura modelar* $\mathbb{M} = \langle FOR, MOD, f_M \rangle$ *tal que* $\Gamma \models_{\mathbb{S}} \alpha$ *se e somente se* $\Gamma \models_{\mathbb{M}} \alpha$*.*

(b) seja $\mathbb{M} = \langle FOR, MOD, f_M \rangle$ *uma estrutura modelar. Então, existe uma estrutura situacional* $\mathbb{S} = \langle FOR, SIT, VAL, f_S \rangle$ *tal que* $\Gamma \models_{\mathbb{M}} \alpha$ *se e somente se* $\Gamma \models_{\mathbb{S}} \alpha$*.*

Ainda sobre a estrutura modelar, podemos introduzir um outro resultado, a partir da definição de *valoração*.

Seja $\mathcal{K} = Im(f_M)$, *i.e.*, seja $\mathcal{K}$ exatamente a imagem da função f_M. Elementos de $\mathcal{K}$ são ditos valorações. Conseqüentemente, podemos definir o conjunto das valorações para um dado subconjunto de fórmulas tal como segue:

Definição **7.** *Seja* $\Gamma \subseteq FOR$*. Definimos* o conjunto das valorações para Γ*, em símbolos,* $\mathcal{V}(\Gamma)$*, do seguinte modo:* $\mathcal{V}(\Gamma) = \{V \in \mathcal{K} : \Gamma \subseteq V\}$*.*

A partir da definição precedente torna-se possível conceber - ainda na estrutura modelar - uma nova caracterização de conseqüência lógica, a saber: uma dada fórmula α é conseqüência de um conjunto Γ de fórmulas se e somente se o conjunto das valorações para Γ é subconjunto do conjunto das valorações para $\{\alpha\}$. Uma tal caracterização é formalizada como segue:

Proposição 4. *Seja* $\alpha \in FOR$ *e* $\Gamma \subseteq FOR$. *Então* $\Gamma \models_{\mathbb{M}} \alpha$ *se e somente se* $\mathcal{V}(\Gamma) \subseteq \mathcal{V}(\{\alpha\})$.

Diante dessa terceira caracterização formal da noção de conseqüência lógica, faz-se necessário tecer algumas considerações. A primeira estrutura estudada, denominada situacional, é composta por um conjunto de fórmulas, um conjunto de situações, um conjunto de valores de verdade e uma função que atribui a cada fórmula em uma dada situação, um valor de verdade. Portanto, possui três categorias-base de coisas e requer a compreensão das noções de situação e valor de verdade. A estrutura lógica modelar, por sua vez, é composta por duas categorias-base de coisas, a saber, o conjunto de fórmulas e o conjunto de todos os modelos, além, claro, da função que atribui a cada elemento do conjunto de todos os modelos, um subconjunto de fórmulas. Muitas são as possibilidades de análise comparativa das estruturas mencionadas. Tendo em vista a organização da presente comunicação, adotaremos o critério de parcimônia, o qual se resume na literatura filosófica à famosa navalha de Ockham: *entia non sunt multiplicanda sine necessitate*. Não se devem multiplicar os seres sem necessidade. Usando os conceitos aqui envolvidos, não deveríamos multiplicar as fórmulas para além da necessidade. Neste sentido, a estrutura modelar é mais interessante, pois prescinde das noções de situação e verdade, necessitando apenas da definição de modelo.

Ainda sob o princípio metodológico da navalha de Ockham, o próximo passo consistiria em pensar uma estrutura ainda mais simples, no seguinte sentido: seria possível uma estrutura cuja única noção envolvida fosse o conceito primitivo de fórmula? E mais: seria possível uma estrutura que além de definida somente a partir do conceito de fórmula ainda oferecesse uma definição materialmente adequada de conseqüência?

A proposição 4 nos oferece a motivação para imaginarmos como uma tal estrutura pode ser definida: a partir da teoria das valorações. Na seção seguinte, portanto, apresentaremos a terceira e última estrutura aqui tratada, a saber, a estrutura valorativa, a qual é construída somente a partir do conjunto de todas as fórmulas da linguagem.

3 Estrutura valorativa

Nesta seção, apresentaremos a proposta de um novo paradigma para a noção de conseqüência lógica, a saber, a definição de conseqüência a partir da teoria das valorações, sendo esta última, atribuída à Newton C. A. da Costa [1].

Denotaremos por $\mathbb{V}$ uma estrutrura *valorativa* composta apenas por um conjunto FOR de fórmulas da linguagem e uma família $\mathcal{K}$ de subconjuntos de FOR, ou seja, $\mathbb{V} = \langle FOR, \mathcal{K} \rangle$. Empregaremos letras gregas minúsculas para denotar elementos de FOR e maiúsculas para subconjuntos de FOR.

Segue a definição de *conjunto de valorações para um subconjunto de fórmulas*.

Definição 8. *Seja FOR um conjunto não vazio e $\mathcal{K}$ uma família de subconjuntos de FOR,* i.e., $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{P}(FOR)$. *Definimos o* ***conjunto de valorações para um subconjunto Γ de fórmulas****, em símbolos, $\mathcal{V}_{\mathbb{V}}(\Gamma)$, tal como segue:*

$$\mathcal{V}_{\mathbb{V}}(\Gamma) =_{def} \{V \in \mathcal{K} : \Gamma \subseteq V\}.$$

Definido o conjunto de valorações para um subconjunto de fórmulas, torna-se possível introduzir a definição de conseqüência lógica para a estrutura $\mathbb{V}$.

Definição 9. *Seja FOR um conjunto não vazio, $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{P}(FOR)$, $\alpha \in FOR$ e $\Gamma \subseteq FOR$. Definimos que α é* ***conseqüência lógica*** *de Γ (na estrutura $\mathbb{V}$), em simbolos, $\Gamma \models_{\mathbb{V}} \alpha$, se e somente se $\mathcal{V}_{\mathbb{V}}(\Gamma) \subseteq \mathcal{V}_{\mathbb{V}}(\{\alpha\})$.*

A idéia subjacente à noção de valoração é a de que cada elemento é um conjunto de fórmulas. Deste modo, elimina-se a noção de verdade, pois na teoria das valorações as fórmulas verdadeiras são escolhidas (diretamente). Em outras palavras, ao invés de introduzirmos uma função que atribua a cada fórmula um valor de verdade (o que demandaria a consideração não só de um conjunto de fórmulas, mas também de um conjunto de valores de verdade), definimos diretamente o conjunto das valorações para FOR, *i.e.*, a família $\mathcal{K}$ de subconjuntos de FOR.

Em outras palavras, e recordando a definição informal de conseqüência apresentada anteriormente, a estrutura $\mathbb{V}$ nos oferece uma resposta satisfatória para as duas questões em aberto suscitadas na apresentação: (i) uma situação é um subconjunto de fórmulas e (ii) uma fórmula é verdadeira em uma situação se a mesma pertence à dada situação.

Cabe aqui ressaltar, igualmente, que o procedimento de escolher diretamente o conjunto das fórmulas verdadeiras, bem como a pressuposição de noções básicas de teoria dos conjuntos (como "pertinência" e "inclusão") não constam na versão original da teoria das valorações (ver Da Costa e Loparic, [1]). Esta última utiliza a noção de *função característica* (funções de verdade), aqui generalizada pelo conjunto $\mathcal{K}$ das valorações. Portanto, a versão original é ontologicamente mais rica, embora menos interessante de acordo com o princípio metodológico da navalha de Ockham.

Por fim, observa-se que as definições 8 e 9 coincidem, respectivamente, com a definição 7 e a proposição 4. Antes, foram motivadas por tais. Nota-se que a exposição das estruturas trabalhadas (situacional, modelar e valorativa) foi organizada de tal forma que, partindo da formalização mais próxima da definição usual de conseqüência (via situação), os demais passos foram dados quase que naturalmente (ou necessariamente), suscitados pelos próprios resultados obtidos. Desta forma, a definição de conseqüência via estrutura valorativa é aqui defendida como a mais interessante, visto que utiliza apenas a noção primitiva de fórmula (o conjunto de valorações é derivado desta última). No entanto, para que uma tal defesa seja minimamente aceitável é ainda necessário enunciar que a definição em questão é materialmente adequada, bem como que as estruturas modelar e valorativa são equivalentes, resultados abaixo formalizados:

Proposição **5.** *Sejam* α *uma fórmula e* Γ *e* Δ*, conjuntos de fórmulas. Então,* $\models_{\mathbb{V}}$ *é materialmente adequada,* i.e.,

(i) se $\alpha \in \Gamma$ *então* $\Gamma \models_{\mathbb{V}} \alpha$*;*

(ii) se $\Gamma \models_{\mathbb{V}} \alpha$ *e* $\Gamma \subseteq \Delta$*, então* $\Delta \models_{\mathbb{V}} \alpha$*;*

(iii) se $\Gamma \models_{\mathbb{V}} \Delta$ *e* $\Delta \models_{\mathbb{V}} \alpha$*, então* $\Gamma \models_{\mathbb{V}} \alpha$*.*

Teorema **2 (2º Teorema da Equivalência).** *Sejam* $\alpha \in FOR$ *e* $\Gamma \subseteq FOR$*. Além disso:*

(a) seja $\mathbb{M} = \langle FOR, MOD, f_M \rangle$ *uma estrutura modelar. Então, existe uma estrutura valorativa* $\mathbb{V} = \langle FOR, \mathcal{K} \rangle$ *tal que* $\Gamma \models_{\mathbb{M}} \alpha$ *se e somente se* $\Gamma \models_{\mathbb{V}} \alpha$*.*

(b) seja $\mathbb{V} = \langle FOR, \mathcal{K} \rangle$ *uma estrutura valorativa. Então existe uma estrutura modelar* $\mathbb{M} = \langle FOR, MOD, f_M \rangle$ *tal que* $\Gamma \models_{\mathbb{V}} \alpha$ *se e somente se* $\Gamma \models_{\mathbb{M}} \alpha$*.*

A consideração dos dois teoremas da equivalência, teoremas 1 e 2, conduzem-nos a aceitação da equivalência das três estruturas estudadas: a situacional, a modelar e a valorativa. Novamente, estaríamos diante da seguinte pergunta: qual escolher? De acordo com o princípio de economia por nós adotado, a estrutura valorativa seria a indicada, por basear-se apenas em conjunto de fórmulas da linguagem (e em uma família de subconjuntos de fórmulas), eliminando a necessidade de tratar das complexas definições de situação, verdade e modelo.

Referências

[1] Da Costa, N.C.A. e A. Loparic. "Paraconsistency, paracompleteness and valuations". *Logique et Analyse*, 27 (106), 1984, pp. 119-31.