Sistema de Frege

10 de outubro de 2013

A primeira formulação da lógica proposicional como o cálculo formal se deve a G.Frege(1879). Frege usou o seguinte sistema de axiomas:
p→(q→p).
(s→(p→q))→((s→p)→(s→q)).
(p→(q→r))→(q→(p→r))
(p→q)→(¬q→¬p).
Eukasiewicz simplificou reduzindo para 3 axiomas: p→(q→p).
(s→(p→q))→((s→p)→(s→q)).
(¬p→¬q) →(q→p).
O nosso sistema é o seguinte: (A1) $(\varphi \to \psi \to\chi) \to (\varphi{\to}\psi){\to}(\varphi{\to}\chi)$.
(A2) $\varphi \to\psi \to\varphi$.
(A3)$\neg\varphi{\to}\varphi \to\psi$.
(A4) $(\varphi{\to}\psi){\to}(\neg\varphi{\to}\psi){\to}psi$.
Base de conectivos →,¬.
Regra de inferência: Modus ponens.
Obs: ⊢ é definido como sempre.

Lema 1: $\vdash\varphi \to \varphi$, isto é, $\varphi \to \varphi$ é um teorema.

.

Demonstração. $(\varphi(\varphi \to \varphi) \to \varphi)$ implica ($\varphi \to \varphi \to\varphi$)(A1) 1
$\varphi \to(\varphi \to \varphi) \to \varphi$.(A2) 2
$(\varphi \to \varphi \to \varphi){\to}(\varphi \to \varphi)$, por M.P 1,2. 3
$\varphi \to \varphi{\to}\varphi$. (A2) 4
$\varphi \to \varphi$ M.P 3,4 5

□

Definição:
ϕ é consistente se existe φ tal que $\phi \nvdash \varphi$
ϕ é inconsistente se existe $\phi \vdash \varphi$ para toda φ
ϕ é maximalmente consistente se ϕ é consistente e $\phi \cup \{\varphi\}$ é inconsistente para qualquer $\varphi \in$ FORM $- \phi$.
Obs: I $- \phi$ é inconsistente $\leftrightarrow \phi \vdash \perp$.
II $- \phi$ é consistente $\leftrightarrow \phi \nvdash \perp$ onde $\perp := \neg(\varphi \to \varphi)$. Mais precisamente, $\perp := \neg(p_0{\to}p_0)$.

Demonstração. I: " $\Longrightarrow$" é trivial.
"$\Longleftarrow$"
Seja $\phi \vdash \perp$. Isto é, $\phi \vdash \neg(p_0{\to}p_0)$. Por lema 1, $\phi \vdash (p_0{\to}p_0)$.
Por (A3), $\phi \vdash \to (p_0{\to}p_0){\to} \psi$.

Por M.P $\frac{\neg(p_0\to p_0)\neg(p_0\to p_0)\to(p_0\to p_0)\to\psi}{(p_0\to p_0)\to\psi}$.
Por M.P $\frac{(p_0\to p_0)(p_0\to p_0)\to\psi}{\psi}$.
Exercício. Provar o II. É análogo!.

$\square$

Lema 2: Teorema da dedução. $\phi \cup \{\ \varphi\} \vdash \psi \Longrightarrow \phi \vdash \varphi \to \psi$. **Exercício**

Lema 3: I – $\phi \vdash \varphi \leftrightarrow$ fizao $\cup \{\ \neg\varphi\} \vdash \bot$.
II – $\phi \vdash \neg\varphi \leftrightarrow \phi \cup \{\varphi\} \vdash \bot$
.

Demonstração. I: $\phi \vdash \varphi \Longrightarrow \phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$.Também : $\phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$.
(A3): $\phi\cup \{\neg\varphi\}\vdash\neg\varphi\to\varphi\to\bot$
2x M.P $\phi \cup \{\neg\varphi\}\vdash\bot$ $\phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot \Longrightarrow \phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$.(Obs.Anterior).
$\phi\vdash\neg\varphi\to\varphi$.(Teorema da dedução).
$\phi\vdash \varphi\to\varphi$. (Lema 1)
$\phi \vdash \varphi$ (Por A4(com $\varphi = \psi$) e 2x M.P).
II - **exercício**.

$\square$

Lema 4:(Teorema de Lindenbaum). Um conjunto consistente tem uma extensão maximalmente consistente.

Demonstração. Seja p_0,p_1,p_2,..., uma enumeração de FORM. Seja ϕ consistente. Construímos uma cadeia $\phi= \phi_0,\ \leq\phi_1,\ \leq,...,\phi_n,\ \leq...$ tal que cada ϕ_n é consistente e $\phi^* := \cup\phi_n$,n$\in$N é maximalmente consistente, $\phi\subseteq\phi^*$.
ϕ_0:= ϕ . Se ϕ_n é definido para n$\in$N, então definimos: ϕ_{n+1}:= ϕ_n $\cup\{\varphi_n\}$, se ϕ_n é consistente.
ϕ_n, c.c.
Obviamente, cada ϕ_n é consistente, n=0,1,... ϕ^* é maximalmente consistente.
ϕ^* é consistente se não for consistente, logo $\phi^* \vdash\bot$. Pela finitude de $\vdash$ existe um subconjunto finito $\Delta \subseteq \phi$ tal que $\Delta \vdash\bot$. Mas $\Delta \subseteq\phi_i$ para um i$\in$N $\Longrightarrow \varphi_i \vdash \bot$ contradição!
[$\Delta = \{\ \psi_1,...,\psi_n\ \}\ \Delta \perp \cup \phi\ _n \Longrightarrow \psi_1\in \phi_{i1},\psi_2\in \phi_{i2},...,\psi_m\in \phi_{im} \Longrightarrow \Delta \subseteq \phi_i$, onde n$\in$N, i= max $\{i_{i1},...,i_{im}\}$.
ϕ^* é consistente. ϕ é maximalmente consistente.
Supondo que não, então $\phi^* \cup \{\varphi\}$ é consistente para um $\varphi \in$ FORM-ϕ^*. Seja φ=φ_n na enumeração de fórmulas. Pela construção, $\phi_n \cup \{\varphi_n\}$ é consistente. Logo, $\varphi_n\in \phi_{n+1} \subseteq\phi^*$ é contradição. $\square$