1 Notas de aula

Vamos considerar o seguinte cálculo de Hilbert. Todas as fórmulas da forma seguinte são axiomas:

(A1) $(\phi \to \psi \to \chi) \to (\phi \to \psi) \to (\phi \to \chi)$
(A2) $\phi \to \psi \to \phi \land \psi$
(A3) $\phi \land \psi \to \phi$
(A4) $\phi \land \psi \to \psi$
(A5) $(\phi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\phi)$
Modus Ponens. Trabalhamos na base $\{\neg, \land\}$.

Usamos a definição $\phi \to \psi := \neg(\phi \land \neg\psi)$
Lema 1:
(a) $\Phi \vdash \phi \to \neg\psi$
$\Phi \vdash \psi \to \neg\phi$ (através do Modus Ponens)
$\Phi \vdash (\phi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\phi)$ por (A5).
Por hipótese, $\Phi \vdash \phi \to \psi$. MP resulta em $\Phi \models \psi \to \neg\phi$.

(b) $\vdash \phi \to \psi \to \phi$.
Por (A4), $\vdash \psi \land \neg\phi \to \neg\phi$.
Por (a), $\vdash \phi \to \neg(\psi \land \neg\phi)$ $(= \phi \to \psi \to \phi)$

(c) $\vdash \phi \to \phi$
$\vdash (\phi \to (\phi \to \phi) \to \phi) \to (\phi \to \phi \to \phi) \to \phi \to \phi$ por (A1)
Usando (b) e modus ponens duas vezes obtemos:
$\vdash (\phi \to \phi \to \phi) \to \phi \to \phi$
$\vdash \phi \to \phi$

(d) $\vdash \phi \to \neg\neg\phi$
Por (c), $\vdash \neg\phi \to \neg\phi$. Conforme (a), $\vdash \phi \to \neg\neg\phi$.

(e) $\vdash \psi \to (\neg\psi \to \phi)$
Temos que $\vdash \neg\psi \land \neg\phi \to \neg\psi$ (A3). Aplicando (a) obtemos:
$\vdash \psi \to \neg(\neg\psi \land \phi)$ $(= \psi \to \neg\psi \to \phi)$.