Onisciência Lógica.

Nilton Flávio Sousa Seixas.

29 de outubro de 2013

Sumário

Capítulo 1

Lógica Modal.

1.1 Introdução.

Nesta seção apresentarei a lógica modal baseada na lógica proposicional. Mas primeiramente, o que é lógica modal? Lógica modal é o estudo das proposições modais e as relações lógicas entre elas. Proposições modais são proposições que enunciam a maneira com que o predicado convém ao sujeito. Exemplos de proposições modais:

É possível que irá chover amanhã.

É possível para seres humanos viajarem até marte.

Necessariamente está(é necessário que esteja) chovendo aqui agora ou não.

Usarei aqui os dois operadores modais necessidade e possibilidade. Quando uma asserção usa o operador da necessidade, ela é necessariamente verdadeira, ou seja, não existe um mundo, situação ou estado em que ela seja falsa. Por outro lado , uma asserção pode ser possível, ou seja, existe pelo menos um mundo, situação ou estado em que a asserção é verdadeira e podendo haver outras em que ela seja falsa.

O operador modal da necessidade aqui será o $\Box$, logo sendo uma fórmula φ, $\Box\varphi$ é uma nova fórmula que se lê φ necessário, cuja fórmula é necessariamente verdadeira. O operador modal para possibilidade é o $\Diamond$, daí seguindo o mesmo raciocínio, temos $\Diamond\varphi$ como uma nova fórmula tal que a asserção possui leitura φ possível.

A lógica modal serve como base para outras lógicas, e consequentemente, possui interpretações diferentes para os símbolos modais já determinados, ou como em alguns casos, um acréscimo de seus operadores modais. Cito aqui alguns exemplos para lógicas com base na lógica modal:

Lógica temporal, que é uma lógica que representa a veracidade das proposições com o passar do tempo, ou seja, uma asserção pode ser sempre verdadeira no futuro, ou alguma vez no futuro. A saber, temos o operador $\Box$, como o representante de "sempre no futuro" e o operador $\Diamond$ como o operador de "alguma vez no futuro"

Lógica doêntica, que é a lógica conhecida como lógica das obrigações e permissões. Neste caso, temos o operador modal $\Box$ representando uma asserção obrigatória, e temos o operador $\Diamond$ representando a asserção que é permitida.

A lógica epistêmica, também conhecida como a lógica do conhecimento, é uma lógica em que os símbolos modais são interpretados da seguinte forma: $\Box$ representa a asserção que é conhecida, ou seja, um agente i sabe φ, que tem expressão na forma de $\Box_i\varphi$. Similarmente, um agente i acredita em φ, cuja expressão equivale a $\Diamond_i\varphi$. Os símbolos modais $\Box$ e $\Diamond$ costumeiramente são substituídos por K e B respectivamente. K vem do inglês Knowledge (conhecimento) e B de Belief (crença,acreditar).

1.2 Sintaxe.

Agora vou introduzir a sintaxe usada pela lógica modal proposicional. Irei fazê-lo em dois passos: o primeiro é a definição do alfabeto e depois, a linguagem modal induzida pelo alfabeto modal sobre o conjunto P.

Seja P um conjunto não-vazio de fórmulas atômicas que pode ser finito para um n qualquer tal que P = p_1,p_2,p_3,...,p_n ou infinito tal que P = { p_i,p_{i+1},...}, para i $\geq$ 1, sendo que o mais importante é que os membros de P possam ser enumerados. Então temos como sintaxe da lógica modal:

(1) Qualquer que seja p_i, tal que $p_i \in$ P, para i $\geq$ 1.

(2) O simbolo da contradição $\perp$.

(3) Operadores lógicos binários : $\rightarrow$,$\vee$,$\wedge$, sendo implicação, disjunção e conjunção respectivamente.

(4) Os operadores modais $\Box$(necessidade) e $\Diamond$(possibilidade).

(5) Os símbolos auxiliares (,).

(6) Operador unário de negação $\neg$.

Agora apresento a definição da linguagem modal induzida pelo alfabeto modal, sobre o conjunto de fórmulas atômicas P. Seja FormM o cojunto de fórmulas da lógica modal, temos:

(1) $p_i \in$ FormM para qualquer pi $\in$ P, i $\geq$ 1.

(2) $\perp \in$ FormM.

(3) Seja as fórmulas: ($\varphi \rightarrow \varphi$'), ($\varphi \wedge \varphi$'), ($\varphi \vee \varphi$), $\Box\varphi$, $\Diamond\varphi$. Todas essas fórmulas pertencem a FormM, quaisquer que sejam φ, φ'.

1.3 Semântica.

Primeiramente irei apresentar o modelo de kripke para apresentar a semântica. Um modelo de Krikpe é uma tupla representada por (S,Π,R) onde:

S é um conjunto não-vazio de estados ou mundos ou situações. Aqui tratarei como estados.

Π é uma função que atribui verdade ou falso para os átomos por estado. Aqui trataremos verdade ou falso como v ou f respectivamente.

$S \rightarrow (p \rightarrow (v,f))$.

R: Relacionamento ou possibilidades entre os estados. Seja Ri $\subseteq$ SxS onde (i=1,...,m).

Um mundo de kripke w consiste em uma tupla representada por um modelo de kripke e um estado s. O termo $(s,t) \in R_i$ é interpretado da seguinte forma: Em um mundo (M,s), o agente i considera o mundo (M,t) como um mundo possível. A relação entre s e t será tratada aqui como R(s,t).

Seja um mundo w = (M,s), s $\in$ S. A representação da satisfação de $\varphi \in$ FormM por um mundo w, é denotado por:

$$M,s \models \varphi$$

e segui-se indutivamente as definições:

(1) $M,s \models p \leftrightarrow \Pi(s)(p) = v$ para $p \in P$.

(2) $M,s \models \varphi \wedge \varphi' \leftrightarrow M,s \models \varphi$ e $M,s \models \varphi'$.

(3) $M,s \models \varphi \vee \varphi' \leftrightarrow M,s \models \varphi$ ou $M,s \models \varphi'$.

(4) $M,s \models \varphi \rightarrow \varphi' \leftrightarrow M,s \not\models \varphi$ e $M,s \models \varphi'$ [1].

(5) $M,s \models \neg \varphi \leftrightarrow M,s \not\models \varphi$.

(6) $M,s \models \Box \varphi$ se para cada $M,t \models \varphi$, para $t \in S$ tal que R(s,t).

(7) $M,s \models \Diamond\varphi$ se existe t, tal que $M,t \models \varphi$ e R(s,t).[2].

(8) $M \models \varphi$ se $M,s \models \varphi$ para todo $s \in S$. Dizemos que M é um modelo para φ.

(9) $\models \varphi$ (φ é válido) se $M \models \varphi$ para todo M.[3]

[1] definição alternativa: se $M,s \models \varphi$, então $M,s \models \varphi'$

[2] Quando digo R(s,t), afirmo que há uma relação de possibilidade do mundo s ao mundo t considerada pelo agente em questão

[3] Para todo os modelos de Kripke.