Notas de aulas da disciplina de Lógica, primeira parte

Steffen Lewitzka

O seguinte script aborda alguns dos assuntos da primeira parte da disciplina de Lógica. O script está em fase de preparação e a versão atual provavelmente contém ainda vários erros e imperfeições. Em caso de dúvidas favor entrar em contato com o autor. Qualquer sugestão é bem-vinda.

1 A Lógica Proposicional

1.1 Sintaxe da Lógica Proposicional

O alfabeto da linguagem da Lógica Proposicinal contém os seguintes símbolos:

(i) Um conjunto infinito (e contável) de variáveis de proposições $P = \{p_0, p_1, ...\}$. Usamos letras $p, q, r, s, ...$ para nos referir a variáveis de proposições.

(ii) Conectivos: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \top, \bot$.

(iii) Parênteses: (e).

Definição 1.1 *O conjunto $FORM$ das fórmulas é o menor conjunto que satisfaz as condições seguintes:*

(i) $P \cup \{\top, \bot\} \subseteq FORM$, isto é, variáveis de proposições e os conectivos $\top$, $\bot$ são fórmulas. Essas fórmulas são ditas atômicas.

(ii) Se $\varphi, \psi \in FORM$, então $\neg\varphi, (\varphi \vee \psi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi) \in FORM$.

Os conectivos são lidos da seguinte maneira:

$\neg\varphi$ ... negação de φ, "não φ"
$\varphi \vee \psi$ ... disjunção de φ e ψ, "φ ou ψ"
$\varphi \wedge \psi$ ... conjunção de φ e ψ, "φ e ψ"
$\varphi \to \psi$ ... implicação de φ para ψ, "φ implica ψ"
$\varphi \leftrightarrow \psi$ ... equivalência ou bicondicional entre φ e ψ, "φ se e somente se ψ"
$\top$ ... o verum (o verdadeiro)
$\bot$ ... o falsum (o falso)

Os conectivos $\bot$ e $\top$ são chamadas de constantes proposicionais já que suas intepretações nunca mudam: representam sempre uma proposição falsa ou verdadeira, respectivamente. Note que $\bot$ e $\top$ são ao mesmo tempo conectivos e fórmulas (atômicas). Estes conectivos não são essenciais para o desenvolvimento da lógica proposicional e alguns autores não fazem uso deles.

Os parênteses garantem a legibilidade correta das fórmulas. Por exemplo, não fica claro como ler $\varphi \vee \psi \to \chi$. Porém, em muitos casos podemos omitir parênteses. Para isso, vamos introduzir certas regras que explicamos informalmente no seguinte:

- Parênteses mais externos podem ser omitidos. Ex.: $\varphi \vee \psi$ representa a fórmula $(\varphi \vee \psi)$.
- No uso repetido da conjunção ou da disjunção os parênteses aninham-se à esquerda. Ex.: $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \varphi_3 \vee \varphi_4$ representa a fórmula $(((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \vee \varphi_4)$.
- No uso repetido da implicação os parênteses aninham-se à direita. Ex. $p \to q \to r$ representa $(p \to (q \to s))$.
- Consideramos a seguinte precedência dos conectivos (em ordem decrescente): $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$. Ex: $p \vee q \wedge r$ representa $(p \vee (q \wedge r))$, $p \vee \neg q \to r$ representa $((p \vee \neg q) \to r)$, $p \vee \neg q \to r$ e $p \vee \neg(q \to r)$ e $p \vee (\neg q \to r)$ representam três fórmulas diferentes.

Definição 1.2 *Seja $\varphi \in FORM$. O conjunto $sub(\varphi)$ das subfórmulas de φ é definido recursivamente como segue:*

- *$sub(\varphi) = \{\varphi\}$, se φ é atômica.*

- $sub(\varphi) = sub(\psi) \cup \{\varphi\}$, *se* $\varphi = \neg\psi$.
- $sub(\varphi) = sub(\psi) \cup sub(\chi) \cup \{\varphi\}$, *se* $\varphi = \psi\Box\chi$, $\Box \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

ψ *é subfórmula própria de* φ*, se* $\psi \in sub(\varphi) \setminus \{\varphi\}$. ψ *é dita subfórmula imediata de* φ*, se é subfórmula própria de* φ *e não existe nenhuma subfórmula própria* χ *de* φ *tal que* ψ *é subfórmula própria de* χ.

Exercício 1.3 *Ache o conjunto de todas as subfórmulas de* $\varphi = (p \rightarrow q \rightarrow r) \wedge (s \vee s \rightarrow r)$. *Dê exemplos de subfórmulas próprias e imediatas. Fórmulas podem ser representadas por árvores onde cada vértice é dado por uma subfórmula, e os filhos de um vértice são dados pelas subfórmulas imediatas. Sendo assim, as folhas da árvore são as subfórmulas atômicas. Apresente a árvore ligada à fórmula* φ.

1.2 Semântica da Lógica Proposicional

Definição 1.4 *Uma valoração é uma função* $v : P \rightarrow \{0, 1\}$. *Os elementos* $0, 1$ *são interpretados como valores verdade, onde* 1 *corresponde ao valor "verdadeiro" e* 0 *ao valor "falso". Estendemos uma valoração* v *para a uma função* $v^* : FORM \rightarrow \{0, 1\}$ *de forma seguinte:*

$$
\begin{aligned}
&v^*(p) = v(p), \text{ para } p \in P\\
&v^*(\top) = 1\\
&v^*(\bot) = 0\\
&v^*(\neg\varphi) = \begin{cases} 1, \text{ se } v^*(\varphi) = 0 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$v^*(\varphi \vee \psi) = \begin{cases} 1, \text{ se } v^*(\varphi) = 1 \text{ ou } v^*(\psi) = 1 \\ 0, \text{ c.c.} \end{cases}$$

$$v^*(\varphi \wedge \psi) = \begin{cases} 1, \text{ se } v^*(\varphi) = v^*(\psi) = 1 \\ 0, \text{ c.c.} \end{cases}$$

$$v^*(\varphi \rightarrow \psi) = \begin{cases} 0, \text{ se } v^*(\varphi) = 1 \text{ e } v^*(\psi) = 0 \\ 1, \text{ c.c.} \end{cases}$$

$$v^*(\varphi \leftrightarrow \psi) = \begin{cases} 1, & \textit{se } v^*(\varphi) = v^*(\psi) \\ 0, & \textit{c.c.} \end{cases}$$

Para simplificar a notação denotamos a extensão de v também por v, ou seja, escrevemos v em lugar de v^*.

$2^P = \{v \mid v : P \to \{0,1\}\}$ é o conjunto de todas as valorações.

Exemplo 1.5 *Seja a valoração v dada por $p \mapsto 0$, $q \mapsto 1$, $r \mapsto 1$, $s \mapsto 0$, e $u \mapsto 0$ para $u \notin \{p, q, r, s, \bot, \top\}$. Então, $v(\neg p) = 1$, $v(p \vee \neg p) = 1$, $v((p \to (q \to r)) \wedge s) = 0$.*

Definição 1.6 *Seja φ uma fórmula e $v \in 2^P$. Dizemos que v satisfaz φ, se $v(\varphi) = 1$. A relação de satisfatibilidade $\vDash$ é definida como segue.*

$$v \vDash \varphi :\Longleftrightarrow v(\varphi) = 1.$$

Se $v \vDash \varphi$, então dizemos que v é um modelo de φ. Se v não é modelo de φ (ou seja, $v(\varphi) = 0$), então escrevemos $v \nvDash \varphi$. Estas noções podem ser generalizadas para conjuntos de fórmulas $\Phi \subseteq FORM$. Dizemos que v satisfaz Φ ou v é modelo do conjunto Φ de fórmulas, notação: $v \vDash \Phi$, se $v \vDash \varphi$ para todo $\varphi \in \Phi$.

Exemplo 1.7 *Seja $v(p) = 0 = v(q)$, $v(r) = 1$, e seja $\varphi := p \to q$, $\psi := r \to q$. Então, $v \vDash \varphi$ e $v \nvDash \psi$.*
A fórmula $\varphi := p \vee \neg p$ é satisfeita por todas as valorações. Ou seja, toda valoração é modelo de φ.
O conjunto $\Phi := \{p, \neg p\}$ não possui nenhum modelo.

A semântica (o significado) dos conectivos pode ser dada por funções booleanas sobre valores de verdade. Para isto atribuímos a cada conectivo c uma função booleana $f_c : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ (onde n é a aridade do conectivo c) de acordo com a Definição 1.4. Por exemplo, a definição 1.4 nos dá para o conectivo $\vee$ a seguinte função booleana:
$f_\vee : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ definida por $f_\vee(1,1) = 1$, $f_\vee(1,0) = 1$, $f_\vee(0,1) = 1$, $f_\vee(0,0) = 0$.

$\bot$ e $\top$ são conectivos de aridade 0. Estes geram funções booleanas de aridade 0, ou seja, constantes: $f_\top = 1$, $f_\bot = 0$.

O conectivo da negação tem aridade 1 e sua semântica é uma função $f_\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$ definida por $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 0$. Deixamos como exercício encontrar as funções booleanas que representam a semântica dos conectivos restantes.

Definição 1.8 *Seja $\varphi \in FORM$. O conjunto $var(\varphi)$ das variáveis de proposições de φ é definido como segue:*

- $var(p) = \{p\}$*, para* $p \in P$*,*
- $var(\top) = var(\bot) = \varnothing$*,*
- $var(\neg\psi) = var(\psi)$*,*
- $var(\psi\Box\chi) = var(\varphi) \cup var(\chi)$*, onde* $\Box \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$*.*

Se A é uma propriedade de fórmulas (isto é, uma afirmação que envolve fórmulas), então expressamos o fato que uma fórmula φ tem a propriedade A (isto é, a afirmação A é verdadeira para a fórmula φ) por $A(\varphi)$. Frequentemente estamos na situação de ter que demonstrar que *todas* as fórmulas satisfazem uma dada propriedade A. Como o conjunto $FORM$ é infinito, não podemos provar $A(\varphi)$ para cada fórmula φ separadamente. Aqui, o seguinte princípio de prova nos ajuda.

Teorema 1.9 (Prova por indução na construção das fórmulas) *Seja A uma propriedade de (ou uma afirmação sobre) fórmulas. Para provar $A(\varphi)$ para todo $\varphi \in FORM$ é suficiente provar os dois itens seguintes:*

(i) $A(\varphi)$ *para toda fórmula atômica* φ*.*

(ii) Se $A(\psi)$ *e* $A(\chi)$*, então* $A(\neg\psi)$ *e* $A(\psi\Box\chi)$*, onde* $\Box \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$*.*

Demonstração. Seja $X = \{\varphi \in FORM \mid A(\varphi)\}$. Obviamente, $X \subseteq FORM$. Para provar o Teorema temos que mostrar que $X = FORM$, se (i) e (ii) são satisfeitos. Sejam (i) e (ii) verdadeiros. Então X satisfaz os itens (i) e (ii) da Definição 1.1. Ou seja, toda fórmula atômica pertence a X, e se φ e ψ pertencem a X, então também $\varphi\Box\psi \in X$. Conforme a Definição 1.1, $FORM$ é o menor conjunto que satisfaz essas duas propriedades. Por conseguinte, $FORM \subseteq X$. Logo, $X = FORM$. Q.E.D

Vamos apresentar uma prova alternativa do Teorema 1.9. Para isto introduzimos a seguinte função $compl : FORM \to (N)$ que atribui a cada fórmula φ um número natural conforme sua "complexidade".

$$
\begin{aligned}
&compl(\bot) = compl(\top) = compl(p) = 0, \text{ para } p \in P \\
&compl(\neg\psi) = compl(\psi) + 1 \\
&compl(\psi \Box \chi) = max(compl(\psi), compl(\chi)) + 1
\end{aligned}
$$

A função $max(n, m)$ retorna o maior dos números n e m. A seguir usaremos o "Axioma da Indução" que diz que todo conjunto não vazio de números naturais tem um elemento minimal. Seja A alguma afirmação sobre fórmulas e suponhamos que (i) e (ii) do Teorema sejam verdadeiras. Para chegar a uma contradição supomos que exista alguma fórmula ψ tal que $A(\psi)$ é falso. Então o conjunto $M = \{\psi \mid \text{não } A(\psi)\}$ é não-vazio. Portanto podemos escolher um elemento $\psi \in M$ tal que $compl(\psi) = n$ é minimal, ou seja, o menor elemento de $\{compl(\psi) \mid \psi \in M\}$. Isto é, para toda fórmula φ com $compl(\varphi) < n$ temos que $A(\varphi)$ é verdadeiro. Por (i), ψ não pode ser fórmula atômica. Então ψ tem a forma ou $\neg\chi$ ou $\chi_1 \Box \chi_2$, $\Box \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$, para fórmulas χ, χ_1, χ_2. Seja $\psi = \chi_1 \vee \chi_2$. Isto implica que $compl(\chi_1), compl(\chi_2) < n$. Portanto $A(\chi_1)$ e $A(\chi_1)$. Por (ii), $A(\psi)$, ou seja, $\psi \notin M$. Uma contradição! Analogamente obtemos contradições supondo que ψ tem a forma $\neg\chi$ ou $\chi_1 \Box \chi_2$, $\Box \in \{\wedge, \to, \leftrightarrow\}$. Logo, a suposição que exista alguma fórmula ψ tal que "não $A(\psi)$" é falsa. Isto é, $M = \varnothing$ e $A(\varphi)$ para toda fórmula φ. Q.E.D.

Lema 1.10 (Lema de Coincidência) *Seja $\varphi \in FORM$. Se v_1 e v_2 são duas valorações tais que $v_1(p) = v_2(p)$ para todo $p \in var(\varphi)$, então $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.*

Demonstração. Base da indução. Se $\varphi = p \in P$, então a afirmação é trivial. Seja $\varphi = \bot$. Então, $v(\varphi) = 0$, para qualquer valoração v. Analogamente para o caso $\varphi = \top$. Logo, a afirmação é verdadeira para todas as fórmulas atômicas.
Passo de indução. Seja $\varphi = \neg\psi$ e $v_1(p) = v_2(p)$ para todo $p \in var(\varphi)$. Como $var(\varphi) = var(\psi)$, temos que $v_1(p) = v_2(p)$ para todo $p \in var(\psi)$. Aplicando a hipótese da indução obtemos: $v_1(\psi) = v_2(\psi)$. Da definição de uma valoração segue $v_1(\neg\psi) = v_2(\neg\psi)$.
Ainda falta provar a afirmação para os casos $\varphi = \psi \Box \chi$, onde $\Box \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$, assumindo a afirmação para ψ e χ (hípotese da indução). Deixamos isto como exercício. Q.E.D.

O Lema da Coincidência diz que o valor de verdade de uma fórmula φ depende apenas dos valores de verdade das variáveis que ocorrem na fórmula.

Definição 1.11 *Seja $\varphi \in FORM$.*

(i) φ é válida (ou uma tautologia), se toda valoração é modelo de φ.

(ii) φ é contraditória (ou uma contradição), se nenhuma valoração é modelo de φ.

(iii) φ é satisfatiível, se φ tem um modelo.

Analogamente definimos essas noções para conjuntos Φ de fórmulas.

Lema 1.12 *Uma fórmula φ é válida se e somente se $\neg\varphi$ é contraditória.*

Demonstração. φ é tautologia sse toda valoração v é modelo de φ sse toda valoração v não é modelo de $\neg\varphi$ sse $\neg\varphi$ não tem nenhum modelo sse $\neg\varphi$ é uma fórmula contraditória. $\square$

Exemplo 1.13 *$((p \to q) \wedge p) \to q$ é tautologia.*
$((p \to q) \wedge q) \to p$ nem é tautologia nem contradição.
Se φ é contradição ou ψ tautologia, então $\varphi \to \psi$ é válida.
O seguinte é falso. Se φ é contradição e $\varphi \to \psi$ é tautologia, então ψ é tautologia.
Prove estas afirmações (sem o uso de tabelas de verdade)! Dica: A falsidade de uma afirmação se prova dando um contra-exemplo.

Os conceitos "contraditório", "satisfatível" e "válido" são decidíveis (ou computáveis). Isto é, existe um algoritmo (um procedimento efetivo) que dá uma resposta "sim" ou "não" à respectiva pergunta "Uma dada fórmula φ pertence ao conjunto das fórmulas contraditórias (satisfatíveis, válidas) ?". Um algoritmo bem conhecido é o método das tabelas de verdade. Seja $\varphi \in Form$ e n o número de variáveis que ocorrem em φ. Então existem 2^n possibilidades de atribuir valores de verdade aos n variáveis. Pelo Lema 1.10, é suficiente considerar apenas as valorações que atribuem valores diferentes às variáveis de φ, ou seja, 2^n valorações. Essas valorações podem ser listadas numa tabela de verdade que tem 2^n linhas (uma para cada valoração). As colunas contêm os valores das subfórmulas de φ, a última coluna o valor da própria fórmula φ.

Exercício: Apresente a tabela de verdade para $p \to (q \vee r) \to (q \wedge r)$.

1.2.1 Consequência Lógica

Intuitivamente, uma proposição B segue de uma conjunto M de proposições, se em cada "mundo possível" (modelo) em que M é verdadeiro B também é verdadeiro. Na Lógica Proposicional os "mundos possíves" são valorações, e proposições são representadas por fórmulas.
Exemplo:

"Ou chove ou o céu está azul. Se chove, então não faz sol. Logo, se faz sol, então o céu está azul."

Vamos formalizar este argumento na Lógica Proposicional. Seja p a variável que representa a proposição "Chove." (mais preciso, p é a variável de proposição que contém o valor de verdade da proposição "Chove."), q a variável que representa "O céu está azul.", e r a variável que contém o valor da proposição "Faz sol.". Então, das premissas $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ e $p \to \neg r$ podemos tirar a conclusão $r \to q$. A corretude deste raciocínio (desta consequência lógica) é justificada pelo fato que cada valoração que é modelo de $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ e $p \to \neg r$ também é modelo de $r \to q$. Expressamos este fato pela notação: $\{(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q), p \to \neg r\} \Vdash r \to q$. $\Vdash$ é um símbolo da nossa metalinguagem e representa a relação da consequência lógica.

Definição 1.14 *Para um conjunto $\Psi \subseteq FORM$ de fórmulas definimos $Mod(\Psi) = \{v \in 2^P \mid v \vDash \Psi\}$, o conjunto dos modelos de Ψ. Uma fórmula ψ segue de um conjunto Φ de fórmulas (ψ é consequência lógica de Φ, notação: $\Phi \Vdash \psi$), se $Mod(\Phi) \subseteq Mod(\{\psi\})$, isto é, $v \vDash \Phi$ implica em $v \vDash \psi$, para toda valoração v. Se $\Phi \Vdash \psi$, então Φ é dito conjunto de premisas e ψ é a conlusão. Em vez de $\varnothing \Vdash \psi$ escrevemos $\Vdash \psi$. $\varphi_1, ..., \varphi_n \Vdash \psi$ é o mesmo que $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \Vdash \psi$, e $\Phi, \varphi \Vdash \psi$ é uma abreviatura de $\Phi \cup \{\varphi\} \Vdash \psi$.*
Se ψ não é consequência lógica de Φ, então escrevemos $\Phi \nVdash \psi$.

A prova da seguinte observação é um simples exercício.

Lema 1.15 $\Vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi$ *é válida.*

Exemplo 1.16 *(i)* $\varphi \Vdash \varphi \vee \psi$

(ii) $\varphi \to \psi \Vdash (\chi \vee \varphi) \to (\chi \vee \psi)$

(iii) $\varphi, \varphi \to \psi \Vdash \psi$

Prove a validade dos argumentos acima!

Temos agora três símbolos para implicação: $\rightarrow$, $\Vdash$ e $\Rightarrow$. O primeiro é um símbolo da linguagem objeto, os dois restantes são símbolos da nossa metalinguagem. O seguinte teorema mostra que existe uma íntima ligação entre $\Vdash$ e $\rightarrow$.

Teorema 1.17 (Teorema de Dedução) *Sejam $\psi, \varphi_i \in FORM, 1 \leq i \leq n$, e $\Phi \subseteq FORM$. Então*

$$\Phi, \varphi_1, ..., \varphi_n \Vdash \psi \iff \Phi \Vdash \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \rightarrow \psi.$$

Deixamos a demonstração do teorema como exercício.

Um importante caso especial do teorema é $\Phi = \varnothing$. Neste caso o teorema diz que $\varphi_1, ..., \varphi_n \Vdash \psi$ sse a fórmula $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \rightarrow \psi$ é válida. Como a validez de uma fórmula é decidível segue que a relação de conseqüência é decidível para conjuntos finítos de premissas. Isto é, existe um algoritmo que para quaisquer fórmulas $\varphi_1, ..., \varphi_n, \psi$ computa a resposta para a pergunta: $\varphi_1, ..., \varphi_n \Vdash \psi$?
O caso $\Phi = \varnothing$ também revela uma ligação íntima entre $\rightarrow$ e $\Vdash$: neste caso a relação de consequência pode ser formalizada na linguagem de objeto.

Exemplo 1.18 *Prove o seguinte.*
$(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi, \vartheta \rightarrow \psi \Vdash (\varphi \wedge \vartheta) \rightarrow \chi$.

A relação de consequência tem as seguintes propriedades que seguem imediatamente da definição.

Teorema 1.19 *Para todos os $\Phi, \Phi' \subseteq Form(P)$, $\varphi, \psi \in Form(P)$ o seguinte é verdadeiro.*

- *$\Phi \Vdash \psi$, para todo $\psi \in \Phi$. (Extensividade ou Reflexividade)*
- *Se $\Phi \subseteq \Phi'$ e $\Phi \Vdash \psi$, então $\Phi' \Vdash \psi$. (Monotonicidade)*
- *Se $\Phi' \Vdash \psi$, e $\Phi \Vdash \varphi$ para todo $\varphi \in \Phi'$, então $\Phi \Vdash \psi$. (Idempotência)*

A demonstração do teorema é um fácil exercício. Demonstre também que a monotonicidade já segue da idempotência e da reflexividade.

Existe uma ligação entre as noções da satisfatibilidade e da consequência lógica. Uma pode ser caracaterizada pela outra:

Proposição 1.20
- *Para cada conjunto de fórmulas Φ os enunciados seguintes são equivalentes:*

(i) Φ *é satisfatível.*

(ii) *Para qualquer fórmula contraditória* φ*,* $\Phi \not\Vdash \varphi$*.*

(iii) *Existe uma fórmula* ψ *tal que* $\Phi \not\Vdash \psi$

- *Para cada conjunto de fórmulas* Φ *e cada fórmula* φ *os enunciados seguintes são equivalentes:*

  (i) $\Phi \Vdash \varphi$

  (ii) *O conjunto* $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ *não é satisfatível (ou seja, contraditório).*

Demonstração. Para provar o primeiro item se pode mostrar $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$. Deixamos isto como exercício.
Segundo item. $(i) \Rightarrow (ii)$. Seja $\Phi \Vdash \varphi$ e seja v alguma valorização. Temos que mostrar que $v \not\vDash \Phi \cup \{\neg\varphi\}$. Distinguimos dois casos.
Caso 1: $v \not\vDash \Phi$. A afirmação é evidente.
Caso 2: $v \vDash \Phi$. Como $\Phi \Vdash \varphi$, obtemos $v \vDash \varphi$. Então $v \not\vDash \neg\varphi$ e a afirmação segue.
$(ii) \Rightarrow (i)$. Seja $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ contraditório. Supomos que $v \vDash \Phi$ para alguma valorização v. Então $v \not\vDash \neg\varphi$, logo $v \vDash \varphi$. Isto significa que $\Phi \Vdash \varphi$. Q.E.D.

Negando os equivalentes enunciados (i), (ii) e (iii) do primeiro item da proposição anterior obtemos as seguintes caraterizações equivalentes de "Φ é contraditório."

(i) Φ é contraditório.

(ii) Existe uma fórmula contraditória φ tal que $\Phi \Vdash \varphi$.

(iii) Para toda fórmula ψ, $\Phi \Vdash \psi$.

1.2.2 Equivalência lógica

Definição 1.21 *Dizemos que duas fórmulas* φ, ψ *são logicamente equivalentes (notação:* $\varphi \equiv \psi$*), se para toda valoração* $v \in 2^P$*,* $v \vDash \varphi \Longleftrightarrow v \vDash \psi$*.*

Exemplo 1.22

- *Para toda fórmula* φ*,* $\varphi \vee \neg\varphi \equiv \top$ *e* $\varphi \wedge \neg\varphi \equiv \bot$*.*
- $\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$*,* $\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$ *(Idempotência)*
- $\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$*,* $\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$ *(Comutatividade)*
- $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$*,* $\varphi \vee (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \chi$*, (Associatividade)*

- $\neg(\varphi \land \psi) \equiv \neg\varphi \lor \neg\psi$, $\neg(\varphi \lor \psi) \equiv \neg\varphi \land \neg\psi$ *(Regras de De-Morgan)*
- $(\varphi \land \psi) \lor \psi \equiv \psi$, $(\varphi \lor \psi) \land \psi \equiv \psi$ *(Absorção)*
- $\varphi \land (\psi \lor \chi) \equiv (\varphi \land \psi) \lor (\varphi \land \chi)$, $\varphi \lor (\psi \land \chi) \equiv (\varphi \lor \psi) \land (\varphi \lor \chi)$ *(Distributividade)*
- $\varphi \equiv \neg\neg\varphi$ *(Dupla negação)*
- $\varphi \lor \psi \equiv \varphi$ *e* $\varphi \land \psi \equiv \psi$, *se* φ *é tautologia (Regras de tautologia)*
- $\varphi \lor \psi \equiv \psi$ *e* $\varphi \land \psi \equiv \varphi$, *se* φ *é contradição (Regras de contradição)*
- $\varphi \to \psi \equiv \neg\psi \to \neg\varphi$ *(Contraposição)*
- $\neg\varphi \equiv \varphi \to \bot$
- $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \lor \psi$ *(Eliminação de* $\to$*)*
- $\varphi \to \psi \to \chi \equiv (\varphi \land \psi) \to \chi$

Exercício: Prove as equivalências acima!

Teorema 1.23 *Seja* $\varphi \equiv \varphi'$ *e* $\varphi \in sub(\psi)$. *Então* $\psi \equiv \psi'$, *onde* ψ' *é a fórmula que obtemos substituindo alguma ocorrência de* φ *em* ψ *por* φ'.

Demonstração. Por indução na construção de ψ. Exercício!

Lema 1.24 *Os enunciados seguintes são equivalentes para todas as fórmulas* φ, ψ.

(i) $\varphi \equiv \psi$.

(ii) A fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ *é válida.*

(iii) $\varphi \Vdash \psi$ *e* $\psi \Vdash \varphi$.

Demonstração. Exercício.

Sabemos que a validez de uma fórmula é decidível. Pelo teorema anterior, a equivalência lógica entre duas fórmulas é decidível.

1.2.3 Formas normais

Neste capítulo trabalharemos sem as fórmulas $\perp$ e $\top$, ou seja, supomos que $\perp, \top \notin FORM$. Podemos fazer isso porque $\perp \equiv p \wedge \neg p$ e $\top \equiv p \vee \neg p$, para qualquer $p \in P$. Isto é, $\perp$ e $\top$ podem ser representadas por outras fórmulas logicamente equivalentes.

Definição 1.25

- *Uma fórmula $\psi \in FORM$ é dita literal, se $\psi = p$ ou $\psi = \neg p$, para algum $p \in P$. No primeiro caso, ψ é literal positivo, no segundo caso é literal negativo.*

- *Para um literal ψ,*

$$\overline{\psi} := \begin{cases} \neg\psi, \text{ se } \psi \in P \\ p, \text{ se } \psi = \neg p \end{cases}$$

  é o literal inverso.

- *Uma fórmula está em forma normal disjuntiva (FND), se $\varphi = \varphi_1 \vee ... \vee \varphi_n$, onde $n \geq 1$ e $\varphi_i = \psi_{i,1} \wedge ... \wedge \psi_{i,m_i}$ com literais $\psi_{i,j}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m_i$.*

- *Uma fórmula está em forma normal conjuntiva (FNC), se $\varphi = \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n$, onde $n \geq 1$ e $\varphi_i = \psi_{i,1} \vee ... \vee \psi_{i,m_i}$ com literais $\psi_{i,j}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m_i$.*

Exemplo 1.26 *As fórmulas p, $p_1 \wedge ... \wedge p_n$ e $p_1 \vee ... \vee p_n$ estão em FND e FNC.*
As fórmulas $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$, $(\neg p \wedge r) \vee q$ estão em FND.
As fórmulas $\neg(p \wedge r) \vee (p \wedge q)$, $(p \wedge (q \vee r)) \vee (\neg p \wedge q)$ não estão em FND.

Encontre outras fórmulas que estão em FNC e fórmulas que não estão em FNC!

Proposição 1.27 *Para toda fórmula φ podem ser construidas fórmulas ψ e ψ' tal que $\varphi \equiv \psi \equiv \psi'$ e ψ está em FND e ψ' está em FNC.*

A Proposição pode ser provada, por exemplo, por indução na construção de φ. Em vez de dar esta demonstração apresentamos um algoritmo que produz uma FNC (FND) para toda fórmula φ. A Proposição também vai seguir de um resultado que demonstramos no próximo capitulo.

Input: fórmula φ.
1. Substituir todas as subfórmulas $\psi \rightarrow \chi$ por $\neg\psi \vee \chi$.
2. Substituir todas as subfórmulas $\psi \leftrightarrow \chi$ por $(\neg\psi \vee \chi) \wedge (\neg\chi \vee \psi)$.
3. Substituir todas as subfórmulas $\neg\neg\psi$ por ψ.
4. Substituir todas as subfórmulas $\neg(\psi \wedge \chi)$ por $(\neg\psi \vee \neg\chi)$.
5. Substituir todas as subfórmulas $\neg(\psi \vee \chi)$ por $(\neg\psi \wedge \neg\chi)$.
6. Substituir todas as subfórmulas $(\psi \vee (\chi \wedge \xi))$ por $(\psi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \xi)$.
7. Substituir todas as subfórmulas $((\psi \wedge \chi) \vee \xi)$ por $((\psi \vee \xi) \wedge (\chi \vee \xi)$.
O algoritmo termina quando não existem mais subfórmulas que possam ser substituidas.
Output: A fórmula resultante (obviamente, essa fórmula está em FNC).

A ordem dessas substituições é irrelevante. Analogamente, obtemos um algoritmo para produzir uma FND de φ. Para isso precisamos modificar apenas os passos 6. e 7. (Exercício!)

Observação 1.28 *Para simplificar a apresentação trabalhamos neste capítulo sem os conectivos $\bot$ e $\top$. Porém, essa restrição é desnecessária. Para $\varphi = \varphi_1 \vee ... \vee \varphi_n$ e $\psi = \psi_1 \wedge ... \wedge \psi_n$ podemos considerar o caso $n = 0$. Então, φ é a disjunção vazia e ψ é a conjunção vazia. Por definição, $\varphi := \bot$ e $\psi := \top$. Essa definição está de acordo com o fato que uma disjunção é verdadeira se pelo menos um membro é verdadeiro, e uma conjunção é verdadeira se qualquer membro é verdadeiro. Sendo assim, a fórmula $\bot$ está em FND, e $\top$ e uma FNC. Uma FNC para $\bot$ é, p. ex., $p_0 \wedge \neg p_0$. Analogamente, $p_0 \vee \neg p_0$ é uma FND para a fórmula $\top$. Na verdade, $\bot$ também é uma FNC (considere $\varphi = \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n$ com $n = 1$ e $\varphi_1 = \bot$ a disjunção vazia de literais). Analogamente, $\top$ também é uma FND.*

1.2.4 Bases de conectivos

Vimos que a semântica de um conectivo c com aridade n é uma função booleana $f_c : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$. A cardinalidade de $\{0,1\}^n$, ou seja, o número de n-uplas com elementos $0,1$ é 2^n. Uma função booleana de aridade n atribui a cada elemento de $\{0,1\}^n$ (a cada n-upla) o valor 0 ou 1. Há 2^{2^n} possibilidades de fazer isso. Logo, existem 2^{2^n} funções booleanas de aridade 2.[1] No entanto, nem toda

[1] Isto pode ser verificado de forma mais geral. Se A e B são conjuntos finitos, então $|A^B| = |A|^{|B|}$, onde A^B é o conjunto de todas as funções de B para A. Exercício: Prove isso por indução na cardinalidade de B !

função booleana corresponde a um dos nossos conectivos. Por exemplo, existem $2^2 = 4$ funções booleanas de aridade 1, mas nossa linguagem contém apenas um conectivo de aridade 1, a dizer, a negação $\neg$. Existem $2^{2^2} = 16$ funções booleanas de aridade 2, mas temos apenas 4 conectivos de aridade 2. Não obstante, podemos definir mais conectivos que correspondem às funções booleanas restantes. Por exemplo, sejam $\uparrow$ e $\downarrow$ os conectivos de aridade 2 dados pelas funções

$$f_{\uparrow}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y = 1 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_{\downarrow}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = y = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Estes conectivos são conhecidos como NAND ("not and") e NOR ("not or"). De forma semelhante podemos definir conectivos de qualquer aridade que correspondem a respectivas funções booleanas. Por exemplo

$$f_c(x,y,z) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y = z = 0 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

define um conectivo c de aridade 3. Poderiamos escrever $c(\varphi, \psi, \chi)$ para uma fórmula que é o resultado da aplicação desse conectivo às fórmulas φ, ψ e χ.

Exercício 1.29 *Defina os restantes 3 conectivos (fora de $\neg$) que correspondem às funções booleanas de aridade 1. Para um novo conectivo c de aridade n podemos estender a definição da valoração de maneira seguinte: $v(c(\varphi_1, ..., \varphi_n)) = f_c(v(\varphi_1), ..., v(\varphi_n))$. Mostre que isto está de acordo com a Definição 1.4. Isto é, a Definição 1.4 pode ser dada usando as funções f_c para os respectivos conectivos c.*

Problema 1.30 *A introdução de novos conectivos aumenta o poder expressivo da nossa linguagem de objeto? Ou seja, introduzindo novos conectivos obtemos fórmulas que não são logicamente equivalentes a fórmulas que contêm somente os conectivos originais $\bot, \top, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ e $\leftrightarrow$? A resposta é não, como mostraremos mais em diante. Surprendentemente, toda fórmula que é construida mediante conectivos quaisquer (e de qualquer aridade) é logicamente equivalente a uma fórmula que contém apenas os conectivos originais. Na verdade, é possível provar um resultado ainda mais forte como veremos abaixo.*

Definição 1.31 *Um conjunto $C = \{c_1, ..., c_n\}$ é dito base de conectivos, se toda fórmula é logicamente equivalente a uma fórmula que contém apenas conectivos de C.*

Exemplo 1.32 *$\{\neg, \vee, \wedge\}$ é uma base de conectivos. Isto segue, por exemplo, da Proposição 1.27.*
Disso segue facilmente que $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$ e $\{\bot, \rightarrow\}$ são bases de conectivos. Mais surprendente é que também $\{\uparrow\}$ e $\{\downarrow\}$ são bases de conectivos.

Vamos provar que $\{\uparrow\}$ é base de conectivos. Usaremos que $\{\neg, \vee, \wedge\}$ é base. É suficiente mostrar que para todas as fórmulas χ, ψ, $\neg\chi \equiv \chi \uparrow \chi$, $\chi \wedge \psi \equiv (\chi \uparrow \psi) \uparrow (\chi \uparrow \psi)$. $\chi \vee \psi \equiv (\chi \uparrow \chi) \uparrow (\psi \uparrow \psi)$.
Exercício!

Vamos mostrar que $\{\rightarrow\}$ não é base de conectivos. Para isso, é suficiente provar que qualquer fórmula φ que é construida apenas sobre os símbolos de proposições e o conectivo $\rightarrow$ é satisfatível. Disso segue que φ não é logicamente equivalente a $\bot$ (ou a qualquer outra fórmula contraditória). Logo, $\{\rightarrow\}$ não pode ser base de conectivos. Provamos a afirmação por indução na construção de φ:
Base da indução. Se $\varphi \in P$, então a afirmação é trivial.
Passo de indução. Seja $\varphi = \psi \rightarrow \chi$. Temos que encontrar um modelo para φ. Segundo a hipotese da indução, ψ e χ são satisfatíveis. Logo, existe um modelo $v \vDash \chi$. Pela semântica do conectivo $\rightarrow$ obtemos $v \vDash \psi \rightarrow \chi$. Q.E.D.

Note que na base da indução não precisamos considerar os casos $\varphi \in \{\bot, \top\}$ (relembre que $\bot, \top$ são conectivos), e no passo da indução consideramos apenas o conectivo da implicação.