Onisciência Lógica.

Nilton Flávio Sousa Seixas.

15 de novembro de 2013

Sumário

Capítulo 1

Lógica Modal.

1.1 Sintaxe.

Agora vou introduzir a sintaxe usada pela lógica modal proposicional. Irei fazê-lo em dois passos: o primeiro é a definição do alfabeto modal e depois, a linguagem modal induzida pelo alfabeto modal sobre o conjunto P.

Seja P um conjunto não-vazio de fórmulas atômicas que pode ser finito para um n qualquer tal que P = $\{p_1, p_2, p_3, ..., p_n\}$ ou infinito tal que P = $\{ p_i, p_{i+1}, ...\}$, para i $\geq$ 1, sendo que o mais importante é que os membros de P possam ser enumerados. Então temos como sintaxe da lógica modal:

(1) Qualquer que seja p_i, tal que $p_i \in$ P, para i $\geq$ 1.

(2) O simbolo da contradição $\perp$.

(3) Operadores lógicos binários : $\rightarrow, \vee, \wedge$, sendo implicação, disjunção e conjunção respectivamente.

(4) Os operadores modais $\Box$(necessidade) e $\Diamond$(possibilidade).

(5) Os símbolos auxiliares (,).

(6) Operador unário de negação $\neg$.

Agora apresento a definição da linguagem modal, induzida pelo alfabeto modal sobre o conjunto de fórmulas atômicas P. Seja FormM o cojunto mínimo de fórmulas da lógica modal, FormM satisfaz as seguintes propriedades :

(7) $p_i \in$ FormM para qualquer pi $\in$ P, i $\geq$ 1.

(8) $\perp \in$ FormM.

(9) Se φ,φ' $\in$ FormM, então as fórmulas: ($\varphi \rightarrow \varphi$'), ($\varphi \wedge \varphi$'), ($\varphi \vee \varphi$), $\Box\varphi$, $\Diamond\varphi \in$ FormM.

(10) Se φ,φ' $\in$ FormM, então as fórrmulas ($\Box\varphi$), ($\Diamond\varphi$),($\neg\varphi$) $\in$ FormM.

1.2 Semântica.

Para representar a semântica da lógica modal é necessário representar o modelo de Kripke. Mas para isso, preciso introduzir noções de enquadramento.

Um enquadramento E é representado por uma tupla E = (S,R), onde:

S é um conjunto não-vazio de estados.

R é uma relação binária entre os estados. Quando um estado s se relaciona com outro estado s', denotamos a relação como R(s,s').

Seja V uma função que valora as variáveis nos estados, ela é denotada por:

V: S $\rightarrow$ (P $\rightarrow$ $\{1,0\}$), onde P é o conjunto das fórmulas atômicas, 1 representa a valoração verdade, e 0 a valoração falsa. S é o conjunto de estados do enquadramento.

Um modelo de Kripke é denotado por M = (E,V), onde E é um enquadramento e V uma função que atribui 1 ou 0 para as fórmulas nos estados. Um modelo de Kripke nada mais é do que uma estrutura de interpretação para fórmulas da lógica modal. Um mundo de kripke w, é a composição de um modelo de kripke M, com um estado s $\in$ S e S $\subseteq$ M. Basicamente é o mesmo que especificar um único estado de um modelo. Um estado, a depender da lógica modal, pode ser interpretado como um mundo, ou situação. Aqui eu tratarei como estado.

1.2.1 Satisfatibilidade em um estado.

Seja M um modelo de Kripe tal que M = (E,V) e s $\in$ S, S $\subseteq$ E. A satisfatibilidade de uma formula φ, $\varphi \in$ FormM, é denotada por :

M,s $\vDash \varphi$

e segui-se indutivamente as definições:

(1) M,s $\vDash$ p :$\Leftrightarrow$ V(s)(p) = 1 para p $\in$ P, ou seja, Uma fórmula é satisfeita em um estado se somente se, a valoração da fórmula naquele estado é 1.

(2) M,s $\vDash \varphi \wedge \varphi$' :$\Leftrightarrow$ M,s $\vDash \varphi$ e M,s $\vDash \varphi$'. A valoração de φ em s é igual a 1, bem como a valoração de φ'.

(3) M,s $\vDash \varphi \vee \varphi$' :$\Leftrightarrow$ M,s $\vDash \varphi$ ou M,s $\vDash \varphi$'.

(4) M,s $\vDash \varphi \rightarrow \varphi$' :$\Leftrightarrow$ M,s $\nvDash \varphi$ e M,s $\vDash \varphi$' [1].

(5) M,s $\vDash \neg\, \varphi$:$\Leftrightarrow$ M,s $\nvDash \varphi$. Essa definição nos faz pensar no fato: M,s $\models \varphi \Leftrightarrow$ M,s $\nvDash \varphi'$, que é verdade, porém tem que ser demonstrado antes de fazer parte de uma prova.

(6) M,s $\vDash \Box\, \varphi$ se para cada t $\in$ S tal que R(s,t), M,t $\vDash \varphi$. Veja que não necessariamente M,s $\models \varphi$ para que M,s $\models \Box\varphi$

(7) M,s $\vDash \Diamond\varphi$ se existe t, tal que M,t $\vDash \varphi$ e R(s,t)[2].

[1] definição alternativa: se M,s $\vDash \varphi$, então M,s $\vDash \varphi$'

[2] Quando digo R(s,t), afirmo que há uma relação de acessibilidade do estado s ao estado t considerado pelo agente em questão.

1.2.2 Satisfatibilidade em um modelo de Kripke.

Seja M, um modelo de Kripke tal que M = (E,V). M satisfaz uma fórmula φ, $\varphi \in$ FormM, denotada por :

$$M \models \varphi$$

se M,s $\models \varphi$ para todo s $\in$ S, S $\subseteq$ E, ou seja, φ tem valoração 1 em todos os estados daquele modelo de Kripke. Dizemos que M é um modelo para φ.

1.2.3 Exemplo para satisfatibilidade em um estado.

Seja as fórmulas atômicas {x,y,z} $\subseteq$ P. Considere um modelo de Kripke M tal que:
S = s_1,s_2,s_3,s_4,s_5.
R é uma relação tal que $1 \leq i,j \leq 5$, $s_i R s_j$ se j = i+1.
V(s_2)(x) = 1.
V(s_3)(x) = 1.
Para todo $s_i \in$ S, $\pi(s_i)(y) = v$, para i = 1,2,3,4,5.
V(s_2)($\neg$z) = 1.
Sejam as relações entre os estados:
s_1 R s_2
s_2 R s_3
s_3 R s_4
s_4 R s_5
segue-se que:
(1) M,$s_2 \models x \wedge (\neg z)$, pois M,$s_2 \models$ x, e M,$s_2 \models (\neg z)$.
(2) M,$s_1 \models \Box$ x, pois M,$s_2 \models$ x, e ele é o único estado que se relaciona com s_1, logo a afirmação procede.
(3) M,$s_2 \models \Box$ x. É similar ao anterior, porém no estado s_2, o estado possível considerado por um agente é o s_3. Tornando a única relação apartir de s_2, seguindo a definição 6 da seção 1.3.
(4) M,$s_3 \not\models \Box$ x, pois M,$s_4 \not\models$ x.
(5) M,$s_1 \not\models (\Box x) \rightarrow x$, pois M,$s_1 \models \Box$ x porém M,$s_1 \not\models$ x.
(6) M,$s_1 \models \Diamond(\Box x)$ pois M,$s_2 \models (\Box x)$ e pela definição 7 da seção 1.3, basta que exista um estado que satisfaça a fórmula x.
(7) M,$s_1 \Diamond$ (x $\wedge(\neg$ z)) pois M,$s_2 \models$ x e M,$s_2 \models \neg$ z.
(8) M,$s_5 \not\models \Diamond$ ($\neg$z). Teria que haver um estado s $\in$ S tal que s_5Rs ou seja, uma relação R(s_5,s).
(9) M,$s_i \models$ y. Pois para todo $s_i \in$ S, V(s_i)(y) = v, para i = 1,2,3,4,5.

1.2.4 Classes de enquadramentos

Seja ε a classe de todos os enquadramentos. Temos as seguintes subclasses de enquadramento:
$\varepsilon_{reflexivo}$ é a classe dos enquadramentos reflexivos. Ou seja, $\forall$ s $\in$ S, temos R(s,s).
$\varepsilon_{transitivo}$ é a classe dos enquadramentos transitivos. $\forall$ s, t ,u $\in$ S, se R(s,t) e R(t,u), então R(s,u).
$\varepsilon_{simetrico}$ é a classe dos enquadramentos simétricos. $\forall$ s, t, $\in$ S, se R(s,t) então R(t,s).
$\varepsilon_{euclidiano}$ é a classe dos enquadramentos euclidianos. $\forall$ s, t, u, $\in$ S, se R(s,t) e R(s,u), então R(t,u).
ε_{serial} é a classe dos enquadramentos seriais. $\forall$ s, s $\in$ S, $\exists$ t, t $\in$ S, tal que R(s,t).

1.2.5 Classe de modelos de kripke.

Defino Θ como a representação da classe de modelos de kripke, ou seja, a classe de interpretações para enquadramentos E.

1.2.6 Validade em um estado.

Seja M um modelo de Kripke, E um enquadramento modal, φ uma fórmula tal que $\varphi \in$ FormM. φ é válida em um estado s, tal que s $\in$ S, S $\subseteq$ E, denotada por

$$\text{E,s} \models \varphi,$$

se M,s $\models \varphi$ para todos os modelos de Kripke M, tal que o enquadramento permaneça constante, ou seja, qualquer modelo de kripke baseado neste enquadramento E.

1.2.7 Exemplo para validade em um estado.

Seja o enquadramento modal fixo E, uma fórmula φ, $\varphi \in$ FormM, que possui as seguintes relações e estados:
S = $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$.
s_1Rs_2.
s_2Rs_3.
s_3Rs_4.
s_4Rs_1.
Sejam as valorações V_1:
$V_1(s_1)(\varphi) = 0$;
$V_1(s_2)(\varphi) = 1$;
$V_1(s_3)(\varphi) = 0$;

$V_1(s_4)(\varphi) = 0$;
Seja M_1 um modelo de Kripe tal que $M_1 = (E,V_1)$. Sejam as valorações V_2:
$V_2(s_1)(\varphi) = 1$;
$V_2(s_2)(\varphi) = 1$;
$V_2(s_3)(\varphi) = 0$;
$V_2(s_4)(\varphi) = 0$;
Seja M_2 um modelo de Kripe tal que $M_2 = (E,V_2)$. Sejam as valorações V_3:
$V_3(s_1)(\varphi) = 0$;
$V_3(s_2)(\varphi) = 1$;
$V_3(s_3)(\varphi) = 1$;
$V_3(s_4)(\varphi) = 0$;
Seja M_3 um modelo de Kripe tal que $M_3 = (E,V_3)$. Seja Θ a classe dos modelos de Kripke e suponha que $\Theta = \{M_1,M_2,M_3\}$. Observe que para todos os modelos de Kripke baseados em E, $M_x,s_2 \models \varphi$, para x = 1,2,3.

1.2.8 Validade de uma fórmula.

Seja uma fórmula $\varphi, \varphi \in$ FormM. Uma fórmula é valida, sendo denotada por

$\vDash \varphi$ (φ é válido)

se $M \vDash \varphi$ para todo M.[3]

1.2.9 Consequência lógica Local.

Sejam Ψ um conjunto de fórmulas tal que $\Psi \subseteq$ FormM , φ, tal que $\varphi \in$ FormM, M um modelo de Kripke dado por M = (E,V), $\Vdash$ o símbolo da consequência lógica,

φ é consequência lógica local de Ψ, denotado por $\Psi \Vdash_l \varphi$, onde $_l$ representa local,

se para todo s, tal que $s \in S$, se $M,s \models \Psi$, então $M,s \models \varphi$. Essa definição atende apenas para um único modelo de Kripke.

1.2.10 Consequência lógica Global.

Seguindos as mesmas configurações da seção anterior para M,φ, Ψ e s:

φ é consequência lógica global de Ψ, denotado por $\Psi \Vdash \varphi$,

se para todo modelo de Kripke M, se $M \models \Psi$ então $M \models \varphi$.

[3]Para todo os modelos de Kripke.

1.2.11 Exemplo para consequência lógica global.

$\varphi \Vdash \Box\varphi$.

Prova. Por hipótese temos que:
Qualquer que seja M, M $\models \varphi$ implica que M $\models \Box\varphi$;
Isso equivale a : se M,s $\models \Psi$ então M,s $\models \Box\varphi$. Para todo s, s $\subseteq$ S, S $\subseteq$ M;
Logo para todo t, tal que R(s,t), t $\subseteq$ S, M,t $\models \varphi$.
Concluindo, M $\models \Box\varphi$.

1.2.12 Exemplo para consequência lógica local.

$\{\Box(\varphi \rightarrow \varphi'), \Diamond\varphi\} \Vdash_l \Diamond\varphi'$.

Prova. Se M,s $\models \Box(\varphi \rightarrow \varphi')$ e M,s $\models \Diamond\varphi$ então M,s $\models \Diamond\varphi$ para todo s $\in$ S.
Por contradição, suponha que M,s $\not\models \Diamond\varphi'$. Isso implica que: Qualquer que seja t, tal que R(s,t), t $\in$ S, M,t $\not\models \varphi'$. Daí temos que:
M,s $\models \Box(\varphi \rightarrow \varphi')$ e M,s $\models \Diamond\varphi$ por hipótese.
Logo existe t, tal que M,t $\models \varphi$, R(s,t) para que M,s $\models \Diamond\varphi$. E como para todo t, tal que R(s,t), M,t $\not\models \varphi'$, logo M,s $\not\models \Box(\varphi \rightarrow \varphi')$. Contradição! Logo se M,s $\models \Box(\varphi \rightarrow \varphi')$ e M,s $\models \Diamond\varphi$ então M,s $\models \Diamond\varphi$ para todo s $\in$ S.

Capítulo 2

Sistemas Axiomáticos Modais.

Para apresentar sistemas axiomáticos modais, preciso definir conceitos para a definição do sistema axiomático K, que é o mais básico dos sistemas aximáticos e que representa a interseção de todos os outros sistemas axiomáticos.

2.0.13 Derivação.

Sejam $\vdash$ o símbolo da derivação, Ψ um conjunto de fórmulas tal que $\Psi \subseteq$ FormM e $\varphi_1, ..., \varphi_n \in \Psi$, se $\Psi \vdash \varphi$(psi deriva phi) então φ é um axioma, ou $\varphi \in \Psi$ ou $\chi \in \Psi$, $\chi \to \varphi \in \Psi$ e φ é obtida por meio da regra de inferência modus ponens.

2.0.14 Fórmulas modais atômicas.

Seja PA o conjunto das fórmulas proposicionalmente atômicas, PA é definido por:
PA = P $\cup$ $\{\Box\varphi : \varphi \in$FormM$\}$ $\cup$ $\{\Diamond\varphi\text{: } \varphi \in$ FormM $\}$

Os elementos do conjunto PA podem ser vistos como um conjunto de símbolos proposicionais e sendo assim, fazem parte da linguagem proposicional. Desse modo, podemos substituir por seus elementos, variáveis dos axiomas da lógica proposicional, a exemplo de $\Box\varphi \to (\psi \to \Box\varphi)$ que é uma instancia do axioma $\varphi \to (\psi \to \varphi)$.

2.0.15 Regras de inferência.

Seja $\Phi \subseteq$ FormM, Φ é fechado para o modus ponens se:
$\varphi \to \varphi' \in \Phi$ e $\varphi \in \Phi$, então $\varphi' \in \Phi$.

O conjunto $\Phi \subseteq$ FormM é fechado para a regra de inferência necessitação(do inglês necessitation):
Se $\varphi \in \Phi$ então $\Box\varphi \in \Phi$.

2.0.16 Sistema K.

O sistema axiomático K é definido por:
K1: Todos os axiomas da lógica proposicional.
K2: $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$.

O sistema K é fechado para as regras de necessitação e modus ponens, podendo derivar ou instanciar fórmulas através dos axiomas da lógica proposicional.

2.0.17 Sistema T.

O sistema T é uma extensão do sistema K com a adição do axioma:
T1: $\Box\varphi \to \varphi$.
o que representa a classe dos enquadramentos reflexivos, ou seja, o axioma é válido somente para enquadramentos cuja relação possui a propriedade reflexiva.
Prova. Por contradição, suponha que $\Box\varphi \to \varphi$ não é válido, ou seja, existe um modelo de kripke M, e um estado s, s$\subseteq$ S, S $\subseteq$ E, E = (S,R), R com propriedade reflexiva, tal que M,s $\models \Box\varphi$ e M,s $\not\models \varphi$. Para que M,s $\models \Box\varphi$, então para todo s', tal que R(s,s'), M,s'$\models \varphi$. Mas como a relação R é reflexiva, então s = s', logo M,s $\models \varphi$ para todo s, o que é uma contradição pois, por hipótese, M,s $\not\models \varphi$. De outra mão, o axioma T1 não é válido para modelos de kripke cujo enquadramento não possua relação reflexiva. Suponha um modelo de kripke M' = (E',V'), onde E' não possui relacionamento reflexivo. Seja um estado s, s $\in$ S' ta que M',s'$\not\models \varphi$ e para todo t, tal que R(s,t), M',t $\models \varphi$. Logo tem-se que M',s$\models \Box\varphi$ e M',s $\not\models \varphi$. O que mostra que $\Box\varphi \to \varphi$ não é válido.

2.0.18 Sistema S4.

O sistema S4 é composto pelo axioma:
S4: $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$
e pelo sistema T. Se uma fórmula é necessariamente verdadeira, então necessariamente, ela é necessariamente verdadeira. Esse axioma caracteriza a classe dos enquadramentos transitivos. Agora vou mostrar que para qualquer que seja o modelo de kripke cujo enquadramento possui a relação de propriedade transitiva, o axioma S4 é válido.
Prova.Sejam os estados s,s',s" $\in$ S, S $\subseteq$ M, M qualquer. Sejam os seguintes relacionamentos: R(s,s') , R(s',s") e pela propriedade da transitividade, R(s,s"). Por contradição, suponha que $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ não é válida, logo existe a seguinte configuração: M,s $\models \Box\varphi$ e M,s $\not\models \Box\Box\varphi$. Se M,s $\models \Box\varphi$, então para todo s' tal que R(s,s', M,s'$\models \varphi$. E pela suposição contraditória, M,s $\not\models \Box\Box\varphi$, então M,s"$\not\models \varphi$. Mas aí, temos a contradição, pois se M,s"$\not\models \varphi$, então M,s $\not\models \Box\varphi$. Veja que por outro lado, esse axioma não é valido em modelos cujos enquadramentos não possuem a propriedade transitiva. Sejam s,s',s" $\in$ S, S $\subseteq$ E, E um enquadramento que não possui propriedade transitiva. Sejam as seguintes relações: R(s,s') e R(s',s"). Sejam as seguintes

interpretações: M,s $\models \Box\varphi$ e M,s $\not\models \Box\Box\varphi$. Daí temos que para todo s', tal que R(s,s'), M,s' $\models \varphi$ e que M,s" $\not\models \varphi$. Logo, fica claro que M,s $\not\models \Box\Box\varphi$, e que portanto, o axioma não é válido para enquadramentos que não sejam transitivos.

2.0.19 Sistema S5.

O sistema axiomático S5 é composto pelo sistema S4 e pelo axioma:
S5: $\Diamond\Box\varphi \rightarrow \varphi$,
e caracteriza a classe dos enquadramentos simétricos. Prova. Seja um modelo de Kripke M qualquer, tal que o enquadramento E possui propriedade da simetria no relacionamento entre os estados. Sejam os estados s,s',s" e os relacionamentos R(s,s') e R(s',s"). Por contradição, suponha que $\Diamond\Box\varphi \rightarrow \varphi$ não é válido, ou seja, existe M,s $\models \Diamond\Box\varphi$ e M,s $\not\models \varphi$. Mas aí temos que M,s'$\models \varphi$ para todo s' R(s,s') e M,s" $\models \varphi$. Mas pela propriedade da simetria, existe a relação R(s",s'), o que nos leva a uma contradição pois, se M,s' $\not\models \Box\varphi$ então M,s $\not\models \Diamond\Box\varphi$. É fácil verificar que o axioma não é válido em um enquadramento que não possui a propriedade simétrica. Usando o mesmo exemplo, se não há relacionamento simétrico entre os estados, principalmente por s, s', M,s $\models \Diamond\Box\varphi$ e M,s$\not\models \varphi$, mostrando que o axioma S5 não é valido para enquadramentos cuja propriedade simétrica no relacionamento não existe.