Informática. Prácticas

Facultad de Matemáticas

Curso 2021-2022

"Las palabras son un sustituto bastante confuso de las ecuaciones matemáticas"
(Isaac Asimov)

Práctica 1. Ceros reales de la ecuación de tercer grado

Deseamos calcular la cantidad de números reales que anulan un polinomio de grado 3, $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Algunas de las técnicas que conocemos para la representación gráfica de funciones van a resultar de mucha utilidad para hacerlo. En particular, tendremos en cuenta la propiedad siguiente:

> Si la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es diferenciable y $f'(x)>0\ \forall x\in[a,b]$, entonces f es creciente en el intervalo $[a,b]$. Análogamente, si $f'(x)<0\ \forall x\in[a,b]$, entonces f es decreciente en el intervalo $[a,b]$.

Otro resultado importante es el corolario siguiente del **teorema de Bolzano**:

> Si la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es continua y monótona en un intervalo $[a,b]$, y en sus extremos toma valores de distinto signo, entonces existe en dicho intervalo un único valor $x\in(a,b)$ tal que $f(x)=0$.

En las condiciones del teorema de Bolzano, se obtienen varios resultados:

1. La cantidad de ceros de f es menor o igual que la cantidad de ceros de f' más 1.
2. Sean r_1 y r_2 dos ceros consecutivos de f'.
   - Si $f(r_1)\cdot f(r_2)>0$, entonces f no tiene ningún cero en (r_1,r_2).
   - Si $f(r_1)\cdot f(r_2)<0$, entonces f tiene exactamento un cero en (r_1,r_2).
   - Si $f(r_1)=0$ o $f(r_2)=0$, entonces r_1, respectivamente r_2, es un cero de multiplicidad>1.

La derivada de un polinomio de grado 3 de la forma $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ es un polinomio de grado 2 de la forma $p'(x)=3ax^2+2bx+c$. Podemos calcular las soluciones reales de $p'(x)$ fácilmente, existiendo tres casos posibles, en los cuales se tiene en cuenta que todo polinomio de grado 3 tiene al menos una solución real y otras dos soluciones reales o complejas conjugadas:

1. Si p' tiene dos soluciones r_1 y r_2, existen los casos siguientes:
   - Si $p(r_1)\cdot p(r_2)>0$, entonces p tiene exactamento un cero.
   - Si $p(r_1)\cdot p(r_2)<0$, entonces p tiene tres ceros.
   - Si $p(r_1)=0$ o $p(r_2)=0$, entonces p tiene dos ceros.
2. Si p' tiene una solucion r_1, entonces p tiene exactamente un cero.
3. Si p' no tiene solución, entonces p tiene exactamente un cero.

Diseña una función que, dados los coeficientes de un polinomio de grado 3, calcule su cantidad de soluciones reales.

Segunda parte

Nuestro objetivo ahora es calcular alguno de los ceros de un polinomio de grado 3, $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Para ello, podemos empezar fijándonos en un intervalo $[x_0,x_1]$ en cuyos extremos p tome valores de distinto signo. Una técnica empleada para determinar un cero de p en $[x_0,x_1]$ es el **método de la bisección**: se calcula el punto medio c_1 de $[x_0,x_1]$ y se comprueba si la función se anula en ese punto; si es así, entonces la búsqueda ha finalizado; en caso contrario, la función en ese punto tendrá el mismo signo que en uno de los extremos del intervalo y estará más cercana al cero. Entonces, c_1 sustituye al extremo correspondiente en el intervalo y sucesivamente, se procede del mismo modo hasta encontrar un valor aceptable como cero de la función.

El intervalo podría modificarse del modo siguiente: $[x_0,x_1]\rightarrow[x_0,c_1]\rightarrow[x_0,c_2]\rightarrow[c_3,c_2]\rightarrow\ldots$ haciéndose tan pequeño como deseemos. Entonces, el punto medio de un intervalo de la secuencia anterior es un cero de la función con un error menor que la mitad de la longitud de dicho intervalo.

Diseña una función llamada `find_zero_cubic(a,b,c,d,x0,x1,epsilon)` que, dados los coeficientes de un polinomio de grado 3 $\mathtt{p(x)=ax^3+bx^2+cx+d}$, un intervalo $[\mathtt{x_0},\mathtt{x_1}]$ y $0<\mathtt{epsilon}<(\mathtt{x_1}-\mathtt{x_0})/2$, calcule un cero `r` del polinomio `p` empleando el método de la bisección.

Tercera parte

Diseña una función llamada `find_zero_cubic(a,b,c,d,epsilon)` que, dados los coeficientes de un polinomio de grado 3 $\mathtt{p(x)=ax^3+bx^2+cx+d}$ y $0<\mathtt{epsilon}$, calcule todos los ceros del polinomio `p`.