UNIVERSITÉ DE BORDEAUX **Le 15/01/2020**
L3 Projet Applicatif, 2019/2020

STATISTIQUES SUR LES PERMUTATIONS ALÉATOIRES

Bernard Bercu
bernard.bercu@math.u-bordeaux.fr

L'objectif de ce projet applicatif est d'étudier quelques statistiques de permuations aléatoires. On va s'intéresser en particulier au nombre de descentes, au nombre de pics, ainsi qu'à la longueur de la plus grande sous-suite alternée de permutations aléatoires.

1 Nombre de descentes.

Soit S_n l'ensemble des permutations des n premiers entiers avec $n \geqslant 1$. Soit π une permutation de S_n. On dit que π a une descente à la position k si $\pi(k+1) < \pi(k)$. On note D_n la variable aléatoire comptant le nombre de descentes d'une permutation choisie aléatoirement dans S_n. Il est clair que $D_1 = 0$ et pour tout $n \geqslant 2$,

$$D_n(\Omega) = \big\{0, 1, \ldots, n-1\big\}.$$

En particulier, on a $\mathbb{P}(D_2 = 0) = \mathbb{P}(D_2 = 1) = 1/2$. On s'intéresse au comportement asymptotique de la suite (D_n). On peut montrer [1], [4] que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{P}(D_{n+1} = D_n + 1 | D_n) & = & \dfrac{n - D_n}{n+1} \\ \mathbb{P}(D_{n+1} = D_n | D_n) & = & \dfrac{D_n + 1}{n+1} \end{array} \right.$$

On en déduit la décomposition

$$D_{n+1} = D_n + \varepsilon_{n+1}$$

avec

$$\varepsilon_{n+1} = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{avec probabilité} & p_n \\ 0 & \text{avec probabilité} & 1 - p_n \end{array} \right.$$

où

$$p_n = \frac{n - D_n}{n+1}.$$

On peut montrer la convergence presque sure

$$\lim_{n \to \infty} \frac{D_n}{n} = \frac{1}{2} \qquad \text{p.s.}$$

ainsi que la normalité asymptotique [2]

$$\sqrt{n}\Big(\frac{D_n}{n} - \frac{1}{2}\Big) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(0, \frac{1}{12}\Big).$$

2 Nombre de pics.

On va maintenant compter les pics d'une permutation aléatoire. Soit π une permutation de S_n. On dit que π a un pic à la position k si $\pi(k-1) > \pi(k) < \pi(k+1)$ ou si $\pi(k-1) < \pi(k) > \pi(k+1)$. On note $G_n = G_n(\pi)$ la variable aléatoire comptant le nombre de pics d'une permutation π choisie aléatoirement dans S_n. On a $G_2 = 1$ et $\mathbb{P}(G_3 = 1) = 1/3$ et $\mathbb{P}(G_3 = 2) = 2/3$. De plus, on a [4] pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{cases} \mathbb{P}(G_{n+1} = G_n + 2 | G_n) & = & \dfrac{n-1-G_n}{n+1}, \\ \mathbb{P}(G_{n+1} = G_n + 1 | G_n) & = & \dfrac{2}{n+1}, \\ \mathbb{P}(G_{n+1} = G_n | G_n) & = & \dfrac{G_n}{n+1}. \end{cases}$$

On en déduit la décomposition

$$G_{n+1} = G_n + \xi_{n+1}$$

avec

$$\xi_{n+1} = \begin{cases} 2 & \text{avec probabilité} & p_n \\ 1 & \text{avec probabilité} & q_n \\ 2 & \text{avec probabilité} & 1 - p_n - q_n \end{cases}$$

où

$$p_n = \frac{n-1-G_n}{n+1} \qquad \text{et} \qquad q_n = \frac{2}{n+1}.$$

On peut montrer la convergence presque sure

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_n}{n} = \frac{2}{3} \qquad \text{p.s.}$$

ainsi que la normalité asymptotique

$$\sqrt{n}\Big(\frac{G_n}{n} - \frac{2}{3}\Big) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(0, \frac{4}{9}\Big).$$

3 Longueur de la plus grande sous-suite alternée.

On souhaite finalement étudier la longueur de la plus grande sous-suite alternée d'une permutation aléatoire. Soit $L_n = L_n(\pi)$ la variable aléatoire correspondant à la longueur de la plus grande sous-suite alternée d'une permutation π choisie aléatoirement dans S_n. On a [1], [4] pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{cases} \mathbb{P}(L_{n+1} = L_n + 2 | L_n) & = & \dfrac{n-L_n}{n+1}, \\ \mathbb{P}(L_{n+1} = L_n + 1 | L_n) & = & \dfrac{1}{n+1}, \\ \mathbb{P}(L_{n+1} = L_n | L_n) & = & \dfrac{L_n}{n+1}. \end{cases}$$

On en déduit la décomposition

$$L_{n+1} = L_n + \zeta_{n+1}$$

avec

$$\zeta_{n+1} = \begin{cases} 2 & \text{avec probabilité} \quad p_n \\ 1 & \text{avec probabilité} \quad q_n \\ 2 & \text{avec probabilité} \quad 1 - p_n - q_n \end{cases}$$

où

$$p_n = \frac{n - L_n}{n+1} \qquad \text{et} \qquad q_n = \frac{1}{n+1}.$$

On peut montrer la convergence presque sure

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{n} = \frac{2}{3} \qquad \text{p.s.}$$

De plus, Widom [5] a montré la normalité asymptotique, voir aussi [3] pour une approche probabiliste

$$\sqrt{n}\Big(\frac{L_n}{n} - \frac{2}{3}\Big) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(0, \frac{8}{45}\Big).$$

Voici les principaux objectifs de ce projet.

1) Créer un premier code Python permettant de simuler le processus (D_n) et de visualiser la convergence presque sûre et la normalité asymptotique associées à (D_n).

2) Créer un second code Python permettant de simuler le processus (G_n) et de visualiser la convergence presque sûre et la normalité asymptotique associées à (G_n).

3) Créer un troisième code Python permettant de simuler le processus (L_n) et de visualiser la convergence presque sûre et la normalité asymptotique associées à (L_n).

4) Proposer d'autres statistiques intéressantes [1] liées aux permutations aléatoires et étudier leurs comportements asymptotiques par simulation.

References

[1] Bona, M. Combinatorics of permutations, *Chapman and Hall*, 2012.

[2] Chattterjee, S., and Diaconis, P. A central limit theorem for a new statistic on permutation. *Indian. J. Pure Ap. Mat. 48*, 4 (2017), pp. 561-573.

[3] Houdré, C., and Restrepo, R. A probabilistic approach to the asymptotics of the length of the longest alternating subsequence. *Electronic Journal of Combinatorics, 17*, (2010).

[4] Ozdemir, A. Martingales and descent statistics. ArXiv:1901.01719v2, Submitted for publication (2019).

[5] Widom, H On the limiting distribution for the length of the longest alternating sequence in a random permutation. *Electronic Journal of Combinatorics, 13*, (2006).