

# Quantiles et superquantiles

## Algorithmes stochastiques 2020/2021

Théophile Baranger  
Gauthier Decultot  
Omar Khattab  
Exaucé Luweh Adjim Ngarti

12 mars 2021

Enseignant : Bernard Bercu

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Notion de quantile . . . . .	2
1.2	Superquantile et dépréciation moyenne . . . . .	2
1.3	Objectifs du projet . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Étude théorique</b>	<b>3</b>
2.1	Estimation de quantiles . . . . .	6
2.2	Estimation de superquantiles . . . . .	9
2.3	Dépréciation moyenne . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Simulations</b>	<b>15</b>
3.1	Quantiles . . . . .	15
3.1.1	Statistique d'ordre . . . . .	15
3.1.2	Estimateur Robbins Monro . . . . .	17
3.2	Superquantiles . . . . .	19
3.2.1	Statistique d'ordre . . . . .	19
3.2.2	Estimateur Robbins Monro . . . . .	21
3.3	Dépréciation moyenne . . . . .	23
3.3.1	Statistique d'ordre . . . . .	23
3.3.2	Estimateur Robbins Monro . . . . .	24

# 1 Introduction

## 1.1 Notion de quantile

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle continue de densité de probabilité  $f$  strictement positive, et de fonction de répartition  $F$  continue et strictement croissante. Pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ , on appelle quantile d'ordre  $\alpha$  de  $X$ , l'unique racine  $\theta_\alpha$  de l'équation  $F(x) = \alpha$ ,

$$F(\theta_\alpha) = \alpha.$$

Dans la suite de ce rapport, on se placera toujours dans le cadre d'une variable aléatoire telle que décrite ci-dessus.

## 1.2 Superquantile et dépréciation moyenne

Une autre statistique d'intérêt est le superquantile de niveau  $\alpha$  de  $X$ , définie par

$$\vartheta_\alpha = \mathbb{E}[X | X \geq \theta_\alpha] = \frac{\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{X \geq \theta_\alpha\}}]}{\mathbb{P}(X \geq \theta_\alpha)} = \frac{\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{X \geq \theta_\alpha\}}]}{1 - \alpha}.$$

On s'intéressera également à la dépréciation moyenne de niveau  $\alpha$  de  $X$ , notée  $\tau_\alpha$  et donnée par

$$\tau_\alpha = \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{X \leq \theta_\alpha\}}] = \frac{1}{\alpha} (\mathbb{E}[X] - (1 - \alpha)\vartheta_\alpha).$$

On peut vérifier cette expression :

$$\begin{aligned} \tau_\alpha &= \frac{1}{\alpha} (\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{X \leq \theta_\alpha\}}] - \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{X > \theta_\alpha\}}] + \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{X > \theta_\alpha\}}]) \\ &= \frac{1}{\alpha} (\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{X > \theta_\alpha\}}]) \\ &= \frac{1}{\alpha} \left( \mathbb{E}[X] - (1 - \alpha) \frac{\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{X \geq \theta_\alpha\}}]}{(1 - \alpha)} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} (\mathbb{E}[X] - (1 - \alpha)\vartheta_\alpha). \end{aligned}$$

## 1.3 Objectifs du projet

Dans ce rapport, nous allons chercher à comparer différentes méthodes d'estimation des quantités définies précédemment. Il s'agira tout d'abord d'établir quelques propriétés théoriques liées aux différents estimateurs. Ensuite, nous effectuerons des simulations qui permettront de comparer les temps de calculs pour ces estimateurs, en faisant varier notamment les paramètres des lois que nous simulerons, ainsi que le paramètre  $\alpha$ . L'objectif est aussi simplement d'illustrer les algorithmes de type Robbins-Monro vus en cours ainsi que leurs propriétés asymptotiques. Définissons dès maintenant les estimateurs auxquels nous allons nous intéresser.

Soit  $X$  une variable aléatoire telle que celle décrite plus haut. On dispose d'un  $n$ -échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  de même loi que  $X$ . On note  $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$  l'échantillon

ordonné, tel que  $X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$  et  $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$ . Une première approche, basée sur les statistiques d'ordres, consiste à estimer  $\theta_\alpha$ ,  $\vartheta_\alpha$ , et  $\tau_\alpha$  par

$$\bar{\theta}_n = X_{(\lceil n\alpha \rceil + 1)}, \quad \bar{\vartheta}_n = \frac{1}{(1 - \alpha)n} \sum_{k=\lceil n\alpha \rceil + 1}^n X_{(k)}, \quad \bar{\tau}_n = \frac{1}{\alpha} (\bar{X}_n - (1 - \alpha)\bar{\vartheta}_n),$$

où  $[\cdot]$  est la fonction partie entière.

La stratégie qui va nous intéresser ici est d'estimer récursivement  $\theta_\alpha$ ,  $\vartheta_\alpha$ , et  $\tau_\alpha$  par un algorithme de type Robbins-Monro, par les suites

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{n+1} &= \hat{\theta}_n - a_n \left( \mathbb{1}_{\{X_{n+1} \leq \hat{\theta}_n\}} - \alpha \right), \\ \hat{\vartheta}_{n+1} &= \hat{\vartheta}_n + b_n \left( \frac{X_{n+1}}{1 - \alpha} \mathbb{1}_{\{X_{n+1} > \hat{\theta}_n\}} - \hat{\vartheta}_n \right), \\ \hat{\tau}_{n+1} &= \hat{\tau}_n + b_n \left( \frac{X_{n+1}}{\alpha} \mathbb{1}_{\{X_{n+1} < \hat{\theta}_n\}} - \hat{\tau}_n + c_n (X_{n+1} - \bar{X}_n) \right),\end{aligned}$$

où les valeurs initiales  $\hat{\theta}_0$ ,  $\hat{\vartheta}_0$  et  $\hat{\tau}_0$  sont arbitrairement choisies, et les pas  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont deux suites déterministes, positives et décroissantes vers zéro, satisfaisant les conditions classiques du théorème de Robbins-Monro, c'est-à-dire que  $\sum_{n \geq 0} a_n = +\infty$  et  $\sum_{n \geq 0} a_n^2 < +\infty$ , et idem pour  $(b_n)$ . Nous déterminerons  $(c_n)$  dans la suite.

## 2 Étude théorique

Pour s'échauffer, on propose de commencer par vérifier la proposition suivante.

**Proposition 2.1.** *Pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ , on a  $\vartheta_\alpha \geq \theta_\alpha$ .*

*Démonstration.* Par définition,  $\mathbb{P}(x \geq \theta_\alpha) > 0$ , et

$$\mathbb{E}[X|X \geq \theta_\alpha] = \frac{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_{\{X \geq \theta_\alpha\}}]}{\mathbb{P}(X \geq \theta_\alpha)}$$

De plus,  $\theta_\alpha \mathbb{1}_{\{X \geq \theta_\alpha\}} \leq X \mathbb{1}_{\{X \geq \theta_\alpha\}}$ , d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\theta_\alpha \mathbb{1}_{\{X \geq \theta_\alpha\}}] \leq \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{\{X \geq \theta_\alpha\}}] &\iff \frac{\mathbb{E}[\theta_\alpha \mathbb{1}_{\{X \geq \theta_\alpha\}}]}{\mathbb{P}(X \geq \theta_\alpha)} \leq \frac{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_{\{X \geq \theta_\alpha\}}]}{\mathbb{P}(X \geq \theta_\alpha)} \\ &\iff \frac{\theta_\alpha \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X \geq \theta_\alpha\}}]}{\mathbb{P}(X \geq \theta_\alpha)} \leq \frac{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_{\{X \geq \theta_\alpha\}}]}{\mathbb{P}(X \geq \theta_\alpha)} \\ &\iff \theta_\alpha \frac{\mathbb{P}(X \geq \theta_\alpha)}{\mathbb{P}(X \geq \theta_\alpha)} \leq \mathbb{E}[X|X \geq \theta_\alpha] \\ &\iff \theta_\alpha \leq \vartheta_\alpha,\end{aligned}$$

ce qui conclut. □

On cherche maintenant à calculer explicitement les quantiles, superquantiles et dépréciations moyennes de quelques lois standard, en l'occurrence la loi exponentielle et la loi de Paréto. Nous pourrons ainsi confronter par la suite nos simulations à ces valeurs de façon directe.

**Proposition 2.2** (Loi exponentielle). *Si  $X$  suit la loi exponentielle  $\mathcal{E}(\lambda)$ , avec  $\lambda > 0$ , alors pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ ,*

$$\theta_\alpha = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - \alpha), \quad \vartheta_\alpha = \frac{1}{\lambda}(1 - \log(1 - \alpha)), \quad \tau_\alpha = \frac{1}{\alpha\lambda}(\alpha + (1 - \alpha)\log(1 - \alpha)).$$

*Démonstration.* La fonction de répartition de  $X$  est donnée pour tout  $x \geq 0$  par

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

$F$  est donc continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$  et donc sa restriction sur  $\mathbb{R}_+$  constitue une bijection de  $\mathbb{R}_+$  dans  $[0, 1]$ . Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ , l'équation  $F(x) = \alpha$  admet donc une unique solution dans  $\mathbb{R}^+$  que l'on notera  $\theta_\alpha$ .

$$\begin{aligned} F(\theta_\alpha) = \alpha &\iff 1 - e^{-\lambda\theta_\alpha} = \alpha \\ &\iff \theta_\alpha = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - \alpha) \end{aligned}$$

On rappelle que :

$$\vartheta_\alpha = \mathbb{E}[X | X \geq \theta_\alpha] = \frac{\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{X \geq \theta_\alpha\}}]}{\mathbb{P}(X \geq \theta_\alpha)} = \frac{\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{X \geq \theta_\alpha\}}]}{1 - \alpha}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \vartheta_\alpha &= \frac{1}{1 - \alpha} \int_0^\infty x \mathbf{1}_{\{x \geq \theta_\alpha\}} \lambda e^{-\lambda x} dx \iff \vartheta_\alpha = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\theta_\alpha}^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &\iff \vartheta_\alpha = \frac{\lambda}{1 - \alpha} \left( \left[ -\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x} \right]_{\theta_\alpha}^\infty + \int_{\theta_\alpha}^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} dx \right) \\ &\iff \vartheta_\alpha = \frac{\lambda}{1 - \alpha} \left( \frac{\theta_\alpha}{\lambda} e^{-\lambda\theta_\alpha} + \frac{1 - F(\theta_\alpha)}{\lambda^2} \right) \\ &\iff \vartheta_\alpha = \left( \frac{\theta_\alpha}{1 - \alpha} e^{-\lambda\theta_\alpha} + \frac{1}{\lambda} \right) \\ &\iff \vartheta_\alpha = \theta_\alpha + \frac{1}{\lambda} \\ &\iff \vartheta_\alpha = \frac{1}{\lambda}(1 - \log(1 - \alpha)) \end{aligned}$$

En ce qui concerne  $\tau_\alpha$ , on a déjà vérifié que

$$\tau_\alpha = \frac{1}{\alpha} (\mathbb{E}[X] - (1 - \alpha)\vartheta_\alpha).$$

En injectant l'expression de  $\vartheta_\alpha$  dans cette expression, on obtient

$$\begin{aligned} \tau_\alpha &= \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{\lambda} - (1 - \alpha) \frac{1}{\lambda}(1 - \log(1 - \alpha)) \right) \\ &= \frac{1}{\alpha\lambda} (1 - (1 - \alpha)(1 - \log(1 - \alpha))) \\ &= \frac{1}{\alpha\lambda} (1 - (1 - \log(1 - \alpha)) - \alpha + \alpha \log(1 - \alpha)) \\ &= \frac{1}{\alpha\lambda} (\alpha + (1 - \alpha)\log(1 - \alpha)) \end{aligned}$$

□

**Proposition 2.3** (Loi de Paréto). *Si  $X$  suit la loi de Paréto  $\mathcal{P}(m, k)$ , avec  $k > 1$  et  $m > 0$ , alors pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ ,*

$$\theta_\alpha = m(1 - \alpha)^{-1/k}, \quad \vartheta_\alpha = \frac{km}{k-1}(1 - \alpha)^{-1/k}, \quad \tau_\alpha = \frac{km}{\alpha(k-1)}(1 - (1 - \alpha)^{1-1/k}).$$

*Démonstration.* La fonction de répartition de  $X$  est donnée pour tout  $x \geq m$  par

$$F(x) = 1 - \left(\frac{m}{x}\right)^k.$$

$F$  est donc continue et strictement croissante sur  $]m, +\infty[$  et donc sa restriction sur  $]m, +\infty[$  constitue une bijection de  $]m, +\infty[$  dans  $[0, 1]$ . Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ , l'équation  $F(x) = \alpha$  admet donc une unique solution dans  $]m, +\infty[$  que l'on notera  $\theta_\alpha$ .

$$\begin{aligned} F(\theta_\alpha) = \alpha &\iff 1 - \left(\frac{m}{\theta_\alpha}\right)^k = \alpha \\ &\iff \theta_\alpha = m(1 - \alpha)^{-\frac{1}{k}}. \end{aligned}$$

Ensuite concernant  $\vartheta_\alpha$ , on a

$$\begin{aligned} \vartheta_\alpha &= \frac{1}{1-\alpha} \left( \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} x \frac{k}{m} \left(\frac{m}{x}\right)^{k+1} dx \right) \\ &= \frac{km^k}{1-\alpha} \left( \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} x^{-k} dx \right) \\ &= \frac{km^k}{1-\alpha} \left( \left[ \frac{x^{-k+1}}{-k+1} \right]_{\theta_\alpha}^{+\infty} \right) \\ &= \frac{km^k}{1-\alpha} \left( 0 - \frac{\theta_\alpha^{-k+1}}{-k+1} \right) \\ &= \frac{km^k}{1-\alpha} \left( \frac{\theta_\alpha^{-k+1}}{k-1} \right). \end{aligned}$$

Puis en remplaçant  $\theta_\alpha$  par son expression,

$$\begin{aligned} \vartheta_\alpha &= \frac{km^k}{1-\alpha} \left( \frac{m^{-k+1}(1-\alpha)^{\frac{k-1}{k}}}{k-1} \right) \\ &= \frac{km}{k-1}(1-\alpha)^{1-1-\frac{1}{k}} \\ &= \frac{km}{k-1}(1-\alpha)^{-\frac{1}{k}}. \end{aligned}$$

Enfin, pour  $\tau_\alpha$  on utilise le fait que si  $k > 1$ , l'espérance de  $X$  est donnée par

$$\mathbb{E}[X] = \frac{km}{k-1}.$$

Ce qui permet d'obtenir

$$\begin{aligned} \vartheta_\alpha &= \frac{1}{\alpha} \left( \frac{km}{k-1} - (1-\alpha) \frac{km}{k-1} (1-\alpha)^{-\frac{1}{k}} \right) \\ &= \frac{km}{\alpha(k-1)} \left( 1 - (1-\alpha)^{1-\frac{1}{k}} \right). \end{aligned}$$

□

## 2.1 Estimation de quantiles

On rappelle maintenant des résultats concernant la convergence de l'estimateur de  $\theta_\alpha$  basé sur les statistiques d'ordres.

**Proposition 2.4.** *Soit  $\bar{\theta}_n$  l'estimateur de  $\theta_\alpha$  défini dans l'introduction, et  $X$  une variable aléatoire aux mêmes propriétés que précédemment. Alors on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{\theta}_n = \theta_\alpha \quad p.s.$$

Ainsi que la normalité asymptotique

$$\sqrt{n}(\bar{\theta}_n - \theta_\alpha) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\alpha(1-\alpha)}{f^2(\theta_\alpha)}\right).$$

*Démonstration.* La démonstration se repose en partie sur celle proposée par Jean-François Delmas dans son cours intitulé *Mesures de Risques en Finance*<sup>1</sup> en 2009. Commençons par montrer la convergence presque sûre, et pour la normalité asymptotique nous ne reproduirons pas la preuve dans son intégralité mais donnerons simplement l'idée.

Par définition,  $\bar{\theta}_n = X_{[n\alpha]+1}$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ , alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\bar{\theta}_n \leq x) &= \mathbb{P}(X_{[n\alpha]+1} \leq x) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}} \geq [n\alpha] + 1\right), \end{aligned}$$

car si  $X_{[n\alpha]+1} \leq x$ , alors il y a au moins  $[n\alpha] + 1$  observations inférieures à  $x$ . Ensuite, puisque  $\mathbb{E}[|\mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}|] < +\infty$ , on a par la loi forte des grands nombres que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}} \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X \leq x\}}],$$

Autrement dit,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}} \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbb{P}(X_i \leq x) = F(x).$$

Ensuite, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[n\alpha]+1}{n} = \alpha$ , si bien que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\bar{\theta}_n \leq x) = \mathbb{P}(F(x) \geq \alpha) \quad \text{p.s.}$$

Donc en appliquant  $F^{-1}$  à droite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\bar{\theta}_n \leq x) = \underbrace{\mathbb{P}(x \geq \theta_\alpha)}_{\text{déterministe}} \quad \text{p.s.}$$

Ainsi, on a presque sûrement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\bar{\theta}_n \leq x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq \theta_\alpha \\ 0 & \text{si } x < \theta_\alpha \end{cases}$$

---

1. <https://cermics.enpc.fr/delmas/Enseig/mrf.html>

Donc on a bien  $\bar{\theta}_n \rightarrow \theta_\alpha$  presque sûrement.

En ce qui concerne la normalité asymptotique, l'idée est tout d'abord de se ramener à une variable aléatoire qui permet de faire des calculs. En effet, l'idée étant de passer par les fonctions caractéristiques, les statistiques d'ordres ne sont pas propices à cette méthode. Mais il existe un candidat naturel, issu de l'équivalence montrée précédemment entre les événements

$$\{X_{([n\alpha]+1)} \leq x\} \text{ et } \left\{ \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}} \geq [n\alpha] + 1 \right\}.$$

L'idée est donc de dire que

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\bar{\theta}_n - \theta_\alpha) &\iff \bar{\theta}_n \leq \frac{x}{\sqrt{n}} + \theta_\alpha \\ &\iff \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i \leq \frac{x}{\sqrt{n}} + \theta_\alpha\}} \geq [n\alpha] + 1 \end{aligned}$$

Il s'agit ensuite de poser quelques notations, telles que  $\alpha_n = \mathbb{P}(X \leq \frac{x}{\sqrt{n}} + \theta_\alpha)$ , i.e.  $\alpha_n = F(\theta_\alpha + \frac{x}{\sqrt{n}})$ , d'où on obtient par développement de Taylor à l'ordre 1,  $\alpha_n = \alpha + f(\theta_\alpha) \frac{x}{\sqrt{n}} + o(n^{-1/2})$ .

On commence alors par montrer, en passant par la fonction caractéristique, la convergence en loi de la variable

$$\sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i \leq \alpha_n\}} - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \alpha_n\}}] \right),$$

où le développement limité précédent sera utile. Cela permettra d'en déduire la normalité asymptotique que l'on voulait montrer.  $\square$

On cherche ensuite à déterminer la convergence presque sûre ainsi que la normalité asymptotique de l'estimateur  $\hat{\theta}_n$  de  $\theta_\alpha$ .

**Proposition 2.5.** *Le théorème de Robbins-Monro assure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{\theta}_n = \theta_\alpha$  p.s.*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que les conditions du théorème de Robbins-Monro s'appliquent bien dans le cas de l'estimateur  $\hat{\theta}_n$ . L'estimateur est défini de la façon suivante, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\hat{\theta}_{n+1} = \hat{\theta}_n - a_n (\mathbb{1}_{\{X_{n+1} \leq \hat{\theta}_n\}} - \alpha),$$

avec  $\hat{\theta}_0$  choisi arbitrairement (de carré intégrable),  $(a_n)$  une suite positive décroissante vers 0 telle que  $\sum_{n \geq 0} a_n = +\infty$  et  $\sum_{n \geq 0} a_n^2 < +\infty$ . En notant  $Y_{n+1} = \mathbb{1}_{\{X_{n+1} \leq \hat{\theta}_n\}}$ , et avec  $\mathcal{F}_n$  la filtration naturelle associée à la suite  $(X_n)$ , on a

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_{n+1} \leq \hat{\theta}_n\}} | \mathcal{F}_n).$$

Donc il est clair que conditionnellement à  $\mathcal{F}_n$ ,  $Y_{n+1}$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $\mathbb{P}(X_{n+1} \leq \hat{\theta}_n)$ , autrement dit

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] = F(\hat{\theta}_n).$$

Comme on a supposé  $F$  continue strictement croissante, il existe bien un unique  $\theta_\alpha$  tel que  $F(\theta_\alpha) = \alpha$ .

Ensuite, on vérifie que  $\forall x \in \mathbb{R}$  tel que  $x \neq \theta_\alpha$ , on a  $(x - \theta_\alpha)(F(x) - \alpha) > 0$ . C'est immédiat, car par croissance de  $F$ ,  $x \geq \theta_\alpha \implies F(x) \geq \alpha$ , et  $x \leq \theta_\alpha \implies F(x) \leq \alpha$ . Donc dans les deux cas, le produit de ces deux termes est positif.

On vérifie maintenant que  $\exists K > 0$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) \leq K(1 + \|x\|^2)$ , avec  $g$  la fonction définie par  $g(X_n) = \mathbb{E}[\|Y_{n+1}\|^2 | \mathcal{F}_n]$ . On a déjà remarqué que conditionnellement à  $\mathcal{F}_n$ , la variable aléatoire  $Y_{n+1}$  suivant une loi de Bernoulli, autrement dit qu'elle était à valeur dans  $\{0, 1\}$ , et donc

$$\mathbb{E}[\|Y_{n+1}\|^2 | \mathcal{F}_n] \leq 1.$$

Donc on peut prendre par exemple  $K = 1$ , et on a bien  $\forall x \in \mathbb{R}$  et par positivité de  $\|x\|^2$  que

$$g(x) \leq 1 + \|x\|^2.$$

Ainsi, d'après le théorème de Robbins-Monro, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{\theta}_n = \theta_\alpha \quad \text{p.s.}$$

□

**Proposition 2.6.** *Dans les mêmes conditions que précédemment, le TLC pour l'algorithme de Robbins-Monro assure que, si  $f(\theta_\alpha) > \frac{1}{2}$ ,*

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_\alpha) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\alpha(1-\alpha)}{2f(\theta_\alpha)-1}\right).$$

*Démonstration.* Commençons par poser la différence de martingales

$$\varepsilon_{n+1} = Y_{n+1} - \mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n].$$

On a vu que  $\mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] = F(\hat{\theta}_n)$ , donc on a

$$\varepsilon_{n+1} = Y_{n+1} - F(\hat{\theta}_n).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[(Y_{n+1} - F(\hat{\theta}_n))^2 | \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[Y_{n+1}^2 - 2Y_{n+1}F(\hat{\theta}_n) + F(\hat{\theta}_n)^2 | \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[Y_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] - 2\mathbb{E}[Y_{n+1}F(\hat{\theta}_n) | \mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[F(\hat{\theta}_n)^2 | \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] - 2F(\hat{\theta}_n)\mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] + F(\hat{\theta}_n)^2 \\ &= F(\hat{\theta}_n) - 2F(\hat{\theta}_n)^2 + F(\hat{\theta}_n)^2 \\ &= F(\hat{\theta}_n)(1 - F(\hat{\theta}_n)) \end{aligned}$$

Puis par la proposition précédente,  $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta_\alpha$  p.s. et par continuité de  $F$ ,

$$\mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} F(\theta_\alpha)(1 - F(\theta_\alpha)) = \alpha(1 - \alpha).$$

Il faut également vérifier que  $(\varepsilon_n)$  admette un moment conditionnel d'ordre  $a > 2$ , autrement dit

$$\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[\|\varepsilon_{n+1}\|^a | \mathcal{F}_n] < +\infty \quad \text{p.s.}$$

On rappelle que  $\varepsilon_{n+1} = Y_{n+1} - F(\hat{\theta}_n)$ , avec  $Y_{n+1} = \mathbb{1}_{\{X_{n+1} \leq \hat{\theta}_n\}}$ . Donc puisque  $0 \leq Y_{n+1} \leq 1$ , et  $0 \leq F(\hat{\theta}_n) \leq 1$ , on a nécessairement que  $-1 \leq \varepsilon_{n+1} \leq 1$ , i.e.  $\forall n \geq 0$ ,  $|\varepsilon_n| \leq 1$ , et donc  $\forall a > 2$ ,

$$\mathbb{E}[\|\varepsilon_{n+1}\|^a | \mathcal{F}_n] \leq 1 < +\infty \quad \text{p.s.}$$

Les hypothèses du TLC pour Robbins-Monro sont donc vérifiées, ce qui assure que si  $f(\theta_\alpha) > \frac{1}{2}$ ,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_\alpha) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\alpha(1-\alpha)}{2f(\theta_\alpha)-1}\right).$$

□

## 2.2 Estimation de superquantiles

On rappelle sans les démontrer les résultats annoncés dans le sujet concernant le comportement asymptotique des estimateurs  $\bar{\vartheta}_n$  et  $\widehat{\vartheta}_n$  de  $\vartheta_\alpha$ .

**Proposition 2.7.** *Sous des hypothèses convenables sur  $F$  et son inverse généralisée  $F^{-1}$ , on peut montrer la convergence presque sûre  $\bar{\vartheta}_n \rightarrow \vartheta_\alpha$  p.s. ainsi que la normalité asymptotique*

$$\sqrt{n}(\bar{\vartheta}_n - \vartheta_\alpha) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \bar{\sigma}_\alpha^2),$$

avec la variance

$$\bar{\sigma}_\alpha^2 = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \int_\alpha^1 \int_\alpha^1 \frac{(\min(x, y) - xy)}{f(F^{-1}(x))f(F^{-1}(y))} dx dy.$$

**Proposition 2.8.** *Si les pas  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont choisis convenablement, on peut montrer la convergence presque sûre  $\widehat{\vartheta}_n \rightarrow \vartheta_\alpha$  p.s. ainsi que la normalité asymptotique*

$$\sqrt{n}(\widehat{\vartheta}_n - \vartheta_\alpha) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_\alpha^2),$$

avec la variance

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \text{Var}\left((X - \theta_\alpha)\mathbb{1}_{\{X \geq \theta_\alpha\}}\right).$$

On cherche maintenant à comparer ces deux variances de manière théorique. On montre que sous certaines conditions, elles coïncident. Pour le montrer, commençons par démontrer la propriété suivante, qui sera utile pour ce résultat.

**Proposition 2.9.** *Soit  $X$  une variable aléatoire réelle à densité, de densité notée  $f$ , et de fonction de répartition continue strictement croissante  $F$ , de moment d'ordre 2 fini. Alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F(x)) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 F(x)(1 - F(x)) = 0$ .*

*Démonstration.* On commence par noter que  $X$  admettant un moment d'ordre 2 fini, alors on a également que  $\mathbb{E}[X^2 \mathbb{1}_{\{X \geq 0\}}] < +\infty$ . Par suite,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2 \mathbb{1}_{\{X \geq 0\}}] &= \int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} f(x) \left( \int_0^x 2t dt \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} 2t f(x) \mathbb{1}_{\{x \geq t\}} dx dt \\ &= \int_0^{+\infty} 2t \left( \int_t^{+\infty} f(x) dx \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} 2t(1 - F(t)) dt\end{aligned}$$

Puisque  $\mathbb{E}[X^2 \mathbb{1}_{\{X \geq 0\}}] < +\infty$ , on a donc nécessairement  $\int_0^{+\infty} 2t(1 - F(t)) dt < +\infty$ , ce qui implique que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F(x)) = 0$ . De plus, en intégrant par partie,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} 2t(1 - F(t)) dt &= \left[ t^2(1 - F(t)) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2(1 - F(t)) + \int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt\end{aligned}$$

Ce qui revient à écrire

$$\mathbb{E}[X^2 \mathbb{1}_{\{X \geq 0\}}] = \mathbb{E}[X^2 \mathbb{1}_{\{X \geq 0\}}] + \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2(1 - F(t)),$$

Et cette espérance étant finie, on a bien sûr  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2(1 - F(t)) = 0$ . On conclut par l'encadrement suivant, valable pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$0 \leq t^2 F(t)(1 - F(t)) \leq t^2(1 - F(t)).$$

On a donc bien  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2(1 - F(t)) = 0$ . □

**Proposition 2.10.** *Sous les mêmes hypothèses sur  $X$  et  $F$ , on a l'égalité  $\bar{\sigma}_\alpha^2 = \sigma_\alpha^2$ .*

*Démonstration.* On part de l'expression suivante,

$$\bar{\sigma}_\alpha^2 = \frac{1}{(1 - \alpha)^2} \int_\alpha^1 \int_\alpha^1 \frac{(\min(x, y) - xy)}{f(F^{-1}(x))f(F^{-1}(y))} dx dy.$$

En posant  $u = F^{-1}(x)$  et  $v = F^{-1}(y)$ , on a par changement de variable

$$\begin{aligned}(1 - \alpha)^2 \bar{\sigma}_\alpha^2 &= \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} \frac{(\min(F(u), F(v)) - F(u)F(v))}{f(u)f(v)} f(u)f(v) du dv \\ &= \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} (\min(F(u), F(v)) - F(u)F(v)) du dv\end{aligned}$$

Ensuite,  $F$  étant croissante,  $u \leq v \implies F(u) \leq F(v)$ , d'où

$$\begin{aligned} (1-\alpha)^2 \bar{\sigma}_\alpha^2 &= \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} \left( F(u)(1-F(v)) \mathbb{1}_{u \leq v} + F(v)(1-F(u)) \mathbb{1}_{v < u} \right) du dv \\ &= \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} F(u)(1-F(v)) \mathbb{1}_{u \leq v} du dv + \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} F(v)(1-F(u)) \mathbb{1}_{v < u} du dv \end{aligned}$$

Puis par symétrie, et par le théorème de Fubini-Tonelli (intégrales de fonctions positives, ce qui est le cas de  $F(x)$  et  $1-F(x)$  pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ ),

$$\begin{aligned} (1-\alpha)^2 \bar{\sigma}_\alpha^2 &= 2 \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} F(u)(1-F(v)) \mathbb{1}_{u \leq v} du dv \\ &= 2 \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} F(u) \left( \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} (1-F(v)) \mathbb{1}_{u \leq v} dv \right) du \\ &= 2 \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} F(u) \left( \int_u^{+\infty} (1-F(v)) dv \right) du \\ &= 2 \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} F(u) \left( \left[ v(1-F(v)) \right]_u^{+\infty} + \int_u^{+\infty} vf(v) dv \right) du \end{aligned}$$

On utilise ici la propriété  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1-F(x)) = 0$  pour éliminer la borne en  $+\infty$  issue de l'intégration par partie, et on obtient

$$\begin{aligned} (1-\alpha)^2 \bar{\sigma}_\alpha^2 &= 2 \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} F(u) \left( u(F(u)-1) + \int_u^{+\infty} vf(v) dv \right) du \\ &= 2 \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} uF(u)(F(u)-1) du + 2 \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} F(u) \left( \int_u^{+\infty} vf(v) dv \right) du \end{aligned}$$

Notons pour simplifier les calculs,

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} uF(u)(F(u)-1) du \\ I_2 &= 2 \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} F(u) \left( \int_u^{+\infty} vf(v) dv \right) du \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \left( \left[ \frac{u^2}{2} F(u)(F(u)-1) \right]_{\theta_\alpha}^{+\infty} - \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} \frac{u^2}{2} (2F(u)f(u) - f(u)) du \right) \\ &= 2 \left( \frac{\theta_\alpha^2}{2} \alpha(1-\alpha) - \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} u^2 F(u)f(u) du + \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} \frac{u^2}{2} f(u) du \right) \\ &= \theta_\alpha^2 \alpha(1-\alpha) - 2 \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} u^2 F(u)f(u) du + \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} u^2 f(u) du, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé pour la deuxième égalité, la propriété  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 F(x)(1-F(x)) = 0$ , ainsi que l'égalité  $F(\theta_\alpha) = \alpha$ . L'hypothèse que  $X$  admet un moment 2 d'ordre fini assure également que le terme  $\int_{\theta_\alpha}^{+\infty} u^2 F(u)f(u) du$  est bien défini, quitte à majorer  $F(u)$  par 1.

Ensuite, par Fubini, ces intégrales étant toutes bien définies, on a

$$\begin{aligned}
I_2 &= 2 \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} F(u) \left( \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} v f(v) \mathbb{1}_{v \geq u} dv \right) du \\
&= 2 \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} v f(v) F(u) \mathbb{1}_{u \leq v} du dv \\
&= 2 \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} v f(v) \left( \int_{\theta_\alpha}^v F(u) du \right) dv \\
&= 2 \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} v f(v) \left( [uF(u)]_{\theta_\alpha}^v - \int_{\theta_\alpha}^v u f(u) du \right) dv \\
&= 2 \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} v f(v) \left( vF(v) - \theta_\alpha \alpha - \int_{\theta_\alpha}^v u f(u) du \right) dv \\
&= 2 \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} v^2 F(v) f(v) dv - 2\theta_\alpha \alpha \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} v f(v) dv - 2 \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} v f(v) \left( \int_{\theta_\alpha}^v u f(u) du \right) dv.
\end{aligned}$$

En sommant  $I_1$  et  $I_2$ , on obtient ainsi

$$\begin{aligned}
(1-\alpha)^2 \bar{\sigma}_\alpha^2 &= \theta_\alpha^2 \alpha (1-\alpha) + \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} u^2 f(u) du - 2\theta_\alpha \alpha \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} v f(v) dv \\
&\quad - 2 \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} v f(v) \left( \int_{\theta_\alpha}^v u f(u) du \right) dv.
\end{aligned}$$

On remarque que le dernier terme peut s'écrire de la manière suivante,

$$\begin{aligned}
I_3 &= -2 \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} v f(v) \left( \int_{\theta_\alpha}^v u f(u) du \right) dv \\
&= -2 \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} v f(v) u f(u) \mathbb{1}_{u \leq v} du dv \\
&= - \left( \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} v f(v) u f(u) \mathbb{1}_{u \leq v} du dv + \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} v f(v) u f(u) \mathbb{1}_{u \leq v} du dv \right).
\end{aligned}$$

Donc par symétrie, c'est-à-dire par changement de variable en posant  $u = v$  et  $v = u$  à droite, on obtient par  $\mathbb{1}_{u \leq v} + \mathbb{1}_{u > v} = 1$ ,

$$\begin{aligned}
I_3 &= - \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} u f(u) v f(v) du dv \\
&= - \left( \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} u f(u) du \right) \left( \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} v f(v) dv \right) \\
&= - \left( \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} u f(u) du \right)^2.
\end{aligned}$$

Finalement, on a donc

$$\begin{aligned}
(1-\alpha)^2 \bar{\sigma}_\alpha^2 &= \theta_\alpha^2 \alpha (1-\alpha) + \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} u^2 f(u) du - 2\theta_\alpha \alpha \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} v f(v) dv \\
&\quad - \left( \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} u f(u) du \right)^2.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que l'on obtient le même résultat à partir de  $\sigma_\alpha^2$ .

$$\begin{aligned}(1-\alpha)^2\sigma_\alpha^2 &= \text{Var}((X-\theta_\alpha)\mathbb{1}_{\{X\geq\theta_\alpha\}}) \\ &= \mathbb{E}[(X-\theta_\alpha)^2\mathbb{1}_{\{X\geq\theta_\alpha\}}] - \mathbb{E}[(X-\theta_\alpha)\mathbb{1}_{\{X\geq\theta_\alpha\}}]^2 \\ &= \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} (x-\theta_\alpha)^2 f(x) dx - \left( \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} (x-\theta_\alpha) f(x) dx \right)^2.\end{aligned}$$

En développant, on obtient

$$\begin{aligned}(1-\alpha)^2\sigma_\alpha^2 &= \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} x^2 f(x) dx - 2\theta_\alpha \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} xf(x) dx + \theta_\alpha^2(1-\alpha) \\ &\quad - \left( \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} xf(x) dx - \theta_\alpha(1-\alpha) \right)^2 \\ &= \theta_\alpha^2(1-\alpha) - \theta_\alpha^2(1-\alpha)^2 + 2\theta_\alpha(1-\alpha) \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} xf(x) dx - 2\theta_\alpha \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} xf(x) dx \\ &\quad + \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left( \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} xf(x) dx \right)^2 \\ &= \theta_\alpha\alpha(1-\alpha) - 2\theta_\alpha\alpha \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} xf(x) dx + \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} x^2 f(x) dx \\ &\quad - \left( \int_{\theta_\alpha}^{+\infty} xf(x) dx \right)^2.\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien sous ces hypothèses l'égalité  $(1-\alpha)^2\bar{\sigma}_\alpha^2 = (1-\alpha)^2\sigma_\alpha^2$ .  $\square$

### 2.3 Dépréciation moyenne

Concernant ce que nous avons appelé la dépréciation moyenne de niveau  $\alpha$ ,

$$\tau_\alpha = \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{\{X\leq\theta_\alpha\}}] = \frac{1}{\alpha} (\mathbb{E}[X] - (1-\alpha)\vartheta_\alpha),$$

il reste à déterminer l'expression de la suite  $(c_n)$ . Rappelons la formule de récurrence pour l'estimateur de type Robbins-Monro,

$$\widehat{\tau}_{n+1} = \widehat{\tau}_n + b_n \left( \frac{X_{n+1}}{\alpha} \mathbb{1}_{\{X_{n+1}\leq\widehat{\theta}_n\}} - \widehat{\tau}_n + c_n(X_{n+1} - \overline{X}_n) \right).$$

On identifie alors la suite  $(c_n)$  en injectant les estimateurs de type Robbins-Monro  $\widehat{\tau}_n$  et  $\widehat{\vartheta}_n$  de  $\tau_\alpha$  et  $\vartheta_\alpha$  dans l'expression de droite, en estimant  $\mathbb{E}[X]$  par la moyenne empirique des observations. On commence donc par poser

$$\widehat{\tau}_n = \frac{1}{\alpha} (\overline{X}_n - (1-\alpha)\widehat{\vartheta}_n).$$

D'où on a

$$\widehat{\tau}_{n+1} = \frac{1}{\alpha} (\overline{X}_{n+1} - (1-\alpha)\widehat{\vartheta}_{n+1})$$

Or en partant de  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$

On a  $\bar{X}_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} X_k$ , ce qui implique

$$\begin{aligned}(n+1)\bar{X}_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} X_k \\ &= n\bar{X}_n + X_{n+1} \\ &= (n+1-1)\bar{X}_n + X_{n+1} \\ &= (n+1)\bar{X}_n + X_{n+1} - \bar{X}_n\end{aligned}$$

Finalement, on obtient donc la relation suivante pour la moyenne empirique

$$\bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n + \frac{1}{n+1} (X_{n+1} - \bar{X}_n)$$

Et  $\hat{\vartheta}_{n+1}$  est donné par la relation suivante :

$$\hat{\vartheta}_{n+1} = \hat{\vartheta}_n + b_n \left( \frac{X_{n+1}}{1-\alpha} \mathbb{1}_{\{X_{n+1} > \hat{\theta}_n\}} - \hat{\vartheta}_n \right),$$

En remplaçant dans l'expression de  $\hat{\tau}_{n+1}$  on a alors :

$$\hat{\tau}_{n+1} = \frac{1}{\alpha} \left( \bar{X}_{\textcolor{red}{n}} + \frac{1}{n+1} (X_{n+1} - \bar{X}_n) - (1-\alpha) \left( \hat{\vartheta}_{\textcolor{red}{n}} + b_n \left( \frac{X_{n+1}}{1-\alpha} \mathbb{1}_{\{X_{n+1} > \hat{\theta}_n\}} - \hat{\vartheta}_n \right) \right) \right)$$

En identifiant  $\hat{\tau}_n$  donné plus haut (avec les éléments en rouge) et en posant  $\mathbb{1}_{\{X_{n+1} > \hat{\theta}_n\}} = 1 - \mathbb{1}_{\{X_{n+1} \leq \hat{\theta}_n\}}$  on peut réécrire :

$$\hat{\tau}_{n+1} = \hat{\tau}_n + b_n \left( \frac{X_{n+1}}{\alpha} \left( \mathbb{1}_{\{X_{n+1} \leq \hat{\theta}_n\}} - 1 \right) + \frac{1}{\alpha b_n (n+1)} (X_{n+1} - \bar{X}_n) + \frac{1-\alpha}{\alpha} \hat{\vartheta}_n \right)$$

On reconnaît l'expression de  $\hat{\tau}_{n+1}$  il faut seulement faire apparaître  $-\hat{\tau}_n$  :

$$\hat{\tau}_{n+1} = \hat{\tau}_n + b_n \left( \frac{X_{n+1}}{\alpha} \left( \mathbb{1}_{\{X_{n+1} \leq \hat{\theta}_n\}} - 1 \right) + \frac{1}{\alpha b_n (n+1)} (X_{n+1} - \bar{X}_n) + \underbrace{\frac{1-\alpha}{\alpha} \hat{\vartheta}_n - \frac{\bar{X}_n}{\alpha}}_{-\hat{\tau}_n} + \frac{\bar{X}_n}{\alpha} \right)$$

En identifiant à l'aide de la formule de récurrence donnée au début on trouve donc :

$$c_n = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{b_n (n+1)} - 1 \right) (X_{n+1} - \bar{X}_n)$$

On remarque que si on prend  $b_n = \frac{1}{n+1}$  ce terme vaut alors 0.

### 3 Simulations

On propose maintenant de visualiser les comportements asymptotiques décrits dans la partie théorique à l'aide de simulations. Il s'agira de comparer les performances des différents estimateurs dans le cas de lois connues telles que la loi exponentielle ou la loi de Paréto. Pour toutes les simulations, nous avons pris un nomnbre de repétitions de  $10^5$  pour un nombre d'itérations de  $10^4$ .

#### 3.1 Quantiles

##### 3.1.1 Statistique d'ordre

###### Convergence presque sûre

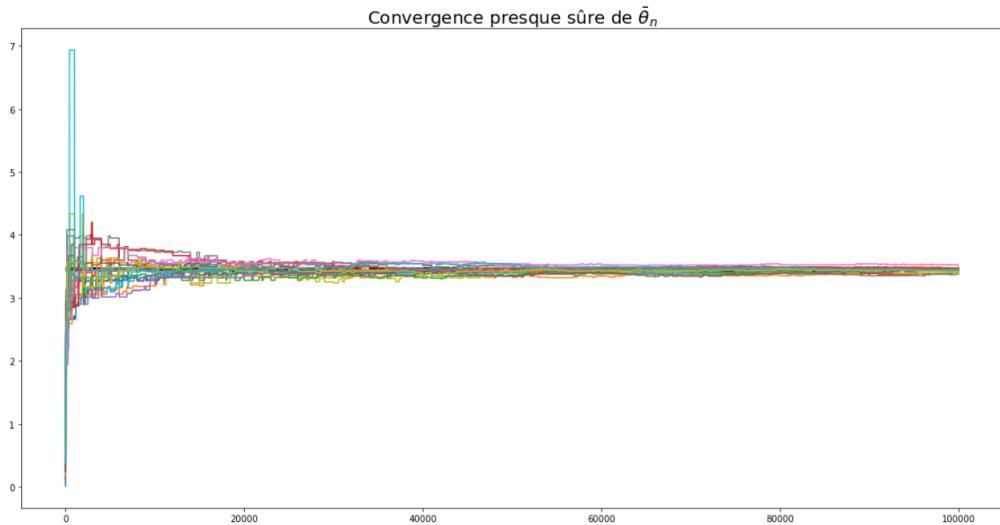


FIGURE 1 – Convergence presque sûre de l'estimateur  $\bar{\theta}_n$  pour la loi exponentielle, avec  $\lambda = 2$  et  $\alpha = 0.999$ . On voit que l'estimateur a besoin de plus de temps pour converger avec une valeur aussi élevée pour  $\alpha$ .

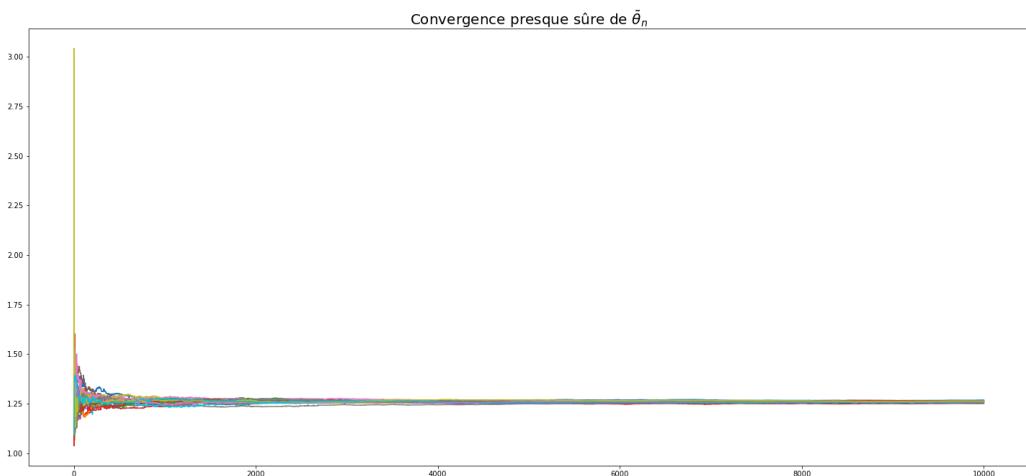


FIGURE 2 – Convergence presque sûre de l'estimateur  $\bar{\theta}_n$  pour la loi pareto de paramètre  $[1, 3]$  et  $\alpha = 0.5$ .

## Normalité asymptotique

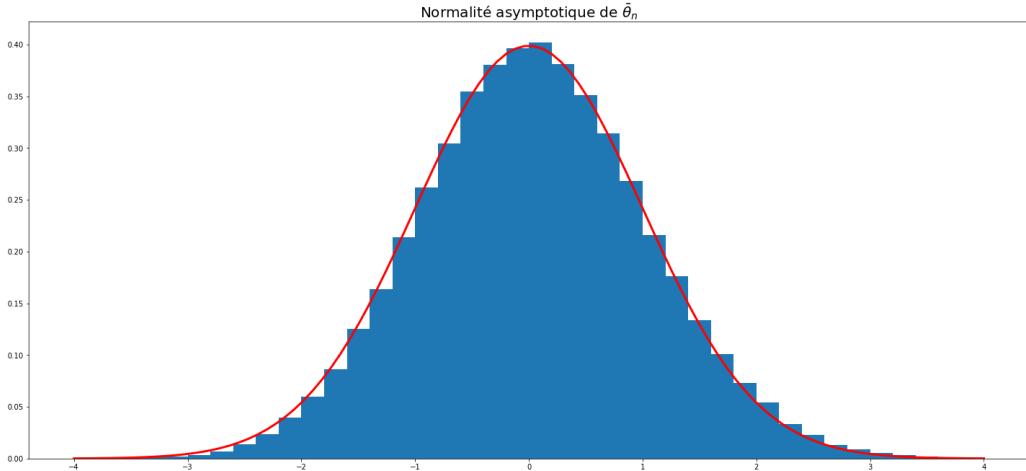


FIGURE 3 – Normalité asymptotique de l'estimateur  $\bar{\theta}_n$  pour la loi exponentielle, avec  $\lambda = 2$  et  $\alpha = 0.5$ .

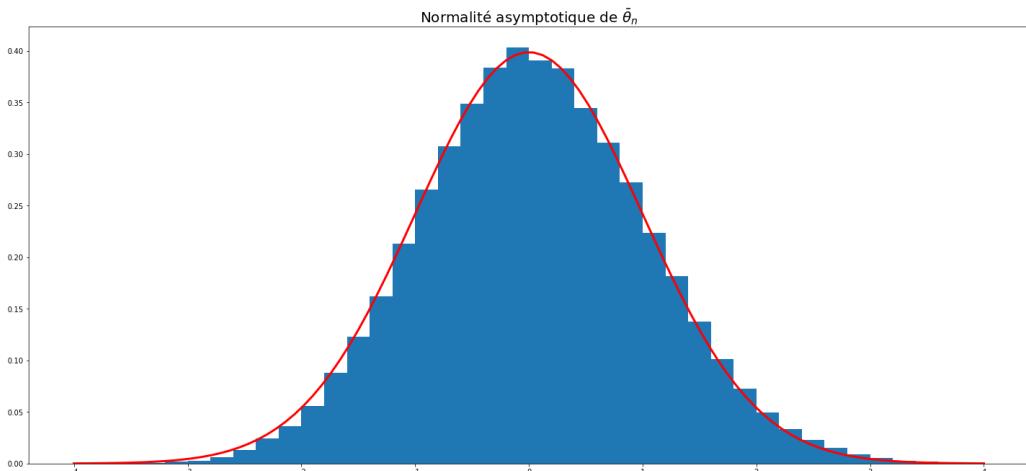


FIGURE 4 – Normalité asymptotique de l'estimateur  $\bar{\theta}_n$  pour la loi pareto de paramètre  $[1, 3]$  et  $\alpha = 0.5$ .

### 3.1.2 Estimateur Robbins Monro

#### Convergence presque sûre

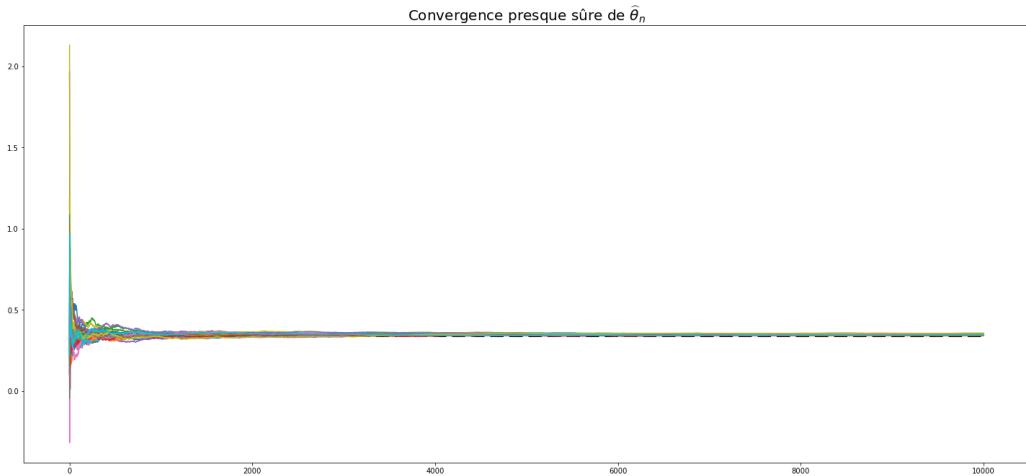


FIGURE 5 – Convergence presque sûre de l'estimateur  $\hat{\theta}_n$  pour la loi exponentielle, avec  $\lambda = 2$  et  $\alpha = 0.5$ .

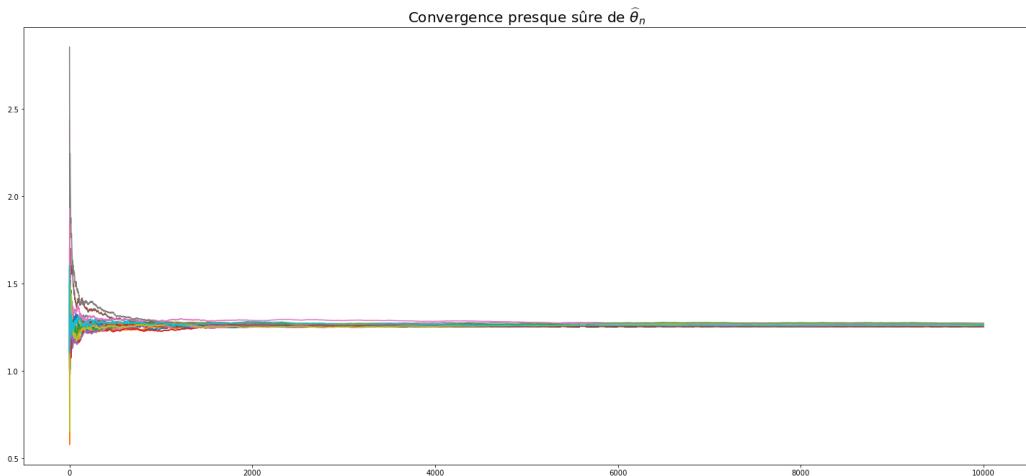


FIGURE 6 – Convergence presque sûre de l'estimateur  $\hat{\theta}_n$  pour la loi pareto de paramètre  $[1, 3]$  et  $\alpha = 0.5$ .

## Normalité asymptotique

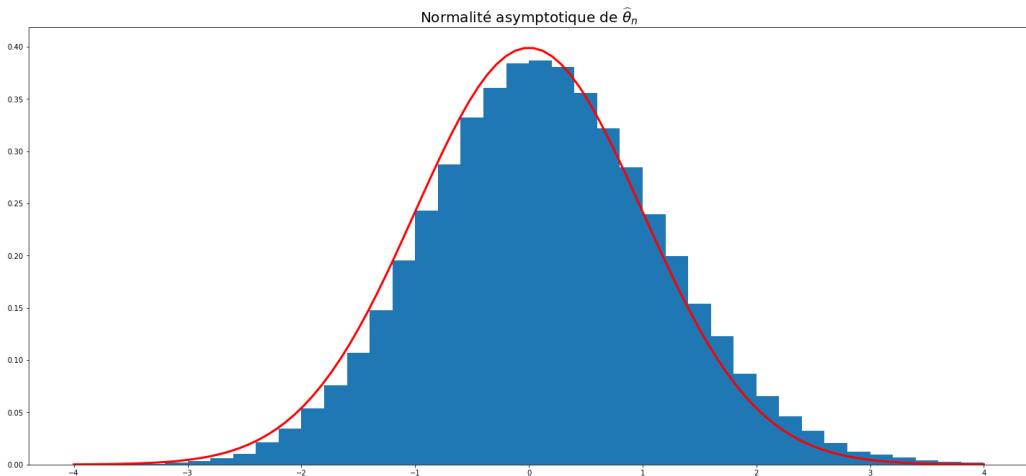


FIGURE 7 – Normalité asymptotique de l'estimateur  $\hat{\theta}_n$  pour la loi exponentielle, avec  $\lambda = 2$  et  $\alpha = 0.5$ .

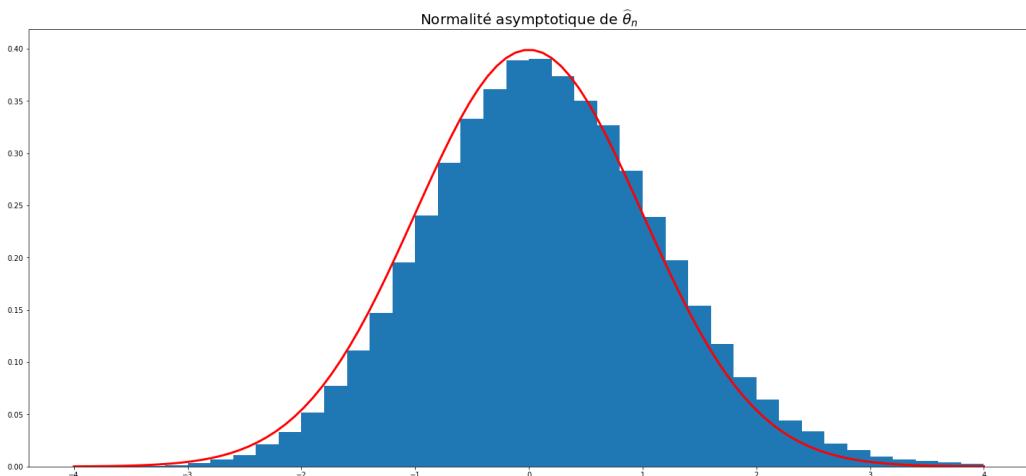


FIGURE 8 – Normalité asymptotique de l'estimateur  $\hat{\theta}_n$  pour la loi pareto de paramètre  $[1, 3]$  et  $\alpha = 0.5$ .

## 3.2 Superquantiles

### 3.2.1 Statistique d'ordre

Convergence presque sûre

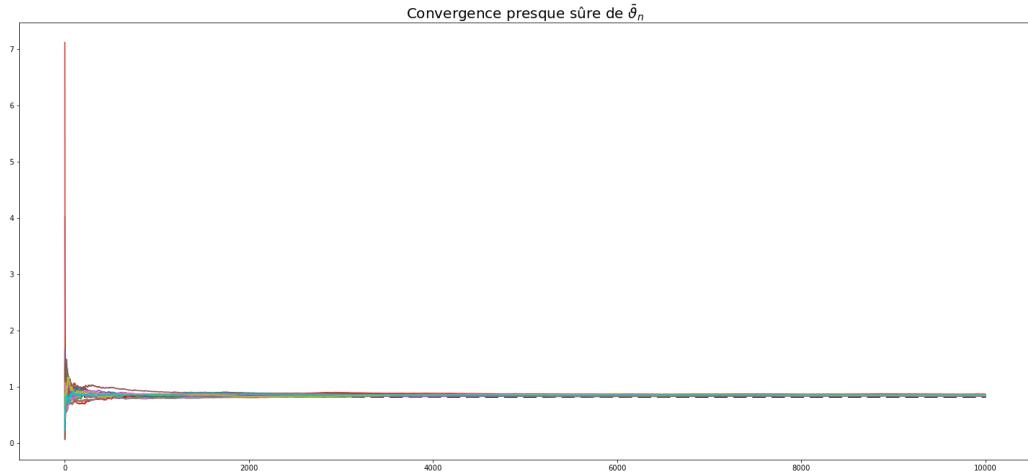


FIGURE 9 – Convergence presque sûre de l'estimateur  $\bar{\theta}_n$  pour la loi exponentielle, avec  $\lambda = 2$  et  $\alpha = 0.5$

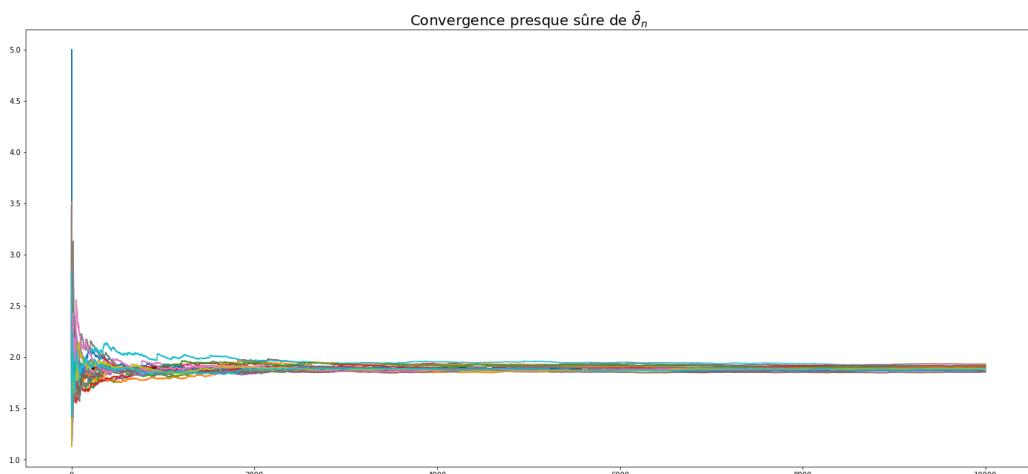


FIGURE 10 – Convergence presque sûre de l'estimateur  $\bar{\theta}_n$  pour la loi pareto de paramètre  $[1, 3]$  et  $\alpha = 0.5$ .

## Normalité asymptotique

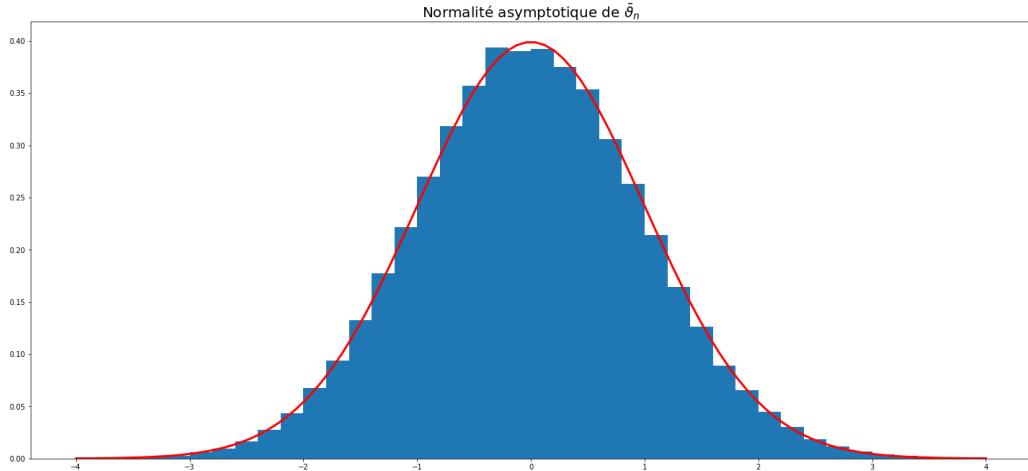


FIGURE 11 – Normalité asymptotique de l'estimateur  $\bar{\theta}_n$  pour la loi exponentielle, avec  $\lambda = 2$  et  $\alpha = 0.5$ .

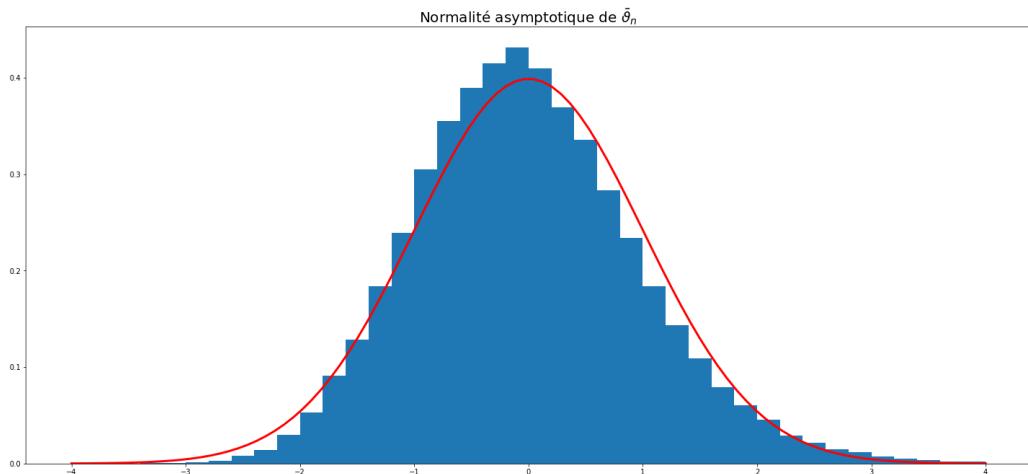


FIGURE 12 – Normalité asymptotique de l'estimateur  $\bar{\theta}_n$  pour la loi pareto de paramètre  $[1, 3]$  et  $\alpha = 0.5$ .

### 3.2.2 Estimateur Robbins Monro

#### Convergence presque sûre

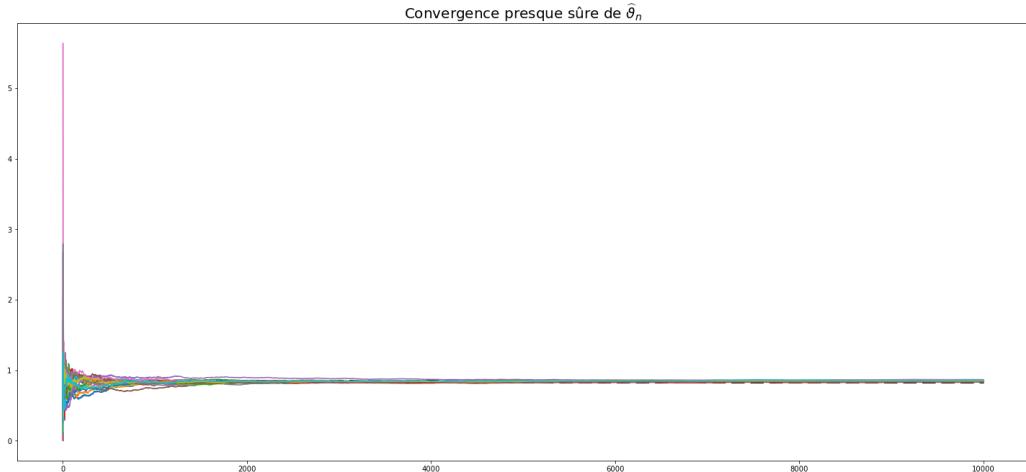


FIGURE 13 – Convergence presque sûre de l'estimateur  $\hat{\vartheta}_n$  pour la loi exponentielle, avec  $\lambda = 2$  et  $\alpha = 0.5$ .

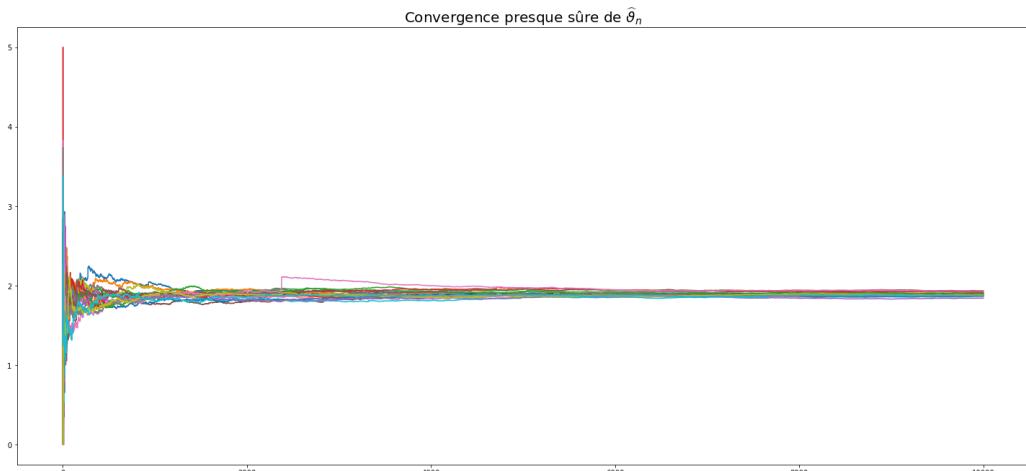


FIGURE 14 – Convergence presque sûre de l'estimateur  $\hat{\vartheta}_n$  pour la loi pareto de paramètre  $[1, 3]$  et  $\alpha = 0.5$ .

## Normalité asymptotique

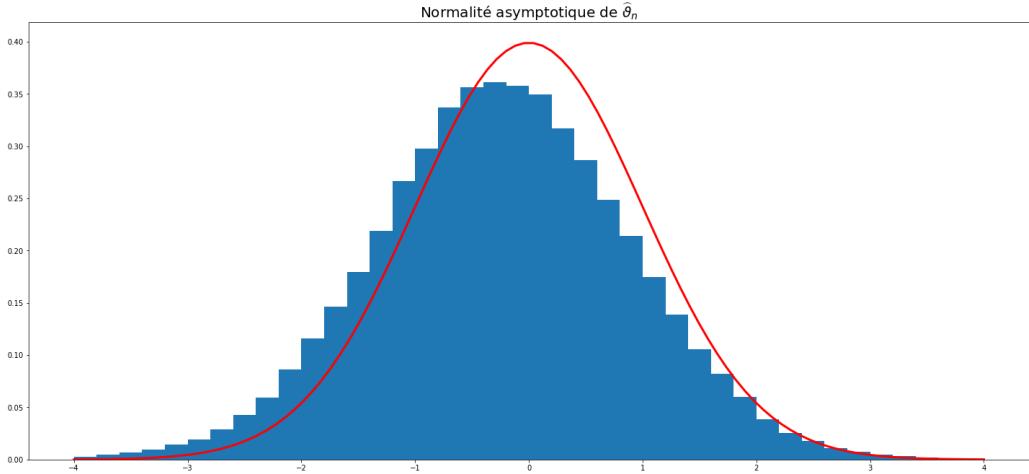


FIGURE 15 – Normalité asymptotique de l'estimateur  $\hat{\theta}_n$  pour la loi exponentielle, avec  $\lambda = 2$  et  $\alpha = 0.5$ .

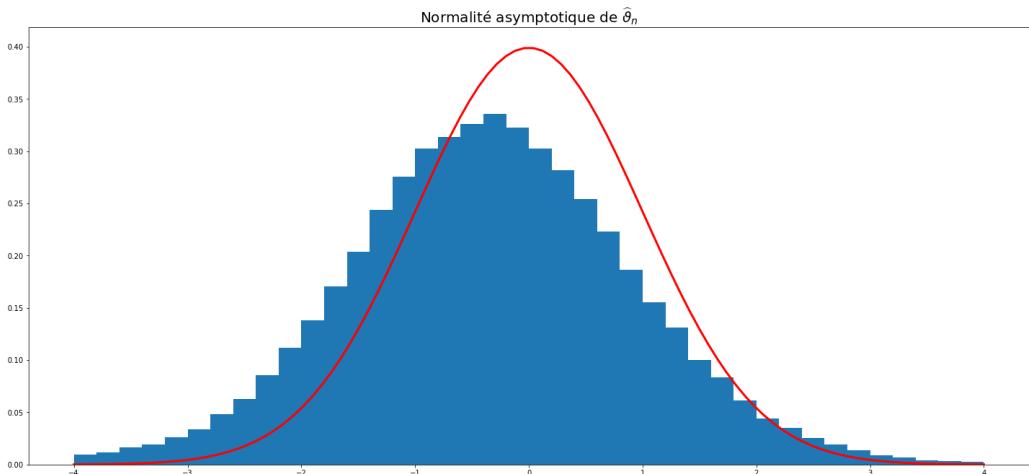


FIGURE 16 – Normalité asymptotique de l'estimateur  $\hat{\theta}_n$  pour la loi pareto de paramètre  $[1, 3]$  et  $\alpha = 0.5$ .

### 3.3 Dépréciation moyenne

#### 3.3.1 Statistique d'ordre

##### Convergence presque sûre

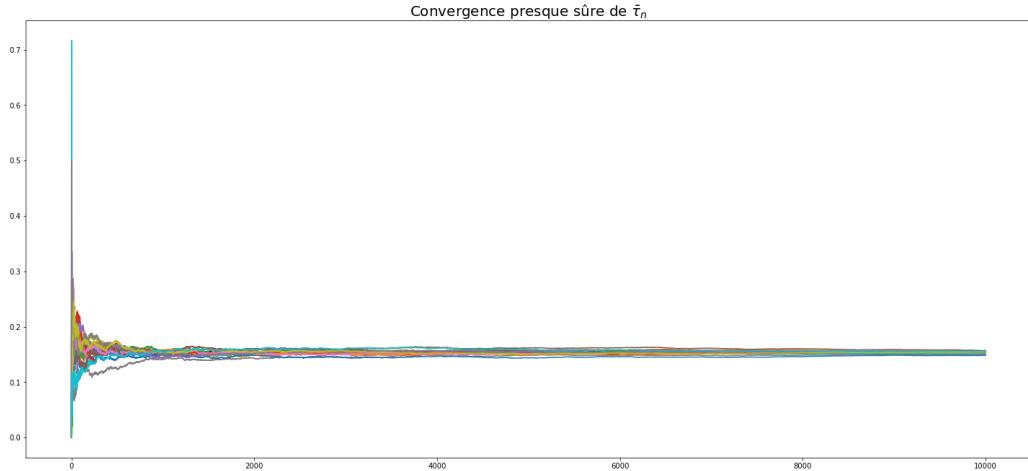


FIGURE 17 – Convergence presque sûre de l'estimateur  $\bar{\tau}_n$  pour la loi exponentielle, avec  $\lambda = 2$  et  $\alpha = 0.5$

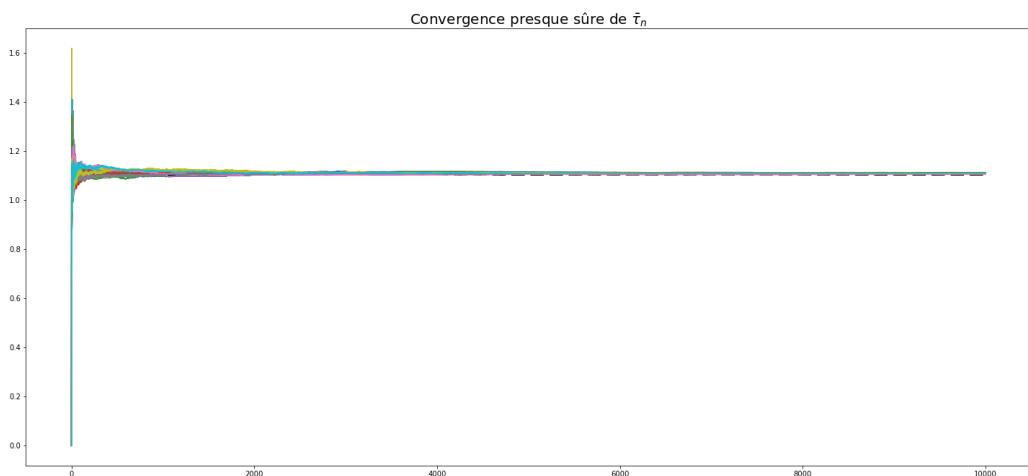


FIGURE 18 – Convergence presque sûre de l'estimateur  $\bar{\tau}_n$  pour la loi pareto de paramètre  $[1, 3]$  et  $\alpha = 0.5$ .

### 3.3.2 Estimateur Robbins Monro

Dans les simulations suivantes, nous avons choisi de modifier le pas de l'algorithme, et d'utiliser un pas en  $\frac{1}{nc}$  avec  $c = \frac{2}{3}$ , ce qui nous permet d'illustrer le fait qu'avec un pas de cette forme, la convergence presque sûre est toujours valide, mais plus lente. On observe que pour un nombre d'itération plus grand que dans les exemples précédents, ici égal à  $2 \times 10^4$ , la variabilité autour de la valeur limite reste assez importante.

On n'inclut pas non plus de normalité asymptotique pour cet estimateur, car la variance nous est inconnue.

#### Convergence presque sûre

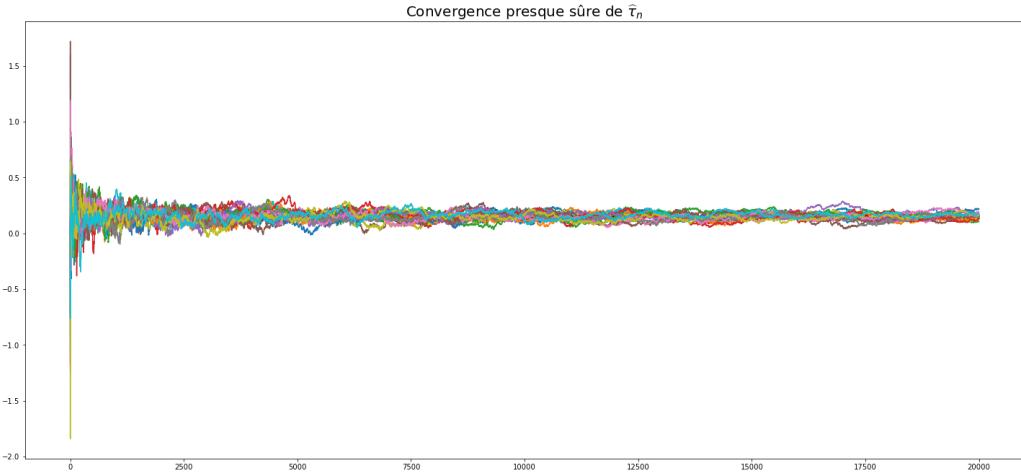


FIGURE 19 – Convergence presque sûre de l'estimateur  $\hat{\tau}_n$  pour la loi exponentielle, avec  $\lambda = 2$  et  $\alpha = 0.5$ .

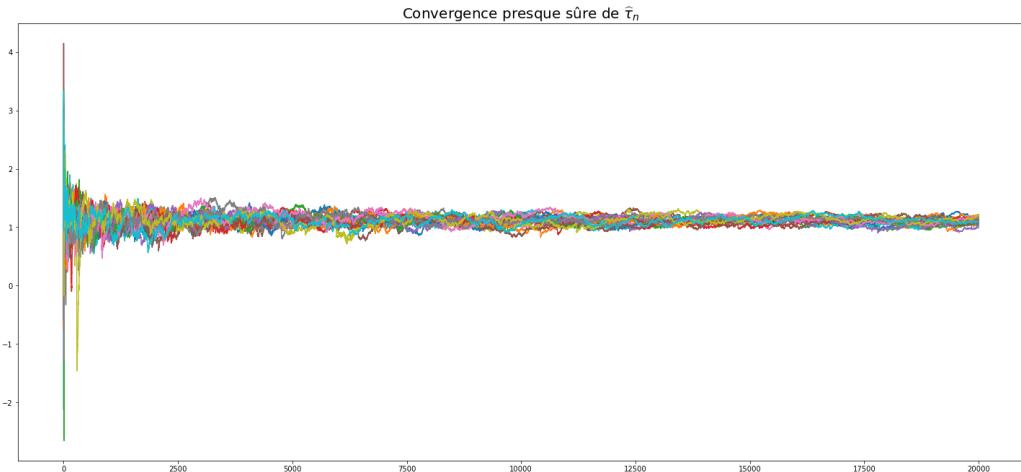


FIGURE 20 – Convergence presque sûre de l'estimateur  $\hat{\tau}_n$  pour la loi Paréto de paramètre  $[1, 3]$  et  $\alpha = 0.5$ .

Les temps ci-dessous ont été calculés par moyenne sur 5 itérations.

		$\alpha$	0.25	0.5	0.75
Param					
Expo	1		6.87 0.26	6.91 0.26	6.86 0.26
	25		6.81 0.24	6.77 0.25	6.75 0.24
	50		6.74 0.24	6.81 0.26	6.88 0.26
	75		6.8 0.27	6.91 0.26	6.86 0.26
	100		6.75 0.25	6.78 0.27	6.80 0.27
Pareto	[1,3]		6.81 0.27	6.74 0.27	6.83 0.26
	[2,25]		6.79 0.26	6.76 0.27	6.75 0.26
	[3,50]		6.75 0.27	7.13 0.27	6.84 0.27
	[6,75]		6.79 0.27	6.75 0.28	6.75 0.27
	[10,100]		6.76 0.27	6.73 0.26	6.75 0.27

TABLE 1 – Tableau des temps d'exécutions de la convergence presque sûre pour les estimateurs  $\bar{\theta}_n$  (en noir) et  $\hat{\theta}_n$  (en bleu) avec  $N = 10^4$  et 20 répétitions.

On remarque qu'en général les estimateurs Robbins Monro convergent plus rapidement que les estimateurs définis avec les statistiques d'ordre. Cela s'explique tout simplement par le fait que le calcul des estimateurs se fait en  $O(n)$  dans le cas de Robbins Monro et en  $O(n^2 \log(n))$  avec les statistiques d'ordre. Avec  $n$  le nombre d'itérations.

		$\alpha$	0.25	0.5	0.75
		Param			
Expo	1		8.31 0.67	8.29 0.66	8.17 0.68
	25		8.31 0.68	8.25 0.70	8.13 0.70
	50		8.26 0.72	8.15 0.68	8.08 0.69
	75		8.27 0.71	8.25 0.67	8.13 0.67
	100		8.28 0.67	8.21 0.69	8.07 0.66
Pareto	[1,3]		8.39 0.69	8.31 0.67	8.14 0.68
	[2,25]		8.32 0.69	8.23 0.67	8.14 0.68
	[3,50]		8.33 0.69	8.23 0.67	8.13 0.68
	[6,75]		8.32 0.69	8.27 0.67	8.14 0.67
	[10,100]		8.30 0.71	8.23 0.68	8.17 0.67

TABLE 2 – Tableau des temps d'exécutions de la convergence presque sûre pour les estimateurs  $\bar{\vartheta}_n$  (en noir) et  $\hat{\vartheta}_n$  (en bleu) avec  $N = 10^4$  et 20 répétitions.

		$\alpha$	0.25	0.5	0.75
		Param			
Expo	1		9.78 2.67	9.59 2.70	9.53 2.68
	25		9.77 2.68	9.65 2.68	9.53 2.70
	50		9.74 2.67	9.66 2.71	9.57 2.68
	75		9.74 2.69	9.65 2.69	9.55 2.69
	100		9.83 2.65	9.65 2.70	9.55 2.71
Pareto	[1,3]		9.60 2.63	9.85 2.64	9.59 2.65
	[2,25]		9.59 2.64	9.45 2.60	9.33 2.61
	[3,50]		9.54 2.64	9.41 2.62	9.34 2.65
	[6,75]		9.55 2.67	9.42 2.63	9.30 2.66
	[10,100]		9.48 2.63	9.39 2.75	9.34 2.65

TABLE 3 – Tableau des temps d'exécutions de la convergence presque sûre pour les estimateurs  $\bar{\tau}_n$  (en noir) et  $\hat{\tau}_n$  (en bleu avec un pas en  $\frac{1}{n^c}$  avec  $c = \frac{2}{3}$ ) avec  $N = 10^4$  et 20 répétitions.