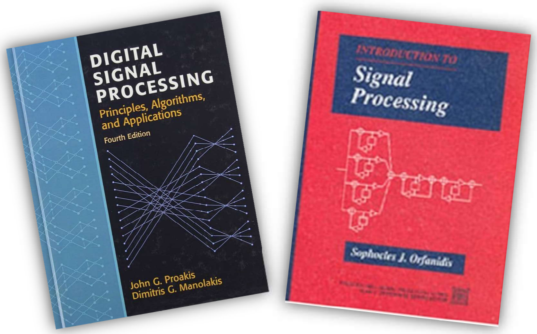
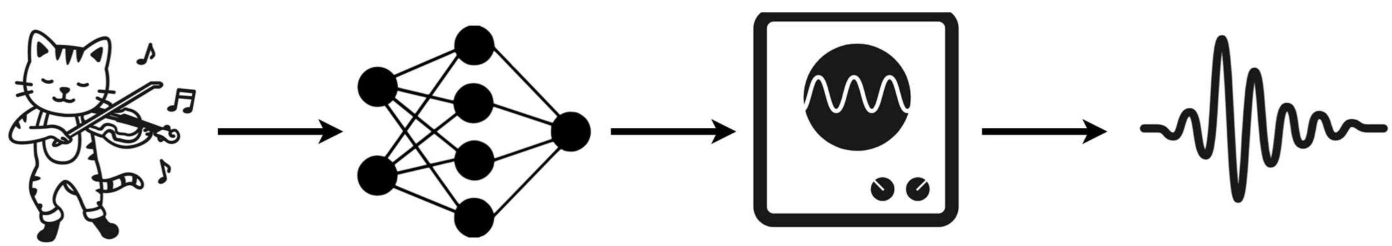
DIGITAL SIGNAL PROCESSING



DISCRETE SIGNALS AND SYSTEMS IN TIME DOMAIN



DO TRUNG HAU

CONTENTS

I *Discrete signals*

1. Năng lượng và công suất
2. Các phép toán trên MTG
3. Tích chập các tín hiệu
4. Vẽ các tín hiệu rời rạc

II *Discrete signals*

1. Thực thi hệ thống bởi SĐK
2. Đáp ứng xung hệ thống
3. Bài toán IO hệ thống
4. Phân loại hệ thống

a) $x(n) = \cos(0.01\pi n)$, ta có: $N = \dfrac{k2\pi}{0.01\pi} = 200k = 200, 400, 600, \ldots \rightarrow x(n)$ tuần hoàn với chu kỳ $N = 200$ mẫu.

e) $x(n) = \sin\left(\pi \dfrac{62n}{10}\right)$, ta có: $N = \dfrac{k2\pi}{\dfrac{62\pi}{10}} = \dfrac{10}{31}k = 10, 20, 30\ldots \rightarrow x(n)$ tuần hoàn với chu kỳ $N = 10$ mẫu.

d) $x(n) = \sin(3n)$, ta có: $N = \dfrac{k2\pi}{3} \notin \mathbb{Z}^{+} \rightarrow x(n)$ không tuần hoàn.

b) $x(n) = 3\cos\left(\dfrac{\pi}{2}n\right) + 2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}n\right)$, tuần hoàn với chu kỳ $N = BCNN\{4, 6\} = 12$ mẫu.

d) $x(n) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}n\right)$, tuần hoàn với chu kỳ $N = 12$ mẫu.

d) Tín hiệu $x(n) = \cos\left(\frac{n}{8}\right)\cos\left(\pi\frac{n}{8}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\pi\frac{n}{8} - \frac{n}{8}\right) + \cos\left(\pi\frac{n}{8} - \frac{n}{8}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{1}{8}(\pi-1)n\right) + \cos\left(\frac{1}{8}(\pi-1)n\right)\right]$ có $N_1 = \dfrac{k2\pi}{\frac{1}{8}(\pi-1)} \notin \mathbb{Z}^+, N_2 = \dfrac{k2\pi}{\frac{1}{8}(\pi+1)} \notin \mathbb{Z}^+ \rightarrow x(n)$

e) Tín hiệu $x(n) = \cos\left(\pi\frac{n}{2}\right) - \sin\left(\pi\frac{n}{8}\right) + 3\cos\left(\pi\frac{n}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$ có

$N_1 = \frac{k2\pi}{\pi/2} = 4k = 4, 8, 12, \ldots N_2 = \frac{k2\pi}{\pi/8} = 16k = 16, 32, 48, \ldots N_3 = \frac{k2\pi}{\pi/4} = 8k = 8, 16, 24, \ldots \rightarrow x(n)$
tuần hoàn với chu kỳ $N = BCNN\{4,16,8\} = 16$ mẫu.

c) Tín hiệu $x(n) = 2e^{j\left(\frac{n}{6}-\pi\right)} = 2\left[\cos\left(\frac{n}{6}-\pi\right) + j\sin\left(\frac{n}{6}-\pi\right)\right]$ có $N = \frac{k2\pi}{1/6} = k12\pi \notin \mathbb{Z}^{+}$ → $x(n)$ không tuần hoàn (*nhắc lại công thức Eucler* $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$).

e) $x(n) = 1$, tuần hoàn với chu kỳ $N = 1$ mẫu.

f) $x(n) = (-1)^{n}$, tuần hoàn với chu kỳ $N = 2$ mẫu.

+ Năng lượng: $E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$ **, nếu** $0 < E_x < \infty$ **hay năng lượng hữu hạn thì tín hiệu trên được gọi là tín hiệu năng lượng.**

Các công thức tính tổng: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q},\ |q| < 1$ *và* $\sum_{n=k_1}^{k_2} r^n = \frac{r^{k_1} - r^{k_2+1}}{1-r}.$

Ví dụ: Tìm năng lượng của $x(n) = 3^{-|n|}$

Áp dụng ta có: $x(n) = \begin{cases} 3^{-n} & ,\ n \ge 0 \\ 3^{n} & ,\ n < 0 \end{cases},\ \begin{cases} n \ge 0 \Leftrightarrow n \in [0; +\infty) \\ n < 0 \Leftrightarrow n \in (-\infty; 0) \ \ hay\ \ n \in (-\infty; -1] \end{cases}$

$$\Rightarrow E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (3^n)^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} (3^{-n})^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} (3^{-n})^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} (3^{-n})^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (3^{-n})^2 - \left(3^{-0}\right)^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} (3^{-n})^2$$

$$= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n - 1 = 2.\frac{1}{1-\frac{1}{9}} - 1 = \frac{5}{4}\ (dvnl)$$

+ Công suất:

- **Công suất trong khoảng thời gian hữu hạn từ** $n = N \rightarrow n = M$ **.**

$$\Rightarrow P_x = \frac{1}{M - N + 1}\sum_{n=N}^{M}|x(n)|^2$$ **: năng lượng trung bình.**

- **Công suất của tín hiệu không tuần hoàn:**

$$\Rightarrow P_x = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x(n)|^2$$

- **Công suất của tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ N mẫu:** $x(n)$ được gọi là tuần hoàn với chu kỳ N mẫu nếu: $\exists N_{\min} \mid x(n) = x(n+mN),\ m \in \mathbb{Z}.$

$$\Rightarrow P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2$$

b) $x(n)=3\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)$, tuần hoàn với chu kỳ $N=BCNN\{4,\ 6\}=12$ mẫu.

$$\Rightarrow P_x=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2=\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{3}\left[3\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right]^2=\frac{13}{2}$$

f) $x(n)=(-1)^n$, tuần hoàn với chu kỳ $N=2$ mẫu.

$$\Rightarrow P_x=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{1}\left|(-1)^n\right|^2=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{1}1=\frac{1}{2}(1+1)=1$$

e) $x(n)=1$, tuần hoàn với chu kỳ $N=1$ mẫu.

$$\Rightarrow P_x=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2=\sum_{n=0}^{0}1^2=1$$

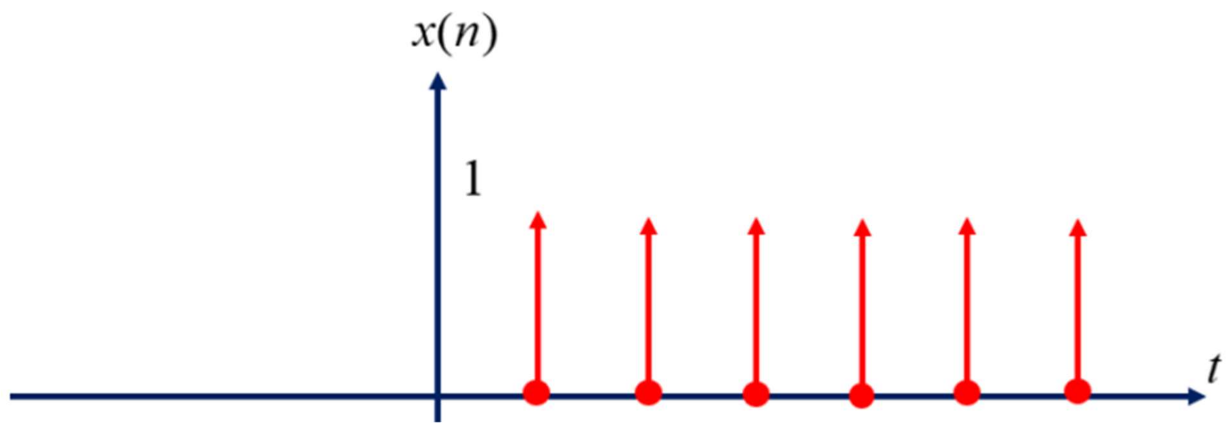
b) $x(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$

Nhận thấy, tín hiệu đã cho là tín hiệu không tuần hoàn.

$$\Rightarrow P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} 1^2$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{2N+1} = \frac{1}{2}$$



+ Phép tịnh tiến (*Timer Shifting*):

$$x(n)_{n_0>0} \Rightarrow \begin{cases} x(n-n_0)_{delay} & : DP\ x(n),\ DT \uparrow \\ x(n+n_0)_{advance} & : DT\ x(n),\ DP \uparrow \end{cases}$$

+ Phép gấp / đảo thời gian *(Folding/ Time Reversal)*: $x(n) \to x(-n)$

+ Phép co giãn/ tỉ lệ *(Scaling)*:

- Biên độ: $x(n) \to Ax(n) \Rightarrow \begin{cases} |A| > 1 \\ |A| < 1 \end{cases}$
- Thời gian: $x(n)_{N\in\mathbb{Z}^+} \Rightarrow \begin{cases} x(nN): \ compress \\ x(n/N): expand \end{cases}$

+ Phép tương quan (*Correlation*): Cho biết sự tương đồng giữa hai tín hiệu (*Similarity*), ở đây ta khảo sát cho tín hiệu năng lượng.

Giả sử $x(n)$, $y(n)$ là hai tín hiệu thực, khi đó:

$$\Rightarrow R_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(n-m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n+m)y(n)$$

Ví dụ: Cho $x(n) = \{1, -1, 1, -1\}$, $y_n = x(n-D) = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 1, -1\}$ → $D = 8$ (dự đoán). Hãy tìm $R_{xy}(m)$ và D?

3. Tích chập các tín hiệu

+ Định nghĩa: $z(n) = x(n) * y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)y(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(n-m)y(m)$

+ Tính chất:

- $x(n) * y(n) = y(n) * x(n)$
- $\left[x(n) * y(n)\right] * z(n) = x(n) * \left[y(n) * z(n)\right]$
- $x(n) * \left[y(n) + z(n)\right] = x(n) * y(n) + x(n) * z(n)$

- **Nếu $x(n)$ chứa M phần tử, $y(n)$ chứa N phần tử thì kết quả tích chập $z(n)$ sẽ có L phần tử. Liên hệ: $L = M + N - 1$**

- **Dạng 2: Dùng bảng chập *(Convolution Table)***

Ví dụ: Cho $x(n) = \{-1, 0, \underset{\uparrow}{1}, -2\}$, $y(n) = \{\underset{\uparrow}{-1}, 0, 1\}$, tìm $z(n) = x(n) * y(n)$.

	-1	0	1	-2
-1	1	0	-1	2
0	0	0	0	0
1	-1	0	1	-2

$$\Rightarrow z(n) = \{1, 0, \underset{\uparrow}{-2}, 2, 1, -2\}$$

Xác định dấu mũi tên: *Tín hiệu x(n) với vị trí mũi tên là A, tín hiệu y(n) với vị trí mũi tên là B thì tín hiệu z(n) có mũi tên ở vị trí A+B-1.*

Ví dụ: Cho $x(n)=\{-1,\,0,\,-1,\,\underset{\uparrow}{1},\,1,\,-2,\,0,\,0,\,-1,\,-2\}$, $y(n)=\{-1,0,\underset{\uparrow}{1}\}$, tìm $z(n)=x(n)*y(n)$

Ta có: M=10, N=3 → L=12.

Chia chuỗi $x(n)$ thành các chuỗi con với chiều dài M'=4 *(chia làm 3, bổ sung thêm 0 cho đủ)*.

	-1	0	-1	1	1	-2	0	0	-1	-2	0	0
-1	1	0	1	-1	-1	2	0	0	1	2	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-1	0	-1	1	1	-2	0	0	-1	-2	0	0

Ta có số mẫu bị chồng lắp: N-1=3-1=2 → 2 mẫu cuối của chuỗi thứ i sẽ được chồng lắp bởi 2 mẫu đầu của chuỗi thứ i+1.

Ta có số mẫu bị chồng lắp: N-1=3-1=2 → 2 mẫu cuối của chuỗi thứ i sẽ được chồng lắp bởi 2 mẫu đầu của chuỗi thứ i+1.

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
y_1 = & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & & & & & & & & \\
y_2 = & & & & & -1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & & & & \\
y_3 = & & & & & & & & & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 & 0
\end{array}$$

$$\Rightarrow z(n) = \{1,\ 0,\ 0,\ -1,\ -2,\ \underset{\uparrow}{3},\ 1,\ -2,\ 1,\ 2,\ -1,\ -2\}$$

2.1 A discrete-time signal $x(n)$ is defined as

$$x(n) = \begin{cases} 1 + \frac{n}{3}, & -3 \le n \le -1 \\ 1, & 0 \le n \le 3 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

(a) Determine its values and sketch the signal $x(n)$.

+ Giá trị dưới dạng chuỗi: $x(n) = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \underset{\uparrow}{1}, 1, 1, 1\right\}$

e) Ta có thể viết lại tín hiệu trên thành:

$$x(n) = \frac{1}{3}\delta(n+2) + \frac{2}{3}\delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3)$$

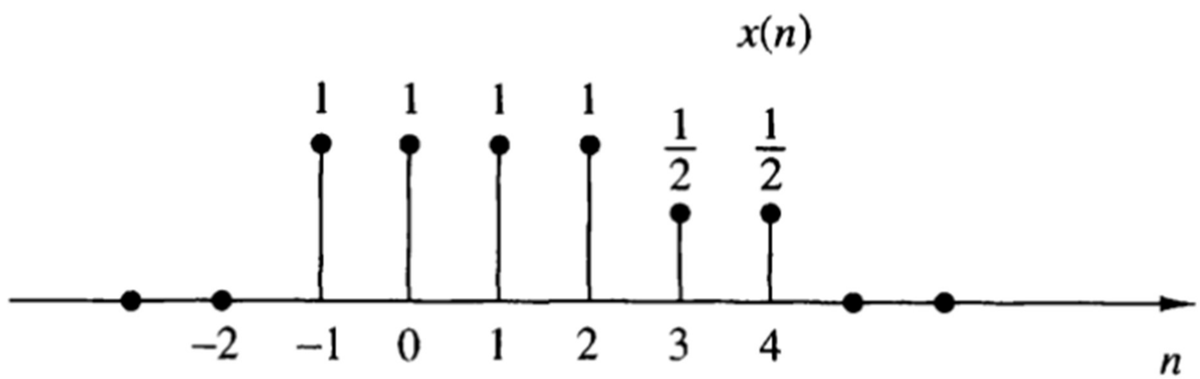
I

Discrete signals

4. Vẽ các tín hiệu rời rạc

2.2 A discrete-time signal $x(n)$ is shown in Fig. P2.2. Sketch and label carefully each of the following signals.

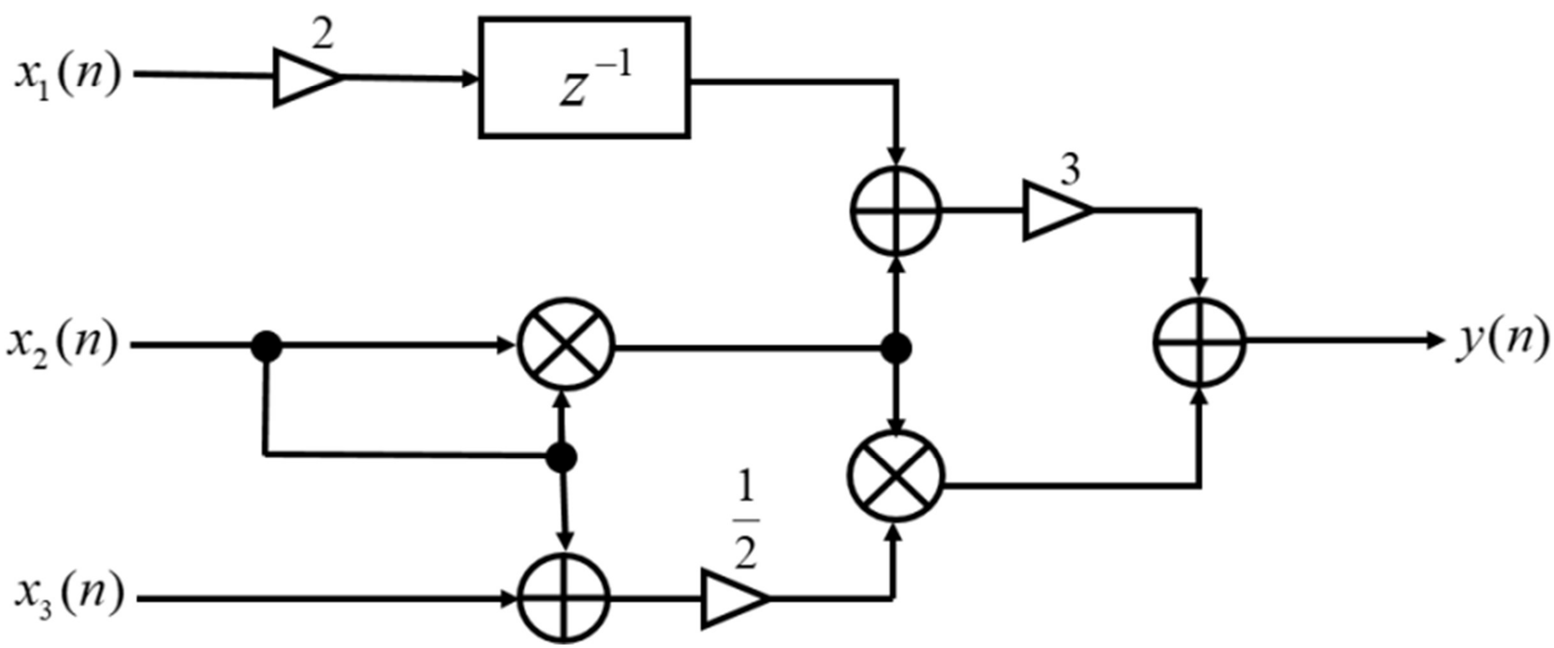
Figure P2.2



(a) $x(n-2)$ **(b)** $x(4-n)$ **(c)** $x(n+2)$ **(d)** $x(n)u(2-n)$ **(e)** $x(n-1)\delta(n-3)$ **(f)** $x(n^2)$ **(g)** even part of $x(n)$ **(h)** odd part of $x(n)$

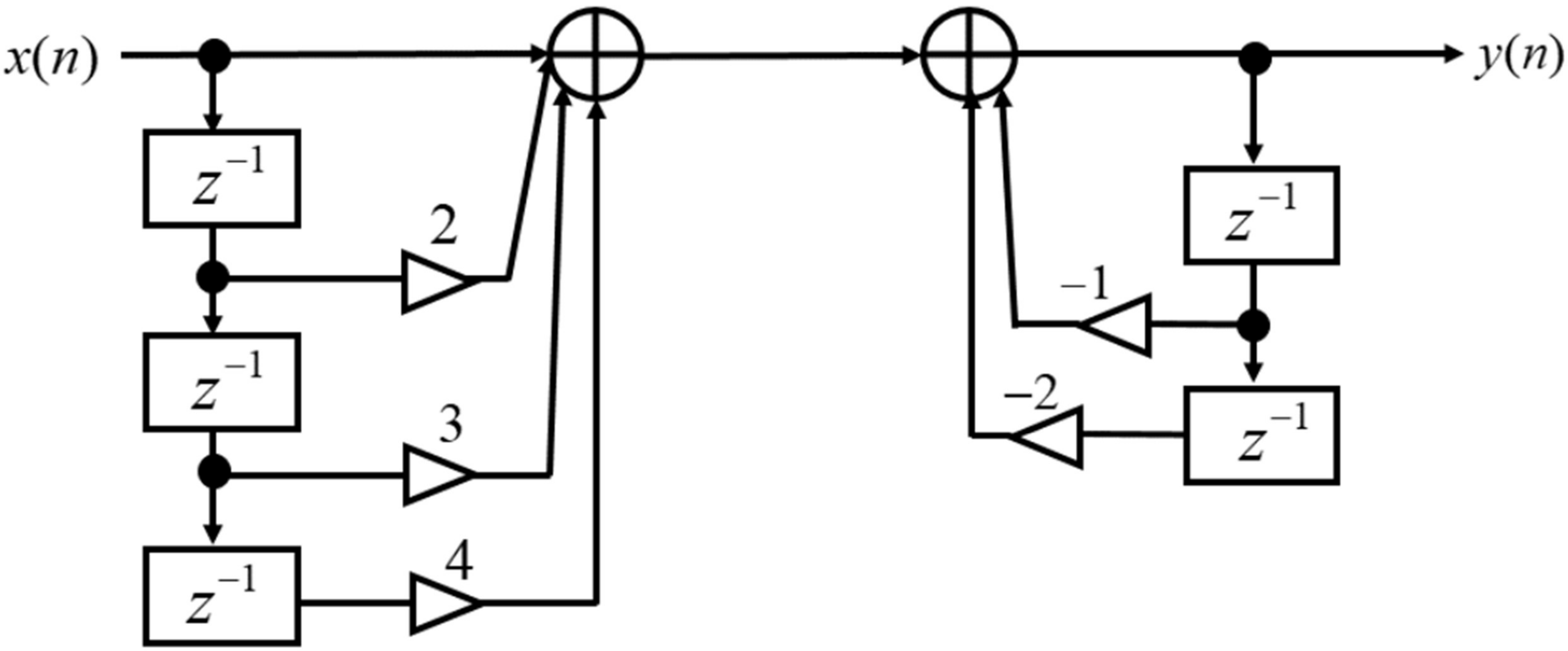
MÔ TẢ TRỰC TIẾP LOẠI 1

Ví dụ: Viết quan hệ vào ra của hệ thống có sơ đồ khối như sau:



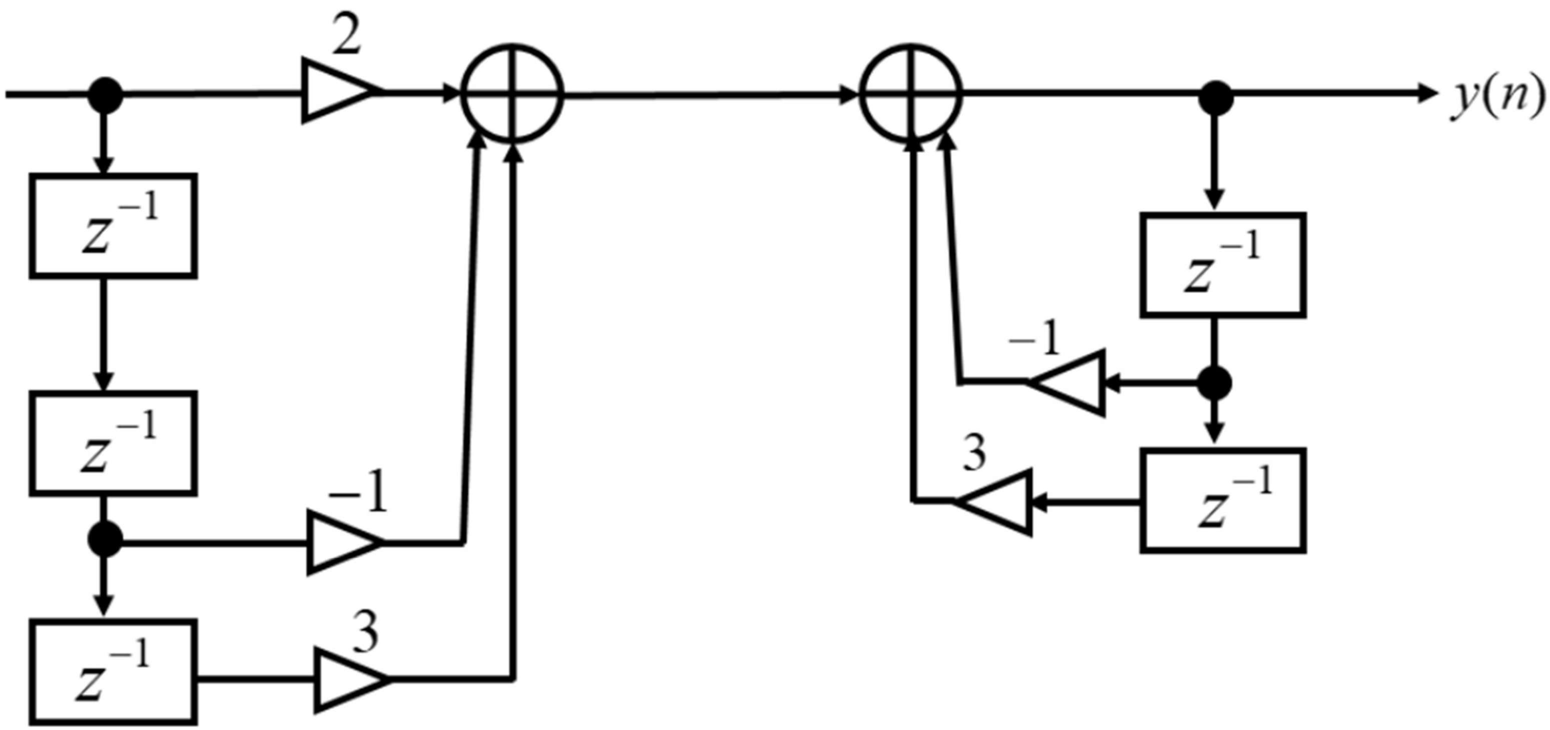
Ví dụ: Vẽ sơ đồ khối của hệ thống có quan hệ vào ra như sau:

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + 3x(n-2) + 4x(n-3) - y(n-1) - 2y(n-2)$$



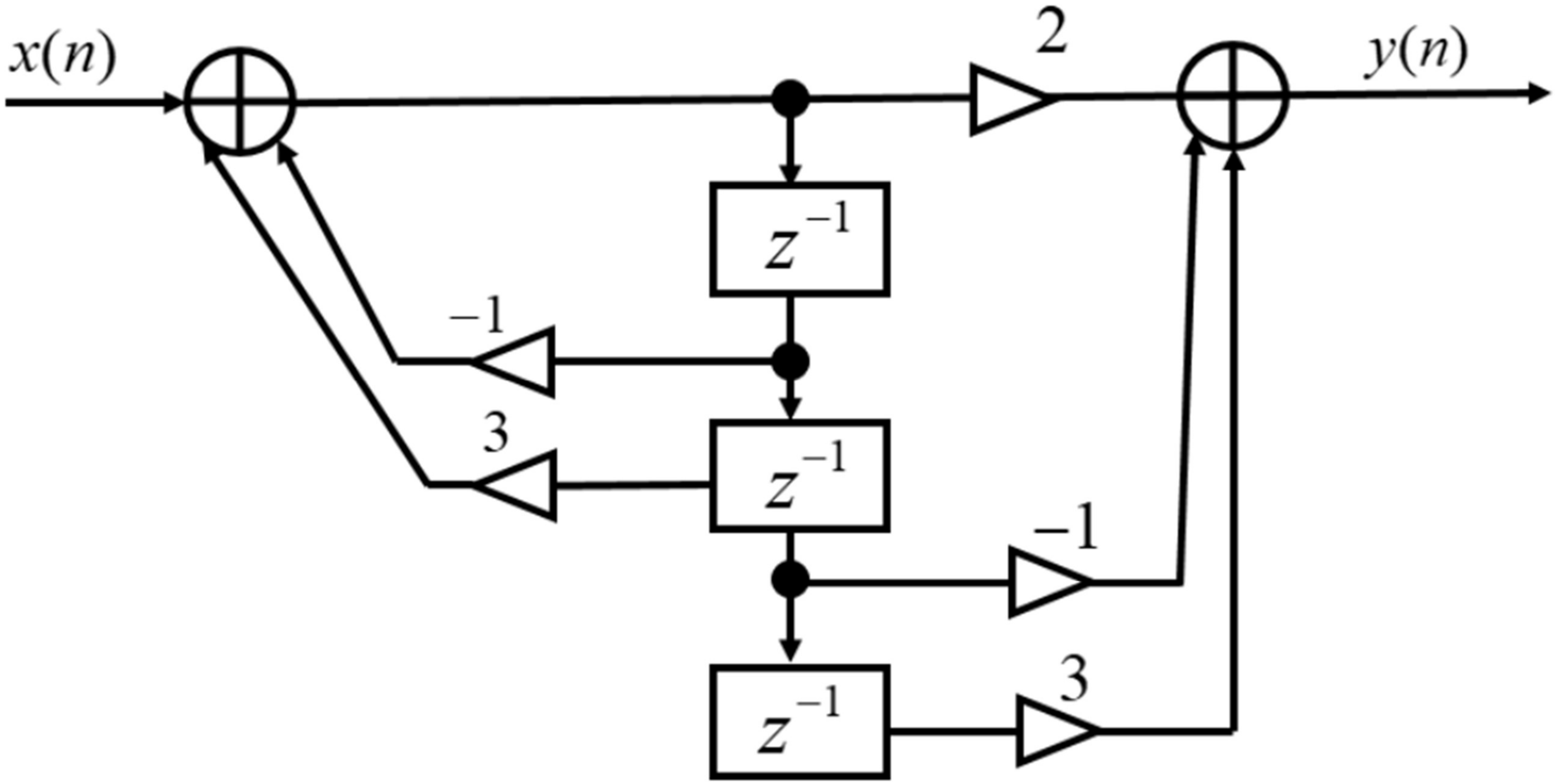
Ví dụ: Vẽ dạng mô tả trực tiếp loại 1:

$$[H]:\ y(n) = 2x(n) - x(n-2) + 3x(n-3) - y(n-1) + 3y(n-2)$$

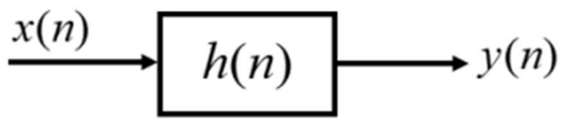


MÔ TẢ TRỰC TIẾP LOẠI 2

$$[H]:\ y(n) = 2x(n) - x(n-2) + 3x(n-3) - y(n-1) + 3y(n-2)$$

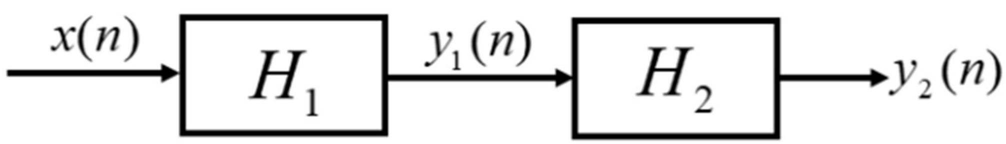


- **Dạng 3: Đáp ứng xung (*Impulse Response*)**

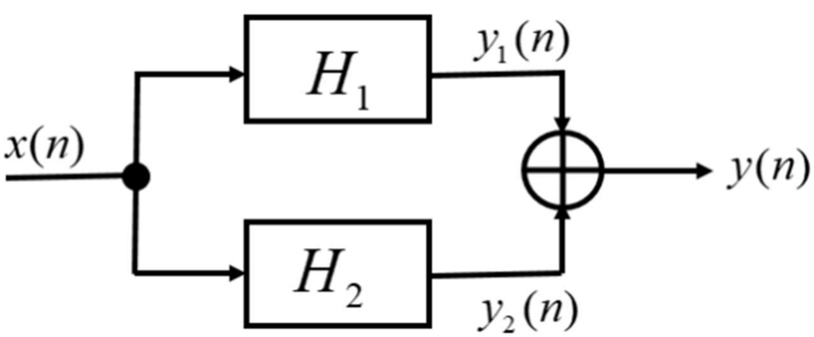


$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

Với $h(n)$ là đáp ứng xung của hệ thống, mô tả đặc điểm của hệ thống rời rạc trên miền thời gian.



$$\Rightarrow h(x) = h_1(n) * h_2(n)$$



$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \\ &= x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] \\ &= x(n) * h(n) \Rightarrow h(n) = h_1(n) + h_2(n) \end{aligned}$$

Tìm đáp ứng xung từ PTSP KHT

3.2 Determine the causal impulse response $h(n)$ for $n \geq 0$ of the LTI systems described by the following I/O difference equations:

a. $y(n) = 3x(n) - 2x(n-1) + 4x(n-3)$

a) Thay $x(n) = \delta(n) \Rightarrow y(n) = h(n)$ ***ta được:***

$$h(n) = 3\delta(n) - 2\delta(n-1) + 4\delta(n-3) = \{3, -2, 0, 4\}$$

Tìm đáp ứng xung từ PTSP CHT

Ví dụ: Tìm $h(n)$ của một hệ thống được cho bởi PTSP sau:

$$[H]:\ y(n) = x(n) + 2x(n-2) - \frac{1}{2}y(n-1),\ \text{cho}\ h(n) = 0,\ \forall n < 0$$

Giải: Ta có $h(n) = y(n)\,|_{x(n)=\delta(n)} = \delta(n) + 2\delta(n-2) - \frac{1}{2}h(n-1)$

Tìm đáp ứng xung từ PTSP CHT

$$+\ n=0: h(0)=\delta(0)+2\delta(-2)-\frac{1}{2}h(-1)=1$$

$$+\ n=1: h(1)=\delta(1)+2\delta(-1)-\frac{1}{2}h(0)=-\frac{1}{2}.1=-\frac{1}{2}$$

$$+\ n=2: h(2)=\delta(2)+2\delta(0)-\frac{1}{2}h(1)=2-\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$$

$$+\ n=3: h(3)=\delta(3)+2\delta(1)-\frac{1}{2}h(2)=-\frac{1}{2}.\frac{5}{4}$$

$$+\ n=4: h(4)=\delta(4)+2\delta(2)-\frac{1}{2}h(3)=-\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right).\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow h(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ -\frac{1}{2}, & n=1\\ 5\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}, & n\geq 2\\ 0, & n<0\end{cases}$$

3.3 Determine the causal impulse response $h(n)$ for $n \geq 0$ of the LTI systems described by the following I/O difference equations: $y(n) = 0.64y(n-2) + x(n)$

c) Thay $x(n) = \delta(n) \Rightarrow y(n) = h(n)$ ***ta được:***

$$h(n) = 0.64h(n-2) + \delta(n)$$

- $n = 0 \Rightarrow h(0) = 0.64h(-2) + \delta(0) = 1$
- $n = 1 \Rightarrow h(1) = 0.64h(-1) + \delta(1) = 0$
- $n = 2 \Rightarrow h(2) = 0.64h(0) + \delta(2) = 0.64^1$
- $n = 3 \Rightarrow h(3) = 0.64h(1) + \delta(3) = 0$
- $n = 4 \Rightarrow h(4) = 0.64h(2) + \delta 4 = 0.64^2$
- $n = 5 \Rightarrow h(5) = 0.64h(3) + \delta(5) = 0$
- $n = 6 \Rightarrow h(6) = 0.64h(4) + \delta(6) = 0.64^3$

Tìm PTSP từ đáp ứng xung **Dạng:** $h(n) = f(n)u(n)$

3.4 Determine the I/O difference equations relating $x(n)$ and $y(n)$ for the LTI systems having the following impulse responses:

a. $h(n) = (0.9)^n u(n)$

a) Ta có:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + h(2)x(n-2) + \ldots$$

$$= x(n) + 0.9x(n-1) + 0.9^2 x(n-2) + 0.9^3 x(n-3) + \ldots$$

$$= x(n) + 0.9\left[x(n-1) + 0.9x(n-2) + 0.9^2 x(n-3)\right] + \ldots$$

$$= x(n) + 0.9\, y(n-1)$$

Tìm PTSP từ đáp ứng xung

Dạng: $h(n) = a\delta(n) + f(n)u(n-1)$

3.5 A causal IIR filter has impulse response $h(n) = 4\delta(n) + 3(0.5)^{n-1}u(n-1)$. Working with the convolutional equation $y(n) = \sum_m h(m)x(n-m)$, derive the *difference equation* satisfied by $y(n)$.

3.6 A causal IIR filter has impulse response:

$$h(n) = \begin{cases} 5, & \text{if } n = 0 \\ 6(0.8)^{n-1}, & \text{if } n \geq 1 \end{cases}$$

Working with the convolutional filtering equation, derive the *difference equation* satisfied by $y(n)$.

Tìm ĐUNR từ PTSP

4.4.1 Tín hiệu vào $x(n)=[0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 0]$**, tìm tín hiệu ra:**

a) $y(n)=x(n)-2x(n-1)$

$$x(n)=[\underset{\uparrow}{0},\ 1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 0]$$

$$x(n-1)=[0,\ 0,\ 1,2,3,2,0]\ \Rightarrow 2x(n-1)=[\underset{\uparrow}{0},\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 4,\ 0]$$

$$\Rightarrow y(n)=[\underset{\uparrow}{0},\ 1,\ 0,\ -1,\ -4,\ -4,\ 0]$$

Tìm ĐUNR từ PTSP

4.4.1 Tín hiệu vào $x(n) = [0, 1, 2, 3, 2, 0]$**, tìm tín hiệu ra:**

b) $y(n) = x^2(n) - x(n)$

$$\Rightarrow x^2(n) = \underset{\uparrow}{[0}, 1, 4, 9, 4, 0]$$

$$x(n) = \underset{\uparrow}{[0}, 1, 2, 3, 2, 0]$$

$c)$ $y(n) = x(n^2) - x^2(n)$

Tìm ĐUNR từ PTSP

4.4.2 Tín hiệu vào:

$$x_1(n) = u(n)$$

$$x_2(n) = |n|, \ -3 \le n \le 3$$

$$x_3(n) = 3\delta(n) - 5\delta(n-3)$$

Tìm tín hiệu ra:

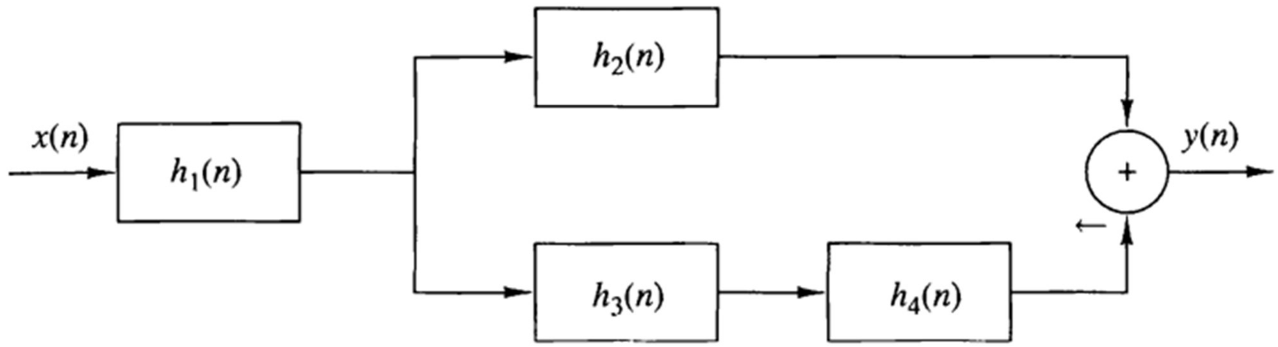
a) $y(n) = \frac{1}{3}\left[x_1(n) + x_2(n) + x_3(n)\right]$

b) $y(n) = 2x_1(n) - 3x_2(n-1) + 4x_3(n-2)$

c) $y(n) = \max\{x_1(n) - 2x_2(n) + x_3(n)\} = \max\{h(n)\}$

Tìm ĐUNR từ SĐK

2.35 Consider the interconnection of LTI systems as shown in Fig. P2.35.



(a) Express the overall impulse response in terms of $h_1(n)$, $h_2(n)$, $h_3(n)$, and $h_4(n)$.

$$a)\ h(n) = \left[h_2 - h_3 * h_4\right] * h_1$$

(b) Determine $h(n)$ when

$$h_1(n) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$$

$$h_2(n) = h_3(n) = (n+1)u(n)$$

$$h_4(n) = \delta(n-2)$$

$$a)\ h(n) = \left[h_2 - h_3 * h_4\right] * h_1$$

$$b)\quad h_3 * h_4 = (n+1)u(n) * \delta(n-2) = (n-1)u(n-2)$$

$$\Rightarrow h_2 - h_3 * h_4 = (n+1)u(n) - (n-1)u(n-2)$$

$$= (n+1)\left[\delta(n) + \delta(n-1) + u(n-2)\right] - (n-1)u(n-2)$$

$$= \delta(n) + 2\delta(n-1) + (n+1)u(n-2) - (n-1)u(n-2)$$

$$= \delta(n) + 2\delta(n-1) + 2u(n-2)$$

$$= 2\delta(n) + 2\delta(n-1) + 2u(n-2) - \delta(n)$$

$$= 2u(n) - \delta(n)$$

(b) Determine $h(n)$ when

$$h_1(n) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$$

$$h_2(n) = h_3(n) = (n+1)u(n)$$

$$h_4(n) = \delta(n-2)$$

$$a)\ h(n) = [h_2 - h_3 * h_4] * h_1$$

$$b)\ \Rightarrow h(n) = h_1 * [2u(n) - \delta(n)]$$

$$= \left[\frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{4}\delta(n-1) + \frac{1}{2}\delta(n-2)\right] * [2u(n) - \delta(n)]$$

$$= \left[\frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{4}\delta(n-1) + \frac{1}{2}\delta(n-2)\right] * 2u(n) - \left[\frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{4}\delta(n-1) + \frac{1}{2}\delta(n-2)\right] * \delta(n)$$

$$= u(n) + \frac{1}{2}u(n-1) + u(n-2) - \frac{1}{2}\delta(n) - \frac{1}{4}\delta(n-1) - \frac{1}{2}\delta(n-2)$$

$$= \delta(n) + \delta(n-1) + u(n-2) + \frac{1}{2}[\delta(n-1) + u(n-2)] + u(n-2) - \frac{1}{2}\delta(n) - \frac{1}{4}\delta(n-1) - \frac{1}{2}\delta(n-2)$$

$$= \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{5}{4}\delta(n-1) - \frac{1}{2}\delta(n-2) + \frac{5}{2}u(n-2)$$

(c) Determine the response of the system in part (b) if

$$x(n) = \delta(n+2) + 3\delta(n-1) - 4\delta(n-3)$$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \left[\delta(n+2) + 3\delta(n-1) - 4\delta(n-3)\right] * \left[\frac{1}{2}\delta(n) + \frac{5}{4}\delta(n-1) - \frac{1}{2}\delta(n-2) + \frac{5}{2}u(n-2)\right]$$

4. Phân loại hệ thống

- **Hệ thống tĩnh** (static – không nhớ - memoryless)/ **Hệ thống động** (Dynamic – có nhớ - memory).

- **Hệ thống tuyến tính *(Linear)*/ Hệ thống phi tuyến *(Non – Linear):***

+ Hệ thống được gọi là tuyến tính nếu thỏa mãn tính xếp chồng (*Superposition*).

+ [H] thỏa mãn tính xếp chồng nếu đáp ứng của nhiều nguồn kích thích độc lập bằng tổng các đáp ứng do từng nguồn kích thích độc lập tác động lên nó.

Nếu $x_1(n) \rightarrow y_1(n),\ x_2(n) = y_2(n)$ thì $x(n) = ax_1(n) + bx_2(b)$ → Xếp chồng tuyến tính từ 2 kích thích $x_1(n), x_2(n)$. Nếu $y(n) = ay_1(n) + by_2(n)$ thì hệ thống đã cho tuyến tính và ngược lại.

➢ **Hệ thống bất biến thời gian (*Time – Invariant*)/ Hệ thống thay đổi thời gian (*Time – Varying*):**

+ Hệ thống bất biến: Mối quan hệ giữa ngõ vào và ngõ ra là như nhau ở mọi thời điểm.

Nếu $x(n) \rightarrow y(n)$ thì $\Rightarrow x(n-n_0) \rightarrow y(n-n_0)$

➢ **Hệ thống tuyến tính bất biến LTI.**

+ Hệ thống LTI thỏa mãn hệ thống tuyến tính và hệ thống bất biến.

Ví dụ: $[H]: y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k\, x(n-k)$ là một hệ thống bất biến và là hệ thống tuyến tính→ Hệ thống LTI.

- **Hệ thống nhân quả *(causal)*, phản nhân quả *(anti - causal)* và không nhân quả *(non – causal)*.**

+ Hệ thống nhân quả: Nếu $x(n)=0 \ \forall n<n_0$ thì $y(n)=0 \ \forall n<n_0$.

+ Hệ thống phản nhân quả: Chỉ phụ thuộc vào tương lai, ngược lại với hệ thống nhân quả.

+ Hệ thống không nhân quả: Vừa phụ thuộc cả tương lai, quá khứ và hiện tại.

- Phát biểu theo đáp ứng xung:
  - Nhân quả: $h(n)=0 \quad \forall n<0$
  - Phản nhân quả: $h(n)=0 \quad \forall n\geq 0$
  - Không nhân quả: $h(n)$ tồn tại hai phía.

II

Discrete systems

4. Phân loại hệ thống

- **Hệ thống ổn định BiBo *(Bounded Input Bounded Output):***

+ Hệ thống ổn định theo BiBo nếu $|x(n)| \le m_x < \infty \quad \forall x$ thì $|y(n)| \le m_y < \infty$

Ví dụ: $[H]: y(n) = \cos[x(n)] \Rightarrow |y(n)| \le |\cos[x(n)]| \le 1$ → Hệ thống ổn định theo dạng BiBo.

- **Hệ thống ổn định (stable)/ Hệ thống không ổn định (unstable) theo đáp ứng xung:**

+ Hệ thống ổn định nếu $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$ (tổng module hội tụ thì ổn định, ngược lại phân kì).

- **Hệ thống có đáp ứng xung hữu hạn FIR (*Finite Impulse Response*)/ Hệ thống có đáp ứng xung vô hạn IIR (*Infinite Impulse Response*):**

+ Hệ thống FIR: đáp ứng xung có chiều dài hữu hạn.

+ Hệ thống IIR: đáp ứng xung có chiều dài vô hạn.

➢ **Hệ thống hồi tiếp (*feedback*)/ Hệ thống không hồi tiếp *(non – feedback)*:**

\+ Hồi tiếp: Sử dụng tín hiệu ngõ ra hay một phần tín hiệu ngõ ra đưa về ngõ vào nhằm đạt được một số chỉ tiêu kỹ thuật nào đó.

Ví dụ: $y(n) = x(n) - \frac{1}{2}y(n-1)$ là một hệ thống có hồi tiếp.

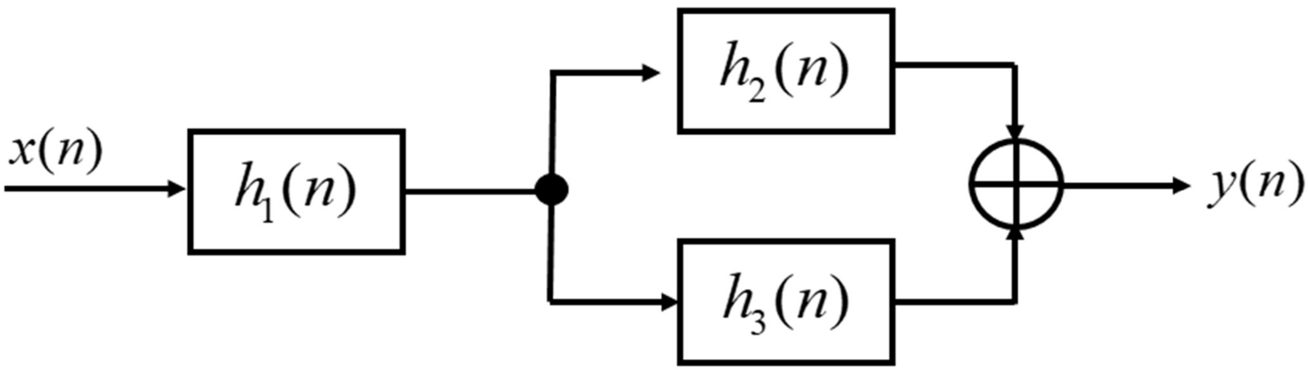
➢ **Hệ thống đệ quy *(Recursion)*/ Hệ thống không đệ quy (*Non - Recurson*):**

Ví dụ: $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{N} x(k) = x(n) + \sum_{k=-\infty}^{N-1} x(k) = x(n) + y(n-1)$ → **hệ thống đệ quy.**

Thông thường hệ thống đệ quy thường là hệ thống có hồi tiếp và có đáp ứng xung vô hạn.

III **Reviews**

1. Tìm ngõ ra y(n) của hệ thống rời rạc có sơ đồ khối như sau:



$$x(n) = \delta(n)$$

$$h_1(n) = \delta(n) - 2\delta(n-2) + 3\delta(n-4)$$

$$h_2(n) = u(n) - u(n-4)$$

$$h_3(n) = h_2(-n-1)$$

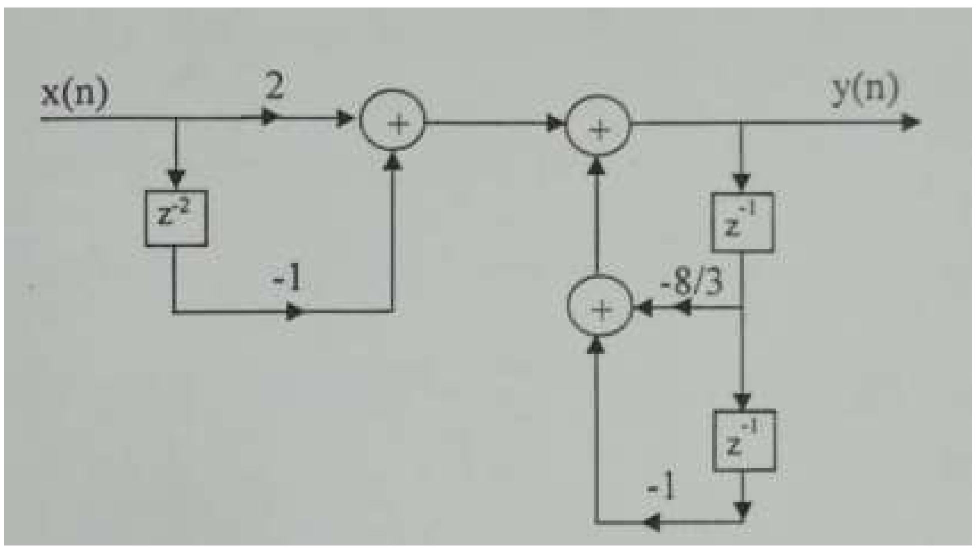
III **Reviews**

2. Một hệ thống nhân quả được biểu diễn bằng PTSP

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) - y(n-1) - y(n-2) - y(n-3)$$

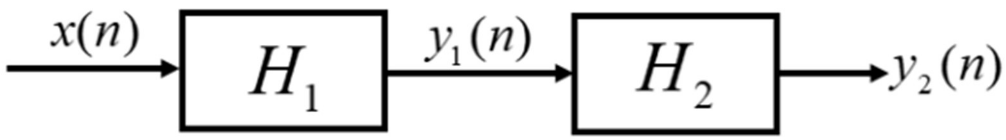
Vẽ sơ đồ khối của hệ thống theo dạng trực tiếp loại 1 và loại 2.

3. Biểu diễn hệ thống sau sang dạng chính tắc loại 2



III Reviews

4. Cho hệ thống rời rạc có sơ đồ khối như sau:



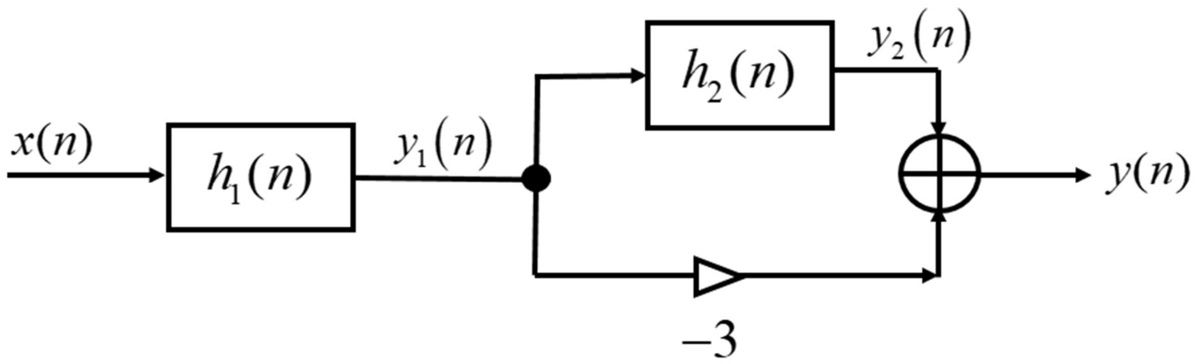
$$h_1(n)=\frac{1}{3}\delta(n)+\frac{1}{3}\delta(n-1)+\frac{1}{3}\delta(n-2)$$

$$h_2(n)=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right\}$$

a) Tìm đáp ứng xung tương đương của hệ thống

b) Tìm ngõ ra hệ thống khi ngõ vào là $x(n)=(3-|n|)\left[u(n+2)-u(n-4)\right]$

5. Cho hệ thống rời rạc có sơ đồ khối như sau:



Với đáp ứng xung của hệ thống 1: $h_1(n) = \delta(n) - 2\delta(n-3)$

Và $h_2(n)$ là đáp ứng xung của một hệ thống FIR có quan hệ vào ra: $y_2(n) = y_1(n) - 2y_1(n-1) + 3y_1(n-3)$

a) Chứng minh rằng, hệ thống 1 là một hệ thống FIR, ổn định và nhân quả.

b) Tìm đáp ứng xung tương đương của hệ thống

c) Tìm đáp ứng ngõ ra khi ngõ vào $x(n) = u(n) - u(n-4)$ bằng hai cách: bảng chập và LTI.