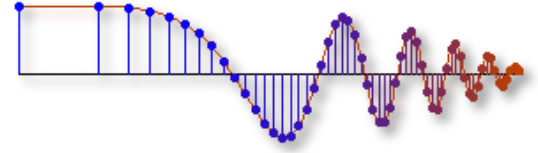


CHƯƠNG 2: TÍN HIỆU RỜI RẠC VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRÊN MIỀN THỜI GIAN



I. VÍ DỤ TÍNH CÔNG SUẤT

a) $x(n) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$, tuần hoàn với chu kỳ $N = 4$ mẫu.

$$\Rightarrow P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 4\cos^2\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right) + \dots + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot 3\right) = 2$$

(Bấm sigma tổng trên máy tính cho nhanh).

b) $x(n) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)$, tuần hoàn với chu kỳ $N = \text{BCNN}\{4, 6\} = 12$ mẫu.

$$\Rightarrow P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{12} \sum_{n=0}^{11} \left[3\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) \right]^2 = \frac{13}{2}$$

c) $x(n) = \sin\sqrt{3}n$ là một tín hiệu không tuần hoàn do $N = \frac{k2\pi}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{Z}^+$

$$\Rightarrow P_x = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \sin^2(\sqrt{3}n) \text{ không tồn tại.}$$

d) $x(n) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}n\right)$, tuần hoàn với chu kỳ $N = 12$ mẫu.

$$\Rightarrow P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{12} \sum_{n=0}^{11} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}n\right) \right]^2 = \frac{3}{2}$$

e) $x(n) = 1$, tuần hoàn với chu kỳ $N = 1$ mẫu.

$$\Rightarrow P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{n=0}^0 1^2 = 1$$

f) $x(n) = (-1)^n$, tuần hoàn với chu kỳ $N = 2$ mẫu.

$$\Rightarrow P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^1 |(-1)^n|^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^1 1 = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

g) $x(n) = \cos\left(\frac{11\pi n}{25}\right)$, tuần hoàn với chu kỳ $N = 50$ mẫu.

$$\Rightarrow P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{50} \sum_{n=0}^{49} \left[\cos\left(\frac{11\pi n}{25}\right) \right]^2 = \frac{1}{2}$$

II. BÀI TẬP GIÁO TRÌNH PROAKIS

1.1 Classify the following signals according to whether they are (1) one- or multi-dimensional; (2) single or multichannel, (3) continuous time or discrete time, and (4) analog or digital (in amplitude). Give a brief explanation.

- (a) Closing prices of utility stocks on the New York Stock Exchange.
- (b) A color movie.
- (c) Position of the steering wheel of a car in motion relative to car's reference frame.
- (d) Position of the steering wheel of a car in motion relative to ground reference frame.
- (e) Weight and height measurements of a child taken every month.

Giải:

a) Mức giá đóng cửa (giá chốt) của cổ phiếu hữu dụng trên sàn giao dịch chứng khoán New York → Giá cả được xem xét là một tín hiệu đơn chiều, đa kênh (do nhiều nguồn giá khác nhau góp vào) và là tín hiệu rời rạc theo thời gian (mức giá thay đổi rời rạc tại các thời điểm khác nhau), và được biểu thị dưới dạng một con số (tín hiệu số).

b) Một bộ phim màu → Tín hiệu đa chiều (tập hợp các hình ảnh được tạo thành từ các mảng hai chiều), đơn kênh (phát ra từ một màn hình), tín hiệu liên tục theo thời gian (hình ảnh mượt mà, chuyển động liên tục) và tín hiệu tương tự (tồn tại dưới dạng hình ảnh, âm thanh).

c) Vị trí của vô lăng ô tô, chuyển động so với hệ quy chiếu của ô tô → tín hiệu đơn chiều (vị trí có thể biểu diễn theo hàm một biến), đơn kênh (do tay người quay), là tín hiệu liên tục theo thời gian (vị trí ngẫu nhiên vô số giá trị) và tín hiệu tương tự (vô số giá trị vị trí).

d) Vị trí của vô lăng ô tô đang chuyển động so với hệ quy chiếu mặt đất → Tương tự câu c.

e) Đo cân nặng và chiều cao của trẻ được thực hiện hàng tháng → tín hiệu một chiều (cân nặng và chiều cao là một giá trị số trên trục số), đa kênh (gồm chiều cao + cân nặng), tín hiệu rời rạc theo thời gian (do thời gian kiểm tra là mỗi tháng nên mỗi tháng một giá trị rời rạc nhau) và tín hiệu số (giá trị rời rạc theo thời gian).

1.2 Determine which of the following sinusoids are periodic and compute their fundamental period.

(a) $\cos 0.01\pi n$ (b) $\cos\left(\pi \frac{30n}{105}\right)$ (c) $\cos 3\pi n$ (d) $\sin 3n$ (e) $\sin\left(\pi \frac{62n}{10}\right)$

Giải:

a) $x(n) = \cos(0.01\pi n)$, ta có: $N = \frac{k2\pi}{0.01\pi} = 200k = 200, 400, 600, \dots \rightarrow x(n)$ tuần hoàn với chu kỳ $N = 200$ mẫu.

b) $x(n) = \cos\left(\pi \frac{30n}{105}\right)$, ta có: $N = \frac{k2\pi}{\pi \frac{30}{105}} = 7k = 7, 14, 21, \dots \rightarrow x(n)$ tuần hoàn với chu kỳ $N = 7$

mẫu.

c) $x(n) = \cos(30\pi n)$, ta có: $N = \frac{k2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}k = 2, 4, 6, \dots \rightarrow x(n)$ tuần hoàn với chu kỳ $N = 2$ mẫu.

d) $x(n) = \sin(3n)$, ta có: $N = \frac{k2\pi}{3} \notin \mathbb{Z}^+ \rightarrow x(n)$ không tuần hoàn.

e) $x(n) = \sin\left(\pi \frac{62n}{10}\right)$, ta có: $N = \frac{k2\pi}{\frac{62\pi}{10}} = \frac{10}{31}k = 10, 20, 30, \dots \rightarrow x(n)$ tuần hoàn với chu kỳ $N = 10$ mẫu.

1.3 Determine whether or not each of the following signals is periodic. In case a signal is periodic, specify its fundamental period.

(a) $x_a(t) = 3 \cos(5t + \pi/6)$

(b) $x(n) = 3 \cos(5n + \pi/6)$

(c) $x(n) = 2 \exp[j(n/6 - \pi)]$

(d) $x(n) = \cos(n/8) \cos(\pi n/8)$

(e) $x(n) = \cos(\pi n/2) - \sin(\pi n/8) + 3 \cos(\pi n/4 + \pi/3)$

Giải:

a) Tín hiệu $x_a(t)$ là một tín hiệu liên tục với chu kỳ tuần hoàn $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{5}$.

b) Tín hiệu $x(n) = 3 \cos(5n + \pi/6)$ có $N = \frac{k2\pi}{5} \notin \mathbb{Z}^+ \rightarrow x(n)$ không tuần hoàn.

c) Tín hiệu $x(n) = 2e^{j\left(\frac{n}{6} - \pi\right)} = 2\left[\cos\left(\frac{n}{6} - \pi\right) + j\sin\left(\frac{n}{6} - \pi\right)\right]$ có $N = \frac{k2\pi}{1/6} = k12\pi \notin \mathbb{Z}^+ \rightarrow x(n)$

không tuần hoàn (nhắc lại công thức Euler $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$).

d) Tín hiệu $x(n) = \cos\left(\frac{n}{8}\right) \cos\left(\pi \frac{n}{8}\right) = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\pi \frac{n}{8} - \frac{n}{8}\right) + \cos\left(\pi \frac{n}{8} + \frac{n}{8}\right) \right]$

$= \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{1}{8}(\pi - 1)n\right) + \cos\left(\frac{1}{8}(\pi + 1)n\right) \right]$ có $N_1 = \frac{k2\pi}{\frac{1}{8}(\pi - 1)} \notin \mathbb{Z}^+, N_2 = \frac{k2\pi}{\frac{1}{8}(\pi + 1)} \notin \mathbb{Z}^+ \rightarrow x(n)$

không tuần hoàn (nhắc lại công thức $\cos(a + b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$).

e) Tín hiệu $x(n) = \cos\left(\pi \frac{n}{2}\right) - \sin\left(\pi \frac{n}{8}\right) + 3\cos\left(\pi \frac{n}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$ có

$$N_1 = \frac{k2\pi}{\pi/2} = 4k = 4, 8, 12, \dots N_2 = \frac{k2\pi}{\pi/8} = 16k = 16, 32, 48, \dots N_3 = \frac{k2\pi}{\pi/4} = 8k = 8, 16, 24, \dots \rightarrow x(n)$$

tuần hoàn với chu kỳ $N = \text{BCNN}\{4, 16, 8\} = 16$ mẫu.

1.4 (a) Show that the fundamental period N_p of the signals

$$s_k(n) = e^{j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

is given by $N_p = N/\text{GCD}(k, N)$, where GCD is the greatest common divisor of k and N .

(b) What is the fundamental period of this set for $N = 7$?

(c) What is it for $N = 16$?

Giải:

a) Xét tín hiệu $x(n) = e^{j2\pi kn/N} = \cos(2\pi kn/N) + j\sin(2\pi kn/N)$ có

$$\omega_0 = \frac{2\pi k}{N} \Rightarrow f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{k}{N}.$$

Giả sử

$$m = \text{GCD}\{k, N\} \Rightarrow \begin{cases} N = mN' \\ k = mk' \end{cases} \Rightarrow f' = \frac{k'}{N'} = f = \frac{k}{N} \Rightarrow \begin{cases} N' = N/m \\ k' = k/m \end{cases} \Rightarrow N' = N_p = N/\text{GCD}\{k, N\}$$

b) Với $N = 7$ ta có các trường hợp:

N	7	7	7	7	7	7	7	7
k	0	1	2	3	4	5	6	7
m	7	1	1	1	1	1	1	7
N_p	1	7	7	7	7	7	7	1

c) Với $N = 16$ ta có các trường hợp:

N	16	16	16	16	16	16
k	0	2, 6, 10, 14	4, 12	8	16	Còn lại
m	16	2	4	8	16	1
N_p	1	8	4	2	1	16