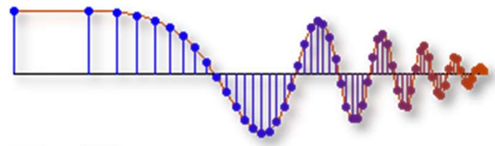


I. ÔN TẬP THẶNG DƯ

- **Nghiệm thực đơn:**

$$H\left(z^{-1}\right)=\frac{M\left(z^{-1}\right)}{k\left(1-z_0z^{-1}\right)\left(1-z_1z^{-1}\right)\left(1-z_2z^{-1}\right)}=\frac{A}{\left(1-z_0z^{-1}\right)}+\frac{B}{\left(1-z_1z^{-1}\right)}+\frac{C}{\left(1-z_2z^{-1}\right)}$$

Trong đó:

$$A=\lim_{z^{-1}\to\frac{1}{z_0}}\frac{M\left(z^{-1}\right)}{k\left(1-z_1z^{-1}\right)\left(1-z_2z^{-1}\right)},\ B=\lim_{z^{-1}\to\frac{1}{z_1}}\frac{M\left(z^{-1}\right)}{k\left(1-z_0z^{-1}\right)\left(1-z_2z^{-1}\right)},C=\lim_{z^{-1}\to\frac{1}{z_2}}\frac{M\left(z^{-1}\right)}{k\left(1-z_0z^{-1}\right)\left(1-z_1z^{-1}\right)}$$

- **Nghiệm kép:**

$$H\left(z^{-1}\right)=\frac{M\left(z^{-1}\right)}{k\left(1-z_0z^{-1}\right)\left(1-z_1z^{-1}\right)^2}=\frac{A}{\left(1-z_0z^{-1}\right)}+\frac{B}{\left(1-z_1z^{-1}\right)^2}+\frac{C}{\left(1-z_1z^{-1}\right)}$$

Trong đó:

$$A=\lim_{z^{-1}\to\frac{1}{z_0}}\frac{M\left(z^{-1}\right)}{k\left(1-z_1z^{-1}\right)^2},\ B=\lim_{z^{-1}\to\frac{1}{z_1}}\frac{M\left(z^{-1}\right)}{k\left(1-z_0z^{-1}\right)}$$

Tìm C bằng cách giải phương trình đồng nhất hai vế, với giá trị $z^{-1}=m_0$ tùy ý.

- Nghiệm phức:

$$H\left(z^{-1}\right)=\frac{M\left(z^{-1}\right)}{k\left(1-z_0z^{-1}\right)\left(1+z_1z^{-1}+z_2z^{-2}\right)}=\frac{A}{\left(1-z_0z^{-1}\right)}+\frac{Bz^{-1}+C}{\left(1+z_1z^{-1}+z_2z^{-2}\right)}$$

Tìm A bởi $A=\lim_{z^{-1}\to\frac{1}{z_0}}\frac{M\left(z^{-1}\right)}{k\left(1+z_1z^{-1}+z_2z^{-2}\right)}$, tìm B và C bằng cách giải phương trình.

II. BÀI TẬP MINH HỌA

Bài 1: Chứng minh rằng các hệ thống sau có thể được ghép song song từ các hệ thống con, vẽ sơ đồ thực thi hệ thống trên.

a) $H(z)=\dfrac{1+2z^{-1}}{4-10z^{-1}+8z^{-2}-2z^{-3}}=\dfrac{1+2z^{-1}}{4\left(1-\dfrac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)^{2}}=\dfrac{A}{1-\dfrac{1}{2}z^{-1}}+\dfrac{B}{\left(1-z^{-1}\right)^{2}}+\dfrac{C}{1-z^{-1}}$

b) $H(z)=\dfrac{1+2z^{-1}}{6-11z^{-1}+6z^{-2}-z^{-3}}=\dfrac{1+2z^{-1}}{6\left(1-z^{-1}\right)\left(1-\dfrac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}z^{-1}\right)}$

c) $H(z)=\dfrac{2-z^{-2}}{1-z^{-3}}=\dfrac{2-z^{-2}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}+z^{-2}\right)}=\dfrac{A}{1-z^{-1}}+\dfrac{Bz^{-1}+C}{1+z^{-1}+z^{-2}}$

d) $H(z)=\dfrac{1-z^{-2}}{\left(1+z^{-1}\right)^{2}}=\dfrac{\left(1-z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)}{\left(1+z^{-1}\right)^{2}}=\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}=-1+\dfrac{2}{1+z^{-1}}$

e) $H(z)=\dfrac{1+z^{-1}+z^{-2}}{\left(1-3z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)^{2}}$

f) $H(z)=\dfrac{1+z^{-1}}{\left(1-z^{-2}\right)\left(1-4z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}+5z^{-2}\right)}=\dfrac{1}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-4z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}+5z^{-2}\right)}$

g) $H(z)=\dfrac{1}{\left(1+2z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)^{2}\left(1+z^{-2}\right)}$

h) $H(z)=\dfrac{z^{-1}+2z^{-2}+4z^{-3}}{\left(1+z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}+2z^{-2}\right)}$

i) $H(z)=\dfrac{z^{-1}\left(1+z^{-1}\right)}{1-z^{-3}}=\dfrac{z^{-1}+z^{-2}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}+z^{-2}\right)}=\dfrac{A}{1-z^{-1}}+\dfrac{Bz^{-1}+C}{1+z^{-1}+z^{-2}}$

$$A=\lim_{z^{-1}\to 1}\frac{z^{-1}+z^{-2}}{1+z^{-1}+z^{-2}}=\frac{2}{3},\qquad \begin{cases} z^{-1}=2\Rightarrow -\dfrac{6}{7}=-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{7}B+\dfrac{1}{7}C \\ z^{-1}=0\Rightarrow 0=\dfrac{2}{3}+C \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} B=-\dfrac{1}{3} \\ C=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{2}{3}.\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{3}.\frac{z^{-1}}{1+z^{-1}+z^{-2}}-\frac{2}{3}.\frac{1}{1+z^{-1}+z^{-2}}=H_1(z)-\frac{1}{3}H_2(z)-\frac{2}{3}H_3(z)$$

+ $H_1(z)=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{1-z^{-1}}\Rightarrow h_1(n)=\dfrac{2}{3}u(n)$

+ $H_3(z)=\dfrac{1}{1+z^{-1}+z^{-2}}$

AD: $a^{n+1}\sin\left(\omega_0(n+1)\right)u(n)\longrightarrow\dfrac{a\sin\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$

+ Đồng nhất mẫu số ta có: $\begin{cases} a^2=1\Rightarrow a=1 \\ \cos\omega_0=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\omega_0=\dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{3}(n+1)\right)u(n)\longrightarrow\frac{\sqrt{3}/2}{1+z^{-1}+z^{-2}}\Rightarrow h_3(n)=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2\pi}{3}(n+1)\right)u(n)$$

+ $H_2(z)=\dfrac{z^{-1}}{1+z^{-1}+z^{-2}}\Rightarrow x_2(n)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}n\right)u(n)$

$$\Rightarrow h(n)=h_1(n)-\frac{1}{3}h_2(n)-\frac{2}{3}h_3(n)$$

Bài 2: Cho một hệ thống nhân quả có hàm truyền: $H\left(z\right)=\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{4}jz^{-1}\right)\left(1+\dfrac{1}{4}jz^{-1}\right)\left(1-0.2z^{-1}\right)}$

a) Tìm đáp ứng xung $h\left(n\right)$ của hệ thống trên.

b) Với $g\left(n\right)=h\left(n\right)*2h\left(-n\right)$, tìm hàm truyền $G\left(z\right)$ của hệ thống trên.

c) Vẽ sơ đồ khối dạng chính tắc 2 của hệ thống.

Giải:

a)

$$H\left(z\right)=\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{16}z^{-2}\right)\left(1-0.2z^{-1}\right)}=\frac{A}{1-0.2z^{-1}}+\frac{Bz^{-1}+C}{1+\dfrac{1}{16}z^{-2}}=\frac{16/41}{1-0.2z^{-1}}+\frac{5/41z^{-1}}{1+1/16z^{-2}}+\frac{25/41}{1+1/16z^{-2}}$$

$$H_1\left(z\right)=\frac{1}{1+\dfrac{1}{16}z^{-2}}$$

Áp dụng: $\Leftrightarrow a^{n+1}\sin\left(\omega_0\left(n+1\right)\right)u\left(n\right)\longrightarrow\dfrac{a\sin\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$

+ Đồng nhất mẫu số ta có: $\begin{cases}a^2=\dfrac{1}{16}\Rightarrow a=\dfrac{1}{4}\\ \cos\omega_0=0\Rightarrow\omega_0=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow h_1\left(n\right)=4.\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2}\left(n+1\right)u\left(n\right)$

$$\Rightarrow h\left(n\right)=\frac{16}{41}.\left(0.2\right)^n u\left(n\right)+\frac{20}{41}.\left(\frac{1}{4}\right)^n\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)u\left(n\right)+\frac{100}{41}.\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\sin\frac{\pi}{2}\left(n+1\right)u\left(n\right)$$

b) $g\left(n\right)=h\left(n\right)*2h\left(-n\right)\Rightarrow G\left(z\right)=2H\left(z\right)H\left(z^{-1}\right)=\dfrac{2}{\left(1+\dfrac{1}{16}z^{-2}\right)\left(1-0.2z^{-1}\right)\left(1+\dfrac{1}{16}z^{2}\right)\left(1-0.2z\right)}$

c) $G\left(z\right)=H_1\left(z\right)H_2\left(z\right)$

- $H_1\left(z\right)=\dfrac{Y_1\left(z\right)}{X\left(z\right)}=\dfrac{2}{\left(1+\dfrac{1}{16}z^{-1}\right)\left(1-0.2z^{-1}\right)}=\dfrac{2}{1-0.2z^{-1}+\dfrac{1}{16}z^{-2}-\dfrac{1}{80}z^{-3}}$

$$\Rightarrow Y_1\left(z\right)-0.2z^{-1}Y_1\left(z\right)+\frac{1}{16}z^{-2}Y_1\left(z\right)-\frac{1}{80}z^{-3}Y_1\left(z\right)=2X\left(z\right)$$

$$y_1\left(n\right)=2x\left(n\right)+0.2y_1\left(n-1\right)-\frac{1}{16}y_1\left(n-2\right)+\frac{1}{80}y_1\left(n-3\right)$$

- $H_2(z) = \dfrac{Y(z)}{Y_1(z)} = \dfrac{1}{\left(1 + \frac{1}{16} z^2\right)\left(1 - 0.2z\right)}$

$$y(n) = x(n) + 0.2y_1(n+1) - \frac{1}{16} y_1(n+2) + \frac{1}{80} y_1(n+3)$$

Bài 3: Cho hệ thống có phương trình sai phân: $y(n) = x(n) + 2x(n-1) + \frac{4}{5} y(n-1)$

a) Vẽ sơ đồ khối của hệ thống trên theo dạng chính tắc loại 1 và loại 2.

b) Tìm đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống

c) Tìm đáp ứng ngõ ra $y(n)$ khi ngõ vào $x(n) = (n+1)\left(\frac{2}{5}\right)^n u(n)$

Giải:

a) Tự vẽ

b) $Y(z) = X(z) + 2z^{-1}X(n) + \frac{4}{5} z^{-1} Y(z) \Rightarrow H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = \dfrac{1 + 2z^{-1}}{1 - \frac{4}{5} z^{-1}} = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{7/2}{1 - \frac{4}{5} z^{-1}}$

$$\Rightarrow h(n) = -\frac{5}{2}\delta(n) + \frac{7}{2}.\left(\frac{4}{5}\right)^n u(n)$$

c) $X(z) = \dfrac{1}{\left(1 - \frac{2}{5} z^{-1}\right)^2}$

$$\Rightarrow Y(z) = H(z).X(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{\left(1 - 0.8z^{-1}\right)\left(1 - 0.4z^{-1}\right)^2} = \frac{A}{1 - 0.8z^{-1}} + \frac{B}{\left(1 - 0.4z^{-1}\right)^2} + \frac{C}{1 - 0.4z^{-1}}$$

Bài 4: Cho $x(n)$ là tín hiệu ngõ vào của hai hệ thống rời rạc LTI có tên là H_1 và H_2 được ghép song song với nhau. Hàm truyền của hệ thống H_1 là $H_1(z)$. Hệ thống H_2 có tín hiệu ra là $y(n)$ và tín hiệu vào là $w(n)$.

$$H_1(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-3z^{-1}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$$, $[H_2]$: $y(n) = 2x(n) - 5x(n-1) - \frac{1}{4}y(n-1)$

a) Vẽ sơ đồ khối mô tả dạng chính tắc cho hệ thống rời rạc H_1

b) Hệ thống H_2 có ổn định và nhân quả không? Tại sao?

c) Tìm hàm truyền $H(z)$ của toàn hệ thống.

d) Vẽ giản đồ cực – zero của toàn hệ thống.

e) Tìm đáp ứng xung $h(n)$ không nhân quả của toàn hệ thống.

f) Vẽ sơ đồ khối toàn hệ thống theo dạng chính tắc.

Giải:

a) $$Y(z) - \frac{5}{6}z^{-1}Y(z) + \frac{1}{6}z^{-2}Y(z) = X(z) - 3z^{-1}X(z)$$

$$\Rightarrow y(n) = x(n) - 3x(n-1) + \frac{5}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2)$$

b) $H_2(z) = \dfrac{2-5z^{-1}}{1+0.25z^{-1}} = \dfrac{2z-5}{z+0.25}$

Xét điểm cực: $z_p = -0.25$, do $|z_p| = 0.25 < 1$ nên hệ thống đã cho nhân quả và ổn định đồng thời.

c) Do hệ thống ghép song song nên: $H(z) = H_1(z) + H_2(z) = \dfrac{1-3z^{-1}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}} + \dfrac{2-5z^{-1}}{1+0.25z^{-1}}$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{3-\frac{113}{12}z^{-1}+\frac{15}{4}z^{-2}-\frac{5}{6}z^{-3}}{1-\frac{7}{12}z^{-1}-\frac{1}{24}z^{-2}+\frac{1}{24}z^{-3}}$$

d) $$\Rightarrow H(z) = \frac{3z^3-\frac{113}{12}z^2+\frac{15}{4}z-\frac{5}{6}}{z^3-\frac{7}{12}z^2-\frac{1}{24}z+\frac{1}{24}}$$

+ Các điểm cực: $z_{p1} = -0.25,\ z_{p2} = 0.5,\ z_{p3} = 1/3$

+ Các điểm zero: $z_{o1} = 2.72,\ z_{o2} = 0.21+0.24j,\ z_{o3} = 0.21-0.24j$

→ Giản đồ cực – zero: Tự vẽ

e) $H(z) = H_1(z) + H_2(z) = \dfrac{1-3z^{-1}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}} + \dfrac{2-5z^{-1}}{1+0.25z^{-1}} = \dfrac{1-3z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} + \dfrac{2-5z^{-1}}{1+0.25z^{-1}}$

$= \dfrac{1-3z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} - 20 + \dfrac{22}{1+0.25z^{-1}} = \dfrac{16}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \dfrac{15}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \dfrac{22}{1+0.25z^{-1}} - 20$

+ $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3} \Rightarrow h(n) = -16.\left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1) + 15.\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1) + 22.\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) - 20\delta(n)$

+ $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$ → Tương tự.

f) $\Rightarrow H(z) = \dfrac{3-\frac{113}{12}z^{-1}+\frac{15}{4}z^{-2}-\frac{5}{6}z^{-3}}{1-\frac{7}{12}z^{-1}-\frac{1}{24}z^{-2}+\frac{1}{24}z^{-3}} = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$

$\Rightarrow Y(z) - \frac{7}{12}z^{-1}Y(z) - \frac{1}{24}z^{-2}Y(z) + \frac{1}{24}z^{-3}Y(z) = 3X(z) - \frac{113}{12}z^{-1}X(z) + \frac{15}{4}z^{-2}X(z) - \frac{5}{6}z^{-3}X(z)$

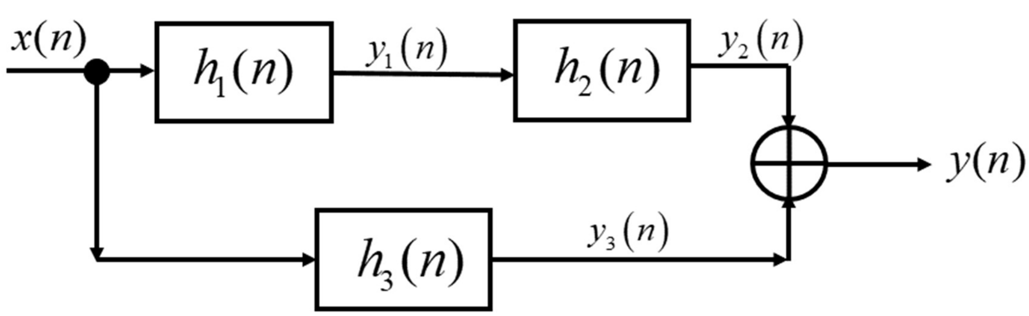
$\Rightarrow y(n) = 3x(n) - \frac{113}{12}x(n-1) + \frac{15}{4}x(n-2) - \frac{5}{6}x(n-3) + \frac{7}{12}y(n-1) + \frac{1}{24}y(n-2) - \frac{1}{24}y(n-3)$

Bài 5: Cho hệ thống rời rạc có sơ đồ khối như sau:

Với $h_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$, $h_2(n) = (-1)^n u(n)$, h_3 là đáp ứng xung của hệ thống có phương trình sai phân: $y_3(n) = x(n) - x(n-2) + \frac{3}{2}y_3(n-1) + y_3(n-2)$

a) Tìm hàm truyền $H_1(z), H_2(z)$ và $H_3(z)$.

b) Tìm đáp ứng xung nhân quả của toàn hệ thống.



Giải:

a) $H_1(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \ |z| > \dfrac{1}{2}$

$H_2(z) = \dfrac{1}{1 + z^{-1}}, \ |z| > 1$

$Y_3(z) = X(z) - z^{-2}X(z) + \dfrac{3}{2}z^{-1}Y_3(z) + z^{-2}Y_3(z) \Rightarrow H_3(z) = \dfrac{1 - z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}}$

b) $H(z) = H_1(z)H_2(z) + H_3(z) = \dfrac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + z^{-1}\right)} + \dfrac{1 - z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}}$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + z^{-1}\right)} + 1 + \frac{3/2z^{-1}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}}$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{2}{3}.\frac{1}{1 + z^{-1}} + \frac{3}{5}.\frac{1}{1 - 2z^{-1}} - \frac{3}{5}.\frac{1}{1 + 0.5z^{-1}} + 1$$

$$\Rightarrow h(n) = \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{2}{3}(-1)^n u(n) + \frac{3}{5}.(-2)^n u(n) - \frac{3}{5}.\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Bài 6: Cho hàm truyền của hệ thống LTI:

$$H(z) = \frac{1 + 4z^{-2}}{\left(1 - 3z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)\left(1 + 4z^{-1}\right)}$$

a) Chứng minh rằng hệ thống trên có thể được ghép song song từ các hệ thống con và hãy cho biết hàm truyền của các hệ thống con đó.

b) Tìm đáp ứng xung không nhân quả của hệ thống trên.

c) Vẽ giản đồ cực – zero của hệ thống.

Giải:

a) $H(z) = \dfrac{A}{1 - 3z^{-1}} + \dfrac{B}{1 - 2z^{-1}} + \dfrac{C}{1 + 4z^{-1}} = H_1(z) + H_2(z) + H_3(z)$

b) Hai trường hợp: $2 < |z| < 3$ và $3 < |z| < 4$.

c) Tự làm

Bài 7: Cho hệ thống rời rạc có sơ đồ khối như hình:

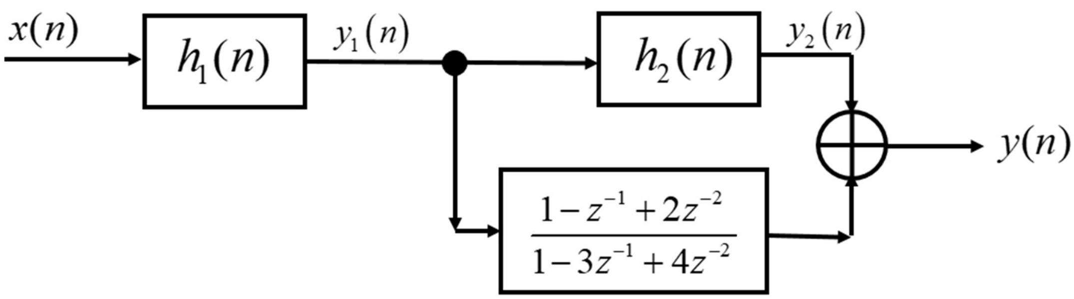
Giả sử các hệ thống thành phần đều là các hệ thống LTI. Đáp ứng xung của hệ thống 1 là $h_1(n) = \delta(n) - 2\delta(n-3) - 3h_1(n-1)$ và $h_2(n)$ là đáp ứng xung của hệ thống IIR có quan hệ vào ra $y_2(n) = y_1(n) - 2y_1(n-1) + 2y_2(n-3)$

a) Tìm đáp ứng xung $h_1(n)$ với vùng hội tụ $|z| > 2$.

b) Xác định phương trình quan hệ vào ra và vẽ sơ đồ khối chính tắc mô tả toàn hệ thống trên.

c) Vẽ giản đồ cực - zero của toàn hệ thống.

d) Tìm đáp ứng xung nhân quả của toàn hệ thống.



Giải:

a) $H_1(z) = 1 - 2z^{-3} - 3z^{-1}H_1(z) \Rightarrow H_1(z) = \frac{1-2z^{-3}}{1+3z^{-1}} = -\frac{2}{3}z^{-2} + \frac{2}{9}z^{-1} - \frac{2}{27} + \frac{29}{27}.\frac{1}{1+3z^{-1}}$

+ $2 < |z| < 3 \Rightarrow h_1(n) = -\frac{2}{3}\delta(n-2) + \frac{2}{9}\delta(n-1) - \frac{2}{27}\delta(n) - \frac{29}{27}.(-3)^n u(-n-1)$

+ $|z| > 3 \Rightarrow h_1(n) = -\frac{2}{3}\delta(n-2) + \frac{2}{9}\delta(n-1) - \frac{2}{27}\delta(n) + \frac{29}{27}.(-3)^n u(n)$

b) $Y_2(z) = Y_1(z) - 2z^{-1}Y_1(z) + 2z^{-3}Y_2(z) \Rightarrow H_2(z) = \frac{Y_2(z)}{Y_1(z)} = \frac{1-2z^{-1}}{1-2z^{-3}}$

$$H(z) = H_1(z)\left[H_2(z) + \frac{1-z^{-1}+2z^{-2}}{1-3z^{-1}+4z^{-2}}\right] = \frac{1-2z^{-3}}{1+3z^{-1}}.\frac{1-z^{-1}}{1-2z^{-3}} + \frac{1-2z^{-3}}{1+3z^{-1}}.\frac{1-z^{-1}+2z^{-2}}{1-3z^{-1}+4z^{-2}}$$

$$= \frac{1-z^{-1}}{1+3z^{-1}} + \frac{1-2z^{-3}}{1+3z^{-1}}.\frac{1-z^{-1}+2z^{-2}}{1-3z^{-1}+4z^{-2}} = \frac{(1-z^{-1})(1-3z^{-1}+4z^{-2}) + (1-2z^{-3})(1-z^{-1}+2z^{-2})}{(1+3z^{-1})(1-3z^{-1}+4z^{-2})}$$

$$= \frac{2-5z^{-1}+9z^{-2}-6z^{-3}+2z^{-4}-4z^{-5}}{1-5z^{-2}+12z^{-3}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\Rightarrow Y(z) - 5z^{-2}Y(z) + 12z^{-3}Y(z) = 2X(z) - 5z^{-1}X(z) + 9z^{-2}X(z) - 6z^{-3}X(z) + 2z^{-4}X(z) - 4z^{-5}X(z)$$

$$\Rightarrow y(n) = 2x(n) - 5x(n-1) + 9x(n-2) - 6x(n-3) + 2x(n-4) - 4x(n-5) + 5y(n-2) - 12y(n-3)$$

c)

$$H(z) = \frac{2 - 5z^{-1} + 9z^{-2} - 6z^{-3} + 2z^{-4} - 4z^{-5}}{1 - 5z^{-2} + 12z^{-3}} = \frac{2z^5 - 5z^4 + 9z^3 - 6z^2 + 2z - 4}{z^5 - 5z^3 + 12z^2}$$

d) $H(z) = H_1(z)\left[H_2(z) + \frac{1 - z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 4z^{-2}}\right] = \frac{1 - z^{-1}}{1 + 3z^{-1}} + \frac{1 - 2z^{-3}}{1 + 3z^{-1}} . \frac{1 - z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 4z^{-2}}$

$$= \frac{1}{1 + 3z^{-1}} - \frac{1}{1 + 3z^{-1}} z^{-1} + \frac{1 - z^{-1} + 2z^{-2}}{\left(1 + 3z^{-1}\right)\left(1 - 3z^{-1} + 4z^{-2}\right)} - \frac{1 - z^{-1} + 2z^{-2}}{\left(1 + 3z^{-1}\right)\left(1 - 3z^{-1} + 4z^{-2}\right)} .2z^{-3}$$

$\Rightarrow h(n) = h_1(n) - h_1(n-1) + h_2(n) - 2h_2(n-3)$

- $H_1(z) = \frac{1}{1 + 3z^{-1}} \Rightarrow h_1(n) = (-3)^n u(n)$
- $H_2(z) = \frac{1 - z^{-1} + 2z^{-2}}{\left(1 + 3z^{-1}\right)\left(1 - 3z^{-1} + 4z^{-2}\right)} = \frac{A}{1 + 3z^{-1}} + \frac{Bz^{-1} + C}{1 - 3z^{-1} + 4z^{-2}}$

Bài 8: Hãy kiểm chứng tính chất $x(n) * y(n) \xleftrightarrow{Z} X(z)Y(z)$ bằng cách dùng hai tín hiệu mẫu sau:

$$x(n) = \delta(n) - 2\delta(n-1) + \delta(n-3) - \delta(n-4)$$

$$y(n) = 2\delta(n-1) - 3\delta(n-2) + \delta(n+4)$$

Giải:

$x(n) = \{1, -2, 0, 1, -1\} \Rightarrow X(z) = 1 - 2z^{-1} + z^{-3} - z^{-4}$

$y(n) = \{0, 2, -3, 4\} \Rightarrow Y(z) = 2z^{-1} - 3z^{-2} + 4z^{-3}$

$\Rightarrow x(n) * y(n) = \{0, 2, -7, 10, -6, -5, 7, -4\}$

$\Rightarrow H(z) = X(z)Y(z) = 2z^{-1} - 7z^{-2} + 10z^{-3} - 6z^{-4} - 5z^{-5} + 7z^{-6} - 4z^{-7}$

$\Rightarrow h(n) = \{0, 2, -7, 10, -6, -5, 7, -4\} = x(n) * y(n)$ → **đcpcm.**