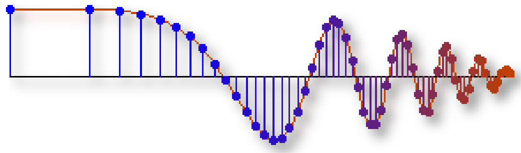


I. PROAKIS

2.1 A discrete-time signal $x(n)$ is defined as

$$x(n) = \begin{cases} 1 + \frac{n}{3}, & -3 \le n \le -1 \\ 1, & 0 \le n \le 3 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

(a) Determine its values and sketch the signal $x(n)$.

(b) Sketch the signals that result if we:

1. First fold $x(n)$ and then delay the resulting signal by four samples.

2. First delay $x(n)$ by four samples and then fold the resulting signal.

(c) Sketch the signal $x(-n+4)$.

(d) Compare the results in parts (b) and (c) and derive a rule for obtaining the signal $x(-n+k)$ from $x(n)$.

(e) Can you express the signal $x(n)$ in terms of signals $\delta(n)$ and $u(n)$?

a)

+ Giá trị dưới dạng chuỗi: $x(n) = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \underset{\uparrow}{1}, 1, 1, 1\right\}$

+ Vẽ dạng tín hiệu: Tự vẽ.

b)

1. Gấp trước, sau đó thực hiện phép trễ 4 mẫu (thay n bởi $n-4$).

$$\Rightarrow x(-n) = \left\{1,1,1,\underset{\uparrow}{1},\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\right\} \Rightarrow x\left[-(n-4)\right] = \left\{\underset{\uparrow}{0},1,1,1,1,\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\right\}$$

2. Thực hiện phép trễ 4 mẫu, sau đó gấp: (thay n bởi $-n$).

$$\Rightarrow x(n-4) = \left\{\underset{\uparrow}{0},0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,1,1,1\right\} \Rightarrow x(-n-4) = \left\{1,1,1,1,\frac{2}{3},\frac{1}{3},0,\underset{\uparrow}{0}\right\}$$

c)

$$\Rightarrow x(-n) = \left\{1,1,1,\underset{\uparrow}{1},\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\right\} \Rightarrow x(-n+4) = x\left[-(n-4)\right] = \left\{\underset{\uparrow}{0},1,1,1,1,\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\right\}$$

d) Kết quả ở câu (b) và câu (c) tương tự nhau. Để thu được tín hiệu $x(-n+k)$ từ tín hiệu $x(n)$ ta có:

+ Hai phương pháp:

- Cách 1: Thực hiện phép gấp tín hiệu $x(n)$ để thu được tín hiệu $x(-n)$. Sau đó dịch phải tín hiệu trên k đơn vị nếu $k>0$ hoặc dịch trái k đơn vị nếu $k<0$ do $x(-n+k)=x[-(n-k)]$.
- Cách 2: Thực hiện phép dịch trái tín hiệu $x(n)$ đi k đơn vị nếu $k>0$ hoặc dịch phải tín hiệu $x(n)$ đi k đơn vị nếu $k<0$ để thu được tín hiệu $x_2(n)=x(n+k)$. Sau đó thực hiện tiếp phép gấp tín hiệu đó để thu được tín hiệu $x_2(-n)=x(-n+k)$.

e) Ta có thể viết lại tín hiệu trên thành:

$$x(n)=\frac{1}{3}\delta(n+2)+\frac{2}{3}\delta(n+1)+\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)$$ hoặc

$$x(n)=\frac{1}{3}\delta(n+2)+\frac{2}{3}\delta(n+1)+u(n)-u(n-4)$$

2.2 A discrete-time signal $x(n)$ is shown in Fig. P2.2. Sketch and label carefully each of the following signals.

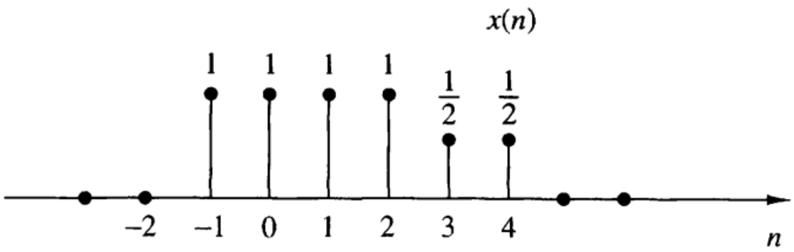


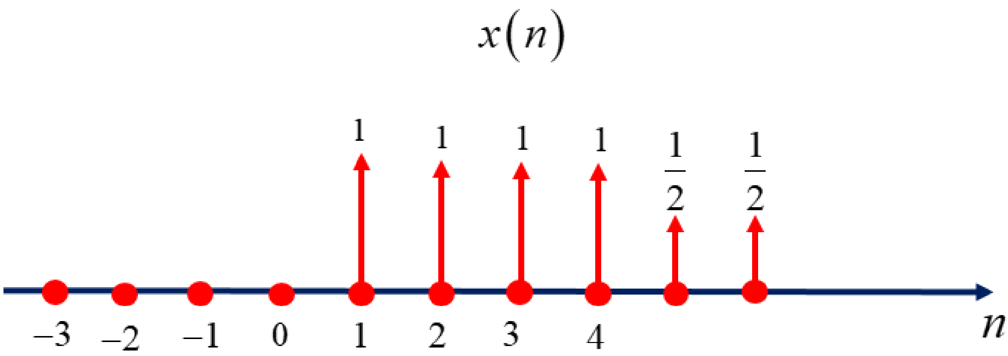
Figure P2.2

(a) $x(n-2)$ **(b)** $x(4-n)$ **(c)** $x(n+2)$ **(d)** $x(n)u(2-n)$ **(e)** $x(n-1)\delta(n-3)$ **(f)** $x(n^2)$ **(g)** even part of $x(n)$ **(h)** odd part of $x(n)$

a)

+

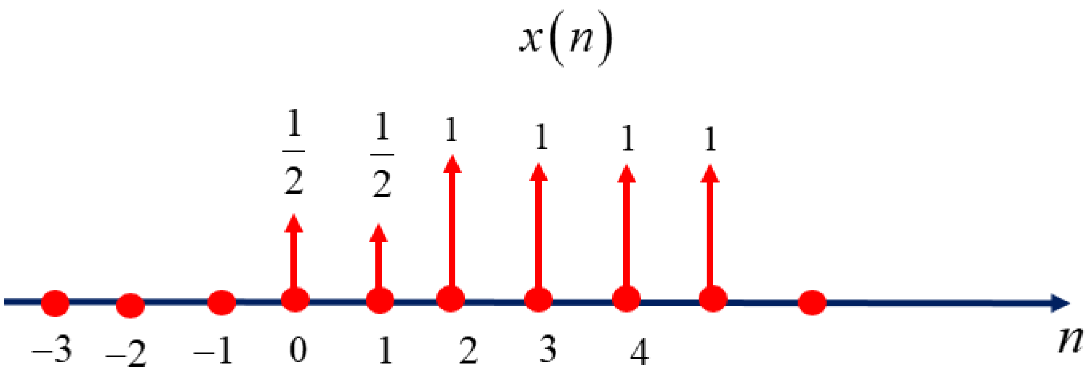
$$x(n-2)=\left\{\underset{\uparrow}{0},1,1,1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$$



+ $x(4-n) = x(-n+4) = x[-(n-4)]$ → gấp trước, sau đó dịch phải 4 mẫu.

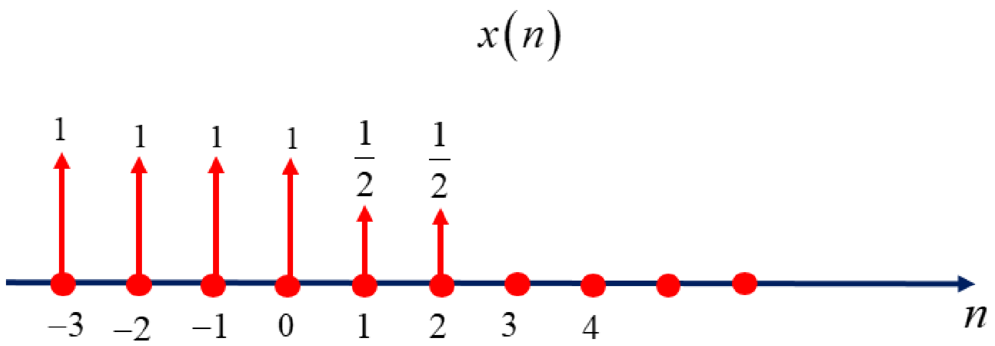
$$x(n) = \left\{1,1,1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\} \Rightarrow x(-n) = \left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1,1,1\right\} \Rightarrow x[-(n-4)] = \left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1,1,1\right\}$$

$\uparrow$ $\qquad\qquad\qquad$ $\uparrow$ $\qquad\qquad\qquad$ $\uparrow$



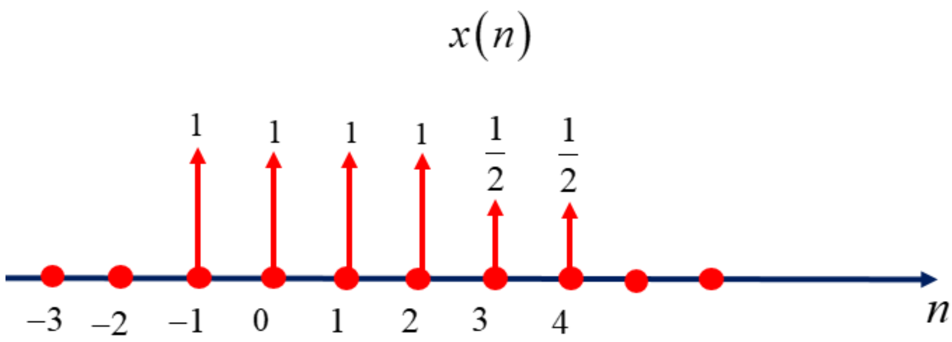
+ $x(n+2) = \left\{1,1,1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$

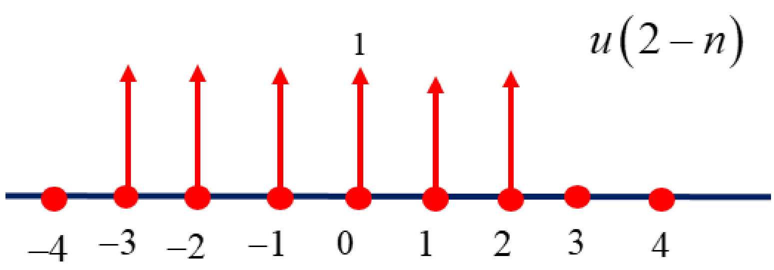
$\uparrow$

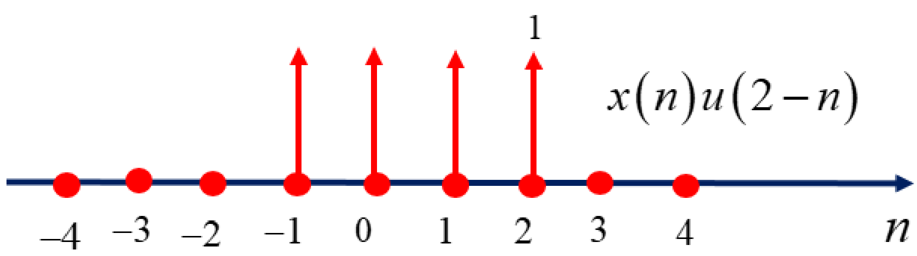


+ $x(n)u(2-n) = \{1,1,1,1\}$

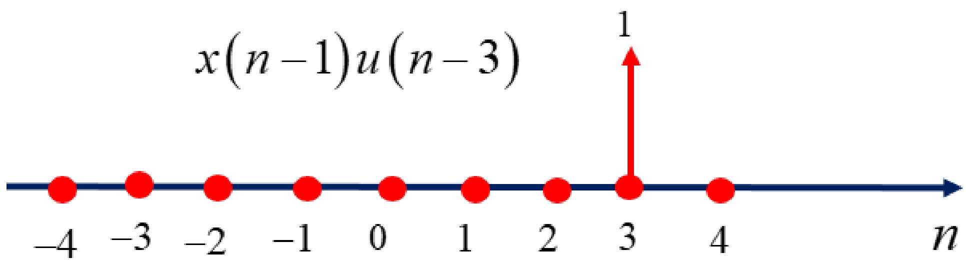
$\uparrow$







+ $x(n-1)\delta(n-3) = x(3-1)\delta(n-3) = \delta(n-3)$

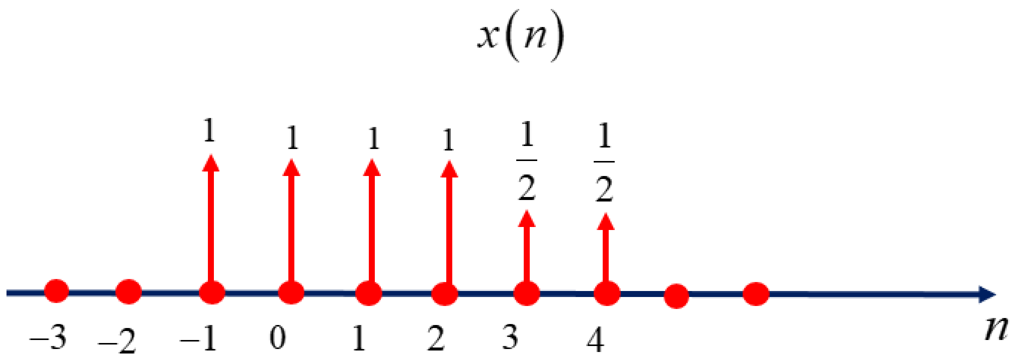


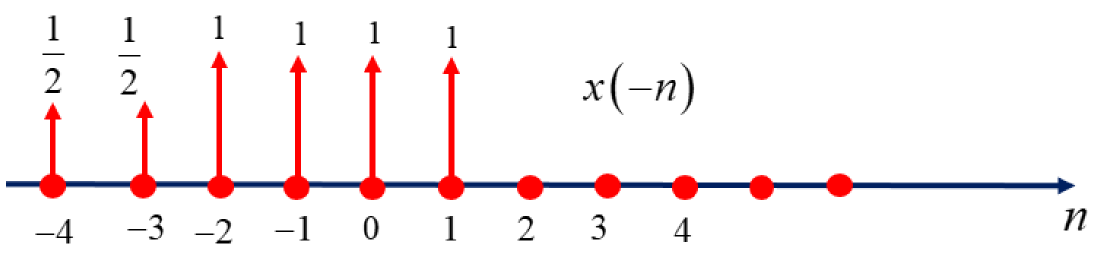
+ $x(n^2) = \left\{\frac{1}{2}, 1, 1, 1, \frac{1}{2}\right\}$
$\uparrow$

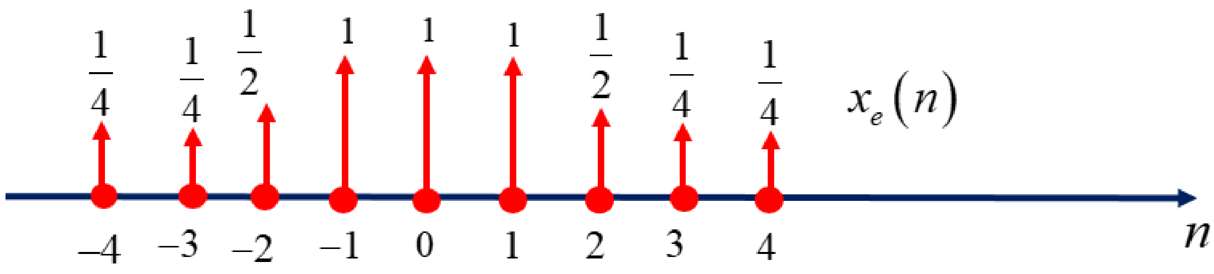
n	-2	-1	0	1	2
n^2	4	1	0	1	4
$x(n^2)$	1/2	1	1	1	1/2

+ Even part of $x(n)$: (*Các thành phần chẵn của tín hiệu).*

$$x_e(n) = \frac{1}{2}\left[x(n) + x(-n)\right]$$

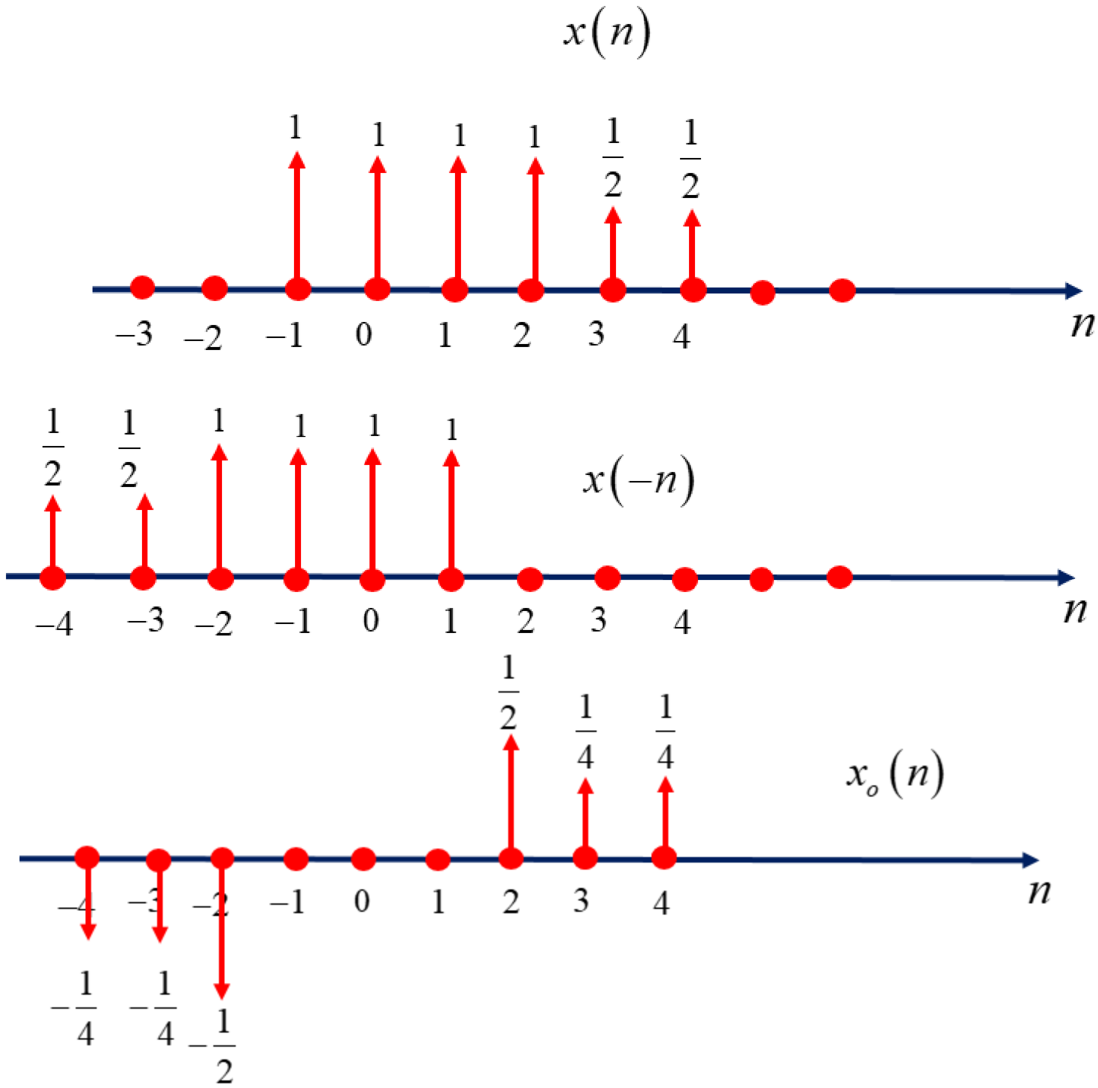






+ Odd part of $x(n)$: *(Các thành phần lẻ của tín hiệu).*

$$x_o(n) = \frac{1}{2}\left[x(n) - x(-n)\right]$$



2.3 Show that

(a) $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$

(b) $u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$

a)

Ta có: $VP = u(n) - u(n-1) = \left[u(n-1) + \delta(n)\right] - u(n-1) = \delta(n) = VT$ hoặc có thể chứng minh bằng hình vẽ (xem phần 2 có bài mẫu).

b)

+ Ý thứ nhất: Chứng minh $u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$

$$\text{Ta có: } u(n) = \begin{cases} 1, \; n \geq 0 \\ 0, \; n < 0 \end{cases} = \begin{cases} \delta(n) + \delta(n-1) + \ldots + \delta(n-k) \\ 0, \; n < 0 \end{cases} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k).$$

+ Ý thứ hai: Chứng minh $u(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)$

- Với $n<0 \Rightarrow u(n)=...+\delta(-3)+\delta(-2)+\delta(-1)=0$.
- Với $n\geq 0 \Rightarrow u(n)=...+\delta(-2)+\delta(-1)+\delta(0)+\delta(1)+\delta(2)+...=1$

Như vậy $u(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$ (đcpcm). Chú ý rằng $\delta(0)=1$ còn lại đều bằng 0, đây là tính chất của hàm $\delta(k)$.

2.4 Show that any signal can be decomposed into an even and an odd component. Is the decomposition unique? Illustrate your arguments using the signal

$$x(n)=\{2,3,\underset{\uparrow}{4},5,6\}$$

"Chứng minh rằng, bất kì một tín hiệu nào cũng có thể phân tách thành các thành phần chẳn và các thành phần lẻ. Minh họa bởi tín hiệu bên dưới."

Giải:

+ Xét hai tín hiệu:

$$x_e(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)+x(-n)\right]$$

$$x_o(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)-x(-n)\right]$$

Tín hiệu được gọi là chẳn nếu $x(n)=x(-n)$ **(*)** , và lẻ nếu $x(n)=-x(-n)$ **(**)**.

Rõ ràng, tín hiệu $x_e(n)$ thỏa mãn tính chất chẳn và tín hiệu $x_o(n)$ thỏa mãn tính chất lẻ.

Như vậy, ta có thể biểu diễn $x(n)$ bởi $x(n)=x_e(n)+x_o(n)$ → tổng của các thành phần lẻ và chẳn.

+ Với $x(n)=\{2,3,\underset{\uparrow}{4},5,6\} \Rightarrow x(-n)=\{6,5,\underset{\uparrow}{4},3,2\}$

$$\Rightarrow x_e(n)=\{4,4,\underset{\uparrow}{4},4,4\}$$

$$\Rightarrow x_o(n)=\{-2,-1,\underset{\uparrow}{0},1,2\}$$

$$\Rightarrow x_e(n)+x_o(n)=x(n)$$

2.5 Show that the energy (power) of a real-valued energy (power) signal is equal to the sum of the energies (powers) of its even and odd components.

"*Chứng minh rằng, công suất hay năng lượng của một tín hiệu thực, bằng tổng năng lượng hay công suất của các thành phần lẻ và chẵn của nó.*"

Giải: Đề bài tương đương việc chứng minh:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x_e(n)+x_o(n)\right]^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2(n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2(n) + 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(n)x_o(n) = E_e + E_o$$

Như vậy, ta cần phải chứng minh $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x_e(n)x_o(n) = 0 \;\; \forall n$

Ta có:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(n)x_o(n) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x_e(n)x_o(n) + \sum_{n=1}^{\infty} x_e(n)x_o(n) + x_e(0)x_o(0) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x_e(n)x_o(n) + \sum_{n=1}^{\infty} x_e(n)x_o(n)$$

(do $x_o(0)=0$)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x_e(-n)x_o(-n) + \sum_{n=1}^{\infty} x_e(n)x_o(n) = -\sum_{n=1}^{\infty} x_e(n)x_o(n) + \sum_{n=1}^{\infty} x_e(n)x_o(n) = 0$$

do $\begin{cases} x_e(-n) = x_e(n) \\ x_o(-n) = -x_o(n) \end{cases}$.

Hoặc có thể chứng minh theo cách này nhanh hơn nè:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(n)x_o(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(-n)x_o(-n) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(n)x_o(n) \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(n)x_o(n) = 0$$

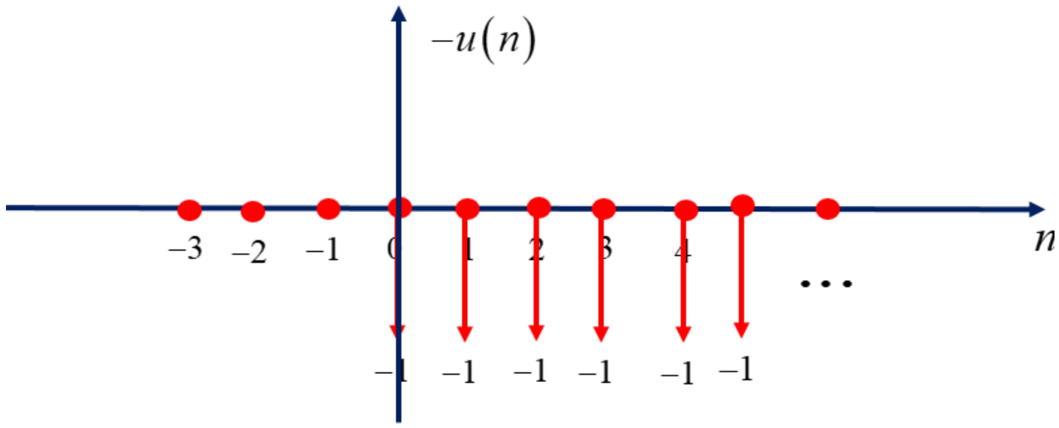
II. GIÁO TRÌNH TIẾNG VIỆT

4.1 Tín hiệu rời rạc thời gian

4.1.1 Vẽ các tín hiệu $\delta(n), -\delta(n), 2\delta(n-4), -5\delta(n-2)$ → Dễ, tự vẽ.

4.1.2 Vẽ các tín hiệu $-u(n), u(-n), u(n-1), -u(-n-1), -3u(-n-3)$.

$+\ -u(n)=\begin{cases}-1, & n\ge 0\\ 0, & n<0\end{cases}$

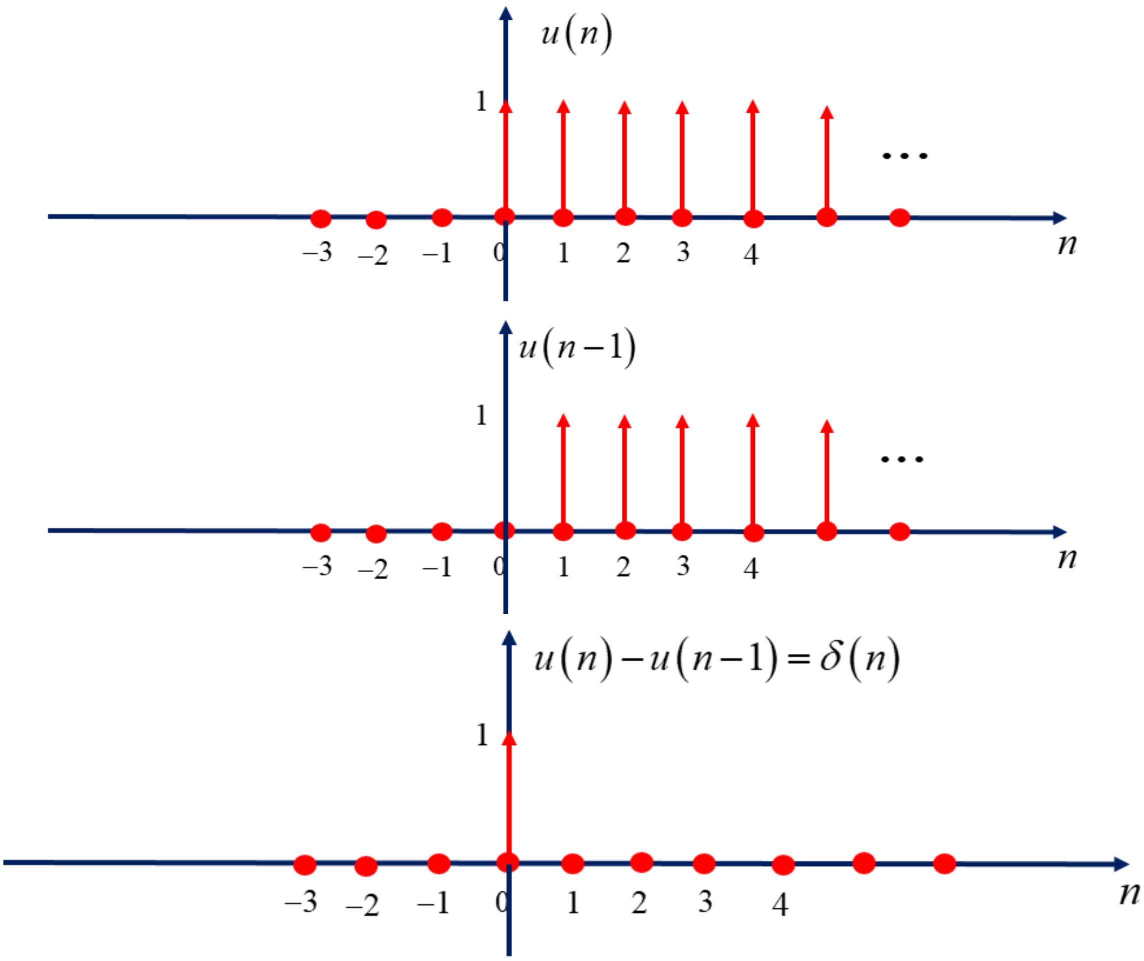


....

$+\ -3u(-n-3)=\begin{cases}-3, & -n-3\ge 0\\ 0, & -n-3<0\end{cases}=\begin{cases}-3, & n\le -3\\ 0, & n>-3\end{cases}$

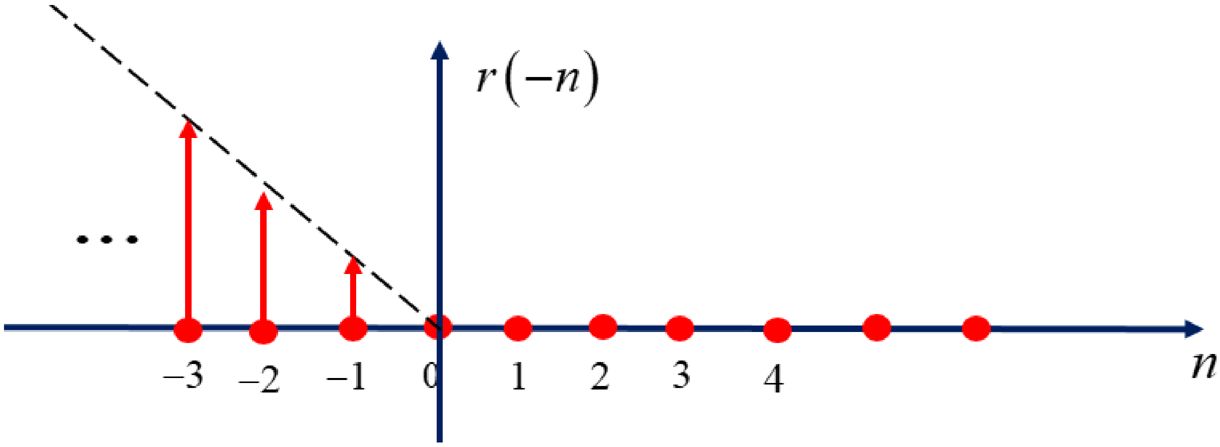
4.1.3 Chứng minh rằng $u(n)-u(n-1)=\delta(n)$

Dùng phương pháp đồ thị ta có:



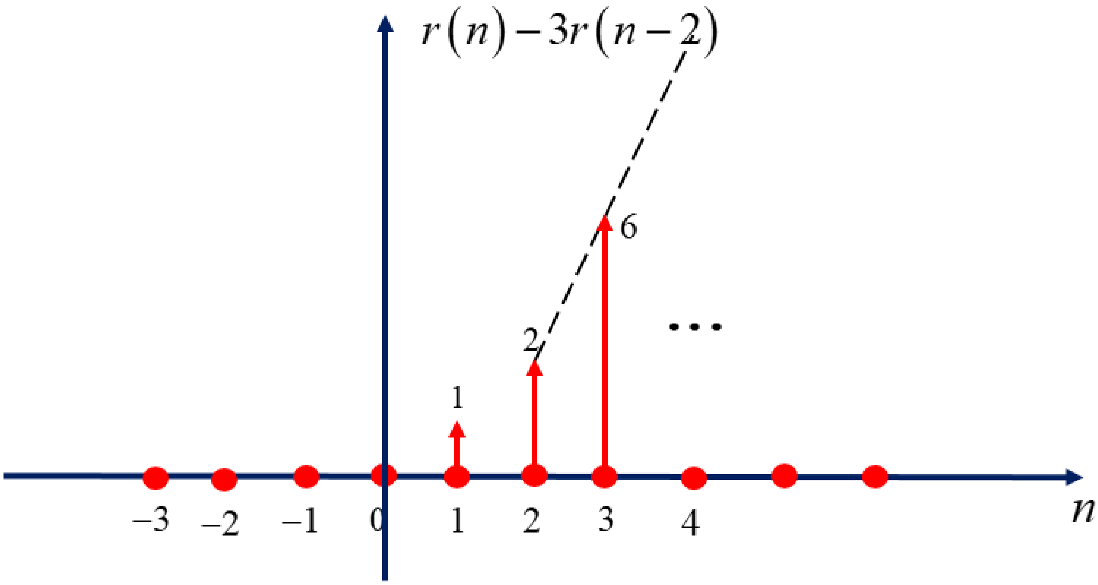
4.1.4 Vẽ các tín hiệu: $r(-n),\ r(n)-3r(n-2)$

+ $r(-n)=\begin{cases}-n, & -n\ge 0\\ 0, & -n<0\end{cases}=\begin{cases}-n, & n\le 0\\ 0, & n>0\end{cases}$



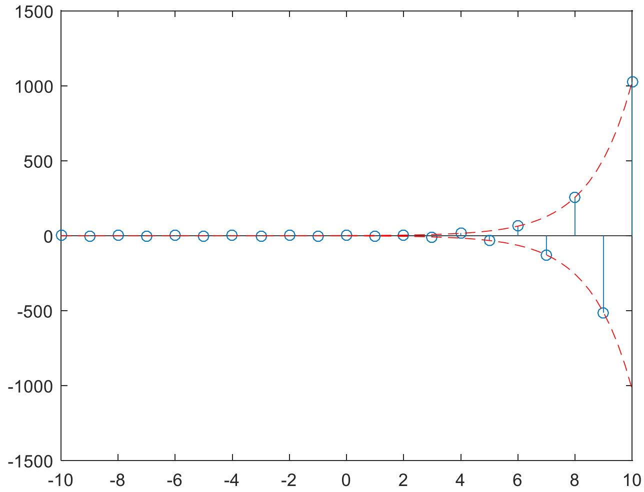
+

$$r(n)-3r(n-2)=nu(n)-3(n-2)u(n-2)=n\left[\delta(n)+\delta(n-1)+u(n-2)\right]-3(n-2)u(n-2)$$
$$=n\delta(n)+n\delta(n-1)+(6-2n)u(n-2)$$
$$=\delta(n-1)+(6-2n)u(n-2)$$

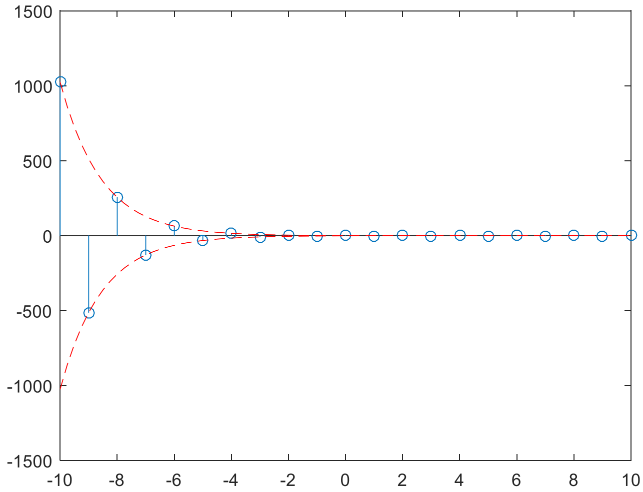


4.1.5 Vẽ các tín hiệu:

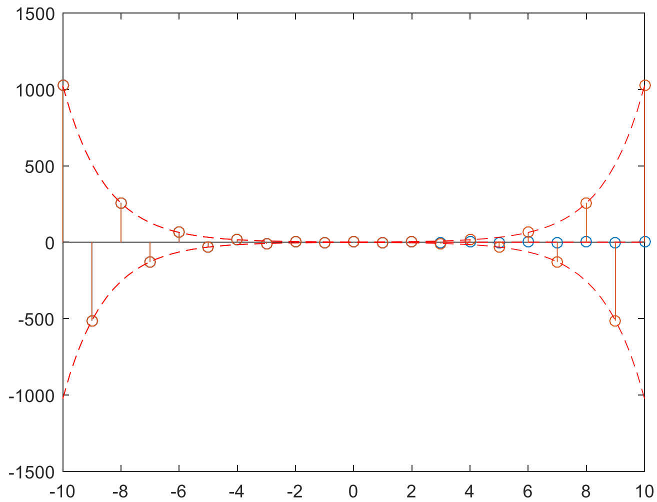
a) $x(n) = (-2)^n$



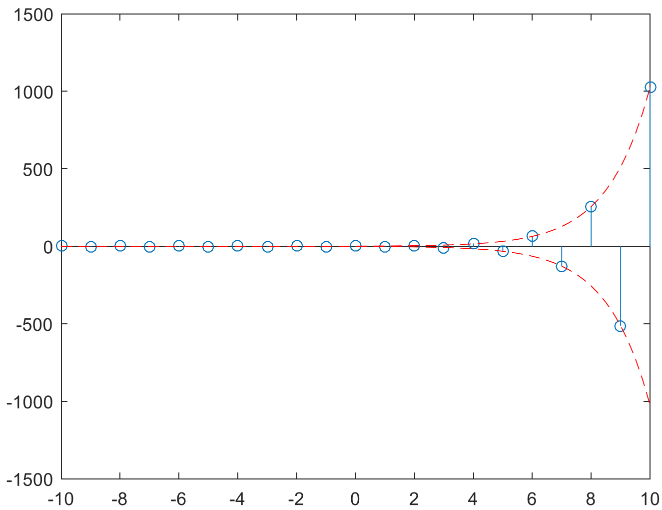
b) $x(n) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$



c) $x(n) = (-2)^n + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$



d) $x(n) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-n}$



4.1.6 Tìm biểu thức cho các tín hiệu sau:

a) $x(n) = 1$

b) Viết lại tín hiệu ta có: $x(n) = \begin{cases} -1, & n \le -2 \\ 0, & n > 2 \end{cases} = \begin{cases} -1, & -n-2 \ge 0 \\ 0, & -n-2 < 0 \end{cases} = -u(-n-2)$

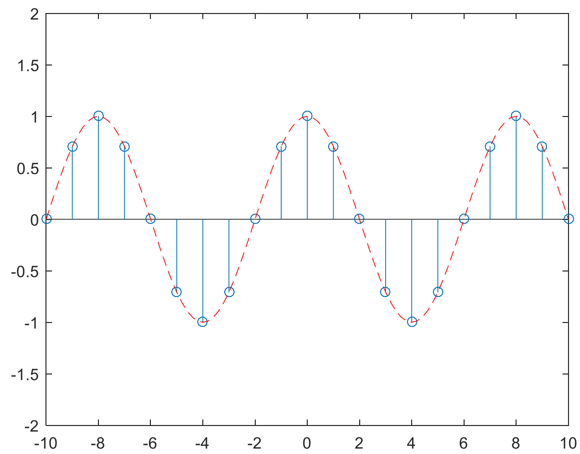
c) $x(n) = \begin{cases} 2n+12, & -6 \le n \le -1 \\ 1, & n \ge 0 \end{cases} = (2n+12)\left[u(n) - u(n+6)\right] + u(n)$

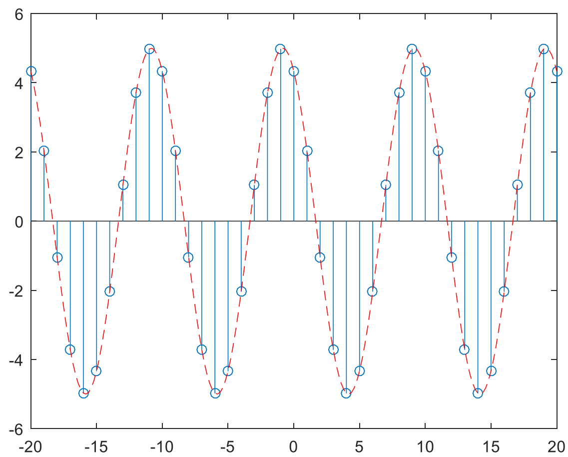
4.2 Tín hiệu sin – tần số số.

4.2.1 Vẽ các tín hiệu sin, xác định tín hiệu tuần hoàn và tìm chu kỳ:

a) $x(n) = \cos\dfrac{\pi n}{4}$, có $N = \dfrac{k2\pi}{\pi/4} = 8k = 8, 16, 24, \ldots$ → $x(n)$ tuần hoàn với chu kỳ N=8 mẫu.

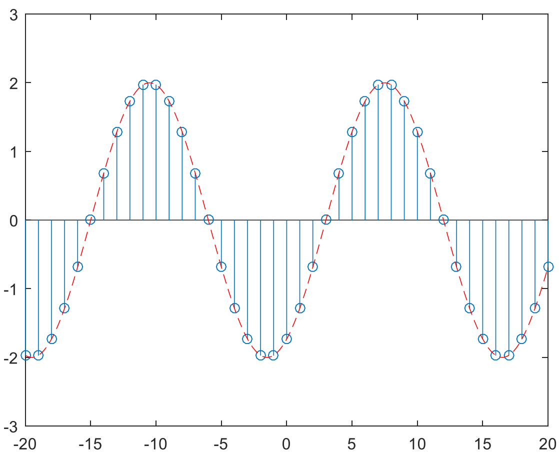
b) $x(n) = 5\cos\left(\frac{n\pi}{5} + \frac{\pi}{6}\right)$ có $N = \frac{k2\pi}{\pi/5} = 10k = 10,\ 20,\ 30, \ldots$ → $x(n)$ tuần hoàn với chu kỳ N=10 mẫu.

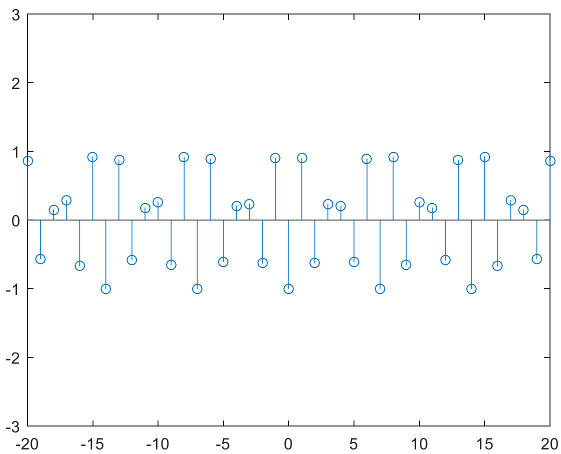




c) $x(n) = 2\sin\left(\frac{n\pi}{9} - \frac{\pi}{3}\right)$ có $N = \frac{k2\pi}{\pi/9} = 18k = 18,\ 36, , \ldots$ → $x(n)$ tuần hoàn với chu kỳ N=18 mẫu.

d) $x(n) = -\cos n\pi^2$ có $N = \frac{k2\pi}{\pi^2} = \frac{2k}{\pi} \notin \mathbb{Z}^+$ → $x(n)$ không tuần hoàn .

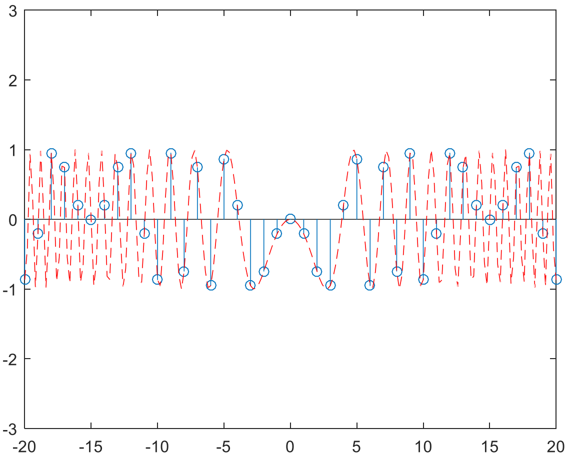


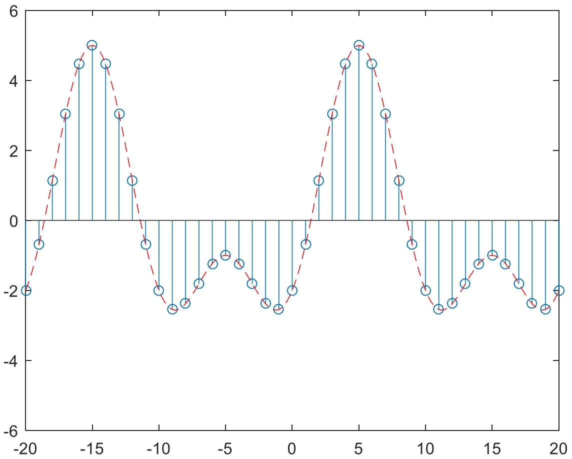


e) $x(n) = \sin\frac{\pi n^2}{15}$ → $x(n)$ không tuần hoàn do $x(n)$ không phải là hàm điều hòa.

f) $x(n) = 2\cos\left(\frac{\pi n}{5} + \pi\right) - 3\sin\left(\frac{n\pi}{10} - \pi\right)$ có $N_1 = \frac{k2\pi}{\pi/5} = 10k = 10,\ 20,\ 30, \ldots$ và

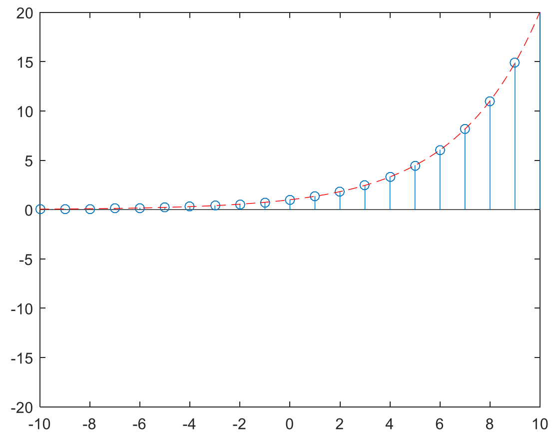
$$N_2 = \frac{k2\pi}{\pi/10} = 20k = 20,\ 40,\ 60,\ldots \rightarrow\ x(n)$$ tuần hoàn với chu kỳ $N = BCNN\{N_1,\ N_2\} = 20$ mẫu.





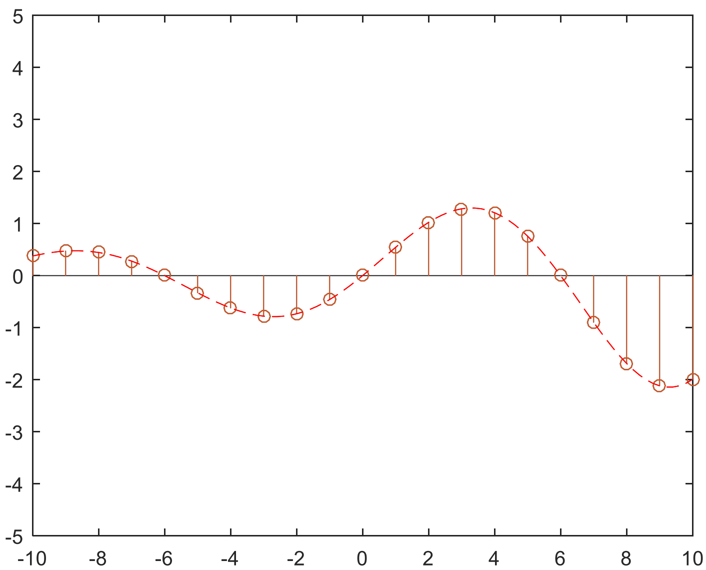
4.2.2 Vẽ các tín hiệu:

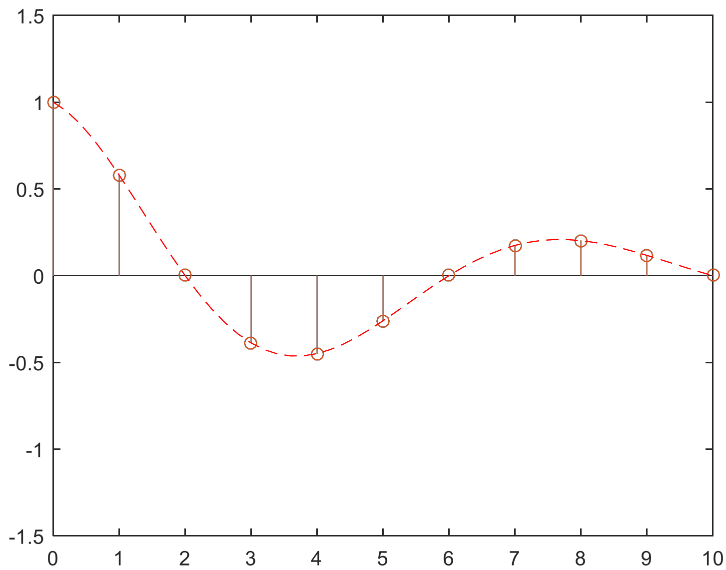
a) $x(n) = e^{0.3n}$



b) $x(n) = e^{\frac{n}{12}} \sin\dfrac{n\pi}{6}$

c) $x(n) = e^{-\frac{n}{5}} \cos\dfrac{n\pi}{4} u(n)$





4.2.3 Vẽ các tín hiệu:

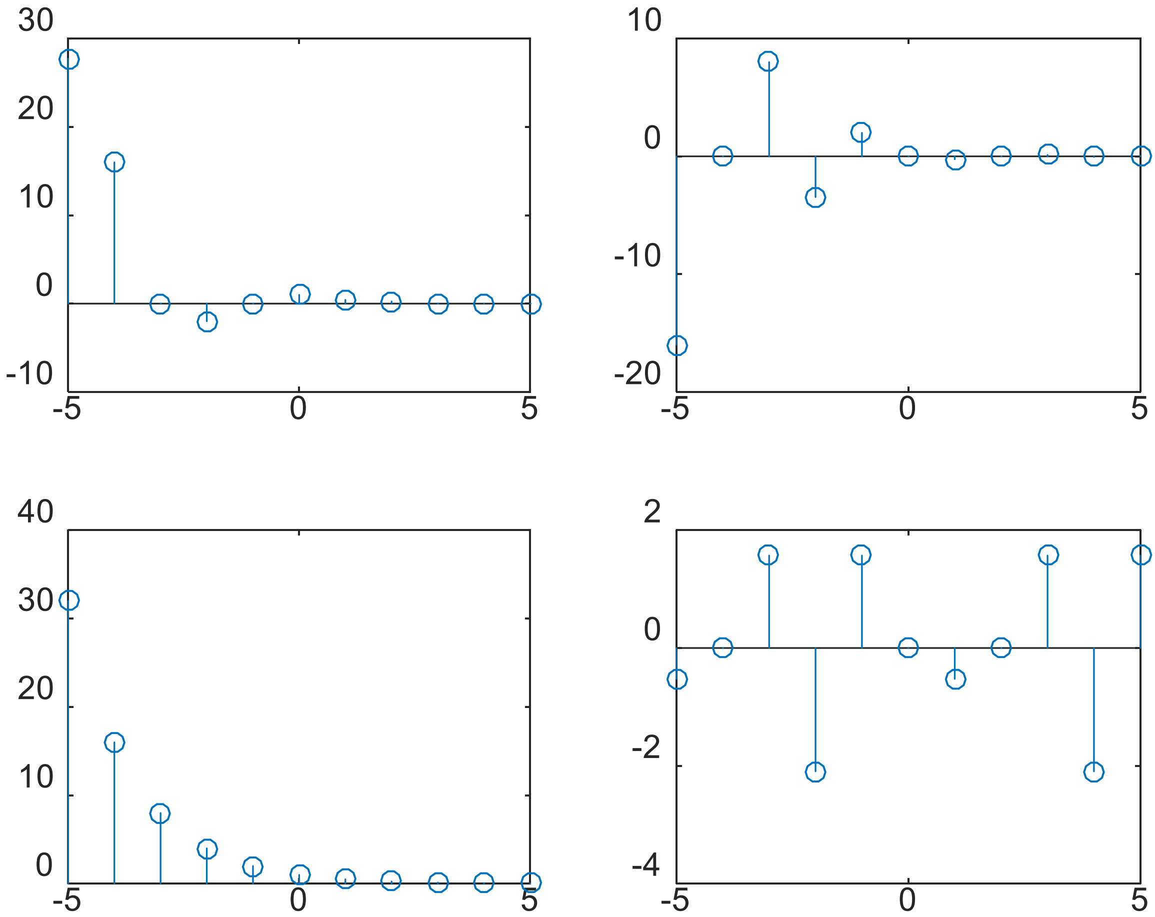
$$x(n) = \cos(n\Omega)$$

+ Với $\Omega = 0 \Rightarrow x(n) = 1$

+ Với $\Omega = 0.25\pi \Rightarrow x(n) = \cos(0.25\pi n)$ → $f = \dfrac{2\pi}{0.25\pi} = 8$ → để không xảy ra biệt danh, tần số lấy mẫu phải thỏa $f_s \geq 2f_{\max} = 2.8 = 16$. Khi $f_s < 2f_{\max}$ sẽ xảy ra hiện tượng biệt danh tại các tần số $8 - nf_s$.

+ Tương tự cho các trường hợp còn lại.

4.2.4 Cho tín hiệu $x(n) = a^n$, $a = 0.5e^{j\left(\frac{n\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)}$, vẽ $\mathrm{Im}(x)$, $\mathrm{Re}(x)$, $|x(n)|$, $\varphi(x)$.




```
n=-5:5;
a=0.5*exp(j*(n*pi/6-pi/3));
x=a.^n;
thuc=real(x);
ao=imag(x);
bd=abs(x);
pha=angle(x);
subplot(2,2,1);
stem(n,thuc);
subplot(2,2,2);
stem(n,ao);
subplot(2,2,3);
stem(n,bd);
subplot(2,2,4);
stem(n, pha);
```

4.3 Tín hiệu năng lượng và tín hiệu công suất:

4.3.1 Phân loại:

a) $x(n)=0.01e^{jn\pi/10}$

b) $x(n)=2(n)-2(n-100)$

4.3.2 Phân loại:

a) $x(n)=A\sin(n\Omega_0)$

b) $x(n)=A\sin(2n\Omega_0)$

4.4 Hệ thống rời rạc thời gian:

4.4.1 Tín hiệu vào $x(n)=[0, 1, 2, 3, 2, 0]$, tìm tín hiệu ra:

a) $y(n)=x(n)-2x(n-1)$

$$x(n)=[0,\ 1,\ 2,\ \ 3,\ \ 2,\ \ 0]$$

$$\uparrow$$

$$x(n-1)=\left[0,\ 0, 1, 2, 3, 2, 0\right]\ \Rightarrow 2x(n-1)=\left[0,\ 0,\ 2,\ 4,\ \ 6,\ \ 4,\ 0\right]$$

$$\uparrow$$

$$\Rightarrow y(n)=\left[0,\ 1,\ 0, -1, -4, -4, 0\right]$$

$$\uparrow$$

b) $y(n)=x^2(n)-x(n)$

$$\Rightarrow x^2(n)=\left[0, 1, 4, 9, 4, 0\right]$$

$$\uparrow$$

$$x(n)=[0, 1, 2, 3, 2, 0]$$

$$\uparrow$$

→ Tự trừ nhau.

c) $y(n)=\max\left\{x(n+1), x(n), x(n-1)\right\}$

$$\Rightarrow x(n+1)=\left[0, 1, 2, 3, 2, 0\right]$$

$$\uparrow$$

$$x(n)=[0, 1, 2, 3, 2, 0]$$

$$\uparrow$$

$$x(n-1)=[0,\ 0,\ 1,2,3,2,0]$$
$$\uparrow$$

$$\Rightarrow y(n)=[0,1,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,0]$$
$$\uparrow$$

d) $y(n)=\min\{x(n+1),\ 2x(n),\ x(n-1)\}$

→ Làm tương tự câu c.

4.4.2 Tín hiệu vào:

$$x_1(n)=u(n)$$

$$x_2(n)=|n|,\ -3\le n\le 3$$

$$x_3(n)=3\delta(n)-5\delta(n-3)$$

Tìm tín hiệu ra:

a) $y(n)=\frac{1}{3}\left[x_1(n)+x_2(n)+x_3(n)\right]$

b) $y(n)=2x_1(n)-3x_2(n-1)+4x_3(n-2)$

c) $y(n)=\max\{x_1(n)-2x_2(n)+x_3(n)\}=\max\{h(n)\}$

Giải:

a)

$$x_1(n)=\{1,1,1,1,1,1,1,...\}$$
$$\uparrow$$

$$x_2(n)=\{3,2,1,0,1,2,3\}$$
$$\uparrow$$

$$x_3(n)=\{3,0,0,-5\}$$
$$\uparrow$$

$$\Rightarrow y(n)=\left\{1,\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3},1,-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},...\right\}$$
$$\uparrow$$

$$=\delta(n+3)+\frac{2}{3}\delta(n+2)+\frac{1}{3}\delta(n+1)+\frac{4}{3}\delta(n)+\frac{2}{3}\delta(n-1)+\delta(n-2)-\frac{1}{3}\delta(n-3)+\frac{1}{3}u(n-4)$$

b) Tương tự

c)

$$x_1(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots\}$$

$$-2x_2(n) = \{-6, -4, -2, \underset{\uparrow}{0}, -2, -4, -6\}$$

$$x_3(n) = \{\underset{\uparrow}{3}, 0, 0, -5\}$$

$$\Rightarrow h(n) = \{-6, -4, -2, \underset{\uparrow}{4}, -1, -3, -10, 1, 1, 1\} \Rightarrow y(n) = \max\{h(n)\} = 4$$