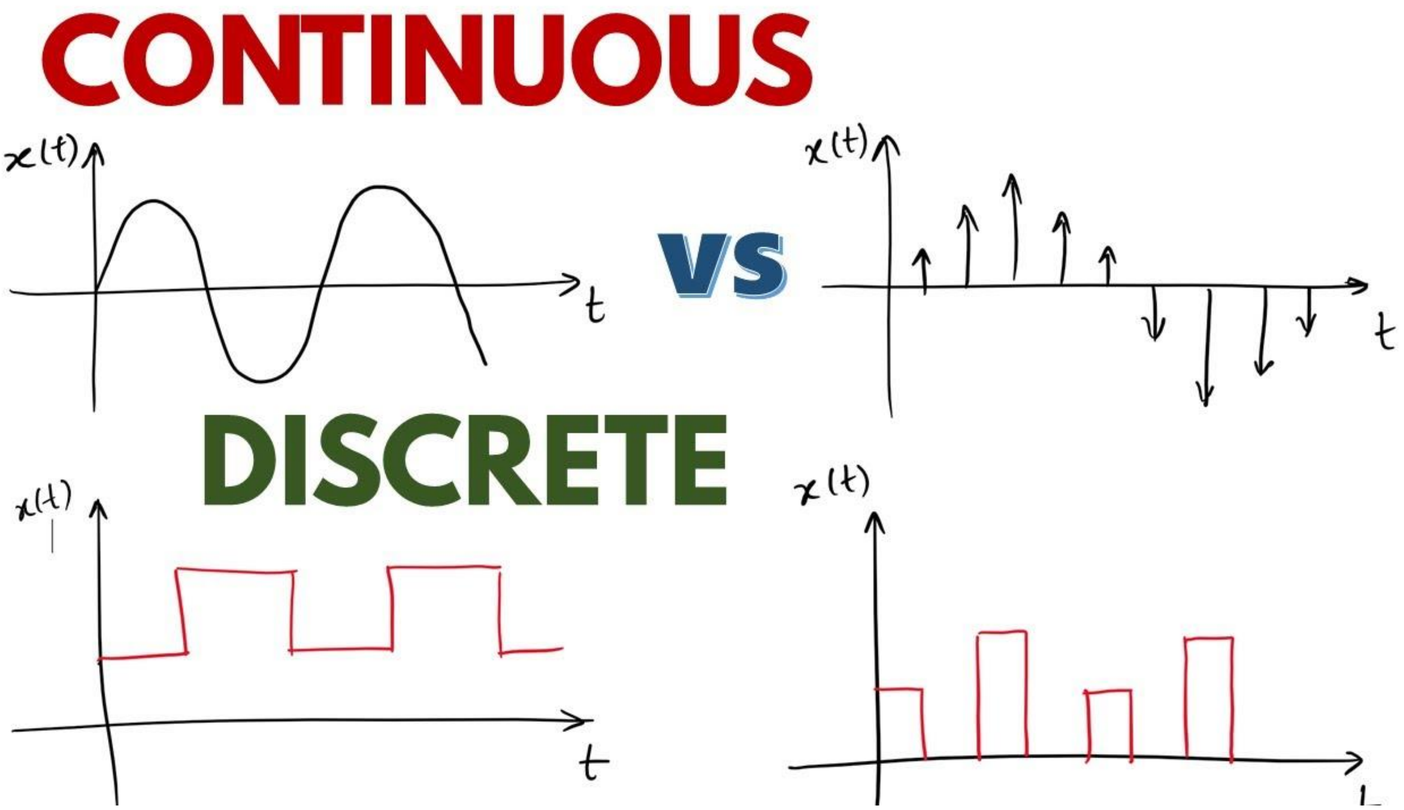
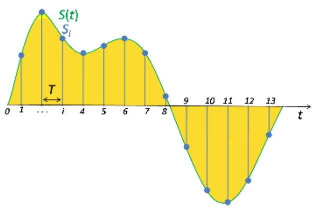
XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ
DIGITAL SIGNAL PROCESSING



CHƯƠNG 1: LẤY MẪU VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU

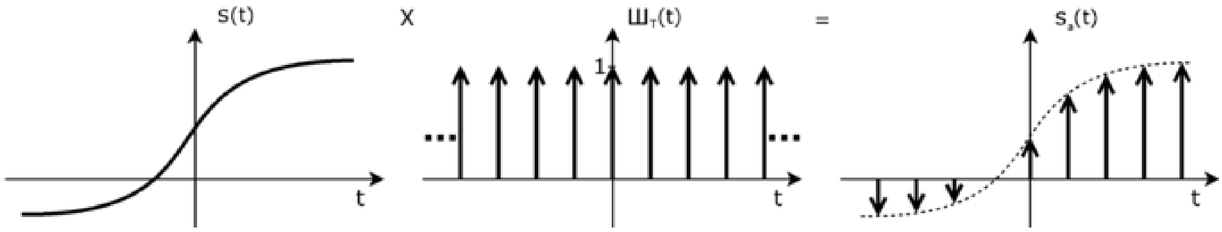
(Sampling and Reconstruction)



I. LẤY MẪU

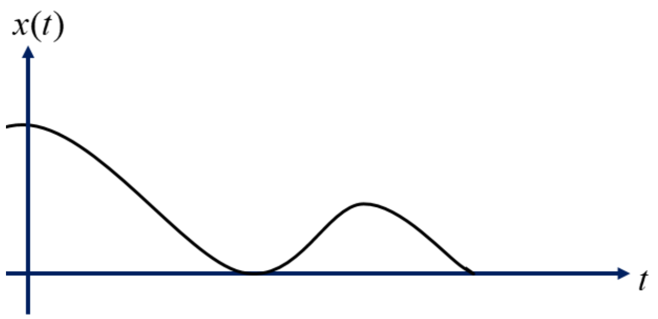
1.1 Định nghĩa

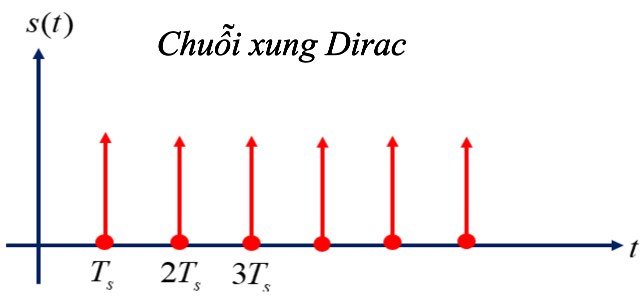
+ Lấy mẫu là quá trình chuyển đổi từ một tín hiệu có biên độ liên tục theo thời gian trở thành một tín hiệu có biên độ rời rạc theo thời gian.

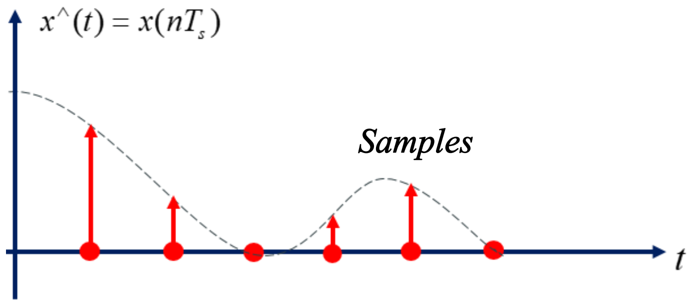


CT (Continuous Time) *DT (Discrete Time)*

1.2 Dạng sóng







$T_s = \dfrac{1}{f_s}$, f_s*: sampling frequency/rate*

1.3 Mô hình toán học

Ta có: $x\hat{}(t) = x(nT_s) = x(t).s(t)$, trong đó:

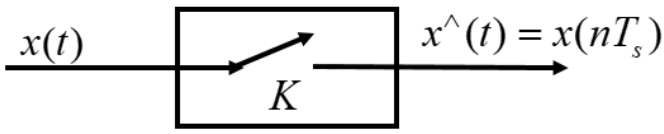
+ $x(nT_s)$ là tín hiệu rời rạc sau khi đã lấy mẫu.

+ $x(t)$ là tín hiệu liên tục ban đầu.

+ $s(t)$ là chuỗi xung lấy mẫu.

Như vậy, tín hiệu rời rạc bằng tín hiệu liên tục nhân với chuỗi xung lấy mẫu.

1.4 Mô hình mạch điện



Khóa K được đóng tại các thời điểm $t = nT_s$ theo chuỗi xung lấy mẫu s(t). Trên thực tế, các khóa K là các chuyển mạch điện tử như Transistor, CMOS,..

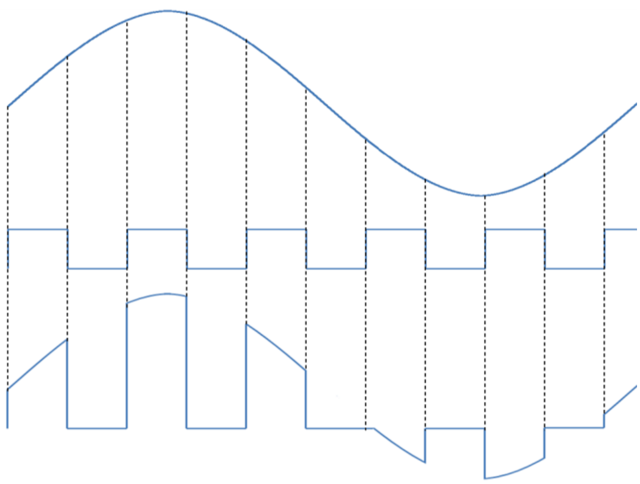
Trên thực tế, khóa K cần một thời gian τ để duy trì khi được đóng chứ không thể đóng ngắt ngay lập tức. Do đó, khi lấy mẫu bằng chuỗi xung dirac được gọi là lấy mẫu lý tưởng.

1.5 Phân loại lấy mẫu

+ Lấy mẫu lý tưởng: Giả định mô hình lấy mẫu với chuỗi xung lấy mẫu là chuỗi xung lý tưởng (chuỗi xung dirac). $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$

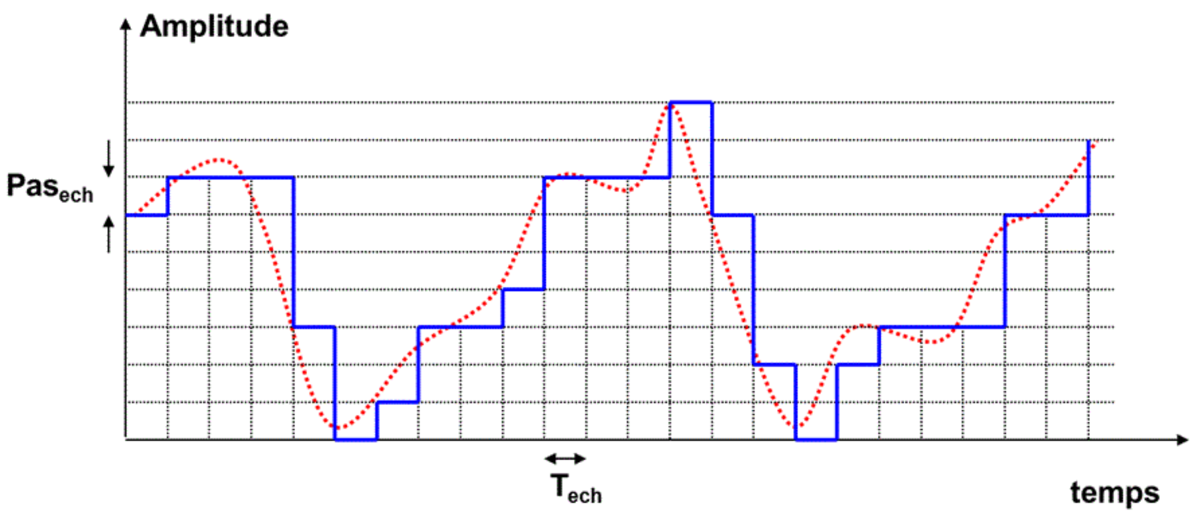
$\rightarrow$ $x^{\wedge}(t) = x(t).s(t) = x(t).\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) = ... + x(0)\delta(t) + x(T_s).\delta(t - T_s) + ...$

+ Lấy mẫu thực tế: Lấy mẫu với chuỗi xung lấy mẫu là một chuỗi xung vuông với biên độ là 1 đơn vị, độ rộng là τ và chu kì là T_s với $\tau << T_s$ $\rightarrow$ τ chính là thời gian khóa K đóng.



$\rightarrow$ Kết quả thu được các mẫu có độ rộng τ nằm tại các vị trí thời gian $t = nT_s$ và có biên độ bằng với $x(t)$ trong khoảng τ tương ứng $\rightarrow$ Lấy mẫu tự nhiên (Natural Sampling).

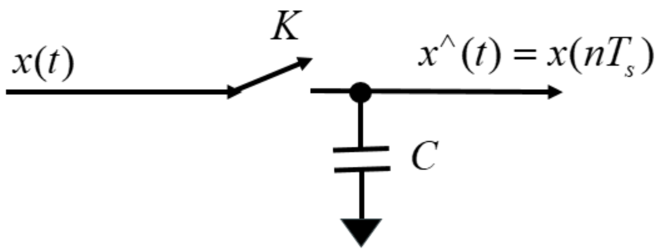
**Lượng tử (Quantization):*



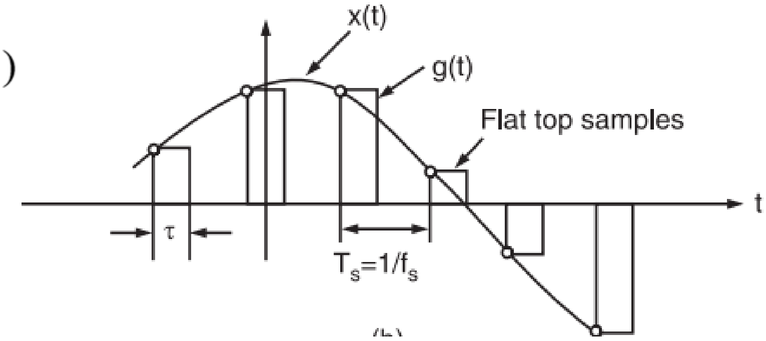
Tín hiệu sau khi rời rạc hóa có vô số biên độ khác nhau và số lượng mẫu phụ thuộc vào tần số lấy mẫu f_s tương ứng. Tần số lấy mẫu càng lớn thì tín hiệu sau khi khôi phục càng trung thực, tuy nhiên để mã hóa hết số lượng các giá trị biên độ đó thì tổ hợp mã (số bit) mã hóa sẽ rất lớn đòi hỏi về bộ nhớ lưu trữ phải lớn, đồng thời băng thông tín hiệu sẽ lớn. Do đó cần phải giảm số lượng mẫu đi bằng cách chia trục biên độ thành các khoảng lượng tử với mức lượng tử tương ứng.

→ Lượng tử là quá trình chuyển đổi từ một tập mẫu có biên độ bất kì thành một tập mẫu có biên độ hữu hạn cho trước.

+ Lấy mẫu với đỉnh bằng phẳng (*Flat – Top Sampling)*

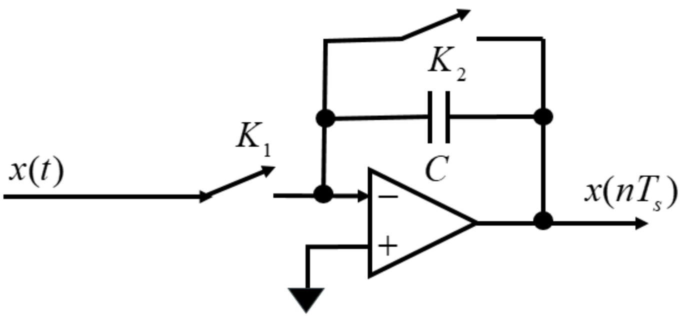


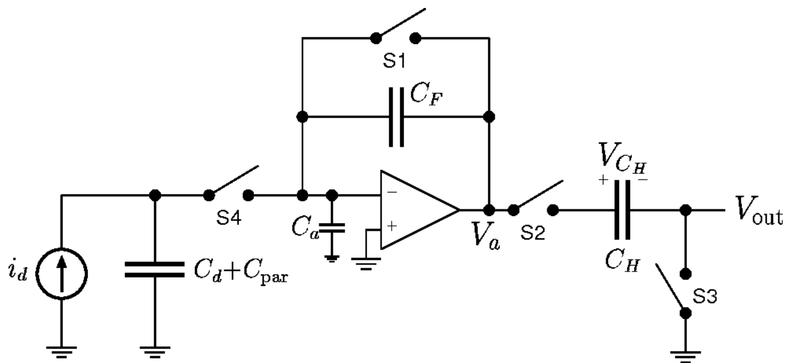
Lấy mẫu và giữ (Sampling & Hold)



→ Thời gian tồn tại của mẫu khá lớn, chiếm nhiều năng lượng của tín hiệu. Tín hiệu có độ rộng các lớn thì năng lượng càng lớn → Cần thiết ngắt bỏ thời gian xả của tụ.

+ Lấy mẫu dạng tích xả (*Intergrating & Dumping)*





1.6 Phân tích lấy mẫu trên miền tần số

$$x^\wedge(t) = x(nT_s) = x(t).s(t) \rightarrow x^\wedge(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X(\omega) * S(\omega)\right]$$ (*) , trong đó:

+ $X^\wedge(\omega)$ là phổ của tín hiệu rời rạc.

+ $X(\omega)$ là phổ của tín hiệu liên tục.

+ $S(\omega)$ là phổ của tín hiệu lấy mẫu.

+ Khảo sát lấy mẫu lý tưởng với: $s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-nT_s\right)$

→ Trên miền tần số: $S\left(\omega\right)=\omega_s\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-n\omega_s\right),\ \omega_s=\dfrac{2\pi}{T_s}=2\pi f_s$ (**)

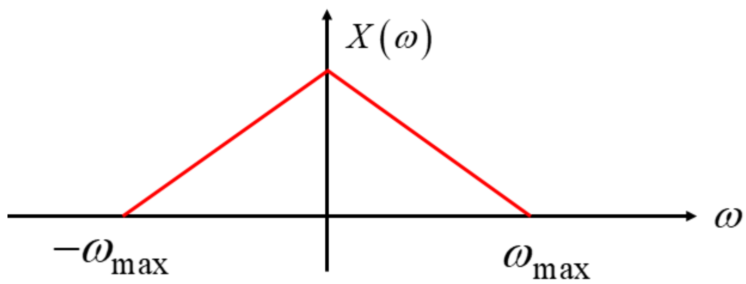
Thay (**) vào (*) ta có:

$$X^{\wedge}\left(\omega\right)=f_s X\left(\omega\right)*\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-n\omega_s\right)$$

$$=f_s\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X\left(\omega-n\omega_s\right)$$

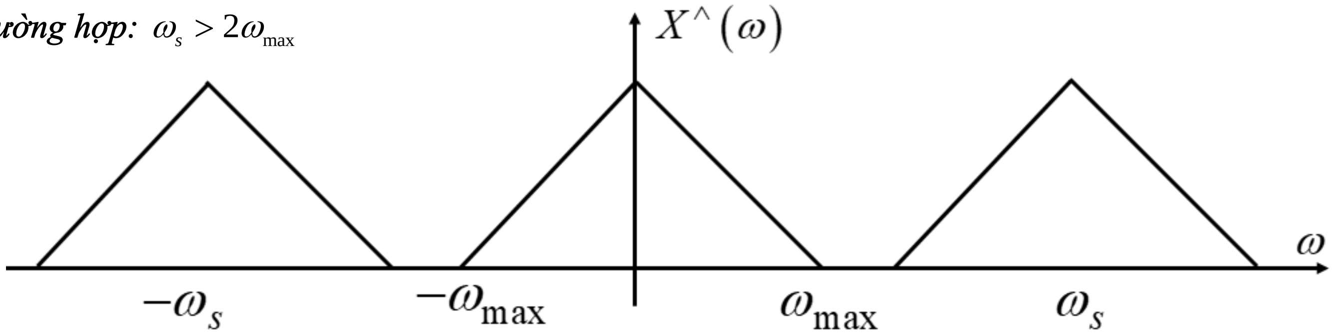
$$=f_s\left[\ldots+X\left(\omega+n\omega_s\right)+X\left(\omega\right)+X\left(\omega-n\omega_s\right)+\ldots\right]$$

Phổ của tín hiệu rời rạc sau khi lấy mẫu không những bao gồm phổ của tín hiệu trước khi lấy mẫu $X\left(\omega\right)$ mà còn bao gồm các thành phần lặp lại của $X\left(\omega\right)$ tại các tần số $n\omega_s$ (bản sao - Copies/Replica).

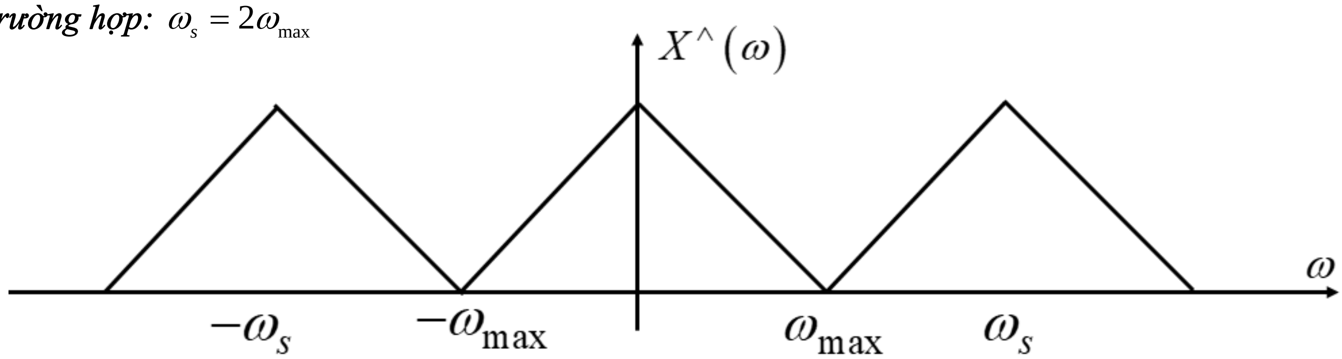


Phổ của tín hiệu trước khi lấy mẫu.

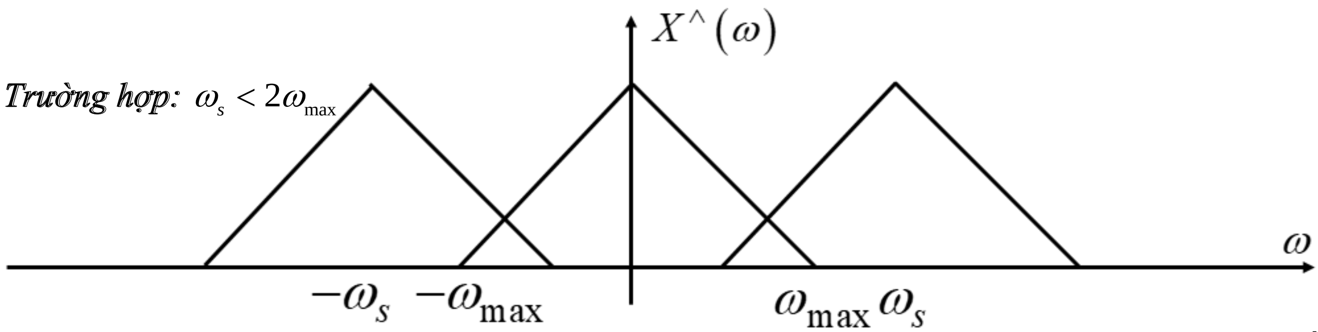
Trường hợp: $\omega_s>2\omega_{\max}$



Trường hợp: $\omega_s=2\omega_{\max}$



Trường hợp: $\omega_s<2\omega_{\max}$



1.7 Định lý Nyquist

Tần số lấy mẫu phải lớn hơn hoặc bằng hai lần tần số lớn nhất của tín hiệu đó.

$$\omega_s \geq 2\omega_{\max} \quad hay \quad f_s \geq 2f_{\max}$$

+ **Giới hạn Nyquist:** $2f_{\max}$ *hay* $2\omega_{\max}$

+ **Tần số Nyquist:** $f_s/2$

+ **Khoảng Nyquist (*Interal*):** $\left[-\frac{f_s}{2};\frac{f_s}{2}\right]$

+ **Nếu** $f_s \gg 2f_{\max}$: quá lấy mẫu (*Over Sampling*)

+ **Nếu** $f_s < 2f_{\max}$: dưới lấy mẫu (*Under Sampling*)

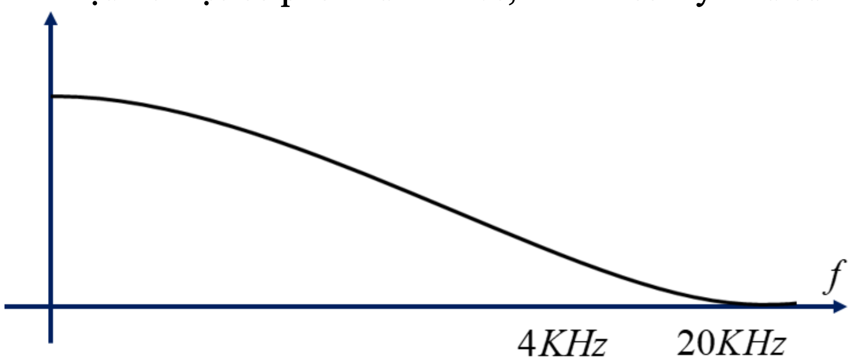
+ Up/Down Sampling → Multirate Signal Processing.

Ví dụ 1: Tiếng nói có $f_{\max} = 4KHz \Rightarrow f_s \geq 2f_{\max} = 8KHz$. Chọn $f_s = 8KHz$

Như vậy $f_s = 8KHz = 8000$ mẫu/giây (samples/sec), nếu mã hóa 8 bit/ mẫu.

→ Tốc độ 8x8000 bps = 64 Kbps.

Ví dụ 2: Một tín hiệu liên tục có phổ như hình vẽ, tìm tần số lấy mẫu của tín hiệu trên.

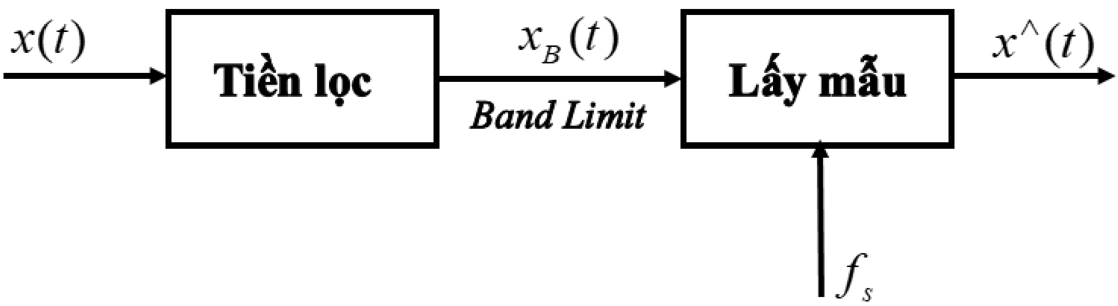


Giải:

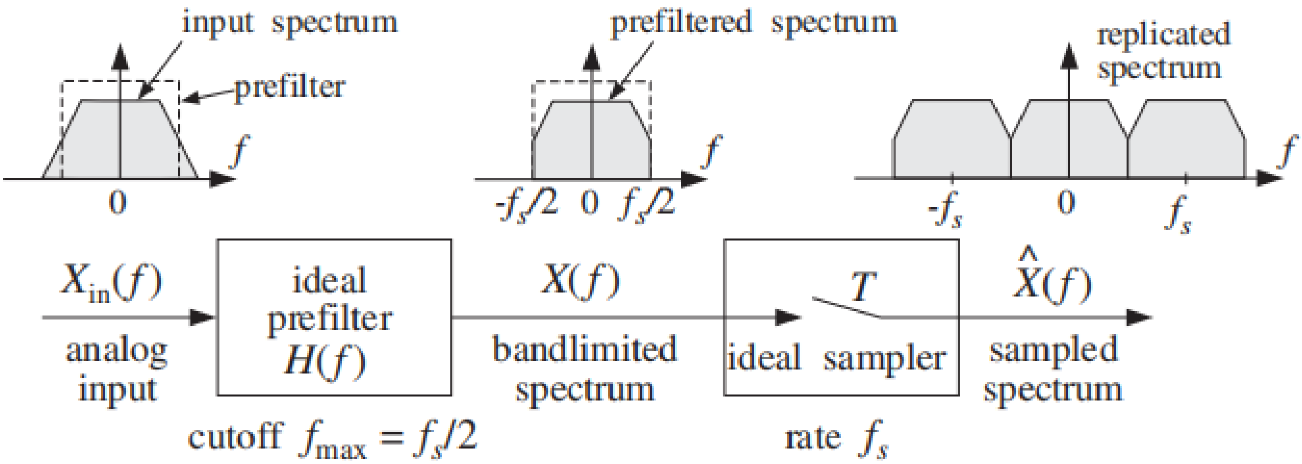
+ Nếu chọn $f_{\max} = 20KHz \Rightarrow f_s \geq 40KHz$ hoặc $f_{\max} = 4KHz \Rightarrow f_s \geq 8KHz$

Như vậy, nếu như tần số lấy mẫu càng lớn thì chi phí cần thiết của hệ thống tạo xung sẽ tăng lên để đạt được tốc độ đó, cũng như số mẫu sẽ tăng và băng thông tăng đáng kể. Để tối ưu hệ thống, ta sẽ chọn tần số lấy mẫu là 8KHz cũng như là giải quyết vấn đề chồng phổ do miền năng lượng từ 4 KHz đến 20 KHz gây ra bằng cách loại bỏ miền năng lượng không đáng kể đó ra khỏi hẳn tín hiệu ban đầu → Sử dụng mạch lọc thông thấp.

1.8 Bộ tiền lọc chống chồng phổ *(Anti-aliasing Pre – filter)*



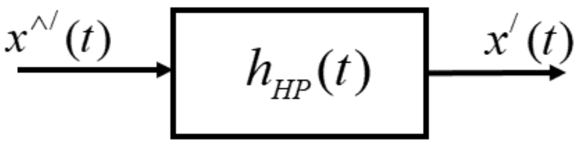
+ Tiền lọc: Bộ lọc thông thấp (LPF – Low Pass Filter) có tần số cắt $f_c = f_s / 2$



II. SỰ HỒI PHỤC TÍN HIỆU (*Reconstruction of Signal)*

2.1 Khái niệm

+ Sự hồi phục tín hiệu là quá trình chuyển đổi từ tín hiệu rời rạc trở về lại tín hiệu liên tục.



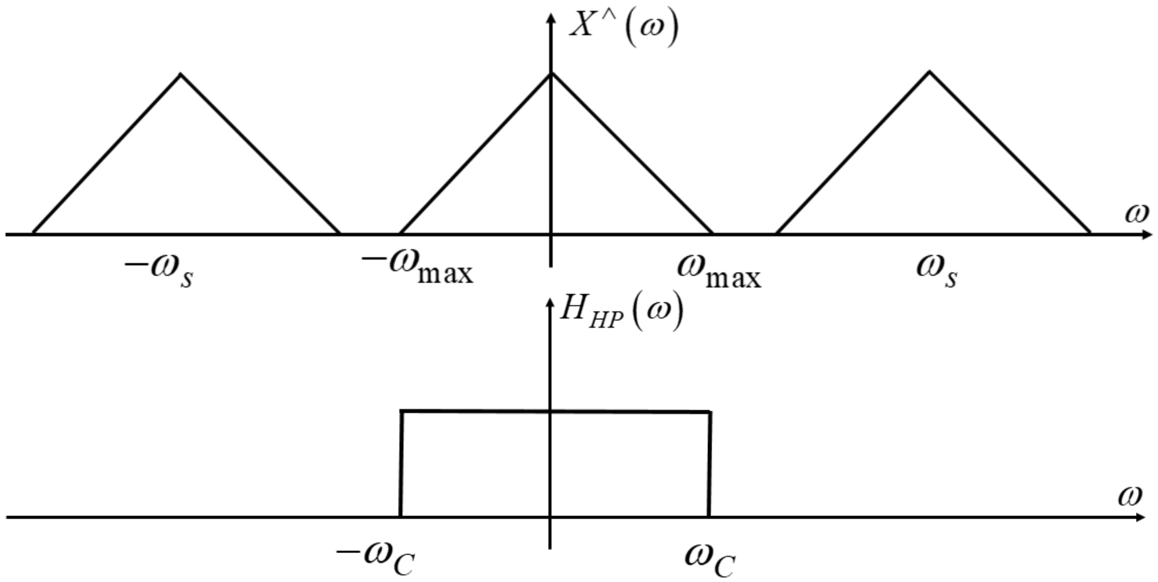
+ Trên miền thời gian: Ta có: $x^{/}(t) = x^{\wedge/}(t) * h_{HP}(t)$, với $h_{HP}(t)$ là đáp ứng xung của bộ hồi phục trên miền thời gian.

+ Trên miền tần số: $X^{/}(\omega) = X^{\wedge/}(\omega).H_{HP}(\omega)$, với $H_{HP}(\omega)$ là đáp ứng tần số của bộ hồi phục.

+ **Xét trường hợp lý tưởng**: Tín hiệu rời rạc sau khi lấy mẫu, đưa vào bộ hồi phục ngay.

$\Rightarrow x^{\wedge/}(t) = x^{\wedge}(t) = x(nT_s),\ n \in \mathbb{Z}$ thay vào (*) ta được: $X^{/}(\omega) = X^{\wedge}(\omega).H_{HP}(\omega)$ (**)

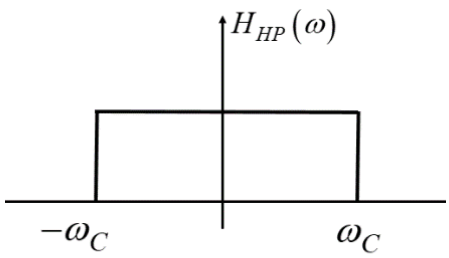
+ **Hồi phục trung thực:** Tín hiệu sau khi hồi phục giống với tín hiệu ban đầu trước khi lấy mẫu: $x(t) = x^{/}(t)$ thay vào (**) ta được $X^{/}(\omega) = X^{\wedge}(\omega).H_{HP}(\omega) = X(\omega)$ → Thiết kế một mạch điện có đáp ứng tần số $H_{HP}(\omega)$ để tái tạo lại $X(\omega)$ từ $X^{\wedge}(\omega)$.



→ Như vậy, bộ hồi phục thực chất là một bộ lọc thông thấp (LPF), với tần số cắt ω_C *(Cut-off)* thỏa mãn: $\omega_{\max} \le \omega_C \le \omega_S - \omega_{\max}$

+ Đặc biệt: Khi $\omega_S = 2\omega_{\max} \Rightarrow \omega_C = \frac{\omega_{\max}}{2}$ → Tần số Nyquist.

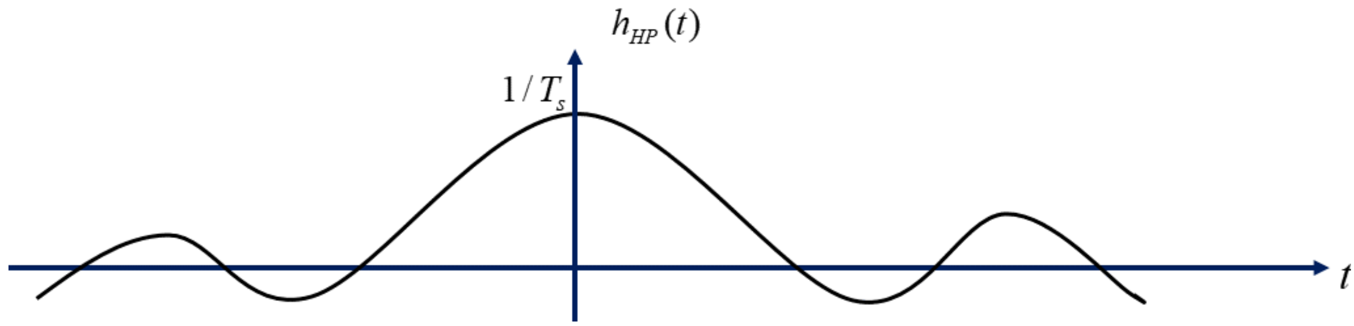
2.2 Bộ hồi phục lý tưởng



+ LPF lý tưởng: $H_{HP}(\omega) = \prod\left(\dfrac{\omega}{2\omega_C}\right) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_C \\ 0, & |\omega| > \omega_C \end{cases}$

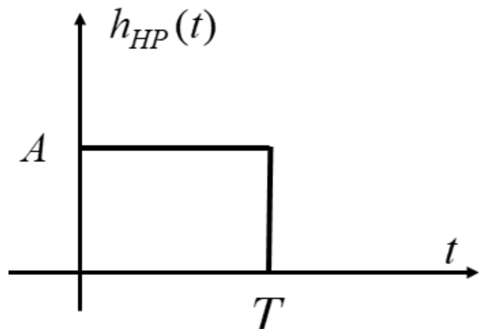
+ Trên miền thời gian: $Sa(\omega_0 t) \leftrightarrow \dfrac{\pi}{\omega_0}\prod\left(\dfrac{\omega}{2\omega_0}\right) \Rightarrow Sa(\omega_C t) \leftrightarrow \dfrac{\pi}{\omega_C}\prod\left(\dfrac{\omega}{2\omega_C}\right)$

Với $\omega_C = \dfrac{\omega_s}{2} \Rightarrow h_{HP}(t) = \dfrac{1}{T_s} Sa\left(\dfrac{\omega_S}{2}t\right) = \dfrac{1}{T_s}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\omega_S}{2}t\right)}{\dfrac{\omega_S}{2}t}$



→ Như vậy, để trên miền tần số thu được xung vuông thì trên miền thời gian, ta phải lưu trữ một hàm Sa với biên độ vô hạn, vô số mẫu→ tiêu tốn rất nhiều bộ nhớ→ chỉ phù hợp trên lý thuyết.

2.3 Bộ hồi phục thực tế



Chọn: $h_{HP}(t) = A\prod\left(\dfrac{t - T/2}{T}\right)$, *tìm A và T để*

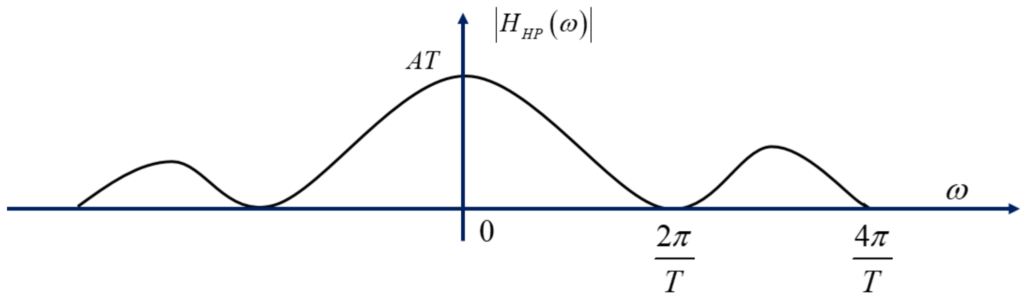
$H_{HP}(\omega)$ *thỏa mãn hồi phục trung thực.*

$$X(\omega) = X'(\omega)$$

$$A\prod\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow ATSa\left(\frac{\omega T}{2}\right) \;\&\; x(t - t_0) \leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

→ Như vậy, $h_{HP}(t) = A\prod\left(\dfrac{t - T/2}{T}\right) \Rightarrow H_{HP}(\omega) = ATSa\left(\dfrac{\omega T}{2}\right)e^{-j\omega\frac{T}{2}}$

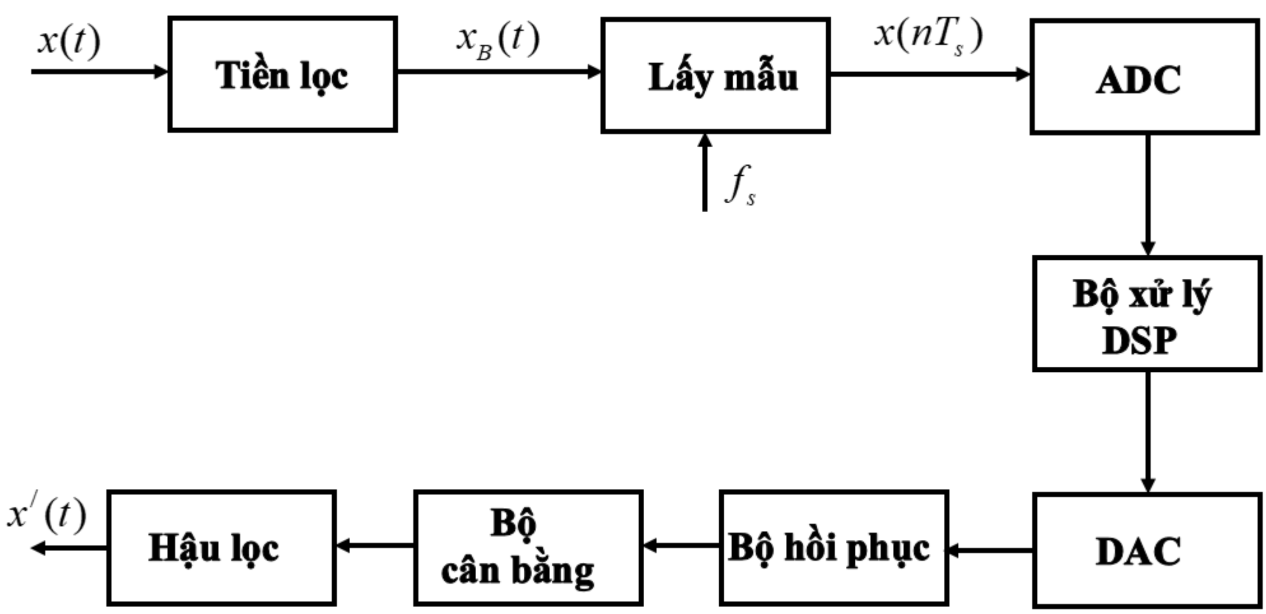
+ Độ lớn: $|H_{HP}(\omega)| = AT\left|Sa\left(\dfrac{\omega T}{2}\right)\right|$



$\Rightarrow |X^{/}(\omega)| = |X^{\wedge}(\omega)|.|H_{HP}(\omega)| = |X(\omega)|$, để đạt được điều đó thì: $\begin{cases} \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\omega_s}{2} \Rightarrow T = \dfrac{2\pi}{\omega_s}.2 = 2T_s \\ AT = 1 \ \ \Rightarrow A = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{2T_s} \end{cases}$, tuy nhiên không thể làm được điều đó bởi vì điều kiện “đủ rộng, đủ bằng phẳng” không có trên thực tế do tính chất biến thiên của hàm Sa. Để làm được điều đó, cần phải bù đáp ứng tần số từ $-\frac{\omega_s}{2}$ đến $\frac{\omega_s}{2}$ → sử dụng bộ cân bằng.

+ Do đáp ứng trên miền tần số $|H_{HP}(\omega)|$ thực tế còn tồn tại các múi (*lobe*) phụ và $X^{\wedge}(\omega)$ tồn tại các bản sao $X(\omega - n\omega_s),\ n \neq 0$ → Tồn tại các thành phần năng lượng không mong muốn tại $n\omega_s, n \neq 0$ → Các thành phần này được gọi là nhiễu ảnh (*Image Noise*)→ Dùng bộ lọc thông thấp để triệt bỏ các thành phần nhiễu ảnh (bộ lọc chống nhiễu ảnh *Anti-Image Post – Filter*).

2.3 Sơ đồ khối của quá trình xử lý số tín hiệu



2.4 Nghiên cứu DSP

+ Phần mềm: Các nền tảng (FGPA/ASIC,...), các ngôn ngữ lập trình (C, C++, Python, Verilog, VHDL).

+ Phần cứng: ADC/DAC tốc độ cao (SAR - *Successive-Approximation Register*).

➢ BÀI TẬP [ORF_55]

1.1 A wheel, rotating at 6 Hz, is seen in a dark room by means of a strobe light flashing at a rate of 8 Hz. Determine the apparent rotational speed and sense of rotation of the wheel. Repeat the question if the flashes occur at 12 Hz, 16 Hz, or 24 Hz.

Dịch nghĩa: Một bánh xe quay ở tốc độ 6 Hz, được quan sát trong một căn phòng tối, thông qua phương tiện là một bộ nhấp nháy đèn ở tốc độ 8 Hz. Xác định tốc độ quay vòng bên ngoài và hướng quay của bánh xe. Lặp lại câu hỏi nếu bộ nháy xảy ra với tốc độ 12 Hz, 16 Hz và 24 Hz.

1.2 Một tín hiệu tương tự $x(t)=10\sin(2\pi t)+10\sin(8\pi t)+5\sin(12\pi t)$, với t là giây, được lấy mẫu với tốc độ $f_s=5Hz$. Xác định tín hiệu $x_a(t)$ gây chồng phổ với tín hiệu $x(t)$. Chứng minh rằng hai tín hiệu có cùng giá trị mẫu hay chứng minh rằng: $x(nT)=x_a(nT)$. Lặp lại câu hỏi trên với tần số lấy mẫu lúc này là 10 Hz.

Giải: $x(t)=10\sin(2\pi t)+10\sin(8\pi t)+5\sin(12\pi t),\ f_s=5Hz,\ t(s)$

a) Với tần số lấy mẫu $f_s=5Hz$, ta có khoảng Nyquist: $N=[-2,5Hz;\ 2,5Hz]$.

Tín hiệu $x(t)$ bao gồm 3 tần số: 1 Hz, 4 Hz và 6Hz.

Xét lần lượt các tần số:

+ $f_1=1Hz\ \in N\Rightarrow$ Tín hiệu này không gây chồng phổ.

+ $f_2=4Hz\ \notin N\Rightarrow$ Tín hiệu này gây chồng phổ, với các tần số lặp lại:

$f_2-nf_s=4-5n=-1,9,-6,14,...$ và $-1\in N$

+ $f_3=6Hz\ \notin N\Rightarrow$ Tín hiệu này gây chồng phổ, với các tần số lặp lại:

$f_3-nf_s=6-5n=1,11,-4,16...$ và $1\in N$

$$\Rightarrow x_a(t)=10\sin(2\pi t)+10\sin\left[2\pi(-1)t\right]+5\sin\left[2\pi(1)t\right]=5\sin(2\pi t)$$

b) Ta có: $\begin{cases} x(t)\to x(nT) \\ x_a(t)\to x_a(nT)=5\sin(2\pi.nT)=5\sin\left(2\pi.n.\dfrac{1}{f}\right)=5\sin\left(\dfrac{n2\pi}{5}\right)\end{cases}$

Mặc khác:

$$x(nT)=x\left(\frac{n}{5}\right)=10\sin\left(\frac{n2\pi}{5}\right)+10\sin\left(\frac{n8\pi}{5}\right)+5\sin\left(\frac{n12\pi}{5}\right)$$
$$=10\sin\left(\frac{n2\pi}{5}\right)+10\sin\left(2\pi-\frac{n2\pi}{5}\right)+5\sin\left(2\pi+\frac{n2\pi}{5}\right)\ =5\sin\left(\frac{n2\pi}{5}\right)=x_a(nT)\forall n$$

1.3 Một tín hiệu $x(t)=\cos(5\pi t)+4\sin(2\pi t)\sin(3\pi t)$, với t là mili giây, được lấy mẫu với tốc độ 3 kHz. Xác định tín hiệu $x_a(t)$ gây chồng phổ với tín hiệu $x(t)$. Xác định thêm 2 tín hiệu $x_1(t)$ và $x_2(t)$ khác nhau và khác với tín hiệu $x(t)$ ban đầu sao cho chúng cũng gây ra chồng phổ giống tín hiệu $x_a(t)$.

1.4 Cho tín hiệu $x(t)=\cos(8\pi t)+2\cos(4\pi t)\cos(6\pi t)$, với t là giây. Xác định tín hiệu $x_a(t)$ gây chồng phổ với tín hiệu $x(t)$ nếu tốc độ lấy mẫu là 5 Hz. Lặp lại với tốc độ lấy mẫu là 9 Hz.

1.5 Cho tín hiệu tương tự $x(t)=\sin(6\pi t)\left[1+2\cos(4\pi t)\right]$, với t là mili giây, được lấy mẫu với tốc độ 4 kHz. Các mẫu thu được ngay lập tức được khôi phục bởi bộ hồi phục lý tưởng. Xác định tín hiệu tương tự $x_a(t)$ ở ngõ ra bộ khôi phục.

1.6 Một tín hiệu tương tự $x(t)=4\cos(2\pi t)\cos(8\pi t)\cos(12\pi t)$, với t là giây, được lấy mẫu với tốc độ $f_s=10\,Hz$. Xác định tín hiệu $x_a(t)$ gây chồng phổ với tín hiệu $x(t)$. Chứng minh rằng hai tín hiệu có cùng giá trị mẫu hay chứng minh rằng: $x(nT)=x_a(nT)$. Lặp lại câu hỏi trên với tần số lấy mẫu lúc này là 12 Hz.

1.9 Xét một tín hiệu âm thanh sau: $x(t)=\sin(10\pi t)+\sin(20\pi t)+\sin(60\pi t)+\sin(90\pi t)$ với t là mili giây, tín hiệu trên được đi qua bộ tiền lọc $H(f)$ và sau đó được lấy mẫu với tốc độ 40 kHz. Các mẫu thu được ngay lập tức được khôi phục bằng bộ hồi phục lý tưởng. Xác định ngõ ra $y_a(t)$ sau khi qua bộ hồi phục trong các trường hợp sau và so sánh nó với phần tín hiệu tai người có thể nghe được trong tín hiệu $x(t)$ ban đầu.

a) Không qua tiền lọc hay $H(f)=1$

b) $H(f)$ là bộ lọc lý tưởng có tần số cắt là 20 kHz.

c) $H(f)$ là bộ lọc thực tế có băng thông phẳng lên tới 20 kHz và suy giảm 48 dB/octave ở ngoài khoảng đó.

1.7 Consider the periodic triangular waveform with period $T_0 = 1$ sec shown in Fig. 1.8.1. The waveform is sampled at rate $f_s = 8$ Hz and the resulting samples are reconstructed by an *ideal* reconstructor. Show that the signal $x_{\text{rec}}(t)$ that will appear at the output of the reconstructor will have the form:

$$x_{\text{rec}}(t) = A\sin(2\pi f_1 t) + B\sin(2\pi f_2 t)$$

and determine the numerical values of the frequencies f_1, f_2 and amplitudes A, B.

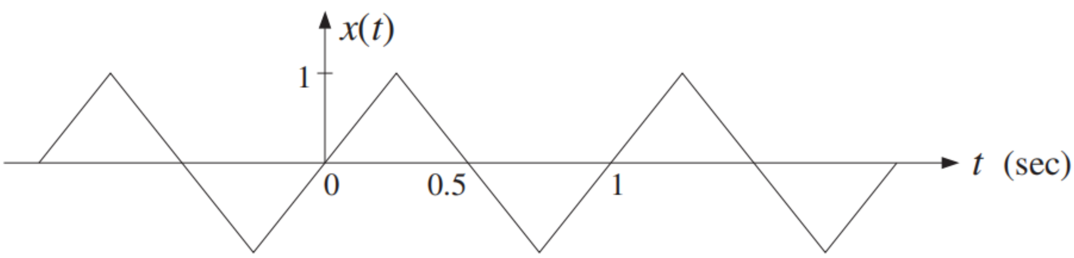


Fig. 1.8.1 Triangular waveform of Problem 1.7.

➢ [BÀI TẬP MẪU – ÁP DỤNG]

Example 1.4.5: The signal

$$x(t) = \sin(\pi t) + 4\sin(3\pi t)\cos(2\pi t)$$

where t is in msec, is sampled at a rate of 3 kHz. Determine the signal $x_a(t)$ aliased with $x(t)$. Then, determine two other signals $x_1(t)$ and $x_2(t)$ that are aliased with the same $x_a(t)$, that is, such that $x_1(nT) = x_2(nT) = x_a(nT)$.

Solution: To determine the frequency content of $x(t)$, we must express it as a sum of sinusoids. Using the trigonometric identity $2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$, we find:

$$x(t) = \sin(\pi t) + 2\left[\sin(3\pi t + 2\pi t) + \sin(3\pi t - 2\pi t)\right] = 3\sin(\pi t) + 2\sin(5\pi t)$$

Thus, the frequencies present in $x(t)$ are $f_1 = 0.5$ kHz and $f_2 = 2.5$ kHz. The first already lies in the Nyquist interval $[-1.5, 1, 5]$ kHz so that $f_{1a} = f_1$. The second lies outside and can be reduced mod f_s to give $f_{2a} = f_2 \bmod (f_s) = 2.5 \bmod (3) = 2.5 - 3 = -0.5$. Thus, the given signal will "appear" as:

$$\begin{aligned} x_a(t) &= 3\sin(2\pi f_{1a} t) + 2\sin(2\pi f_{2a} t) \\ &= 3\sin(\pi t) + 2\sin(-\pi t) = 3\sin(\pi t) - 2\sin(\pi t) \\ &= \sin(\pi t) \end{aligned}$$

To find two other signals that are aliased with $x_a(t)$, we may shift the original frequencies f_1, f_2 by multiples of f_s. For example,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 3\sin(7\pi t) + 2\sin(5\pi t) \\ x_2(t) &= 3\sin(13\pi t) + 2\sin(11\pi t) \end{aligned}$$

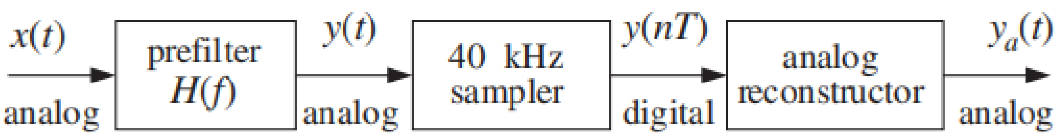
where we replaced $\{f_1, f_2\}$ by $\{f_1 + f_s, f_2\} = \{3.5, 2.5\}$ for $x_1(t)$, and by $\{f_1 + 2f_s, f_2 + f_s\} = \{6.5, 5.5\}$ for $x_2(t)$. □

Example 1.4.7: A sound wave has the form:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2A\cos(10\pi t) + 2B\cos(30\pi t) \\ &\quad + 2C\cos(50\pi t) + 2D\cos(60\pi t) + 2E\cos(90\pi t) + 2F\cos(125\pi t) \end{aligned}$$

where t is in milliseconds. What is the frequency content of this signal? Which parts of it are audible and why?

This signal is prefiltered by an analog prefilter $H(f)$. Then, the output $y(t)$ of the prefilter is sampled at a rate of 40 kHz and immediately reconstructed by an ideal analog reconstructor, resulting into the final analog output $y_a(t)$, as shown below:

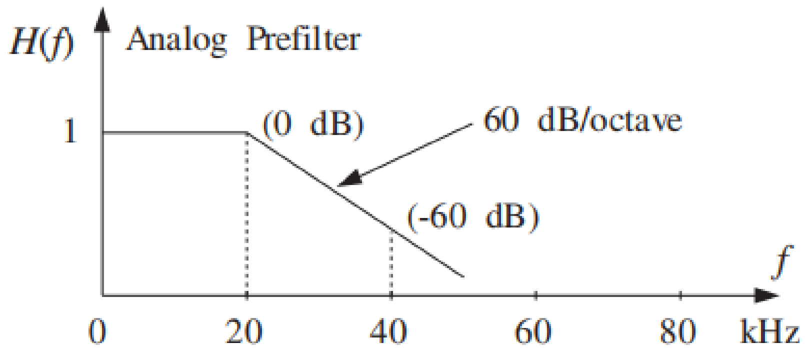


Determine the output signals $y(t)$ and $y_a(t)$ in the following cases:

(a) When there is no prefilter, that is, $H(f) = 1$ for all f.

(b) When $H(f)$ is the ideal prefilter with cutoff $f_s/2 = 20$ kHz.

(c) When $H(f)$ is a practical prefilter with specifications as shown below:



That is, it has a flat passband over the 20 kHz audio range and drops monotonically at a rate of 60 dB per octave beyond 20 kHz. Thus, at 40 kHz, which is an octave away, the filter's response will be down by 60 dB.

For the purposes of this problem, the filter's *phase response* may be ignored in determining the output $y(t)$. Does this filter help in removing the aliased components? What happens if the filter's attenuation rate is reduced to 30 dB/octave?

Solution:

$$f_A = 5 \text{ kHz} \qquad f_C = 25 \text{ kHz} \qquad f_E = 45 \text{ kHz}$$
$$f_B = 15 \text{ kHz} \qquad f_D = 30 \text{ kHz} \qquad f_F = 62.5 \text{ kHz}$$

Only f_A and f_B are audible; the rest are inaudible. Our ears filter out all frequencies beyond 20 kHz, and we hear $x(t)$ as though it were the signal:

$$x_1(t) = 2A\cos(10\pi t) + 2B\cos(30\pi t)$$

Each term of $x(t)$ is represented in the frequency domain by two peaks at positive and negative frequencies, for example, the A-term has spectrum:

The sampling process will replicate each of these peaks at multiples of $f_s = 40$ kHz. The four terms C, D, E, F lie outside the $[-20, 20]$ kHz Nyquist interval and therefore will be aliased with the following frequencies inside the interval:

$$f_C = 25 \quad \Rightarrow \quad f_{C,a} = f_C \bmod (f_s) = f_C - f_s = 25 - 40 = -15$$
$$f_D = 30 \quad \Rightarrow \quad f_{D,a} = f_D \bmod (f_s) = f_D - f_s = 30 - 40 = -10$$
$$f_E = 45 \quad \Rightarrow \quad f_{E,a} = f_E \bmod (f_s) = f_E - f_s = 45 - 40 = 5$$
$$f_F = 62.5 \quad \Rightarrow \quad f_{F,a} = f_F \bmod (f_s) = f_F - 2f_s = 62.5 - 2 \times 40 = -17.5$$

In case (a), if we do not use any prefilter at all, we will have $y(t) = x(t)$ and the reconstructed signal will be:

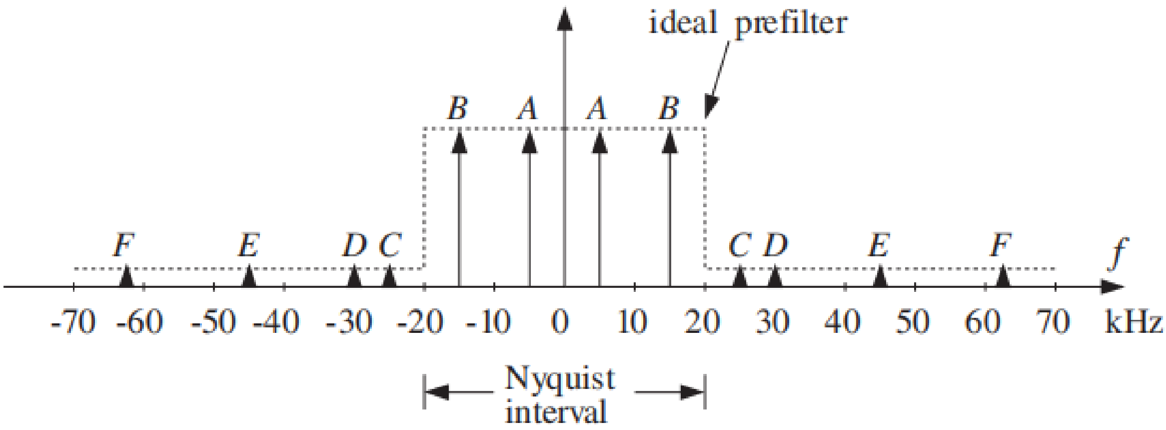
$$\begin{aligned} y_a(t) &= 2A\cos(10\pi t) + 2B\cos(30\pi t) \\ &\quad + 2C\cos(-2\pi 15t) + 2D\cos(-2\pi 10t) \\ &\quad + 2E\cos(2\pi 5t) + 2F\cos(-2\pi 17.5t) \\ &= 2(A+E)\cos(10\pi t) + 2(B+C)\cos(30\pi t) \\ &\quad + 2D\cos(20\pi t) + 2F\cos(35\pi t) \end{aligned}$$

where we replaced each out-of-band frequency with its aliased self, for example,

$$2C\cos(2\pi f_C t) \to 2C\cos(2\pi f_{C,a} t)$$

The *relative* amplitudes of the 5 and 15 kHz audible components have changed and, in addition, two *new* audible components at 10 and 17.5 kHz have been introduced. Thus, $y_a(t)$ will sound very different from $x(t)$.

In case (b), if an ideal prefilter with cutoff $f_s/2 = 20$ kHz is used, then its output will be the same as the audible part of $x(t)$, that is, $y(t) = x_1(t)$. The filter's effect on the input spectrum is to remove completely all components beyond the 20 kHz Nyquist frequency, as shown below:



Because the prefilter's output contains no frequencies beyond the Nyquist frequency, there will be no aliasing and after reconstruction the output would sound the same as the input, $y_a(t) = y(t) = x_1(t)$.

In case (c), if the practical prefilter $H(f)$ is used, then its output $y(t)$ will be:

$$\begin{aligned} y(t) &= 2A|H(f_A)|\cos(10\pi t) + 2B|H(f_B)|\cos(30\pi t) \\ &\quad + 2C|H(f_C)|\cos(50\pi t) + 2D|H(f_D)|\cos(60\pi t) \\ &\quad + 2E|H(f_E)|\cos(90\pi t) + 2F|H(f_F)|\cos(125\pi t) \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

This follows from the steady-state sinusoidal response of a filter applied to the individual sinusoidal terms of $x(t)$, for example, the effect of $H(f)$ on A is:

$$2A\cos(2\pi f_A t) \xrightarrow{H} 2A|H(f_A)|\cos(2\pi f_A t + \theta(f_A))$$

where in Eq. (1.4.7) we ignored the phase response $\theta(f_A) = \arg H(f_A)$. The basic conclusions of this example are not affected by this simplification.

Note that Eq. (1.4.7) applies also to cases (a) and (b). In case (a), we can replace:

$$|H(f_A)| = |H(f_B)| = |H(f_C)| = |H(f_D)| = |H(f_E)| = |H(f_F)| = 1$$

and in case (b):

$$|H(f_A)| = |H(f_B)| = 1, \quad |H(f_C)| = |H(f_D)| = |H(f_E)| = |H(f_F)| = 0$$

In case (c), because f_A and f_B are in the filter's passband, we still have

$$|H(f_A)| = |H(f_B)| = 1$$

To determine $|H(f_C)|, |H(f_D)|, |H(f_E)|, |H(f_F)|$, we must find how many octaves† away the frequencies f_C, f_D, f_E, f_F are from the $f_s/2 = 20$ kHz edge of the passband. These are given by:

$$\log_2\left(\frac{f_C}{f_s/2}\right) = \log_2\left(\frac{25}{20}\right) = 0.322$$

$$\log_2\left(\frac{f_D}{f_s/2}\right) = \log_2\left(\frac{30}{20}\right) = 0.585$$

$$\log_2\left(\frac{f_E}{f_s/2}\right) = \log_2\left(\frac{45}{20}\right) = 1.170$$

$$\log_2\left(\frac{f_F}{f_s/2}\right) = \log_2\left(\frac{62.5}{20}\right) = 1.644$$

and therefore, the corresponding filter attenuations will be:

at f_C: 60 dB/octave × 0.322 octaves = 19.3 dB

at f_D: 60 dB/octave × 0.585 octaves = 35.1 dB

at f_E: 60 dB/octave × 1.170 octaves = 70.1 dB

at f_F: 60 dB/octave × 1.644 octaves = 98.6 dB

By definition, an amount of A dB attenuation corresponds to reducing $|H(f)|$ by a factor $10^{-A/20}$. For example, the relative drop of $|H(f)|$ with respect to the edge of the passband $|H(f_s/2)|$ is A dB if:

$$\frac{|H(f)|}{|H(f_s/2)|} = 10^{-A/20}$$

Assuming that the passband has 0 dB normalization, $|H(f_s/2)| = 1$, we find the following values for the filter responses:

$$|H(f_C)| = 10^{-19.3/20} = \frac{1}{9}$$

$$|H(f_D)| = 10^{-35.1/20} = \frac{1}{57}$$

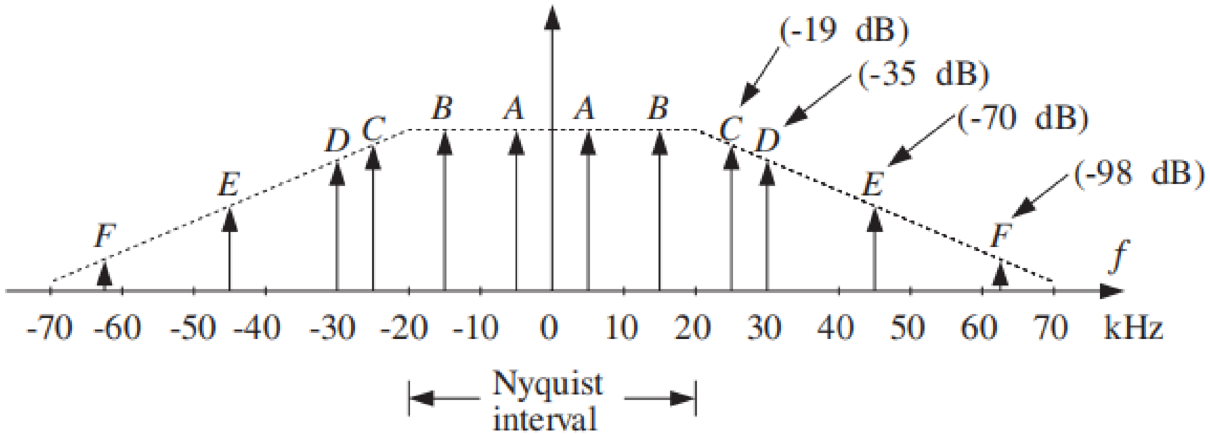
$$|H(f_E)| = 10^{-70.1/20} = \frac{1}{3234}$$

$$|H(f_F)| = 10^{-98.6/20} = \frac{1}{85114}$$

It follows from Eq. (1.4.7) that the output $y(t)$ of the prefilter will be:

$$\begin{aligned} y(t) = {} & 2A\cos(10\pi t) + 2B\cos(30\pi t) \\ & + \frac{2C}{9}\cos(50\pi t) + \frac{2D}{57}\cos(60\pi t) \\ & + \frac{2E}{3234}\cos(90\pi t) + \frac{2F}{85114}\cos(125\pi t) \end{aligned}$$

Its spectrum is shown below:



Notice how the inaudible out-of-band components have been attenuated by the prefilter, so that when they get aliased back into the Nyquist interval because of sampling, their distorting effect will be *much less*. The wrapping of frequencies into the Nyquist interval is the same as in case (a). Therefore, after sampling and reconstruction we will get:

$$\begin{aligned} y_a(t) = {} & 2\left(A + \frac{E}{3234}\right)\cos(10\pi t) + 2\left(B + \frac{C}{9}\right)\cos(30\pi t) \\ & + \frac{2D}{57}\cos(20\pi t) + \frac{2F}{85114}\cos(35\pi t) \end{aligned}$$

Now, all aliased components have been reduced in magnitude. The component closest to the Nyquist frequency, namely f_C, causes the most distortion because it does not get attenuated much by the filter.

We will see in Section 1.5.3 that the prefilter's rate of attenuation in dB/octave is related to the filter's order N by $\alpha = 6N$ so that $\alpha = 60$ dB/octave corresponds to $60 = 6N$ or $N = 10$. Therefore, the given filter is already a fairly complex analog filter. Decreasing the filter's complexity to $\alpha = 30$ dB/octave, corresponding to filter order $N = 5$, would reduce all the attenuations by half, that is,

$$\begin{aligned}
&\text{at } f_C: && 30 \text{ dB/octave} \times 0.322 \text{ octaves} = 9.7 \text{ dB}\\
&\text{at } f_D: && 30 \text{ dB/octave} \times 0.585 \text{ octaves} = 17.6 \text{ dB}\\
&\text{at } f_E: && 30 \text{ dB/octave} \times 1.170 \text{ octaves} = 35.1 \text{ dB}\\
&\text{at } f_F: && 30 \text{ dB/octave} \times 1.644 \text{ octaves} = 49.3 \text{ dB}
\end{aligned}$$

and, in absolute units:

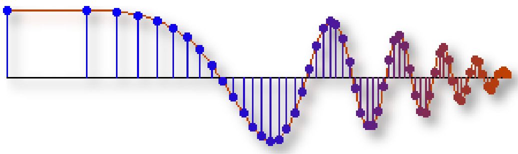
$$\begin{aligned}
|H(f_C)| &= 10^{-9.7/20} = \frac{1}{3}\\
|H(f_D)| &= 10^{-17.6/20} = \frac{1}{7.5}\\
|H(f_E)| &= 10^{-35.1/20} = \frac{1}{57}\\
|H(f_F)| &= 10^{-49.3/20} = \frac{1}{292}
\end{aligned}$$

Therefore, the resulting signal after reconstruction would be:

$$\begin{aligned}
y_a(t) = 2\left(A + \frac{E}{57}\right)\cos(10\pi t) + 2\left(B + \frac{C}{3}\right)\cos(30\pi t)\\
+ \frac{2D}{7.5}\cos(20\pi t) + \frac{2F}{292}\cos(35\pi t)
\end{aligned} \tag{1.4.9}$$

Now the C and D terms are not as small and aliasing would still be significant. The situation can be remedied by oversampling, as discussed in the next example. □

CHƯƠNG 2: TÍN HIỆU RỜI RẠC VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRÊN MIỀN THỜI GIAN



I. TÍN HIỆU RỜI RẠC

1.1 Khái niệm

+ Tín hiệu rời rạc là kết quả của quá trình lấy mẫu. $x(t) \to x^{\wedge}(t) = x(nT_s),\ n \in \mathbb{Z}$. Để đơn giản kí hiệu, ta có: $x(nT_s) \equiv x(n),\ n \in \mathbb{Z}$.

1.2 Biểu diễn tín hiệu rời rạc

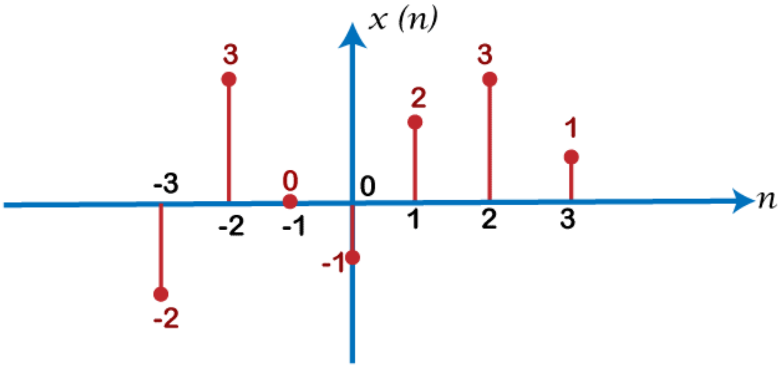
+ Dạng bảng:

n	**0**	**1**	**2**	**3**
$x(n)$	**0**	**10**	**100**	**1000**

+ Biểu thức toán (*Expression*):

Ví dụ: $x(n) = \cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$ **,** $y(n) = \begin{cases} Ae^{-2\pi}\sin(n\omega_0), & n \ge 0 \\ 0 & ,\ n < 0 \end{cases}$

+ Đồ thị (*Graph*):



+ Chuỗi (*Sequence*):

Ví dụ: $x(n) = \{0,\ -1,\ \underset{\uparrow}{0}, -2,\ 1,\ 0,\ 5,\ 9,\ 0\}$,với các số 0 vô nghĩa ta có thể lược bỏ đi

$$\Rightarrow x(n) = \{-1,\ \underset{\uparrow}{0}, -2,\ 1,\ 0,\ 5,\ 9\}$$

Mũi tên mặc định ở vị trí đầu tiên nếu không chú thích mũi tên, $y(n) = \{2, 0, 3, -1\} \Rightarrow y(0) = 2$.

1.3 Đặc trưng của tín hiệu rời rạc (*Features*):

+ Năng lượng: $E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$, nếu $0 < E_x < \infty$ hay năng lượng hữu hạn thì tín hiệu trên được gọi là tín hiệu năng lượng.

Ví dụ: Tìm năng lượng của $x(n) = 3^{-|n|}$

Các công thức tính tổng: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, $|q| < 1$ *và* $\sum_{n=k_1}^{k_2} r^n = \frac{r^{k_1} - r^{k_2+1}}{1-r}$.

Áp dụng ta có: $x(n) = \begin{cases} 3^{-n} & , n \geq 0 \\ 3^n & , n < 0 \end{cases}, \begin{cases} n \geq 0 \Leftrightarrow n \in [0; +\infty) \\ n < 0 \Leftrightarrow n \in (-\infty; 0) \;\; hay \;\; n \in (-\infty; -1] \end{cases}$

$$\Rightarrow E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (3^n)^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} (3^{-n})^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} (3^{-n})^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} (3^{-n})^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (3^{-n})^2 - \left(3^{-0}\right)^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} (3^{-n})^2$$

$$= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n - 1 = 2.\frac{1}{1-\frac{1}{9}} - 1 = \frac{5}{4} \; (dvnl)$$

+ Công suất:

- **Công suất trong khoảng thời gian hữu hạn từ $n = N \rightarrow n = M$.**

$$\Rightarrow P_x = \frac{1}{M - N + 1} \sum_{n=N}^{M} |x(n)|^2$$ **:** năng lượng trung bình.

- **Công suất của tín hiệu không tuần hoàn:**

$$\Rightarrow P_x = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

- **Công suất của tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ N mẫu:** $x(n)$ được gọi là tuần hoàn với chu kỳ N mẫu nếu: $\exists N_{\min} \,|\, x(n) = x(n + mN),\ m \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

Ví dụ 1: Khảo sát tính tuần hoàn của các tín hiệu sau:

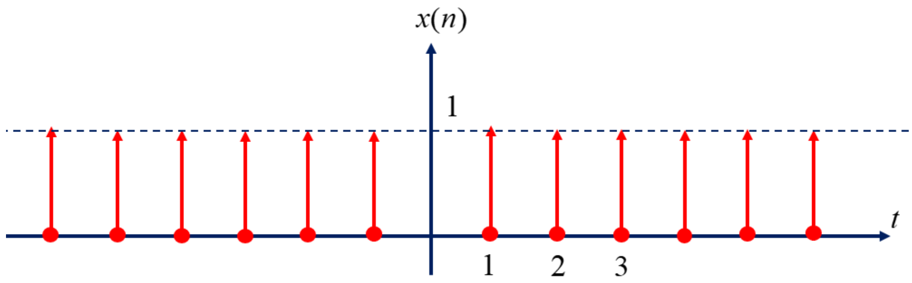
a) $x(n) = 1$ b) $x(n) = (-1)^n$ c) $x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{3} n\right)$

d) $x(n) = 4\cos\left(\frac{\pi}{3} n\right) + 3\sin\left(\frac{\pi}{4} n\right)$ e) $x(n) = \sin(3n)$

f) $x(n) = 6\sin\left(\frac{11\pi}{25} n\right)$

Giải:

a) Tín hiệu đã cho tuần hoàn với chu kỳ N= 1 mẫu.



b) Chu kỳ N=2 mẫu.

Ví dụ 2: Tính công suất:

a) Các tín hiệu tuần hoàn ở câu a của **Ví dụ 1.**

b) Với $x(n)=\begin{cases}1, & n\ge 0\\ 0, & n<0\end{cases}$

Giải:

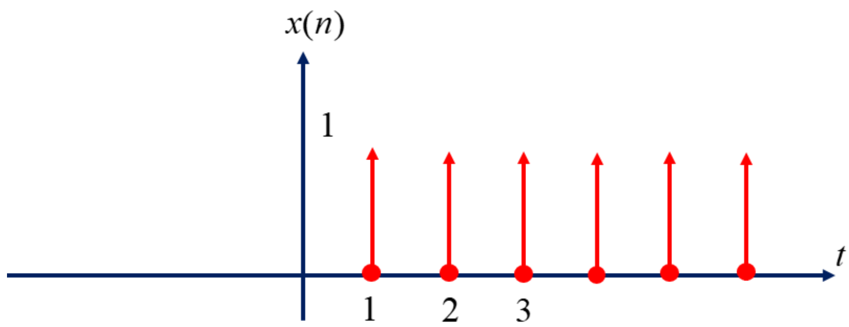
a) Với $x(n)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}n\right)$, có chu kỳ tuần hoàn $N=\dfrac{2\pi}{\omega_0}=\dfrac{2\pi}{\pi/3}=6$ mẫu.

$$\Rightarrow P_x=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}x^2(n)=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}\cos^2\left(\frac{\pi}{3}n\right)=\frac{1}{6}\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{3}.0\right)+...+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}.5\right)\right]$$

b) $x(n)=\begin{cases}1, & n\ge 0\\ 0, & n<0\end{cases}$

Nhận thấy, tín hiệu đã cho là tín hiệu không tuần hoàn.

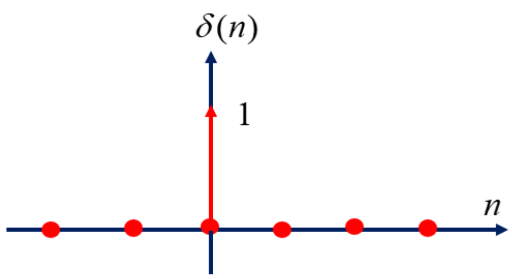
$$\Rightarrow P_x=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x(n)|^2$$
$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=0}^{N}1^2$$
$$=\lim_{N\to\infty}\frac{N+1}{2N+1}=\frac{1}{2}$$



1.4 Một số tín hiệu rời rạc:

+ Xung Dirac:

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\ne 0\end{cases}$$

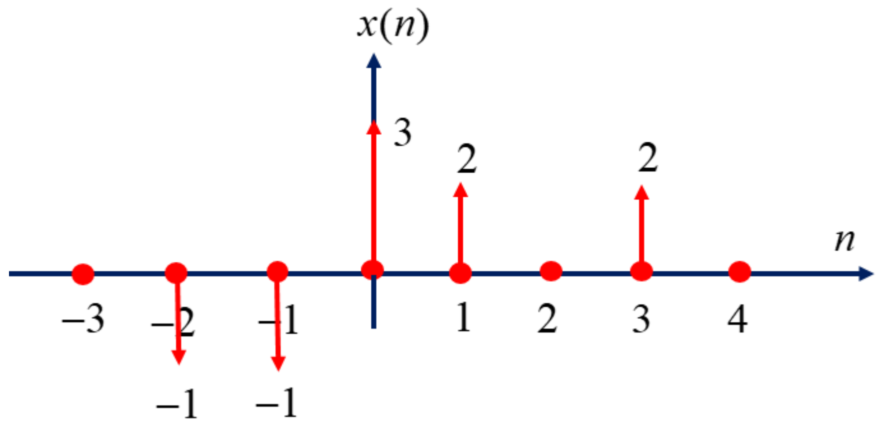


Tính chất: $\delta(n)=\delta(-n)$, $A\delta(n-n_0)=\begin{cases}A, & n=n_0\\ 0, & n\ne n_0\end{cases}$

- $x(n)\delta(n-n_0)=x(n)\delta(n-n_0)$
- $x(n)*\delta(n-n_0)=x(n-n_0)$

- Với $x(n)$ bất kì: $x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\delta(n-k)$, với a_k là giá trị mẫu tại $n=k$.

Ví dụ 1: Cho một tín hiệu số như hình vẽ, viết tín hiệu theo hàm *delta.*



$\Rightarrow x(n)=-\delta(n+2)-\delta(n+1)+3\delta(n)+2\delta(n-1)+2\delta(n-3)$

Ví dụ 2: Tìm chiều dài của tín hiệu rời rạc sau: *(Lenth/Duration)*

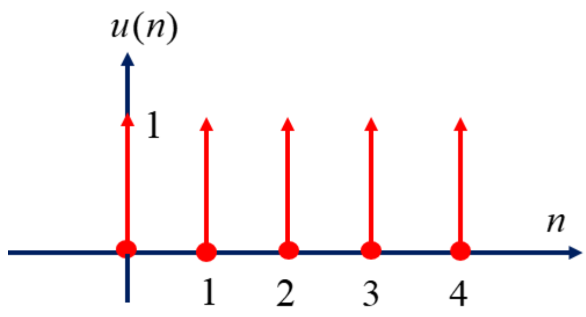
$$x(n)=2\delta(n+2)-3\delta(n)+2\delta(n-1)$$

Giải: Chiều dài là số lượng mẫu có trong tín hiệu đó, viết lại tín hiệu trên ta được:

$x(n)=\{2,\ 0,\ -\underset{\uparrow}{3},\ 2\}$, có 4 phần tử → chiều dài bằng 4.

+ Hàm bước:

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$
$$=\{\underset{\uparrow}{1},\ 1,\ 1,\ \ldots\}$$
$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\delta(n-k)$$



Ví dụ: Xác định giá trị và vẽ các tín hiệu sau:

a) $x(n)=\delta(n-2)$ b) $x(n)=\delta(n+3)$ c) $x(n)=-\delta(-n-2)$

d) $x(n)=\delta(-n+3)$ e) $x(n)=u(n-2)$ f) $x(n)=u(n+3)$

g) $x(n)=u(-n+2)$ h) $x(n)=u(-n-3)$ i) $x(n)=u(n+5)-u(n-3)$

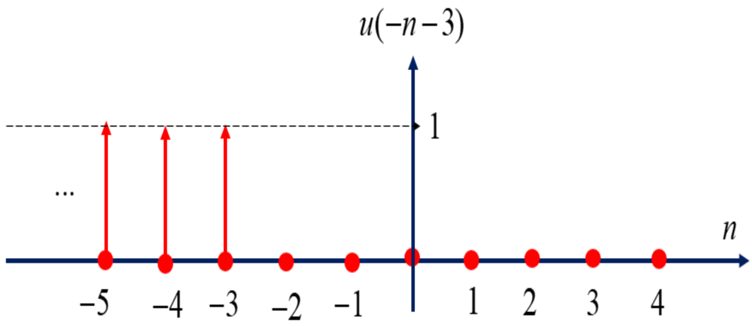
Giải:

h)

$$x(n) = u(-n-3) = \begin{cases} 1, & -n-3 \geq 0 \\ 0, & -n-3 < 0 \end{cases}$$

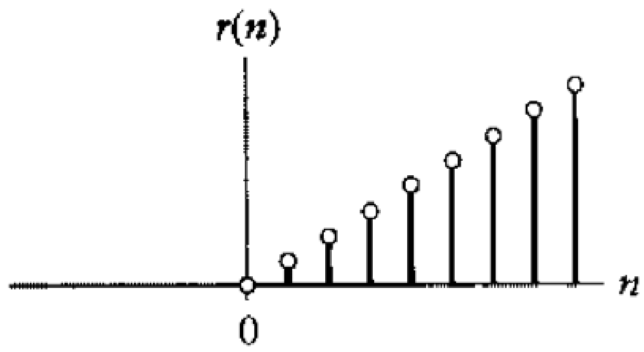
$$= \begin{cases} 1, & n \leq -3 \\ 0, & n > -3 \end{cases}$$

$$= \{\ldots 1, 1, 1, 0, 0, 0, ..\}$$
$$\uparrow$$



+ Hàm dốc *(ramp):*

$$r(n) = n.u(n) = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



Ví dụ: Xác định và vẽ tín hiệu:

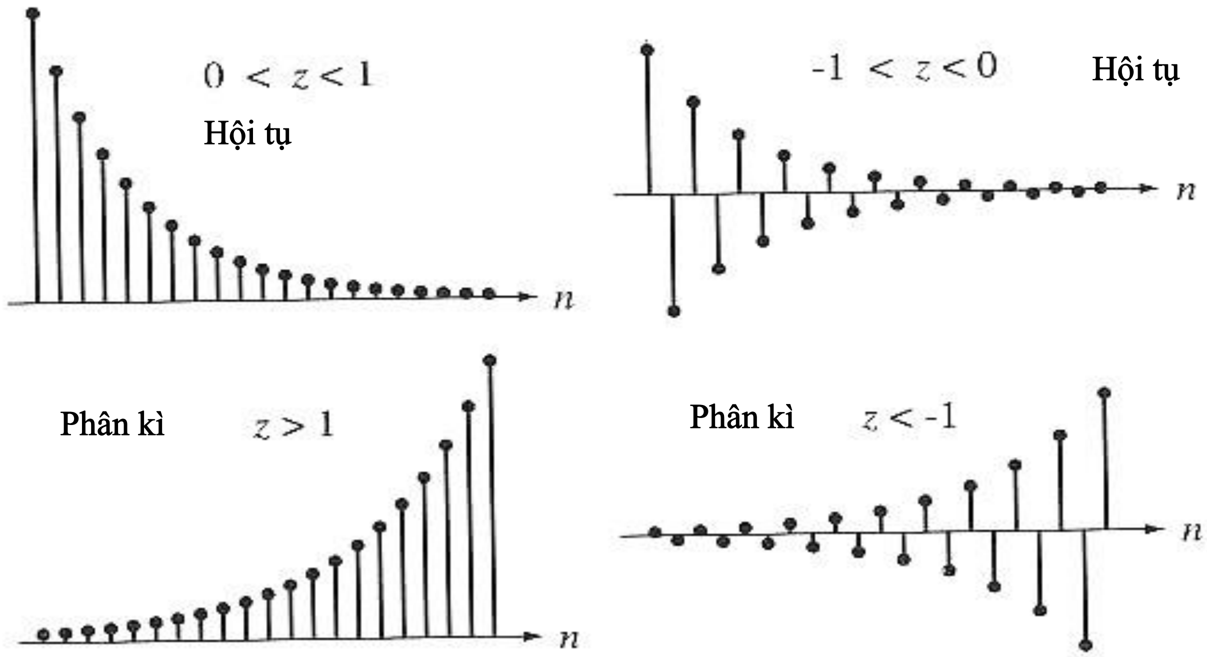
$$x(n) = 2r(n+3) - 2r(n-2)$$

+ Hàm mũ:

$$x(n) = a^n.u(n)$$

- $0 < a < 1$: hàm mũ suy giảm
- $a > 1$: hàm mũ tăng
- $-1 < a < 0$: hàm mũ có độ lớn suy giảm, dấu dương âm luân phiên.

- $a < -1$: hàm mũ có độ lớn tăng, dấu dương âm luân phiên.



Một hệ thống có đáp ứng xung đi theo quỹ đạo hội tụ thì hệ thống ổn định, ngược lại nếu quỹ đạo phân kì hệ thống sẽ không ổn định.

➢ Đặc biệt: Khi $a = re^{j\varphi} \Rightarrow x(n) = r^n e^{jn\varphi}u(n) = r^n\cos(n\varphi)u(n) + jr^n\sin(n\varphi)u(n)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Re}[x(n)] = r^n\cos(n\varphi) \\ \text{Im}[x(n)] = r^n\sin(n\varphi) \end{cases}$$

1.5 Các phép toán của tín hiệu rời rạc trên miền thời gian

+ Phép tịnh tiến (*Timer Shifting*):

$$x(n)_{n_0>0} \Rightarrow \begin{cases} x(n-n_0)_{delay} & : DP\ x(n),\ DT \uparrow \\ x(n+n_0)_{advance} & : DT\ x(n),\ DP \uparrow \end{cases}$$

Ví dụ: Cho $x(n) = \{-1,\ \underset{\uparrow}{1},\ 0,\ -1,\ 2\} \Rightarrow x(n+1) = \{-1,\ 1,\ 0,\ \underset{\uparrow}{-1},\ 2\}$

$$\Rightarrow x(n-5) = \{0,\ 0,\ \underset{\uparrow}{0},-1,\ 1,\ 0,\ -1,\ 2\}$$

+ Phép gấp / đảo thời gian *(Folding/ Time Reversal):* $x(n) \to x(-n)$

Ví dụ: $\Rightarrow x(n) = \{-1, \underset{\uparrow}{1}, 0, -1, 2\} \Rightarrow x(-n) = \{2, -1, 0, \underset{\uparrow}{1}, -1\}$

+ Phép gấp + tịnh tiến:

$$x(n)_{n_0>0} \Rightarrow \begin{cases} x(-n+n_0) = x\big(-(n-n_0)\big) \to B_1 : x(-n) \to B_2 : DP \;\; x(n) \\ x(-n-n_0) = x\big(-(n+n_0)\big) \to B_1 : x(-n) \to B_2 : DT \;\; x(n) \end{cases}$$

Ví dụ: Cho $\Rightarrow x(n) = \{-1, 1, \underset{\uparrow}{0}, -1, 2\}$, tìm $x(-n+3)$.

Giải:

- **Cách 1:** ***Gấp trước, dịch sau:***

Ta có $x(-n) = \{2, -1, \underset{\uparrow}{0}, 1, -1\} \Rightarrow x(-n+3) = x\big[-(n-3)\big]$, tức là thay n bởi $n-3$ → sau đó dịch phải tín hiệu 3 đơn vị (dịch phải mũi tên 3 đơn vị).

$\Rightarrow x(-n+3) = \{\underset{\uparrow}{0}, 2, -1, 0, 1, -1\}$

- **Cách 2:** ***Dịch trước, gấp sau: Không tối ưu nếu bài toán thay đổi*** n_0**.**

Ta có $x(n) = \{-1, 1, \underset{\uparrow}{0}, -1, 2\} \Rightarrow x(n+3) = x_2(n) = \{-1, 1, 0, -1, 2, \underset{\uparrow}{0}\}$

$\Rightarrow x(-n+3) = x_2(-n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 2, -1, 0, 1, -1\}$

+ Phép co giãn/ tỉ lệ *(Scaling):*

- Biên độ: $x(n) \to Ax(n) \Rightarrow \begin{cases} |A| > 1 \\ |A| < 1 \end{cases}$
- Thời gian: $x(n)_{N\in\mathbb{Z}^+} \Rightarrow \begin{cases} x(nN) : \; compress \\ x(n/N) : expand \end{cases}$

Ví dụ: Tìm và vẽ các tín hiệu $r(n), \quad r(2n), \quad r(n/2)$.

$$r(n) = n.u(n) = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, \ 4, ...\} \Rightarrow r(2n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 2, 4, 6, \ 8, ...\}$$

$r(n/2) = \{\underset{\uparrow}{0}, \ 0, 1, \ 0, 2, ...\}$, chú ý: $r(1/2), r(3/2)$ không xác định được giá trị →0.

+ Phép tương quan (*Correlation*): Cho biết sự tương đồng giữa hai tín hiệu (*Similarity*), ở đây ta khảo sát cho tín hiệu năng lượng.

- **Định nghĩa:** Với hai tín hiệu rời rạc $x(n), y(n)$ ta có:
    - Hàm tự tương quan (*Auto – Correlation*):

$$R_x(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)x^*(n-m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n+m)x^*(n)$$

    - Hàm tương quan chéo (*Cross – Correlation*):

$$R_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y^*(n-m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n+m)y^*(n)$$

Giả sử $x(n), y(n)$ là hai tín hiệu thực, khi đó:

$$\Rightarrow R_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(n-m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n+m)y(n)$$

+ Phép tương quan (*Correlation*): Cho biết sự tương đồng giữa hai tín hiệu (*Similarity*), ở đây ta khảo sát cho tín hiệu năng lượng.

- **Định nghĩa:** Với hai tín hiệu rời rạc $x(n), y(n)$ ta có:
    - Hàm tự tương quan (*Auto – Correlation*):

$$R_x(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)x^*(n-m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n+m)x^*(n)$$

    - Hàm tương quan chéo (*Cross – Correlation*):

$$R_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y^*(n-m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n+m)y^*(n)$$

Giả sử $x(n), y(n)$ là hai tín hiệu thực, khi đó:

$$\Rightarrow R_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)y(n-m)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n+m)y(n)$$

Để tránh sự phức tạp trong quá trình tính toán ta nên sử dụng đồng nhất một công thức.

➢ **Tính chất:**

- $R_{xy}(m)=R_{yx}^{*}(-m)$
- Nếu $x(n)$ là tín hiệu thực $\Rightarrow R_x(m)=R_x(-m)$ → Hàm tự tương quan là hàm chẵn đối xứng qua trục tung.
- $R_x(0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)x^{*}(n)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)|^2=E_x$
- $|R_x(m)|\le R_x(0)$

Ví dụ: Cho $x(n)=\{1,-1,1,-1\}$, $y_n=x(n-D)=\{0,0,0,0,0,0,0,0,1,-1,1,-1\}$ → $D=8$ (dự đoán). Hãy tìm $R_{xy}(m)$ và D?

Giải: $R_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)y(n-m)$

- $m\ge 0 \Rightarrow R_{xy}(m)=0$ $\qquad$ $m=-1,-2,-3,-4 \Rightarrow R_{xy}(m)=0$
- $m=-5\Rightarrow R_{xy}(-5)=-1.1=-1$ $\qquad$ $m=-6\Rightarrow R_{xy}(-6)=1.1+(-1).(-1)=2$
- $m=-7\Rightarrow R_{xy}(-7)=-3$ $\qquad$ $m=-8\Rightarrow R_{xy}(-8)=4$
- $m=-9\Rightarrow R_{xy}(-9)=-3$ $\qquad$ $m=-10\Rightarrow R_{xy}(-10)=2$
- $m=-11\Rightarrow R_{xy}(-11)=-1$ $\qquad$ $m\le 12\Rightarrow R_{xy}(m)=0$

$\Rightarrow R_{xy}(m)=\{-1,2,-3,\underset{\uparrow}{4},-3,2,-1,0,0,0,0,0\}\Rightarrow R_{xy}(m)=4$ lớn nhất tại $m=-8\Rightarrow D=8.$

→ Trễ 8 mẫu tức là trễ 8 chu kỳ lấy mẫu (nT_s) do $y(n-D)=y\left[(n-D)T_s\right]\Rightarrow\tau=8T_s$

1.6 Tích chập (*Convolution*)

+ Định nghĩa: $z(n)=x(n)*y(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)y(n-m)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(n-m)y(m)$

+ Tính chất:

- $x(n)*y(n)=y(n)*x(n)$
- $\left[x(n)*y(n)\right]*z(n)=x(n)*\left[y(n)*z(n)\right]$

- $x(n)*\left[y(n)+z(n)\right]=x(n)*y(n)+x(n)*z(n)$

- Nếu $x(n)$ chứa M phần tử, $y(n)$ chứa N phần tử thì kết quả tích chập $z(n)$ sẽ có L phần tử. Liên hệ: $L=M+N-1$

Ví dụ: Chứng minh rằng $x(n)*\delta\left(n-n_0\right)=x(n-n_0)$

VT: $x(n)*\delta\left(n-n_0\right)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)*\delta\left(n-n_0-m\right)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)*\delta\left(m-(n-n_0)\right)$

Mà $\delta\left(m-(n-n_0)\right)=\begin{cases}1, & m=n-n_0\\ 0, & m\neq n-n_0\end{cases}\Rightarrow VT=x(n-n_0)=VP$

+ Các phương pháp tính tích chập [ORF]

- **Dạng 1: Trực tiếp (*Direct Form*)**

$$z(n)=x(n)*y(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)y(n-m)$$

  - Bước 1: Tìm $x(m),\ y(-m)$
  - Bước 2: Biến luận theo n để tính $y(n-m)$ sử dụng phương pháp gấp và tịnh tiến.

Ví dụ: Cho $x(n)=\{-1,0,\underset{\uparrow}{1},-2\},\quad y(n)=\{\underset{\uparrow}{-1},0,1\}$, tìm $z(n)=x(n)*y(n)$.

Giải: $$z(n)=x(n)*y(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)y(n-m)$$

- $n=0$: $z(0)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}x(m)y(-m)=-2$, ta có:

$x(m)\ =\{-1,0,\underset{\uparrow}{1},-2\}$

$y(-m)=\{1,0,\underset{\uparrow}{-1}\}$

$\Rightarrow z(0)=(-1).1+0.0+1.(-1)+(-2).0=-2$

- $n=1$: $z(1)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}x(m)y(1-m)$, ta có:

$x(m)=\{-1,0,\underset{\uparrow}{1},-2\}$

$y(1-m)=y\left[-(m-1)\right]=\{1,\underset{\uparrow}{0},-1\}$, $\Rightarrow z(1)=0.1+0.1+(-2).(-1)=2$

- $n=-1:\ z(-1)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(m)y(-1-m)=0$; $n=2:\ z(2)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(m)y(2-m)=1$
- $n=-2:\ z(-2)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(m)y(-2-m)=1$; $n=3:\ z(3)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(m)y(3-m)=-2$
- $n\le -3:\ z(n)=0$; $n\ge 4:\ z(n)=0$

$$\Rightarrow z(n)=\{1,\ 0,\ -2,\ \underset{\uparrow}{2},\ 1,\ -2\} \rightarrow L=6$$

- **Dạng 2: Dùng bảng chập *(Convolution Table)***

Ví dụ: Cho $x(n)=\{-1, 0, \underset{\uparrow}{1}, -2\},\quad y(n)=\{-1, 0, \underset{\uparrow}{1}\}$, tìm $z(n)=x(n)*y(n)$.

	-1	0	1	-2
-1	1	0	-1	2
0	0	0	0	0
1	-1	0	1	-2

$$\Rightarrow z(n)=\{1,\ 0,\ -2,\ \underset{\uparrow}{2},\ 1,\ -2\}$$

***Xác định dấu mũi tên:** Tín hiệu x(n) với vị trí mũi tên là A, tín hiệu y(n) với vị trí mũi tên là B thì tín hiệu z(n) có mũi tên ở vị trí A+B-1.*

- **Dạng 3: Dựa vào tính chất LTI (*Liner Time Invariant*)** , tương tự dạng 2 nhưng từ hàng thứ 2 trở đi sẽ lùi dần bên tai phải 1 đơn vị.

Ví dụ: Cho $x(n)=\{-1, 0, \underset{\uparrow}{1}, -2\},\quad y(n)=\{-1, 0, \underset{\uparrow}{1}\}$, tìm $z(n)=x(n)*y(n)$.

	-1	0	1	-2		
-1	1	0	-1	2		
0		0	0	0	0	
1			-1	0	1	-2

$$\Rightarrow z(n)=\{1,\ 0,\ -2,\ \underset{\uparrow}{2},\ 1,\ -2\}$$

- **Dạng 4: Dựa vào ma trận:**

$$z(n)=x(n)*y(n)\ \Rightarrow [Z]=[X].[Y]\neq[Y].[X]\Rightarrow \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \cdots \\ z_{L-1} \end{bmatrix} = \underset{\text{L hàng}}{\overset{\text{N cột}}{\begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_0 & 0 \\ \cdots & \cdots & x_0 \\ x_{M-1} & \cdots & \cdots \end{bmatrix}}} . \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \cdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}$$

Ví dụ: Cho $x(n)=\{-1,0,\underset{\uparrow}{1},-2\},\quad y(n)=\{\underset{\uparrow}{-1},0,1\}$, tìm $z(n)=x(n)*y(n)$.

Biểu diễn dưới dạng ma trận với L=6, M=4, N=3, ta được:

$$\Rightarrow [Z]=\underset{\uparrow}{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}} . \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow z(n)=\{1,0,-2,2,1,-2\}$$

- **Dạng 5: Cộng – chồng lắp *(Overlap – Add):*** Nhận thấy phương pháp bảng chập gặp phải vấn đề khi chuỗi tín hiệu quá dài. Cụ thể, nếu tín hiệu đầu vào rất dài thì việc lưu trữ các tín hiệu đó trong bộ nhớ sẽ tiêu tốn nhiều bộ nhớ, cũng như chương trình xử lý sẽ trở nên cồng kềnh, nặng nề hơn do số vòng lặp. Để đơn giản hóa, ta chia nhỏ tín hiệu ra thành các chuỗi nhỏ hơn để dể dàng xử lý, khi đó sẽ giảm bớt dung lượng lưu trữ cũng như chương trình sẽ trở nên tối ưu hơn do không cần xử lý và ghi nhớ toàn bộ bảng chập hiện tại.

  - Bước 1: Chia nhỏ tín hiệu $x(n)$ thành các chuỗi nhỏ hơn.
  - Bước 2: Tìm các tích chập con giữa các chuỗi con và tín hiệu $y(n)$, nên sử dụng bảng chập.
  - Bước 3: Thực hiện chồng lắp, phần đuôi của chuỗi tín hiệu vừa tính được tích chập đầu tiên sẽ được chồng lắp bởi phần đầu của chuỗi tín hiệu tiếp theo với (N-1) mẫu.
  - Bước 4: Thực hiện cộng theo cột để thu được kết quả cuối cùng.

Ví dụ: Cho $x(n)=\{-1,\ 0,\ -1,\ 1,\ \underset{\uparrow}{1},\ -2,\ 0,\ 0,\ -1,\ -2\},\quad y(n)=\{-1,\underset{\uparrow}{0},\ 1\}$, tìm $z(n)=x(n)*y(n)$

Ta có: M=10, N=3 →L=12.

Chia chuỗi $x(n)$ thành các chuỗi con với chiều dài M'=4 *(chia làm 3, bổ sung thêm 0 cho đủ).*

	-1	**0**	**-1**	**1**	**1**	**-2**	**0**	**0**	**-1**	**-2**	**0**	**0**
-1	**1**	**0**	**1**	**-1**	**-1**	**2**	**0**	**0**	**1**	**2**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**-1**	**0**	**-1**	**1**	**1**	**-2**	**0**	**0**	**-1**	**-2**	**0**	**0**

Ta có số mẫu bị chồng lắp: N-1=3-1=2 → 2 mẫu cuối của chuỗi thứ i sẽ được chồng lắp bởi 2 mẫu đầu của chuỗi thứ i+1.

$$\begin{array}{llllll}
y_1 = & 1\ 0\ 0\ -1 & \boxed{-1\ 1} & & & \\
y_2 = & & \boxed{-1\ 2} & 1\ -2 & \boxed{0\ 0} & \\
y_3 = & & & & \boxed{1\ 2} & -1\ -2\ 0\ 0
\end{array}$$

$$\Rightarrow z(n)=\{1,\ 0,\ 0,\ -1,\ -2,\ \underset{\uparrow}{3},\ 1,\ -2,\ 1,\ 2,\ -1,\ -2\}$$

- **Dạng 6: Lật và trượt *(Flip & Slide):*** Thực hiện phép gấp cho chuỗi có chiều dài nhỏ hơn, sau đó cho $y(-n)$ trượt trên dữ liệu của $x(n) \Rightarrow z(n)$.

Ví dụ: Cho $x(n)=\{-1,\ 0,\ -1,\ 1,\ \underset{\uparrow}{1},\ -2,\ 0,\ 0,\ -1,\ -2\},\quad y(n)=\{-1,\underset{\uparrow}{0},\ 1\}$, tìm $z(n)=x(n)*y(n)$

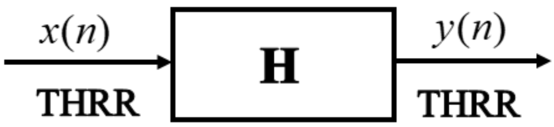
Ta có: $y(-n)=\{1,\ \underset{\uparrow}{0},\ -1\}$ $\qquad \Rightarrow z(n)=\{1,\ 0,\ 0,\ -1,\ -2,\ \underset{\uparrow}{3},\ 1,\ -2,\ 1,\ 2,\ -1,\ -2\}$

$$\begin{array}{l}
x(n) = -1\ \ 0\ \ -1\ \ 1\ \ 1\ -2\ \ 0\ \ 0\ -1\ \ -2 \\
1\ \ 0\ -1 \\
\quad 1\ \ 0\ -1 \\
\qquad 1\ \ 0\ -1 \\
\qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1\ \ 0\ -1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 1\ \ 0\ -1
\end{array}$$

Đặc điểm: *Phương pháp này có thời gian tính toán nhanh hơn phương pháp số 5, đồng thời phương pháp này có thể xử lý các tín hiệu với đầu vào dài vô hạn.*

II. HỆ THỐNG RỜI RẠC

2.1 Định nghĩa



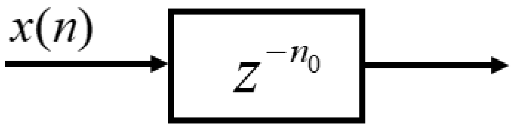
$$y(n) = H\{x(n)\}$$

+ Hệ thống rời rạc là một hệ thống có đầu vào và đầu ra đều là các tín hiệu rời rạc, với $x(n)$ là tín hiệu ngõ vào hay kích thích ngõ vào, $y(n)$ là tín hiệu ngõ ra hay đáp ứng ngõ ra.

2.1 Biểu diễn hệ thống rời rạc

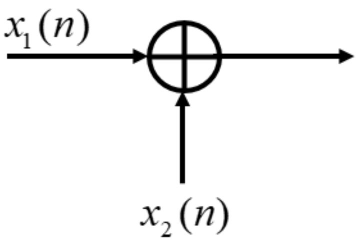
- **Dạng 1: Sơ đồ khối**

+ Bộ trễ - sớm:

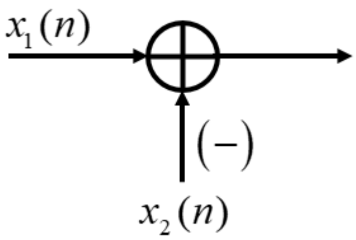


$$y(n) = x(n-n_0) \Rightarrow \begin{cases} n > 0: \textbf{ Trễ} \\ n < 0: \textbf{ Sớm} \end{cases}$$

+ Bộ cộng – trừ:



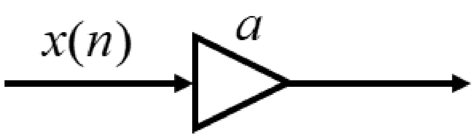
$$y(n) = x_1(n) + x_2(n)$$



$$y(n) = x_1(n) - x_2(n)$$

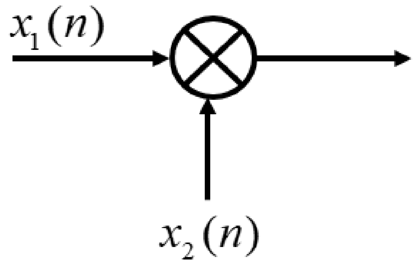
+ Bộ nhân:

- Nhân với một hằng số *(Multiplication):*



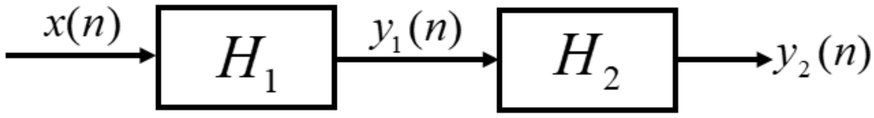
$$y(n) = ax(n)$$

- Nhân hai tín hiệu *(Product):*



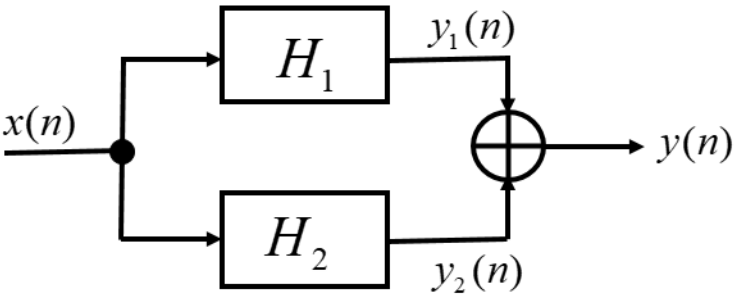
$$y(n) = x_1(n).x_2(n)$$

+ Ghép liên tiếp (mắc xích, dây chuyền, cascade):



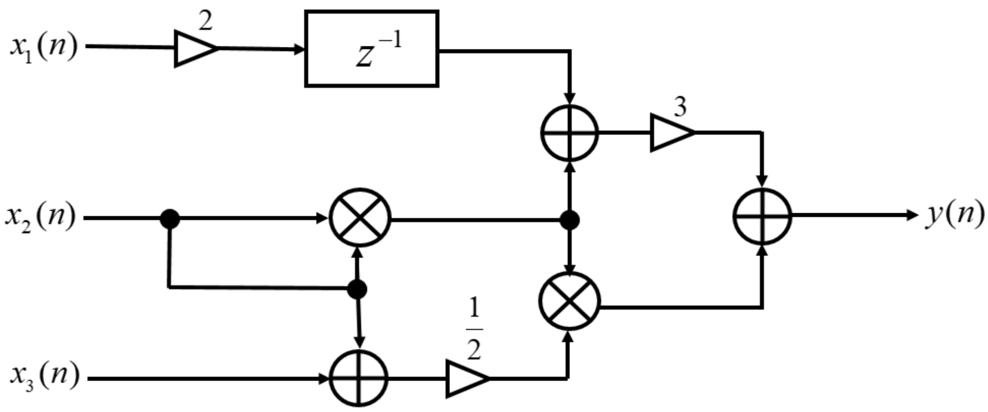
$$\Rightarrow y_1(n) = H_1\{x(n)\} \Rightarrow y(n) = H_2\{y_1(n)\} = H_2\{H_1[x(n)]\}$$

+ Ghép song song:



$$\begin{aligned} y(n) &= y_1(n) + y_2(n) \\ &= H_1[x(n)] + H_2[x(n)] \end{aligned}$$

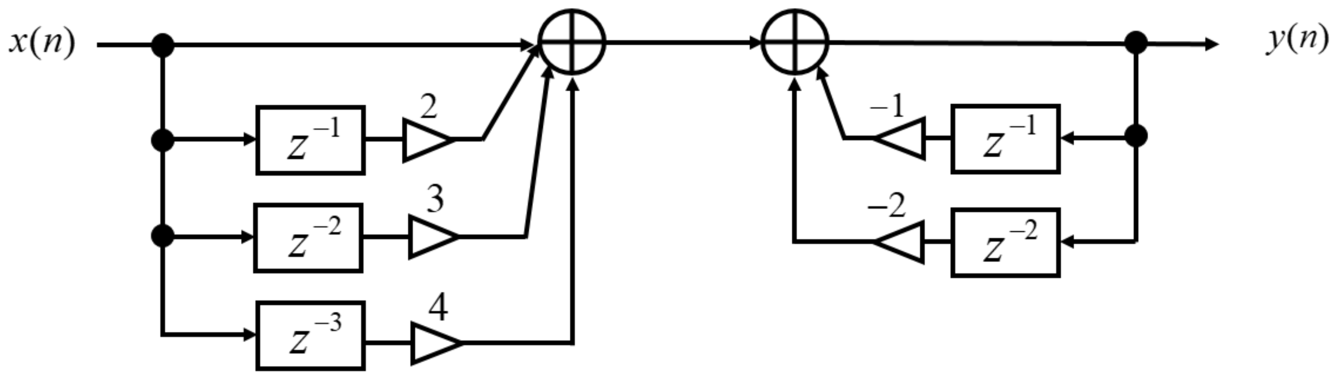
Ví dụ: Viết quan hệ vào ra của hệ thống có sơ đồ khối như sau:



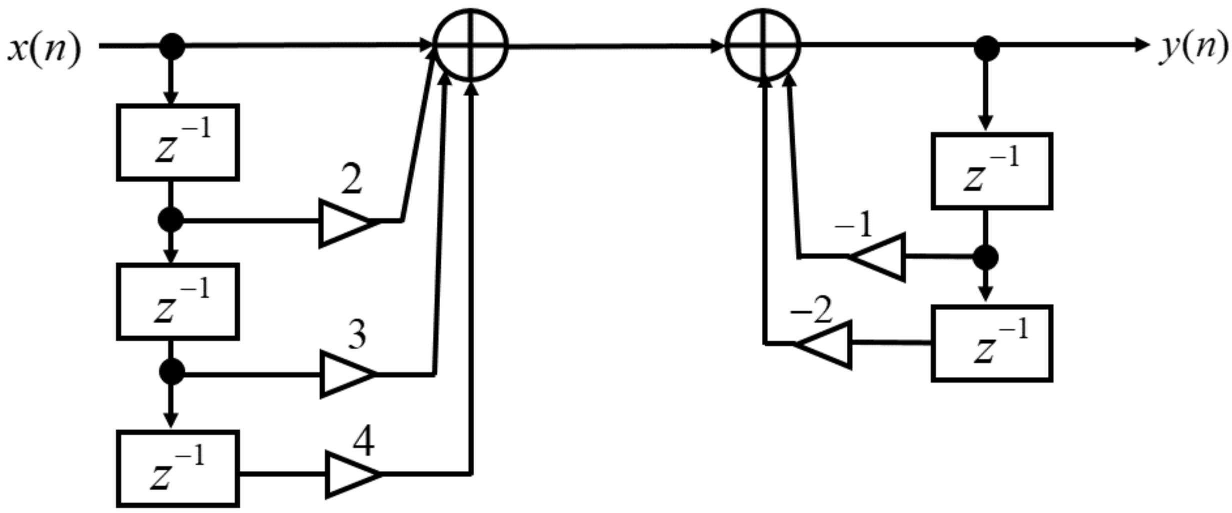
Ví dụ: Vẽ sơ đồ khối của hệ thống có quan hệ vào ra như sau:

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + 3x(n-2) + 4x(n-3) - y(n-1) - 2y(n-2)$$

Cách 1: Không tối ưu, do sử dụng quá nhiều bộ trễ, dẫn đến tiêu tốn nhiều dung lượng bộ nhớ hơn. Bộ trễ trên thực tế có thể là các D-FF hoặc các mạch chốt dữ liệu.



Cách 2: Tối ưu hơn, do sử dụng các bộ trễ ghép nối tiếp nhau.



- **Dạng 2:** Phương trình sai phân *(Difference equation)/*Quan hệ vào ra *(I/O Relation)/* Phương trình xuất nhập *(I/O Equation).*

$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y(n-k) = \sum_{l=0}^{N} b_l\, x(n-l)$, nếu $\{a_k\}$ và $\{b_k\}$ là hằng số: Ta có phương trình sai phân hệ số hằng.

Với $a_0 \neq 0$ thì ta có: $y(n) = \sum_{l=0}^{N} \frac{b_l}{a_0} x(n-l) - \sum_{k=1}^{N} a_k\, y(n-k)$.

Ví dụ:

$[H]: y(n) = x^2(n)$ → Phương trình bình phương *(Square)*

$[G]:\ y(n)=\frac{1}{3}[x(n)+x(n-1)+x(n-2)]$ → Phương trình trung bình dịch chuyển *(Moving Average).*

$[K]:\ y(n)=2x(n)-\frac{1}{2}y(n-1)$ → Phương trình có hồi tiếp (*feedback).*

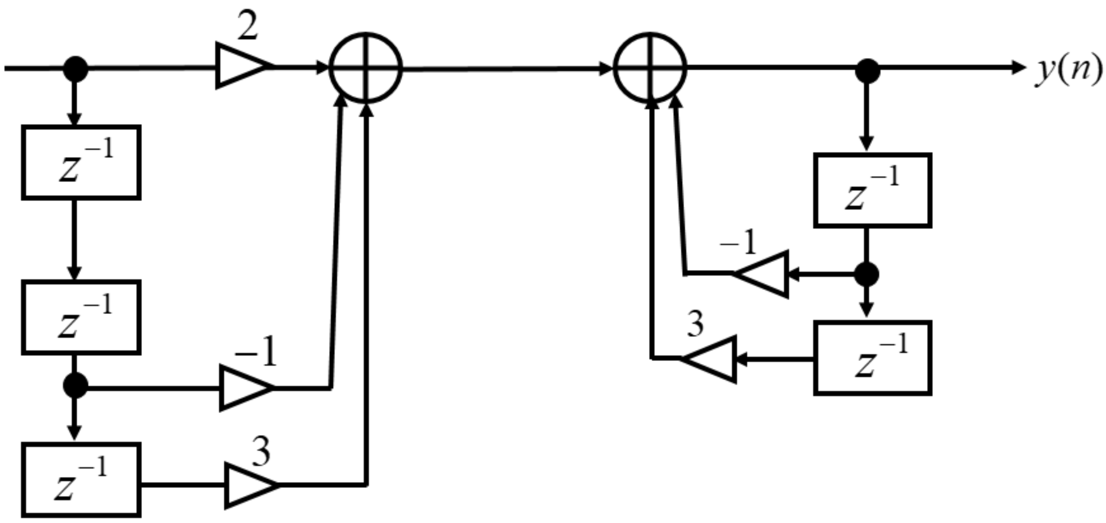
+ Mô tả trực tiếp loại 1 (*Direct Form I Realization).*

+ Mô tả trực tiếp loại 2 *(Chính tắc - Canonical).*

➢ Sơ đồ khối trực tiếp từ phương trình sai phân:

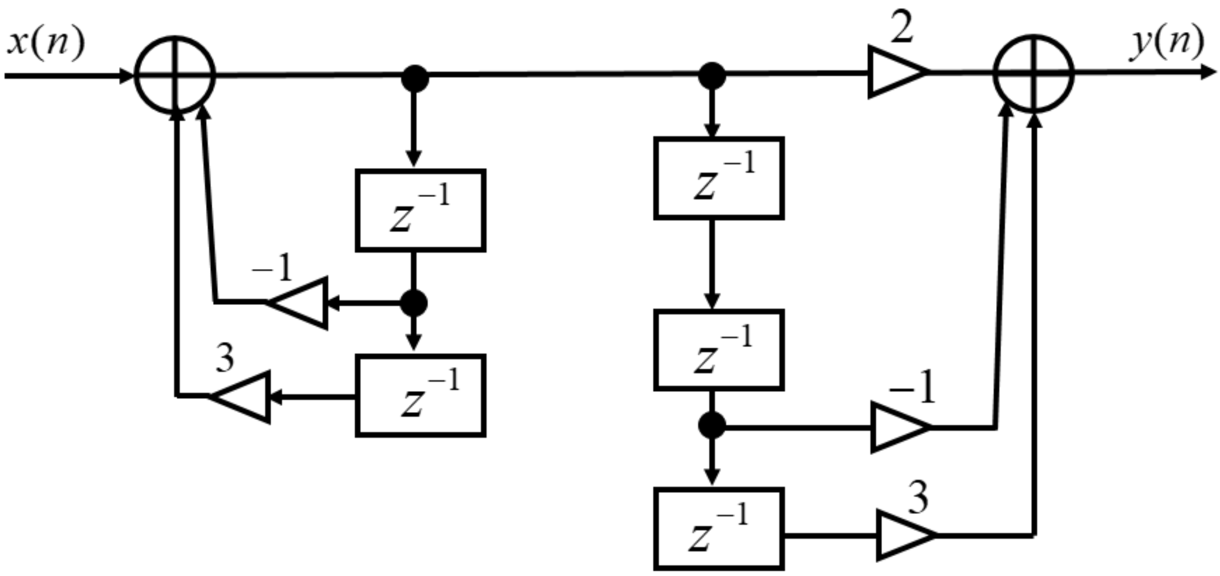
Ví dụ: Vẽ dạng mô tả trực tiếp loại 1:

$$[H]:\ y(n)=2x(n)-x(n-2)+3x(n-3)-y(n-1)+3y(n-2)$$

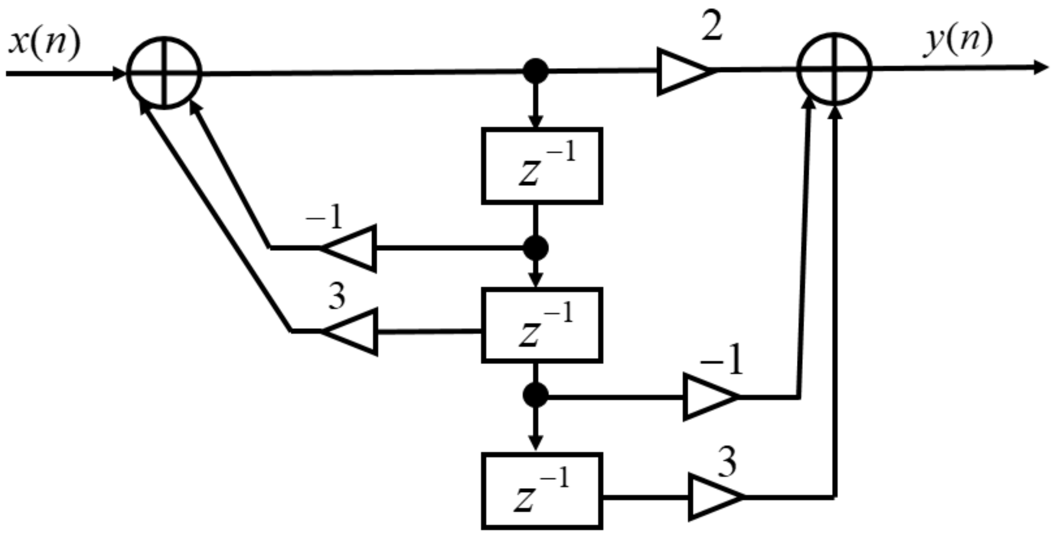


→ Hai hệ thống trên đang được ghép liên tiếp nhau (không phải nối tiếp, kiểu ghép nối tiếp là một kiểu ghép khác không đề cập ở đây). Ta vẫn có thể hoán đổi vị trí hai hệ thống lại với nhau.

- Vẽ dạng mô tả trực tiếp loại 2 – Loại chính tắc:



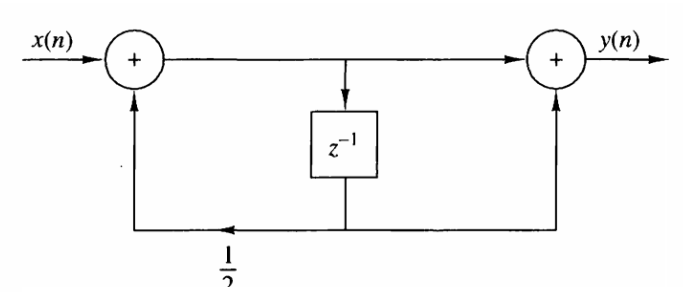
Tiến hành tối giản thêm một lần nữa ta được:



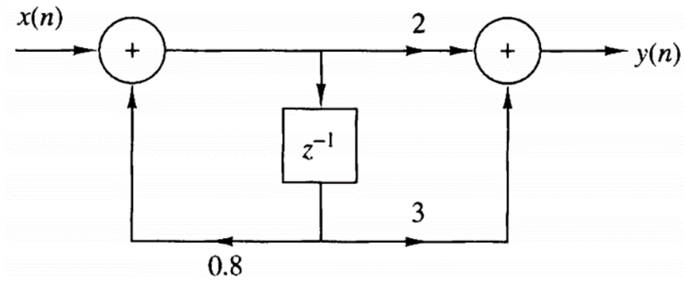
→ Giữa vào và ra bây giờ sử dụng chung bộ trễ → dạng chính tắc. Từ hệ thống chính tắc loại 2, để suy ngược lại phương trình sai phân, theo quy tắc:

+ x đọc theo chiều thuận, y đọc theo chiều nghịch.

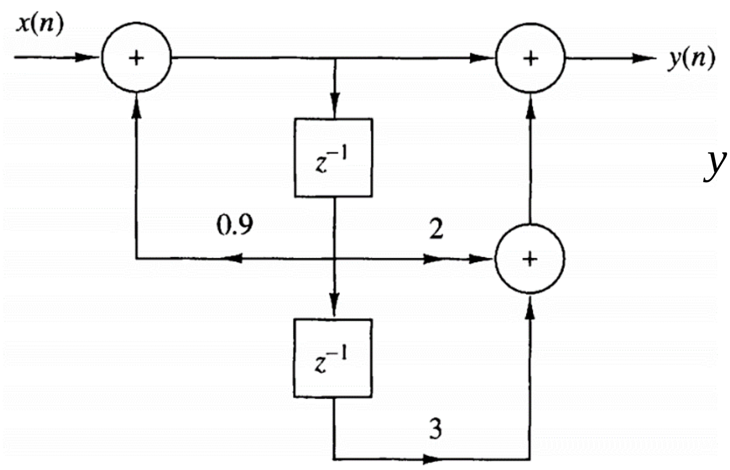
Ví dụ: Xác định phương trình sai phân cho các hệ thống sau:



$$y(n)=x(n)+x(n-1)+\frac{1}{2}y(n-1)$$

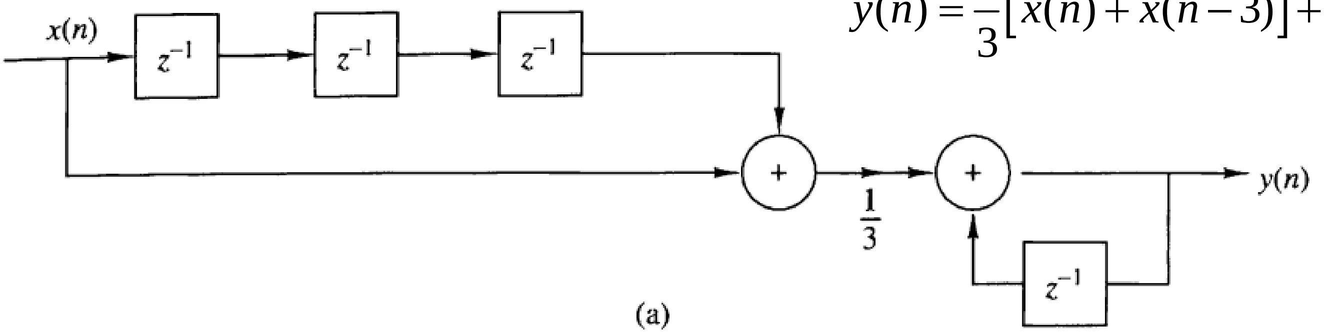


$$y(n)=2x(n)+3x(n-1)+0.8y(n-1)$$

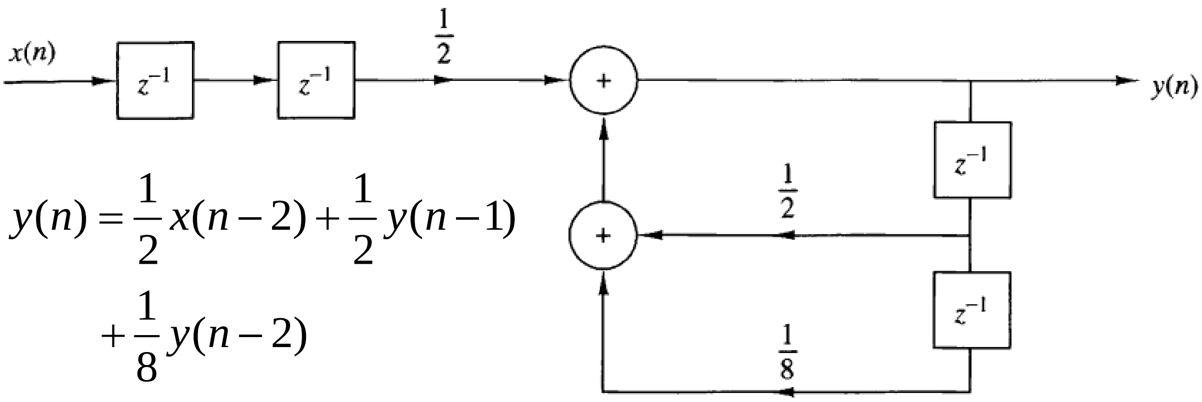


$$y(n)=x(n)+2x(n-1)+3x(n-2)$$
$$+0.9y(n-1)$$

$$y(n)=\frac{1}{3}\left[x(n)+x(n-3)\right]+y(n-1)$$

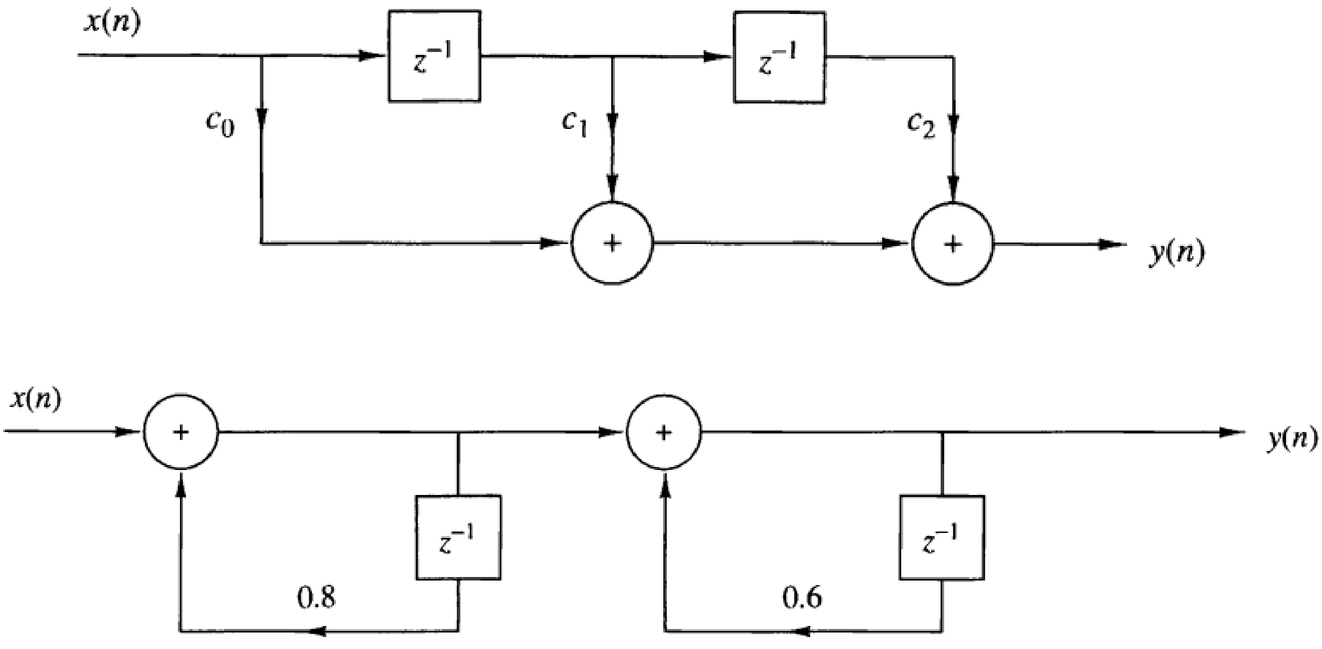


(a)

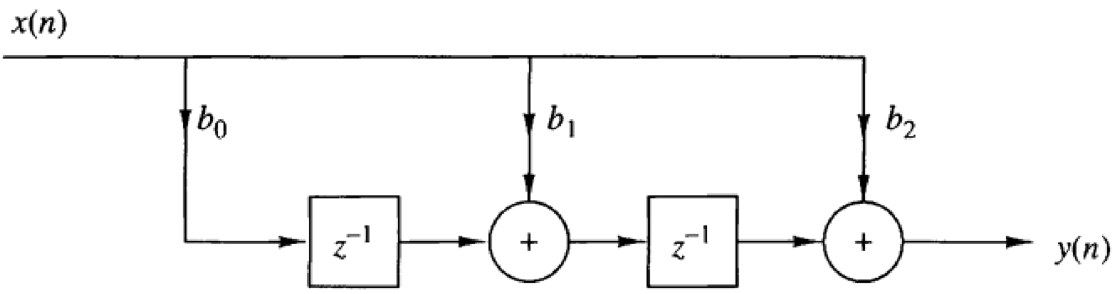


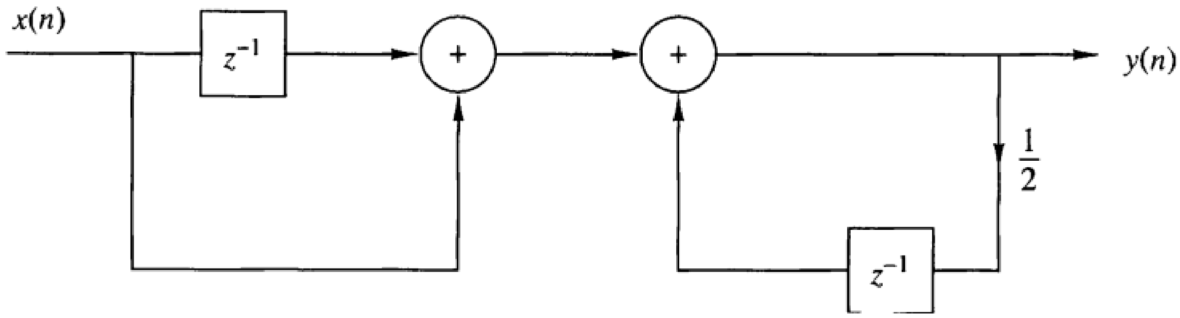
$$y(n)=\frac{1}{2}x(n-2)+\frac{1}{2}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)$$

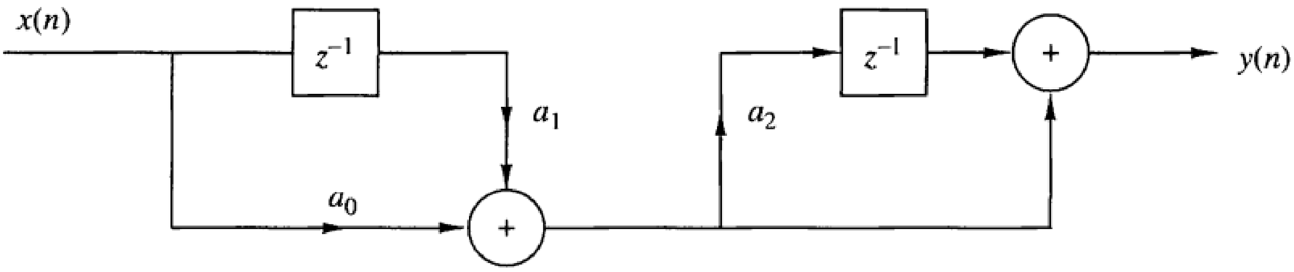
(b)



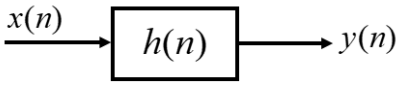
(c)







➤ **Dạng 3:** Đáp ứng xung (*Impulse Response)*



$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

Với $h(n)$ là đáp ứng xung của hệ thống, mô tả đặc điểm của hệ thống rời rạc trên miền thời gian.

+ Định nghĩa: $h(n) = y(n)\,|_{x(n)=\delta(n)}$

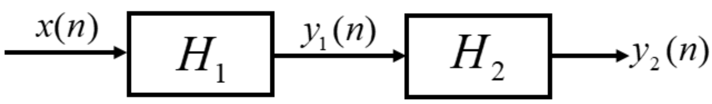
Ví dụ: Tìm quan hệ giữa đáp ứng xung tương đương của toàn hệ thống rời rạc với các đáp ứng xung thành phần trong hệ thống sau:

a) Hệ thống ghép liên tiếp

b) Hệ thống ghép song song

Giải:

a)



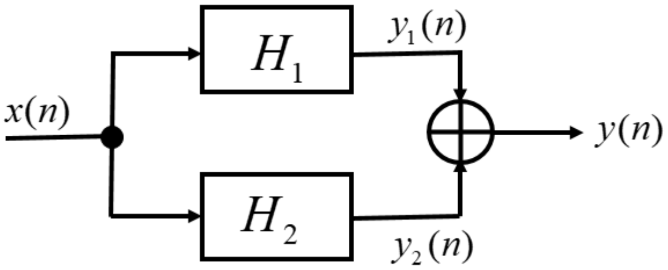
Ta có: $y_1(n) = H_1\{x(n)\} = x(n) * h_1(n)$

$$y(n) = H_2\{y_1(n)\} = y_1(n) * h_2(n)$$

$$= x(n) * h_1(n) * h_2(n)$$

$$= H\{x(n)\} = x(n) * h(n) \qquad \Rightarrow h(x) = h_1(n) * h_2(n)$$

b)



$$
\begin{aligned}
y(n) &= x(n)*h_1(n) + x(n)*h_2(n) \\
&= x(n)*\left[h_1(n)+h_2(n)\right] \\
&= x(n)*h(n) \;\Rightarrow h(n) = h_1(n)+h_2(n)
\end{aligned}
$$

Ví dụ: Tìm $h(n)$ của một hệ thống được cho bởi PTSP sau:

$$[H]:\ y(n) = x(n) + 2x(n-2) - \frac{1}{2}y(n-1) \text{, cho } h(n)=0,\ \forall n<0$$

Giải: Ta có $h(n) = y(n)\,|_{x(n)=\delta(n)} = \delta(n) + 2\delta(n-2) - \dfrac{1}{2}h(n-1)$

$$+\ n=0: h(0) = \delta(0) + 2\delta(-2) - \frac{1}{2}h(-1) = 1$$

$$+\ n=1: h(1) = \delta(1) + 2\delta(-1) - \frac{1}{2}h(0) = -\frac{1}{2}.1 = -\frac{1}{2}$$

$$+\ n=2: h(2) = \delta(2) + 2\delta(0) - \frac{1}{2}h(1) = 2 - \frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$$

$$+\ n=3: h(3) = \delta(3) + 2\delta(1) - \frac{1}{2}h(2) = -\frac{1}{2}.\frac{5}{4}$$

$$+\ n=4: h(4) = \delta(4) + 2\delta(2) - \frac{1}{2}h(3) = -\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right).\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow h(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ -\dfrac{1}{2}, & n=1 \\ 5\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n, & n\ge 2 \\ 0, & n<0 \end{cases} = \delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-1) + 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n-2)$$

➢ **Dạng 4:** Đáp ứng bậc (*Step Response):* cho cho biết được sự quá độ của hệ thống bao gồm các thành phần quá độ (Transient) và thành phần xác lập (Steady). Nghiên cứu quá độ giúp chúng ta biết được độ vọt lố của tín hiệu (Overshot) và thời gian quá độ hay thời gian đáp ứng được xác lập.

III. PHÂN LOẠI HỆ THỐNG RỜI RẠC

+ Cần phải phân loại hệ thống rời rạc để biết được đặc điểm của hệ thống, nhằm lựa chọn và thiết kế được một hệ thống thích hợp với yêu cầu nhất định.

- **Hệ thống tĩnh** (static – không nhớ - memoryless)/ **Hệ thống động** (Dynamic – có nhớ - memory).

Ví dụ: Phân loại hai hệ thống sau:

$$[H]: y(n) = 2x(n)$$
$$[G]: y(n) = 2x(n) + x(n-1)$$

Ta có: [H] là hệ thống tĩnh, [G] là hệ thống động giải thích:

+ [G]: Giả sử tại thời điểm $n = 0 \Rightarrow y(0) = 2x(0) + x(-1)$ → ô nhớ lưu giá trị của $x(-1)$ lại, tại $n = 1 \Rightarrow y(1) = 2x(1) + x(0)$ → ô nhớ lưu giá trị của $x(0)$ lại→ Nội dung ô nhớ thay đổi → Hệ thống động→ Hệ thống phải có sẵn bộ nhớ để lưu giá trị

+ [H]: Hệ thống không cần bộ nhớ để lưu giá trị lại → Hệ thống tĩnh.

- **Hệ thống tuyến tính *(Linear)*/ Hệ thống phi tuyến *(Non – Linear):***

+ Hệ thống được gọi là tuyến tính nếu thỏa mãn tính xếp chồng (*Superposition*).

+ [H] thỏa mãn tính xếp chồng nếu đáp ứng của nhiều nguồn kích thích độc lập bằng tổng các đáp ứng do từng nguồn kích thích độc lập tác động lên nó.

Nếu $x_1(n) \to y_1(n),\ x_2(n) = y_2(n)$ thì $x(n) = ax_1(n) + bx_2(b)$ → Xếp chồng tuyến tính từ 2 kích thích $x_1(n),\ x_2(n)$. Nếu $y(n) = ay_1(n) + by_2(n)$ thì hệ thống đã cho tuyến tính và ngược lại.

Ví dụ: Khảo sát tính tuyến tính của hệ thống sau:

$$[H]: y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k\, x(n-k), \text{ với } a_k \text{ là hằng số.}$$

Giải: Ta có: $x_1(n) \to y_1(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k\, x_1(n-k),\ x_2(n) \to y_2(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k\, x_2(n-k)$

Đặt $x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$, với a, b là hằng số.

$$\Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k x(n-k) = \sum_{k=0}^{N} a_k \left[ax_1(n-k) + ax_2(n-k)\right]$$
$$= a\sum_{k=0}^{N} a_k x_1(n-k) + b\sum_{k=0}^{N} a_k x_2(n-k) = ay_1(n) + by_2(n)$$

→ Hệ thống tuyến tính.

- **Hệ thống bất biến thời gian (*Time – Invariant*)/ Hệ thống thay đổi thời gian (*Time – Varying*):**

+ Hệ thống bất biến: Mối quan hệ giữa ngõ vào và ngõ ra là như nhau ở mọi thời điểm.

Nếu $x(n) \rightarrow y(n)$ thì $\Rightarrow x(n-n_0) \rightarrow y(n-n_0)$

Ví dụ: Khảo sát tính bất biến của hệ thống sau:

$$[H]: y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k\, x(n-k), \text{ với } a_k \text{ là hằng số.}$$

Giải: Ta có $x(n) \rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k\, x(n-k)$

Đặt $x_1(n) = x(n-n_0) \Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k x_1(n-k) = \sum_{k=0}^{N} a_k x_1(n-n_0-k) = y(n-n_0)$ → Hệ thống bất biến. Hệ thống bất biến là một hệ thống mong muốn, bởi vì quan hệ vào ra luôn cố định, không phụ thuộc vào yếu tố thời gian, không mang tính cập nhật.

- **Hệ thống tuyến tính bất biến LTI.**

+ Hệ thống LTI thỏa mãn hệ thống tuyến tính và hệ thống bất biến.

Ví dụ: $[H]: y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k\, x(n-k)$ là một hệ thống bất biến và là hệ thống tuyến tính→ Hệ thống LTI.

- **Hệ thống nhân quả *(causal)*, phản nhân quả *(anti - causal)* và không nhân quả *(non – causal)*.**

+ Hệ thống nhân quả: Nếu $x(n) = 0 \;\; \forall n < n_0$ thì $y(n) = 0 \;\forall n < n_0$.

+ Hệ thống phản nhân quả: Chỉ phụ thuộc vào tương lai, ngược lại với hệ thống nhân quả.

+ Hệ thống không nhân quả: Vừa phụ thuộc cả tương lai, quá khứ và hiện tại.

- Phát biểu theo đáp ứng xung:
  - Nhân quả: $h(n) = 0 \quad \forall n < 0$
  - Phản nhân quả: $h(n) = 0 \quad \forall n \geq 0$
  - Không nhân quả: $h(n)$ tồn tại hai phía.

Ví dụ: Chứng minh rằng, hệ thống có đáp ứng xung thỏa mãn $h(n) = 0 \ \forall n \ge 0$ là phản nhân quả.

Giải: Ta có: $y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)x(n-m)$,với $h(n) = 0 \ \forall n \ge 0$.

$\Rightarrow y(n) = \sum_{m=-\infty}^{-1} h(m)x(n-m) = ... + h(-2)x(n+2) + h(-1)x(n+1) + ...$ với $n+1, \ n+2, ...$ phụ thuộc vào tương lai. Do đó, hệ thống đã cho phản nhân quả.

Ví dụ 2: Khảo sát tính nhân quả của các hệ thống được cho bởi đáp ứng xung:

a) $h(n) = 2^n u(n)$

b) $h(n) = -5^n u(-n-1)$

c) $h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$

d) $h(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(-n-1)$

- **Hệ thống ổn định BiBo *(Bounded Input Bounded Output):***

+ Hệ thống ổn định theo BiBo nếu $|x(n)| \le m_x < \infty \quad \forall x$ thì $|y(n)| \le m_y < \infty$

Ví dụ: $[H]: y(n) = \cos[x(n)] \Rightarrow |y(n)| \le |\cos[x(n)]| \le 1$ → Hệ thống ổn định theo dạng BiBo.

- **Hệ thống ổn định (stable)/ Hệ thống không ổn định (unstable) theo đáp ứng xung:**

+ Hệ thống ổn định nếu $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$ (tổng module hội tụ thì ổn định, ngược lại phân kì).

Ví dụ: Xét tính ổn định của hệ thống có đáp ứng xung sau $h(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(-n-1)$

Giải: Ta có: $u(-n-1) = \begin{cases} 0, & n \ge 0 \\ 1, & n < 0 \end{cases} \Rightarrow h(n) = \begin{cases} 0, & n \ge 0 \\ \left(\frac{1}{4}\right)^n, & n < 0 \end{cases}$ → Phản nhân quả.

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} 4^n \to \infty$ → Hệ thống không ổn định.

➢ **Hệ thống có đáp ứng xung hữu hạn FIR (*Finite Impulse Response*)/ Hệ thống có đáp ứng xung vô hạn IIR (*Infinite Impulse Response*):**

+ Hệ thống FIR: đáp ứng xung có chiều dài hữu hạn.

+ Hệ thống IIR: đáp ứng xung có chiều dài vô hạn.

Ví dụ:

$h_1(n) = \delta(n) - 3\delta(n-4) = \{\underset{\uparrow}{1}, 0, 0, 0, -3\}$ → chiều dài hữu hạn → hệ thống FIR.

$h_2(n) = 2^n u(-n-1) = \begin{cases} 0, & n \geq 0 \\ 2^n, & n < 0 \end{cases}$ → chiều dài vô hạn → hệ thống IIR.

➢ **Hệ thống hồi tiếp (*feedback)/* Hệ thống không hồi tiếp *(non – feedback):***

+ Hồi tiếp: Sử dụng tín hiệu ngõ ra hay một phần tín hiệu ngõ ra đưa về ngõ vào nhằm đạt được một số chỉ tiêu kỹ thuật nào đó.

Ví dụ: $y(n) = x(n) - \frac{1}{2}y(n-1)$ là một hệ thống có hồi tiếp.

➢ **Hệ thống đệ quy *(Recursion)/* Hệ thống không đệ quy (*Non - Recurson*):**

Ví dụ: $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{N} x(k) = x(n) + \sum_{k=-\infty}^{N-1} x(k) = x(n) + y(n-1)$ → **hệ thống đệ quy.**

Thông thường hệ thống đệ quy thường là hệ thống có hồi tiếp và có đáp ứng xung vô hạn.

a) $x(n)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$, tuần hoàn với chu kỳ $N=4$ mẫu.

$$\Rightarrow P_x=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|x(n)\right|^2=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}4\cos^2\left(\frac{\pi}{2}n\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}.0\right)+...+\cos\left(\frac{\pi}{2}.3\right)=2$$

b) $x(n)=3\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)$, tuần hoàn với chu kỳ $N=BCNN\{4,\ 6\}=12$ mẫu.

$$\Rightarrow P_x=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|x(n)\right|^2=\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{11}\left[3\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right]^2=\frac{13}{2}$$

c) $x(n)=\sin\sqrt{3}n$ là một tín hiệu không tuần hoàn do $N=\frac{k2\pi}{\sqrt{3}}\notin\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow P_x=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\left|x(n)\right|^2=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\sin^2\left(\sqrt{3}n\right) \text{ không tồn tại.}$$

d) $x(n)=1+\cos\left(\frac{\pi}{6}n\right)$, tuần hoàn với chu kỳ $N=12$ mẫu.

$$\Rightarrow P_x=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|x(n)\right|^2=\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{11}\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{6}n\right)\right]^2=\frac{3}{2}$$

e) $x(n)=1$, tuần hoàn với chu kỳ $N=1$ mẫu.

$$\Rightarrow P_x=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|x(n)\right|^2=\sum_{n=0}^{0}1^2=1$$

f) $x(n)=(-1)^n$, tuần hoàn với chu kỳ $N=2$ mẫu.

$$\Rightarrow P_x=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|x(n)\right|^2=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{1}\left|(-1)^n\right|^2=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{1}1=\frac{1}{2}(1+1)=1$$

g) $x(n)=\cos\left(\frac{11\pi n}{25}\right)$, tuần hoàn với chu kỳ $N=50$ mẫu.

$$\Rightarrow P_x=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|x(n)\right|^2=\frac{1}{50}\sum_{n=0}^{49}\left[\cos\left(\frac{11\pi n}{25}\right)^2\right]=\frac{1}{2}$$

a) $x(n)=\cos(0.01\pi n)$, ta có: $N=\frac{k2\pi}{0.01\pi}=200k=200,400,600,...\rightarrow x(n)$ tuần hoàn với chu kỳ $N=200$ mẫu.

b) $x(n)=\cos\left(\pi\frac{30n}{105}\right)$, ta có: $N=\frac{k2\pi}{\pi\frac{30}{105}}=7k=7,14,\ 21,...\rightarrow x(n)$ tuần hoàn với chu kỳ $N=7$ mẫu.

c) $x(n)=\cos(30\pi n)$, ta có: $N=\frac{k2\pi}{3\pi}=\frac{2}{3}k=2,\ 4,\ 6,...$ → $x(n)$ tuần hoàn với chu kỳ $N=2$ mẫu.

d) $x(n)=\sin(3n)$, ta có: $N=\frac{k2\pi}{3}\notin\mathbb{Z}$ → $x(n)$ không tuần hoàn.

e) $x(n)=\sin\left(\pi\frac{62n}{10}\right)$, ta có: $N=\frac{k2\pi}{\frac{62\pi}{10}}=\frac{10}{31}k=10,20,\ 30...$ → $x(n)$ tuần hoàn với chu kỳ $N=10$ mẫu.

2.1 A discrete-time signal $x(n)$ is defined as

$$x(n) = \begin{cases} 1 + \frac{n}{3}, & -3 \le n \le -1 \\ 1, & 0 \le n \le 3 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

(a) Determine its values and sketch the signal $x(n)$.

(b) Sketch the signals that result if we:

1. First fold $x(n)$ and then delay the resulting signal by four samples.

2. First delay $x(n)$ by four samples and then fold the resulting signal.

(c) Sketch the signal $x(-n+4)$.

(d) Compare the results in parts (b) and (c) and derive a rule for obtaining the signal $x(-n+k)$ from $x(n)$.

(e) Can you express the signal $x(n)$ in terms of signals $\delta(n)$ and $u(n)$?

a)

+ Giá trị dưới dạng chuỗi: $x(n) = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \underset{\uparrow}{1}, 1, 1, 1\right\}$

+ Vẽ dạng tín hiệu: Tự vẽ.

b)

1. Gấp trước, sau đó thực hiện phép trễ 4 mẫu (thay n bởi $n-4$).

$$\Rightarrow x(-n) = \left\{1,1,1,\underset{\uparrow}{1},\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\right\} \Rightarrow x\left[-(n-4)\right] = \left\{\underset{\uparrow}{0},1,1,1,1,\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\right\}$$

2. Thực hiện phép trễ 4 mẫu, sau đó gấp: (thay n bởi $-n$).

$$\Rightarrow x(n-4) = \left\{\underset{\uparrow}{0},0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,1,1,1\right\} \Rightarrow x(-n-4) = \left\{1,1,1,1,\frac{2}{3},\frac{1}{3},0,\underset{\uparrow}{0}\right\}$$

c)

$$\Rightarrow x(-n) = \left\{1,1,1,\underset{\uparrow}{1},\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\right\} \Rightarrow x(-n+4) = x\left[-(n-4)\right] = \left\{\underset{\uparrow}{0},1,1,1,1,\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\right\}$$

d) Kết quả ở câu (b) và câu (c) tương tự nhau. Để thu được tín hiệu $x(-n+k)$ từ tín hiệu $x(n)$ ta có:

+ Hai phương pháp:

- Cách 1: Thực hiện phép gấp tín hiệu $x(n)$ để thu được tín hiệu $x(-n)$. Sau đó dịch phải tín hiệu trên k đơn vị nếu $k > 0$ hoặc dịch trái k đơn vị nếu $k < 0$ do $x(-n+k) = x[-(n-k)]$.
- Cách 2: Thực hiện phép dịch trái tín hiệu $x(n)$ đi k đơn vị nếu $k > 0$ hoặc dịch phải tín hiệu $x(n)$ đi k đơn vị nếu $k < 0$ để thu được tín hiệu $x_2(n) = x(n+k)$. Sau đó thực hiện tiếp phép gấp tín hiệu đó để thu được tín hiệu $x_2(-n) = x(-n+k)$.

e) Ta có thể viết lại tín hiệu trên thành:

$$x(n) = \frac{1}{3}\delta(n+2) + \frac{2}{3}\delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3) \quad \text{hoặc}$$

$$x(n) = \frac{1}{3}\delta(n+2) + \frac{2}{3}\delta(n+1) + u(n) - u(n-4)$$

2.2 A discrete-time signal $x(n)$ is shown in Fig. P2.2. Sketch and label carefully each of the following signals.

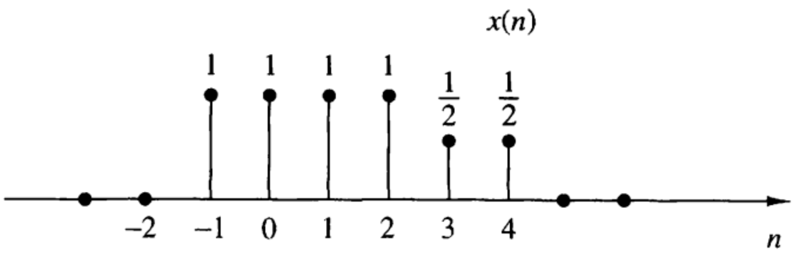


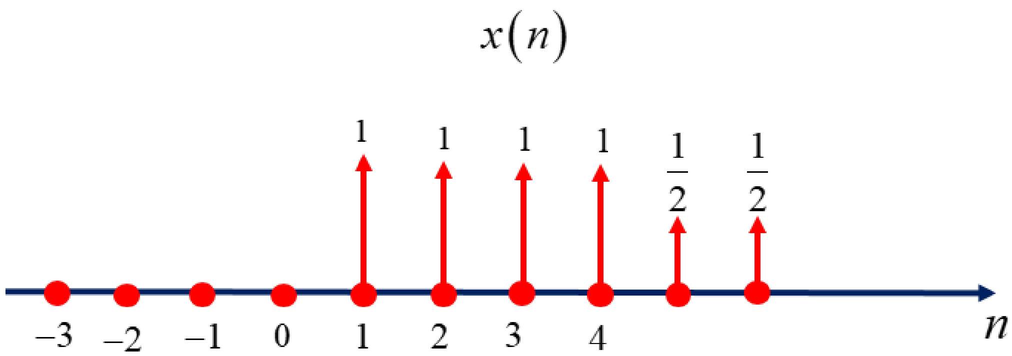
Figure P2.2

(a) $x(n-2)$ **(b)** $x(4-n)$ **(c)** $x(n+2)$ **(d)** $x(n)u(2-n)$ **(e)** $x(n-1)\delta(n-3)$ **(f)** $x(n^2)$ **(g)** even part of $x(n)$ **(h)** odd part of $x(n)$

a)

+

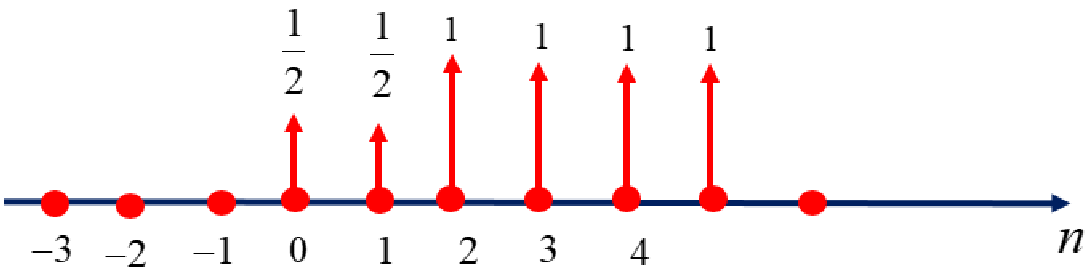
$$x(n-2) = \left\{\underset{\uparrow}{0},1,1,1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$$



+ $x(4-n) = x(-n+4) = x[-(n-4)]$ → gấp trước, sau đó dịch phải 4 mẫu.

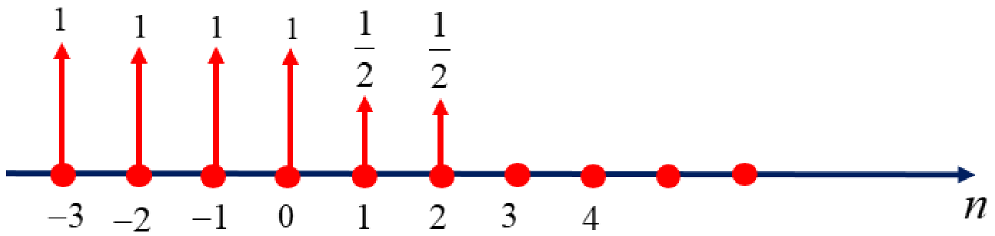
$$x(n)=\left\{\underset{\uparrow}{1},1,1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}\Rightarrow x(-n)=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1,1,\underset{\uparrow}{1}\right\}\Rightarrow x[-(n-4)]=\left\{\underset{\uparrow}{\frac{1}{2}},\frac{1}{2},1,1,1,1\right\}$$

$x(n)$



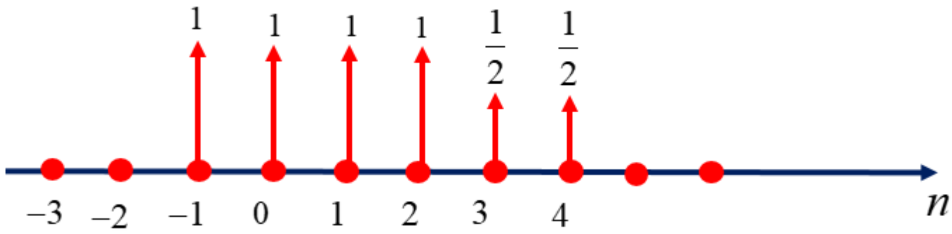
+ $x(n+2)=\left\{1,1,\underset{\uparrow}{1},1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$

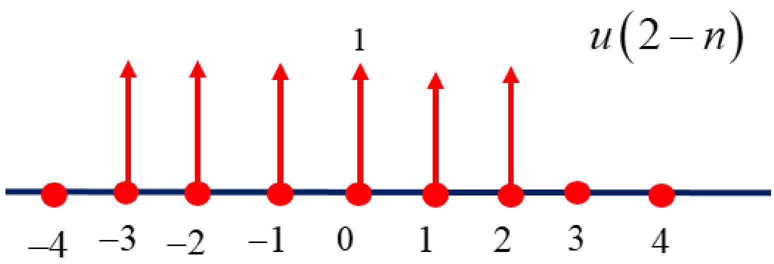
$x(n)$

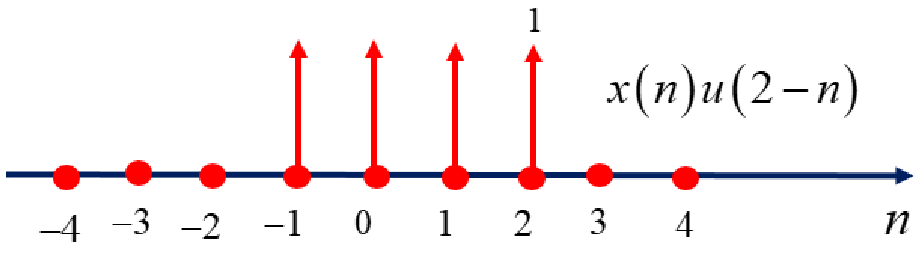


+ $x(n)u(2-n)=\{1,\underset{\uparrow}{1},1,1\}$

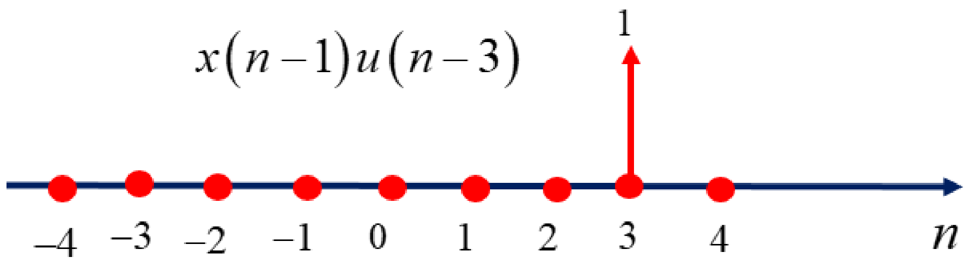
$x(n)$







+ $x(n-1)\delta(n-3) = x(3-1)\delta(n-3) = \delta(n-3)$

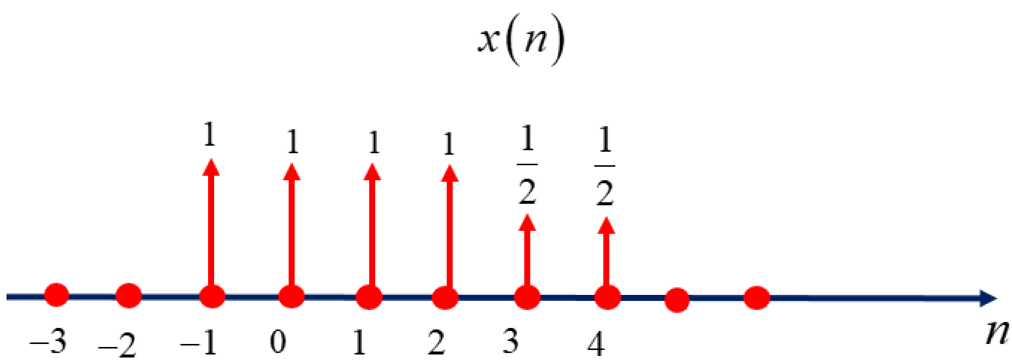


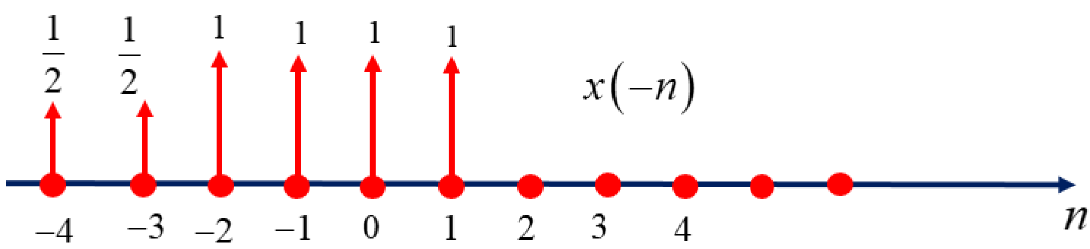
+ $x(n^2) = \left\{\frac{1}{2}, 1, 1, 1, \frac{1}{2}\right\}$
$\uparrow$

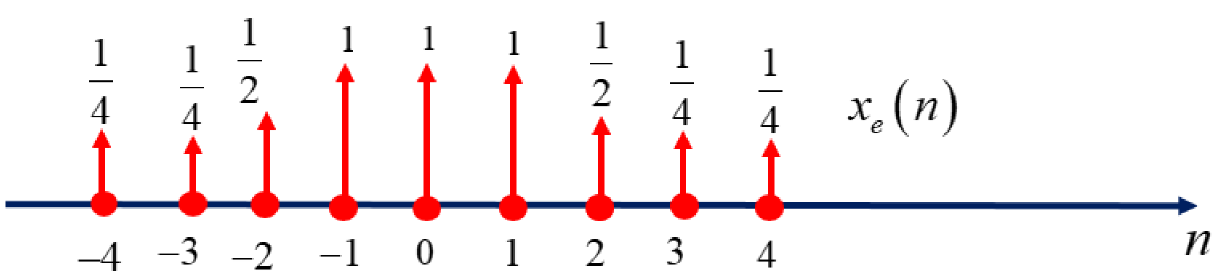
n	-2	-1	0	1	2
n^2	4	1	0	1	4
$x(n^2)$	1/2	1	1	1	1/2

+ Even part of $x(n)$: (*Các thành phần chẵn của tín hiệu).*

$$x_e(n) = \frac{1}{2}\left[x(n) + x(-n)\right]$$

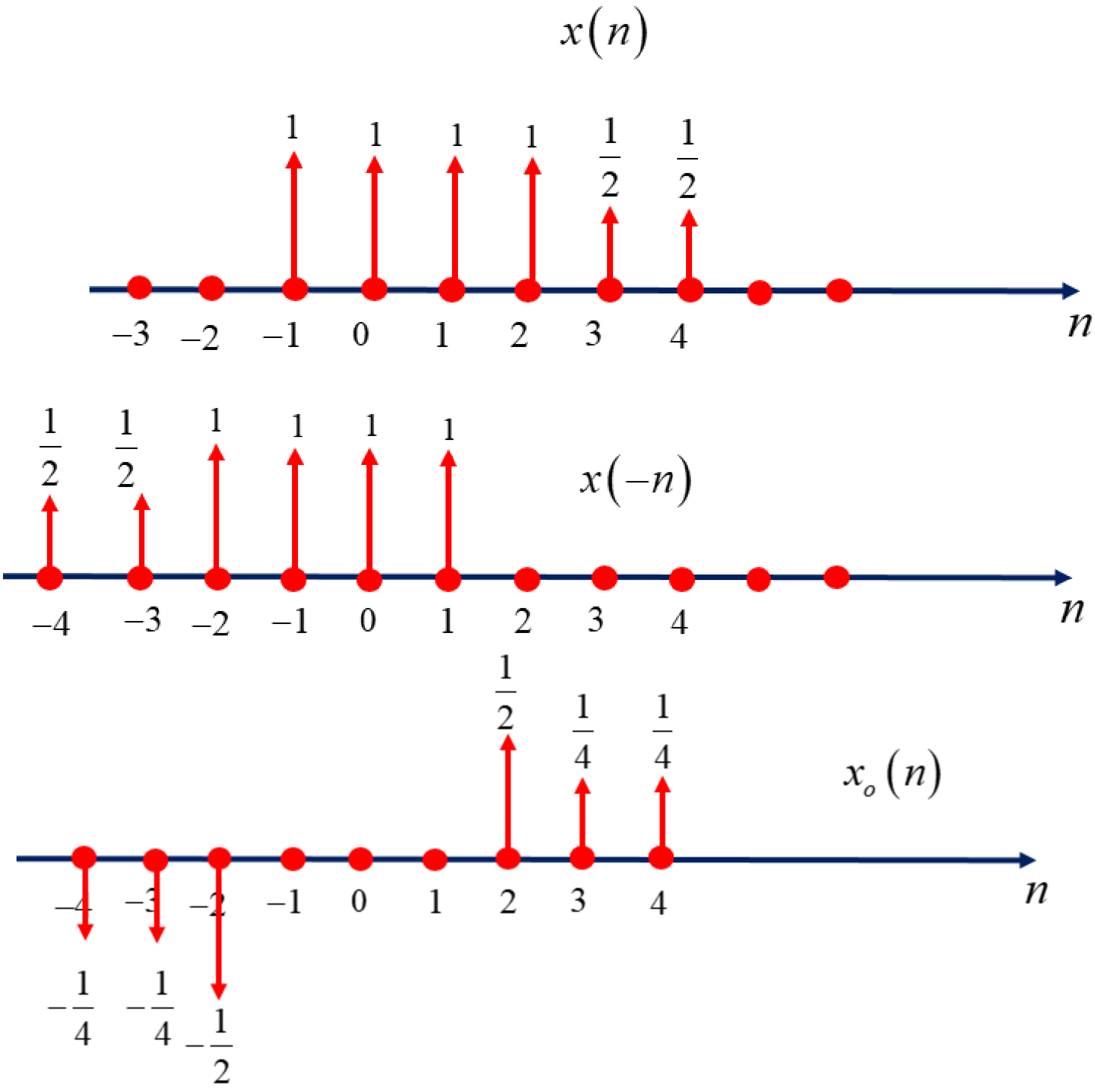






+ Odd part of $x(n)$: *(Các thành phần lẻ của tín hiệu).*

$$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x(-n)]$$



2.4 Show that any signal can be decomposed into an even and an odd component. Is the decomposition unique? Illustrate your arguments using the signal

$$x(n)=\{2,3,\underset{\uparrow}{4},5,6\}$$

"Chứng minh rằng, bất kì một tín hiệu nào cũng có thể phân tách thành các thành phần chẵn và các thành phần lẻ. Minh họa bởi tín hiệu bên dưới."

Giải:

+ Xét hai tín hiệu:

$$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(-n)]$$

$$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x(-n)]$$

Tín hiệu được gọi là chẵn nếu $x(n)=x(-n)$ (*) , và lẻ nếu $x(n)=-x(-n)$ (**).

Rõ ràng, tín hiệu $x_e(n)$ thỏa mãn tính chất chẵn và tín hiệu $x_o(n)$ thỏa mãn tính chất lẻ.

Như vậy, ta có thể biểu diễn $x(n)$ bởi $x(n)=x_e(n)+x_o(n)$→ tổng của các thành phần lẻ và chẵn.

+ Với $$x(n)=\{2,\ 3,\ \underset{\uparrow}{4},\ 5,\ 6\} \Rightarrow x(-n)=\{6,\ 5,\ \underset{\uparrow}{4},\ 3,\ 2\}$$

$$\Rightarrow x_e(n)=\{4,\ 4,\ \underset{\uparrow}{4},\ 4,\ 4\}$$

$$\Rightarrow x_o(n)=\{-2,\ -1,\ \underset{\uparrow}{0},\ 1,\ 2\}$$

$$\Rightarrow x_e(n)+x_o(n)=x(n)$$

2.5 Show that the energy (power) of a real-valued energy (power) signal is equal to the sum of the energies (powers) of its even and odd components.

"*Chứng minh rằng, công suất hay năng lượng của một tín hiệu thực, bằng tổng năng lượng hay công suất của các thành phần lẻ và chẵn của nó.*"

Giải: Đề bài tương đương việc chứng minh:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x_e(n)+x_o(n)\right]^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2(n)+\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2(n)+2\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(n)x_o(n)=E_e+E_o$$

Như vậy, ta cần phải chứng minh $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(n)x_o(n)=0\ \forall n$

Ta có:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(n)x_o(n)=\sum_{n=-\infty}^{-1} x_e(n)x_o(n)+\sum_{n=1}^{\infty}x_e(n)x_o(n)+x_e(0)x_o(0)=\sum_{n=-\infty}^{-1} x_e(n)x_o(n)+\sum_{n=1}^{\infty}x_e(n)x_o(n)$$

(do $x_o(0)=0$)

$$=\sum_{n=1}^{\infty}x_e(-n)x_o(-n)+\sum_{n=1}^{\infty}x_e(n)x_o(n)=-\sum_{n=1}^{\infty}x_e(n)x_o(n)+\sum_{n=1}^{\infty}x_e(n)x_o(n)=0$$

do $\begin{cases} x_e(-n)=x_e(n) \\ x_o(-n)=-x_o(n) \end{cases}$.

Hoặc có thể chứng minh theo cách này:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(n)x_o(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(-n)x_o(-n) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(n)x_o(n) \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(n)x_o(n) = 0$$

4.4.1 Tín hiệu vào $x(n) = [0, 1, 2, 3, 2, 0]$, tìm tín hiệu ra:

a) $y(n) = x(n) - 2x(n-1)$

$$x(n) = [0,\ 1,\ \underset{\uparrow}{2},\ 3,\ 2,\ 0]$$

$$x(n-1) = [0, 0, 1, 2, 3, 2, 0] \Rightarrow 2x(n-1) = [0,\ 0,\ \underset{\uparrow}{2},\ 4,\ 6,\ 4,\ 0]$$

$$\Rightarrow y(n) = [0,\ 1,\ \underset{\uparrow}{0},\ -1,\ -4,\ -4,\ 0]$$

b) $y(n) = x^2(n) - x(n)$

$$\Rightarrow x^2(n) = [0, 1, \underset{\uparrow}{4}, 9, 4, 0]$$

$$x(n) = [0, 1, \underset{\uparrow}{2}, 3, 2, 0]$$

→ Tự trừ nhau.

c) $y(n) = \max\{x(n+1),\ x(n),\ x(n-1)\}$

$$\Rightarrow x(n+1) = [0, 1, \underset{\uparrow}{2}, 3, 2, 0]$$

$$x(n) = [0, 1, \underset{\uparrow}{2}, 3, 2, 0]$$

$$x(n-1) = [0, 0, \underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 2, 0]$$

$$\Rightarrow y(n) = [0, 1, \underset{\uparrow}{2}, 3, 3, 3, 0]$$

d) $y(n) = \min\{x(n+1),\ 2x(n),\ x(n-1)\}$

→ Làm tương tự câu c.

4.4.2 Tín hiệu vào:

$x_1(n) = u(n)$

$x_2(n) = |n|,\ -3 \le n \le 3$

$$x_3(n) = 3\delta(n) - 5\delta(n-3)$$

Tìm tín hiệu ra:

a) $y(n) = \frac{1}{3}\left[x_1(n) + x_2(n) + x_3(n)\right]$

b) $y(n) = 2x_1(n) - 3x_2(n-1) + 4x_3(n-2)$

c) $y(n) = \max\{x_1(n) - 2x_2(n) + x_3(n)\} = \max\{h(n)\}$

Giải:

a)

$$x_1(n) = \{1, \underset{\uparrow}{1}, 1, 1, 1, 1, 1, ...\}$$

$$x_2(n) = \{3, 2, 1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3\}$$

$$x_3(n) = \{\underset{\uparrow}{3}, 0, 0, -5\}$$

$$\Rightarrow y(n) = \left\{1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \underset{\uparrow}{\frac{4}{3}}, \frac{2}{3}, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, ...\right\}$$

$$= \delta(n+3) + \frac{2}{3}\delta(n+2) + \frac{1}{3}\delta(n+1) + \frac{4}{3}\delta(n) + \frac{2}{3}\delta(n-1) + \delta(n-2) - \frac{1}{3}\delta(n-3) + \frac{1}{3}u(n-4)$$

b) Tương tự

c)

$$x_1(n) = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...\}$$
$$\uparrow$$

$$-2x_2(n) = \{-6, -4, -2, 0, -2, -4, -6\}$$
$$\uparrow$$

$$x_3(n) = \{3, \ 0 \ , 0 \ , -5\}$$
$$\uparrow$$

$$\Rightarrow h(n) = \{-6, -4, -2, \underset{\uparrow}{4}, -1, -3, -10, 1, 1, 1\} \Rightarrow y(n) = \max\{h(n)\} = 4$$

3.2 Determine the causal impulse response $h(n)$ for $n \geq 0$ of the LTI systems described by the following I/O difference equations:

a. $y(n) = 3x(n) - 2x(n-1) + 4x(n-3)$

b. $y(n) = 4x(n) + x(n-1) - 3x(n-3)$

c. $y(n) = x(n) - x(n-3)$

Giải:

a) Thay $x(n) = \delta(n) \Rightarrow y(n) = h(n)$ *ta được:*

$$h(n) = 3\delta(n) - 2\delta(n-1) + 4\delta(n-3) = \{3, -2, 0, \ 4\}$$

b) Thay $x(n) = \delta(n) \Rightarrow y(n) = h(n)$ *ta được:*

$$h(n) = 4\delta(n) + \delta(n-1) - 3\delta(n-3) = \{4, 1, 0, -3\}$$

c) Thay $x(n) = \delta(n) \Rightarrow y(n) = h(n)$ *ta được:*

$$h(n) = \delta(n) - \delta(n-3) = \{1, 0, 0, -1\}$$

3.3 Determine the causal impulse response $h(n)$ for $n \geq 0$ of the LTI systems described by the following I/O difference equations:

a. $y(n) = -0.9y(n-1) + x(n)$

b. $y(n) = 0.9y(n-1) + x(n)$

c. $y(n) = 0.64y(n-2) + x(n)$

d. $y(n) = -0.81y(n-2) + x(n)$

e. $y(n) = 0.5y(n-1) + 4x(n) + x(n-1)$

a) Thay $x(n) = \delta(n) \Rightarrow y(n) = h(n)$ *ta được:*

$$h(n) = -0.9h(n-1) + \delta(n)$$

- $n = 0 \Rightarrow h(0) = -0.9h(-1) + \delta(0) = 1$
- $n = 1 \Rightarrow h(1) = -0.9h(0) + \delta(1) = (-0.9)^1$
- $n = 2 \Rightarrow h(2) = -0.9h(1) + \delta(2) = (-0.9)^2$

$$\Rightarrow h(n) = (-0.9)^n u(n) = \begin{cases} (-0.9)^n, & n \geq 0 \\ 0 & , \ n < 0 \end{cases}$$

b) Tương tự câu a, ta có:

$$\Rightarrow h(n) = 0.9^n u(n) = \begin{cases} 0.9^n, & n \geq 0 \\ 0 & , \ n < 0 \end{cases}$$

c) Thay $x(n) = \delta(n) \Rightarrow y(n) = h(n)$ *ta được:*

$$h(n) = 0.64h(n-2) + \delta(n)$$

- $n = 0 \Rightarrow h(0) = 0.64h(-2) + \delta(0) = 1$
- $n = 1 \Rightarrow h(1) = 0.64h(-1) + \delta(1) = 0$
- $n = 2 \Rightarrow h(2) = 0.64h(0) + \delta(2) = 0.64^1$
- $n = 3 \Rightarrow h(3) = 0.64h(1) + \delta(3) = 0$
- $n = 4 \Rightarrow h(4) = 0.64h(2) + \delta 4 = 0.64^2$
- $n = 5 \Rightarrow h(5) = 0.64h(3) + \delta(5) = 0$
- $n = 6 \Rightarrow h(6) = 0.64h(4) + \delta(6) = 0.64^3$

$$\Rightarrow h(n) = \begin{cases} (0.64)^{\frac{n}{2}}, & n \quad chan \\ 0 & , n \quad le \end{cases} \text{ hay } \quad h(n) = \begin{cases} 0.8^n, & n \quad chan \\ 0 & , n \quad le \end{cases}$$

d) Tương tự câu c, ta có:

$$\Rightarrow h(n) = \begin{cases} (-0.81)^{\frac{n}{2}}, & n \quad chan \\ 0 & , n \quad le \end{cases} \text{ hay } h(n) = \begin{cases} -0.9^n & , n \quad chan \\ 0 & , n \quad le \end{cases}$$

d) Thay $x(n) = \delta(n) \Rightarrow y(n) = h(n)$ *ta được:*

$$h(n) = 0.5h(n-1) + 4\delta(n) + \delta(n-1)$$

- $n = 0 \Rightarrow h(0) = 0.5h(-1) + 4\delta(0) + \delta(-1) = 4$
- $n = 1 \Rightarrow h(1) = 0.5h(0) + 4\delta(1) + \delta(0) = 0,5.4 + 1 = 3 = 3.\left(\frac{1}{2}\right)^0$
- $n = 2 \Rightarrow h(2) = 0.5h(1) + 4\delta(2) + \delta(1) = 0,5.3 = 3.\left(\frac{1}{2}\right)^1$
- $n = 3 \Rightarrow h(3) = 0.5h(2) + 4\delta(3) + \delta(2) = 0,5.0,5.3 = 3.\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$$\Rightarrow h(n) = 4\delta(n) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) = \begin{cases} 4, & n = 0 \\ 3.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & , n > 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

3.4 Determine the I/O difference equations relating $x(n)$ and $y(n)$ for the LTI systems having the following impulse responses:

a. $h(n) = (0.9)^n u(n)$

b. $h(n) = (-0.6)^n u(n)$

c. $h(n) = (0.9)^n u(n) + (-0.9)^n u(n)$

d. $h(n) = (0.9j)^n u(n) + (-0.9j)^n u(n)$

a) Ta có:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + h(2)x(n-2) + \ldots$$

$$= x(n) + 0.9x(n-1) + 0.9^2 x(n-2) + 0.9^3 x(n-3) + \ldots$$

$$= x(n) + 0.9\left[x(n-1) + 0.9x(n-2) + 0.9^2 x(n-3)\right] + \ldots$$

$$= x(n) + 0.9\, y(n-1)$$

b) Làm như trên $\Rightarrow y(n) = x(n) - 0.6y(n-1)$

c) Ta có:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + h(2)x(n-2) + \ldots$$

$$= [1+1]x(n) + [0.9-0.9]x(n-1) + \left[0.9^2 + (-0.9)^2\right]x(n-2) + \left[0.9^3 - 0.9^3\right]x(n-3)$$
$$+ \left[0.9^4 + 0.9^4\right]x(n-4) + \ldots$$

$$\Leftrightarrow y(n) = 2x(n) + 2.0,9^2 x(n-2) + 2.0,9^4 x(n-4) + 2.0,9^6 x(n-6) + \ldots$$

$$= 2x(n) + 0.9^2\left[2x(n-2) + 2.0,9^2 x(n-4) + 2.0,9^4 x(n-6) + 2.0,9^6 x(n-8) + \ldots\right]$$

$$= 2x(n) + 0.9^2\, y(n-2)$$

$$= 2x(n) + 0.81y(n-2)$$

d) Ta có:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + h(2)x(n-2) + \ldots$$

$$= [1+1]x(n) + [0.9j - 0.9j]x(n-1) + \left[(0.9j)^2 + (-0.9j)^2\right]x(n-2) + \left[0.9j^3 - 0.9j^3\right]x(n-3)$$
$$+ \left[(0.9j)^4 + (0.9j)^4\right]x(n-4) + \ldots$$

$$= 2x(n) + 2.(0.9j)^2 x(n-2) + 2.(0.9j)^4 x(n-4) + 2.(0.9j)^6 x(n-6) + \ldots$$

$$= 2x(n) + (0.9j)^2\left[2x(n-2) + 2.(0.9j)^2 x(n-4) + 2.(0.9j)^4 x(n-6) + 2.(0.9j)^6 x(n-8) + \ldots\right]$$

$$= 2x(n) + (0.9j)^2 y(n-2) = 2x(n) - 0.81y(n-2)$$

3.5 A causal IIR filter has impulse response $h(n) = 4\delta(n) + 3(0.5)^{n-1}u(n-1)$. Working with the convolutional equation $y(n) = \sum_m h(m)x(n-m)$, derive the *difference equation* satisfied by $y(n)$.

Ta có đáp ứng xung: $h(n) = \{4,\ \ 3,\ \ 3.0,5,\ \ 3.0,5^2,\ \ 3.0,5^3,...\}$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + h(2)x(n-2) + ...$$

$$= 4x(n) + 3\left[x(n-1) + 0.5x(n-2) + 0.5^2x(n-3) + 0.5^3x(n-4)...\right]$$

$$\Leftrightarrow y(n) = 4x(n) + 3x(n-1) + \boxed{3\left[0.5x(n-2) + 0.5^2x(n-3) + 0.5^3x(n-4)...\right]} \quad (*)$$

Mặt khác:

$$y(n-1) = 4x(n-1) + \boxed{3\left[x(n-2) + 0.5x(n-3) + 0.5^2x(n-4) + ...\right]}$$

$$\Leftrightarrow 0.5y(n-1) = 2x(n-1) + \boxed{3\left[0.5x(n-2) + 0.5^2x(n-3) + 0.5^3x(n-4) + ...\right]} (**)$$

Lấy (*) – (**) →

$$\Leftrightarrow y(n) - 0.5y(n-1) = 4x(n) + 3x(n-1) - 2x(n-1)$$

$$\Rightarrow y(n) = 4x(n) + x(n-1) + 0.5y(n-1)$$

3.6 A causal IIR filter has impulse response:

$$h(n) = \begin{cases} 5, & \text{if } n = 0 \\ 6(0.8)^{n-1}, & \text{if } n \geq 1 \end{cases}$$

Working with the convolutional filtering equation, derive the *difference equation* satisfied by $y(n)$.

Ta có đáp ứng xung: $h(n) = \{5,\ \ 6,\ \ 6.0,8,\ \ 6.0,8^2,...\}$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + h(2)x(n-2) + ...$$

$$= 5x(n) + 6\left[x(n-1) + 0.8x(n-2) + 0.8^2x(n-3) + 0.8^3x(n-4)...\right]$$

$$\Leftrightarrow y(n) = 5x(n) + 6x(n-1) + 6\left[0.8x(n-2) + 0.8^2x(n-3) + 0.8^3x(n-4)...\right] \quad (*)$$

Mặt khác:

$$y(n-1) = 5x(n-1) + 6\left[x(n-2) + 0.8x(n-3) + 0.8^2 x(n-4) + ...\right]$$

$$\Leftrightarrow 0.8y(n-1) = 4x(n-1) + 6\left[0.8x(n-2) + 0.8^2 x(n-3) + 0.8^3 x(n-4) + ...\right] \quad \textbf{\textit{(**)}}$$

(*) – (**)

$$\Leftrightarrow y(n) - 0.8y(n-1) = 5x(n) + 6x(n-1) - 4x(n-1)$$

$$\Rightarrow y(n) = 5x(n) + 2x(n-1) + 0.8y(n-1)$$

4.1 Compute the convolution, $\mathbf{y} = \mathbf{h} * \mathbf{x}$, of the filter and input,

$$\mathbf{h} = [1, 1, 2, 1], \qquad \mathbf{x} = [1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1]$$

using the following three methods: (a) The convolution table. (b) The LTI form of convolution, arranging the computations in a table form. (c) The overlap-add method of block convolution with length-3 input blocks. Repeat using length-5 input blocks.

4.2 Repeat Problem 4.1 for the filter and input:

$$\mathbf{h} = [2, -2, -1, 1], \qquad \mathbf{x} = [2, 2, 0, 1, -1, 0, 1, 2],$$

4.3 The impulse response $h(n)$ of a filter is nonzero over the index range $3 \le n \le 6$. The input signal $x(n)$ to this filter is nonzero over the index range $10 \le n \le 20$. Consider the direct and LTI forms of convolution:

$$y(n) = \sum_m h(m)x(n-m) = \sum_m x(m)h(n-m)$$

a. Determine the overall index range n for the output $y(n)$. For each n, determine the corresponding summation range over m, for both the direct and LTI forms.

b. Assume $h(n) = 1$ and $x(n) = 1$ over their respective index ranges. Calculate and sketch the output $y(n)$. Identify (with an explanation) the input on/off transient and steady state parts of $y(n)$.

2.14 Show that:

(a) A relaxed linear system is causal if and only if for any input $x(n)$ such that

$$x(n) = 0 \text{ for } n < n_0 \Rightarrow y(n) = 0 \qquad \text{for } n < n_0$$

(b) A relaxed LTI system is causal if and only if

$$h(n) = 0 \qquad \text{for } n < 0$$

2.16 **(a)** If $y(n) = x(n) * h(n)$, show that $\sum_y = \sum_x \sum_h$, where $\sum_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)$.

(b) Compute the convolution $y(n) = x(n) * h(n)$ of the following signals and check the correctness of the results by using the test in (a).

(1) $x(n) = \{1, 2, 4\}, h(n) = \{1, 1, 1, 1, 1\}$

(2) $x(n) = \{1, 2, -1\}, h(n) = x(n)$

(3) $x(n) = \{0, 1, -2, 3, -4\}, h(n) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\}$

(4) $x(n) = \{1, 2, 3, 4, 5\}, h(n) = \{1\}$

(5) $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, -2, 3\}, h(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 0, 1, 1, 1, 1\}$

(6) $x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 0, 1, 1, 1, 1\}, h(n) = \{1, \underset{\uparrow}{-2}, 3\}$

(7) $x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 4, -3\}, h(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 0, -1, -1\}$

(8) $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 2\}, h(n) = u(n)$

(9) $x(n) = \{1, 1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 1\}, h(n) = \{1, -2, -3, \underset{\uparrow}{4}\}$

(10) $x(n) = \{1, 2, \underset{\uparrow}{0}, 2, 1\} h(n) = x(n)$

(11) $x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n), h(n) = (\frac{1}{4})^n u(n)$

2.18 Determine and sketch the convolution $y(n)$ of the signals

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}n, & 0 \le n \le 6 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} 1, & -2 \le n \le 2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

(a) Graphically

(b) Analytically

2.20 Consider the following three operations.

(a) Multiply the integer numbers: 131 and 122.

(b) Compute the convolution of signals: $\{1, 3, 1\} * \{1, 2, 2\}$.

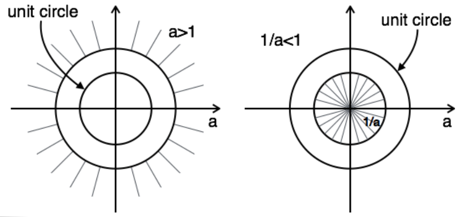
(c) Multiply the polynomials: $1 + 3z + z^2$ and $1 + 2z + 2z^2$.

(d) Repeat part (a) for the numbers 1.31 and 12.2.

(e) Comment on your results.

CHƯƠNG 3:

BIẾN ĐỔI Z VÀ ỨNG DỤNG



I. TÍN HIỆU RỜI RẠC

1. Biến đổi Z (2 phía, 2 bên – two sided)

+ Định nghĩa và miền hội tụ (ROC – Region of Convergence)

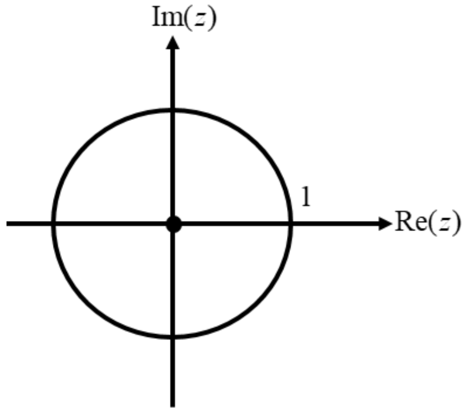
$$x(n) \leftrightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C} \qquad ROC = \{z \mid x(z) \neq \infty\}$$

Ví dụ: Tìm $x(z)$ và ROC của tín hiệu sau:

a) $x(n) = \delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \Rightarrow X(z) = x(0).z^{-0} = 1, \ ROC: \forall z$

b) $x(n) = \delta(n - n_0) = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases} \Rightarrow X(z) = x(n_0).z^{-n_0} = z^{-n_0} \quad ROC: \begin{cases} n_0 > 0 \Rightarrow \forall z \setminus \{0\} \\ n_0 < 0 \Rightarrow \forall z \setminus \{\infty\} \end{cases}$

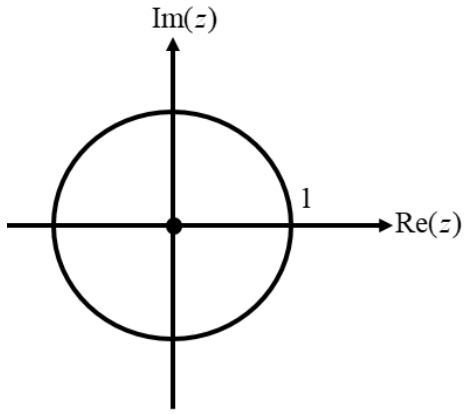
c) $x(n) = u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$



$$\Rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 1.z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z^{-1})^n = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

$$\Rightarrow ROC: \left|z^{-1}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$$

d) $x(n) = -u(-n-1) = \begin{cases} 0, & n \geq 0 \\ -1, & n < 0 \end{cases}$



$$\Rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1).z^{-n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} z^n = -\left[\sum_{n=0}^{+\infty} z^n - z^0\right] = -\left(\frac{1}{1-z} - 1\right)$$

$$= \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \Rightarrow ROC: \ |z| < 1$$

→ Tín hiệu nhân quả và tín hiệu phản nhân quả có cùng biểu thức biến đổi z nhưng miền hội tụ của tín hiệu nhân quả nằm ngoài vòng tròn, còn miền hội tụ của tín hiệu phản nhân quả nằm trong vòng tròn có bán kính tương ứng.

Tín hiệu phản nhân quả tương ứng: $x_1(n) = x(n).u(n) \ \Rightarrow x_2(n) = -x(n).u(-n-1)$ là tín hiệu phản nhân quả tương ứng của tín hiệu nhân quả $x_1(n)$.

e) $x_1(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \Rightarrow X_1(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{z}{z-\frac{1}{2}},\ |z|>\frac{1}{2}$

$x_2(n)=-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1) \Rightarrow X_2(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},\ |z|<\frac{1}{2}$

f) $x(n)=\{-1,\ 0,\ -1,\ 2,\ 0,\ -3\}$

$\uparrow$

$\Rightarrow X(z)=-1z^{-(-2)}+0z^{-(-1)}-1z^{-0}+2z^{-1}+0z^{-2}-3z^{-3}$

$=-z^2-1+2z^{-1}-3z^{-3} \quad \Rightarrow ROC:\forall x\setminus\{0,\infty\}$

2. Tính chất

+ Tính trễ - sớm: $x(n)\leftrightarrow X(z) \quad \Rightarrow x(n-n_0)\leftrightarrow z^{-n_0}X(z)$

+ Tính tuyến tính: $ax(n)+by(n)\leftrightarrow aX(z)+bY(z)$

Ví dụ: Tìm $X(z),\ ROC$ của tín hiệu sau:

$$x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-2)=x_1(n)-x_2(n)$$

Cách 1:

$+\ x_1(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \Rightarrow X_1(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},\quad |z|>\frac{1}{2}$

$+\ x_2(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-2)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u(n-2)=\frac{1}{4}x_1(n-2)\Rightarrow X_1(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},\quad |z|>\frac{1}{2}$

$\Rightarrow X_2(z)=\frac{1}{4}.\frac{z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},\quad |z|>\frac{1}{2} \Rightarrow X(z)=X_1(z)-X_2(z)=\frac{1-\frac{1}{4}z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=1+\frac{1}{2}z^{-1},\ |z|>\frac{1}{2}$

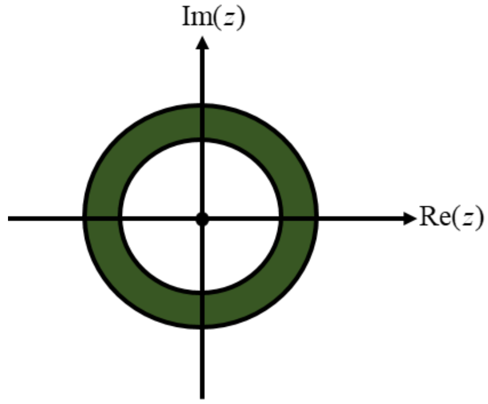
Cách 2: Ta biến đổi:

$x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-2)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[u(n)-u(n-2)\right]=\left(\frac{1}{2}\right)^2\left[\delta(n)+\delta(n-1)\right]$

$\Rightarrow X(z)=1+\frac{1}{2}z^{-1}$

Ví dụ: Tìm $X(z)$, ROC của tín hiệu sau: $x(n)=3^{-|n|}$

Ta có: $x(n)=3^{-|n|}=\begin{cases}3^{-n}, & n\ge 0\\ 3^{n}, & n<0\end{cases}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(n)+3^{n}u(-n-1)$



$$x_1(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(n)\Rightarrow X_1(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}},\ |x|>\frac{1}{3}$$

$$x_2(n)=3^{n}u(-n-1)\ \Rightarrow X_2(z)=-\frac{1}{1-3z^{-1}},\ |z|<3$$

$$\Rightarrow X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}-\frac{1}{1-3z^{-1}},\ ROC=ROC_1\cap ROC_2=\frac{1}{3}<|z|<3$$

Chú ý: Nếu $ROC=ROC_1\cap ROC_2=\varnothing\Rightarrow X(z)$ ***không tồn tại.***

+ Tỉ lệ trên miền Z:

Nếu $x(n)\leftrightarrow X(z)$ thì $a^{n}x(n)\leftrightarrow X\left(\frac{z}{a}\right)=X\left(a^{-1}z\right)$

Ví dụ: Tìm $X(z)$, ROC của tín hiệu sau: $x(n)=3^{n}u(n)$

$$u(n)\leftrightarrow\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1},\ |z|>1\Rightarrow 3^{n}u(n)\leftrightarrow\frac{z/3}{z/3-1}=\frac{z}{z-3}=\frac{1}{1-3z^{-1}},\ \left|\frac{z}{3}\right|>1\Leftrightarrow|z|>3$$

Ví dụ: Tìm $X(z)$, ROC của tín hiệu sau: $x(n)=\sin(n\omega_0)u(n)$

Nhắc lại công thức Eucler: $e^{j\varphi}=\cos\varphi+j\sin\varphi\ \Rightarrow\begin{cases}\cos\varphi=\frac{1}{2}\left[e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}\right]\\ \sin\varphi=\frac{1}{2j}\left[e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}\right]\end{cases}$

$$\Rightarrow x(n)=\sin(n\omega_0)u(n)=\frac{1}{2j}\left[e^{jn\omega_0}-e^{-jn\omega_0}\right]u(n)=\frac{1}{2j}\left[\left(e^{j\omega_0}\right)^{n}u(n)-\left(e^{-j\omega_0}\right)^{n}u(n)\right]$$

$$\Rightarrow X(z)=\frac{1}{2j}.\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}-\frac{1}{2j}.\frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}\quad\begin{cases}ROC_1:|z|>\left|e^{j\omega_0}\right|=1\\ ROC_2:|z|>\left|e^{-j\omega_0}\right|=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow X(z)=\frac{1}{2j}.\frac{2j\sin\omega_0 z^{-1}}{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}=\frac{\sin\omega_0 z^{-1}}{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}},\ |z|>1$$

+ Biến đổi Z của tín hiệu gấp và tín hiệu liên hợp phức:

Nếu $x(n) \leftrightarrow X(z)$ thì:

$$x(-n) \leftrightarrow X\left(z^{-1}\right)$$

$$x^*(n) \leftrightarrow X^*\left(z^{-1}\right)$$

Tương tự, ta thực hiện các biến đổi Z sau:

$$\mathrm{Re}\left[x(n)\right] = \frac{1}{2}\left[x(n) + x^*(n)\right] \Rightarrow X_{\mathrm{Re}}(z)$$

$$\mathrm{Im}\left[x(n)\right] = \frac{1}{2j}\left[x(n) - x^*(n)\right] \Rightarrow X_{\mathrm{Im}}(z)$$

$$x_e\left[x(n)\right] = \frac{1}{2}\left[x(n) + x(-n)\right] \Rightarrow X_e(z)$$

$$x_o\left[x(n)\right] = \frac{1}{2}\left[x(n) - x(-n)\right] \Rightarrow X_o(z)$$

+ Đạo hàm trên miền Z:

Nếu $x(n) \leftrightarrow X(z)$ thì: $nx(n) \leftrightarrow -z\dfrac{dX(z)}{dz}$

Ví dụ: Tìm $X(z)$, ROC của tín hiệu sau: $x(n) = (n-1)u(n)$

Cách 1:

$$x(n) = (n-1)u(n) = nu(n) - u(n) \Rightarrow X(z) = -z\left(\frac{z}{z-1}\right)' - \frac{z}{z-1},\ |z| > 1$$

$$= -z.\left(\frac{-1}{(z-1)^2}\right) - \frac{z}{z-1} = \frac{z(2-z)}{(z-1)^2},\ |z| > 1$$

Cách 2:

$$x(n) = (n-1)u(n) = (n-1)\left[\delta(n) + u(n-1)\right] = -\delta(n) + (n-1)u(n-1)$$

$$nu(n) \leftrightarrow -z.\left(\frac{z}{z-1}\right)' = \frac{z}{(z-1)^2} \Rightarrow (n-1)u(n-1) \leftrightarrow z^{-1}.\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2}$$

$$\Rightarrow X(z) = -1 + \frac{1}{(z-1)^2},\ |z| > 1$$

+ Tích chập trên miền thời gian:

$$x(n) * y(n) \leftrightarrow X(z).Y(z)$$

TABLE 3.2 Properties of the z-Transform

Property	Time Domain	z-Domain	ROC
Notation	$x(n)$	$X(z)$	ROC: $r_2 < \|z\| < r_1$
	$x_1(n)$	$X_1(z)$	ROC_1
	$x_2(n)$	$X_2(z)$	ROC_2
Linearity	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$	At least the intersection of ROC_1 and ROC_2
Time shifting	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$	That of $X(z)$, except $z = 0$ if $k > 0$ and $z = \infty$ if $k < 0$
Scaling in the z-domain	$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$	$\|a\|r_2 < \|z\| < \|a\|r_1$
Time reversal	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{r_1} < \|z\| < \frac{1}{r_2}$
Conjugation	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	ROC
Real part	$\text{Re}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	Includes ROC
Imaginary part	$\text{Im}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2}j[X(z) - X^*(z^*)]$	Includes ROC
Differentiation in the z-domain	$nx(n)$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	$r_2 < \|z\| < r_1$
Convolution	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	At least, the intersection of ROC_1 and ROC_2
Correlation	$r_{x_1x_2}(l) = x_1(l) * x_2(-l)$	$R_{x_1x_2}(z) = X_1(z)X_2(z^{-1})$	At least, the intersection of ROC of $X_1(z)$ and $X_2(z^{-1})$
Initial value theorem	If $x(n)$ causal	$x(0) = \lim\limits_{z\to\infty} X(z)$	
Multiplication	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}\,dv$	At least, $r_{1l}r_{2l} < \|z\| < r_{1u}r_{2u}$
Parseval's relation	$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2^*(1/v^*)v^{-1}dv$		

TABLE 3.3 Some Common z-Transform Pairs

	Signal, $x(n)$	z-Transform, $X(z)$	ROC
1	$\delta(n)$	1	All z
2	$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
3	$a^n u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
4	$na^n u(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
5	$-a^n u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
6	$-na^n u(-n-1)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
7	$(\cos\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
8	$(\sin\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
9	$(a^n\cos\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-az^{-1}\cos\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
10	$(a^n\sin\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{az^{-1}\sin\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

➢ **BÀI TẬP [PRO]**

3.1 Determine the z-transform of the following signals.

(a) $x(n) = \{3, 0, 0, 0, 0, \underset{\uparrow}{6}, 1, -4\}$

(b) $x(n) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n, & n \geq 5 \\ 0, & n \leq 4 \end{cases}$

3.2 Determine the z-transforms of the following signals and sketch the corresponding pole–zero patterns.

(a) $x(n) = (1 + n)u(n)$

(b) $x(n) = (a^n + a^{-n})u(n)$, a real

(c) $x(n) = (-1)^n 2^{-n} u(n)$

(d) $x(n) = (na^n \sin \omega_0 n)u(n)$

(e) $x(n) = (na^n \cos \omega_0 n)u(n)$

(f) $x(n) = Ar^n \cos(\omega_0 n + \phi)u(n), 0 < r < 1$

(g) $x(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n)(\frac{1}{3})^{n-1} u(n-1)$

(h) $x(n) = (\frac{1}{2})^n [u(n) - u(n-10)]$

3.3 Determine the z-transforms and sketch the ROC of the following signals.

(a) $x_1(n) = \begin{cases} (\frac{1}{3})^n, & n \geq 0 \\ (\frac{1}{2})^{-n}, & n < 0 \end{cases}$

(b) $x_2(n) = \begin{cases} (\frac{1}{3})^n - 2^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$

(c) $x_3(n) = x_1(n + 4)$

(d) $x_4(n) = x_1(-n)$

3.4 Determine the z-transform of the following signals.

(a) $x(n) = n(-1)^n u(n)$

(b) $x(n) = n^2 u(n)$

(c) $x(n) = -na^n u(-n-1)$

(d) $x(n) = (-1)^n \left(\cos \frac{\pi}{3} n\right) u(n)$

(e) $x(n) = (-1)^n u(n)$

(f) $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 0, -1, 0, 1, -1, \ldots\}$

$x(n)$	$X(z)$	ROC
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
$a^n u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$na^n u(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-na^n u(-n-1)$	$\dfrac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$(n+1)a^n u(n)$	$\dfrac{1}{\left(1-az^{-1}\right)^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-(n+1)a^n u(-n-1)$	$\dfrac{1}{\left(1-az^{-1}\right)^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-\cos(\omega_0 n)u(-n-1)$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert < 1$
$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-\sin(\omega_0 n)u(-n-1)$	$\dfrac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert < 1$
$a^n\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n\cos(\omega_0 n)u(-n-1)$	$\dfrac{1-az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$a^n\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{az^{-1}\sin\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n\sin(\omega_0 n)u(-n-1)$	$\dfrac{az^{-1}\sin\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$

I. PROAKIS

3.1 Determine the z-transform of the following signals.

(a) $x(n) = \{3, 0, 0, 0, 0, \underset{\uparrow}{6}, 1, -4\}$

(b) $x(n) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n, & n \geq 5 \\ 0, & n \leq 4 \end{cases}$

Giải:

a) $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = 3.z^{-(-5)} + 6.z^0 + z^{-1} - 4z^{-2}, \quad ROC: \forall z \setminus \{0, \infty\}$

b) $X(z) = \sum_{n=5}^{\infty} x(n) z^{-n}$

$$= \sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n - \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^0 - \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^1 - \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^4$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - 1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3} - \frac{1}{16}z^{-4}, \quad ROC: \left|\frac{1}{2}z^{-1}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > \frac{1}{2}$$

Cách 2: $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-5) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-5} u(n-5) = \frac{1}{32} x_1(n-5)$, **với** $x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

$$\Rightarrow X_1(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad ROC: |z| > \frac{1}{2}$$

Áp dụng tính chất trễ - sớm: $x(n) \leftrightarrow X(z) \Rightarrow x(n-n_0) \leftrightarrow z^{-n_0} X(z)$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{32} z^{-5} X_1(z) = \frac{1}{32} . \frac{z^{-5}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad ROC: |z| > \frac{1}{2}$$

3.2 Determine the z-transforms of the following signals and sketch the corresponding pole–zero patterns.

(a) $x(n) = (1+n)u(n)$

(b) $x(n) = (a^n + a^{-n})u(n)$, a real

(c) $x(n) = (-1)^n 2^{-n} u(n)$

(d) $x(n) = (na^n \sin \omega_0 n)u(n)$

(e) $x(n) = (na^n \cos \omega_0 n)u(n)$

(f) $x(n) = Ar^n \cos(\omega_0 n + \phi)u(n)$, $0 < r < 1$

(g) $x(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n)(\frac{1}{3})^{n-1} u(n-1)$

(h) $x(n) = (\frac{1}{2})^n [u(n) - u(n-10)]$

Giải:

a) $x(n) = u(n) + nu(n) = x_1(n) + x_2(n)$ **→ Áp dụng công thức số 2 và số 4 trong bảng 3.3:**

- $X_1(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}},\ ROC_1: |z|>1$
- $X_2(z)=\dfrac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}, ROC_2: |z|>1$

$$\Rightarrow X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}=\frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)^2},\ ROC: |z|>1$$

b) $x(n)=\left(a^n+a^{-n}\right)u(n)=a^n u(n)+a^{-n}u(n)=x_1(n)+x_2(n)$

Áp dụng công thức biến đổi Z trong bảng 3.3 : $a^n u(n)\longleftrightarrow \dfrac{1}{1-az^{-1}},\ ROC: |z|>|a|$

- $X_1(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}},\ ROC_1: |z|>|a|$
- $X_2(z)=\dfrac{1}{1-a^{-1}z^{-1}},\ ROC_2: |z|>\left|\dfrac{1}{a}\right|$

$$\Rightarrow X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}+\frac{1}{1-a^{-1}z^{-1}},\ ROC: |z|>\max\left\{|a|,\ \left|\frac{1}{a}\right|\right\}$$

Ở đây có $\max\left\{|a|,\ \left|\dfrac{1}{a}\right|\right\}$ *bởi vì chưa biết rằng* $|a|$ *hay* $\left|\dfrac{1}{a}\right|$ *lớn hơn, ví dụ:* $2>\dfrac{1}{2}$*, tuy nhiên* $0.1<\dfrac{1}{0.1}$.

c) $x(n)=(-1)^n 2^{-n}u(n)=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n u(n) \qquad \Rightarrow X(z)=\dfrac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)z^{-1}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}z^{-1}},\quad |z|>\dfrac{1}{2}$

d) $x(n)=\left(na^n\sin\omega_0 n\right)u(n)=\left(nx_1(n)\right)u(n)$

Áp dụng công thức số 10 trong bảng 3.3: $\left(a^n\sin\omega_0 n\right)u(n)\leftrightarrow\dfrac{az^{-1}\sin\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}},\ |z|>|a|$

$$\Rightarrow X_1(Z)=\frac{az^{-1}\sin\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}=\frac{a\sin\omega_0 z}{z^2-2a\cos\omega_0 z+a^2},\ ROC: |z|>|a|$$

Áp dụng tính chất đạo hàm trên miền Z: $nx(n)\longleftrightarrow -z\dfrac{dX(z)}{dz}$

$$\Rightarrow X(z)=-z.\frac{dX_1(z)}{dz}=-z.\left(\frac{a\sin\omega_0 z}{z^2-2a\cos\omega_0 z+a^2}\right)'$$

$$=-z.\left(\frac{a\sin\omega_0.\left(z^2-2a\cos\omega_0 z+a^2\right)-a\sin\omega_0 z.\left(2z-2a\cos\omega_0\right)}{\left(z^2-2a\cos\omega_0 z+a^2\right)^2}\right)$$

$$=-z.\left(\frac{-a\sin\omega_0 z^2+a^3\sin\omega_0}{\left(z^2-2a\cos\omega_0 z+a^2\right)^2}\right)=\frac{a\sin\omega_0 z^3-a^3\sin\omega_0 z}{\left(z^2-2a\cos\omega_0 z+a^2\right)^2},\ ROC: |z|>|a|$$

e) Tương tự **câu d:** $x(n)=(nx_1(n))u(n)$

$$\Rightarrow X_1(z)=\frac{1-a\cos\omega_0 z^{-1}}{1-2a\cos\omega_0 z^{-1}+a^2z^{-2}}=\frac{z^2-a\cos\omega_0 z}{z^2-2a\cos\omega_0 z+a^2},\ ROC:|z|>|a|$$

$$\Rightarrow X(z)=-z.\frac{dX_1(z)}{dz}=-z.\left(\frac{z^2-a\cos\omega_0 z}{z^2-2a\cos\omega_0 z+a^2}\right)'$$

f) $x(n)=Ar^n\cos(\omega_0 n+\phi)u(n)=Ar^n\left[\cos(\omega_0 n)\cos\phi-\sin(\omega_0 n)\sin\phi\right]u(n)$

$=A\cos\phi r^n\cos(\omega_0 n)-A\sin\phi r^n\sin(\omega_0 n)=x_1(n)-x_2(n)$

- $X_1(z)=A\cos\phi\dfrac{1-r\cos\omega_0 z^{-1}}{1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2z^{-2}},\ ROC_1:|z|>|r|$
- $X_2(z)=A\sin\phi\dfrac{rz^{-1}\sin\omega_0}{1-2rz^{-1}\cos\omega_0+r^2z^{-2}},\ ROC_2:|z|>|r|$

$$\Rightarrow X(z)=A\cos\phi\frac{1-r\cos\omega_0 z^{-1}}{1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2z^{-2}}-A\sin\phi\frac{rz^{-1}\sin\omega_0}{1-2rz^{-1}\cos\omega_0+r^2z^{-2}}$$

$$=\frac{A\cos\phi-Arz^{-1}\left[\cos\phi\cos\omega_0+\sin\phi\sin\omega_0\right]}{1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2z^{-2}}=\frac{A\cos\phi-Arz^{-1}\cos(\omega_0-\phi)}{1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2z^{-2}},\ ROC:|z|>|r|$$

g) $x(n)=\frac{1}{2}(n^2+n)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}u(n-1)=\frac{1}{2}n^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}u(n-1)+\frac{1}{2}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}u(n-1)$

$=n.x_1(n)+x_1(n)$, **với** $x_1(n)=\frac{1}{2}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}u(n-1)=\frac{1}{2}nx_2(n)$, **với** $x_2(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}u(n-1)=x_3(n-1)$

với $x_3(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$

Như vậy, ta có:

$$X_3(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}},\ ROC:|z|>\frac{1}{3}$$

Áp dụng tính chất trễ - sớm: $x(n)\leftrightarrow X(z)\Rightarrow x(n-n_0)\leftrightarrow z^{-n_0}X(z)$

$$\Rightarrow X_2(z)=z^{-1}X_3(z)=\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{1}{z-1/3}$$

Áp dụng tính chất đạo hàm trên miền Z: $nx(n)\longleftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}$

$$\Rightarrow X_1(z)=\frac{1}{2}\left(-z.\frac{dX_2(z)}{dz}\right)=\frac{1}{2}\left[-z.\left(\frac{1}{z-1/3}\right)'\right]=\frac{1}{2}\left(-z.\frac{-1}{(z-1/3)^2}\right)=\frac{z}{2(z-1/3)^2}$$

→ Xử lý tiếp cụm $nx_1(n)$ vẫn sử dụng tính chất đạo hàm:

$$nx_1(n) \leftrightarrow -z.\frac{dX_1(z)}{dz} = -z.\left(\frac{z}{2(z-1/3)^2}\right)'$$

$$= -\frac{z}{2}.\frac{1.(z-1/3)^2 - z.2(z-1/3)}{(z-1/3)^4} = -\frac{z}{2}.\frac{z-1/3-2z}{(z-1/3)^3} = -\frac{z}{2}.\frac{-z-1/3}{(z-1/3)^3} = \frac{z^2+\frac{1}{3}z}{2(z-1/3)^3}$$

Như vậy: $X(z) = \frac{z^2+\frac{1}{3}z}{2(z-1/3)^3} + \frac{z}{2(z-1/3)^2} = \frac{z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^3}$, $ROC: |z| > \frac{1}{3}$

g) $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-10) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-10} u(n-10)$

$= x_1(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} x_1(n-10)$, với $x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

- $X_1(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, $ROC: |z| > \frac{1}{2}$

Áp dụng tính chất trễ - sớm: $x(n) \leftrightarrow X(z) \Rightarrow x(n-n_0) \leftrightarrow z^{-n_0}X(z)$

$$\Rightarrow x_1(n-10) \longleftrightarrow z^{-10}X_1(z) = \frac{z^{-10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{(2z)^{-10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1-(2z)^{-10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \; ROC: |z| > \frac{1}{2}$$

3.3 Determine the z-transforms and sketch the ROC of the following signals.

(a) $x_1(n) = \begin{cases} (\frac{1}{3})^n, & n \geq 0 \\ (\frac{1}{2})^{-n}, & n < 0 \end{cases}$

(b) $x_2(n) = \begin{cases} (\frac{1}{3})^n - 2^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$

(c) $x_3(n) = x_1(n+4)$

(d) $x_4(n) = x_1(-n)$

Giải:

a)

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n-1)$$

Áp dụng công thức số 3 và 5 trong bảng 3.3 :

- $\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \longleftrightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$, $ROC_1: |z| > \frac{1}{3}$ **(*)**
- $\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n-1) \longleftrightarrow -\frac{1}{1-2z^{-1}}$, $ROC_2: |z| < 2$ **(**)**

Từ (*) và (**): $\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{1}{1-2z^{-1}}, ROC: \frac{1}{3} < |z| < 2$

b) $x_2(n) = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2^n\right] u(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - 2^n u(n) = x_{21}(n) - x_{22}(n)$

c) $x_3(n) = x_1(n+4)$

Áp dụng tính chất trễ - sớm: $x(n) \leftrightarrow X(z) \Rightarrow x(n-n_0) \leftrightarrow z^{-n_0} X(z)$

$$\Rightarrow X_3(z) = z^4 X_1(z) = \frac{z^4}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{z^4}{1-2z^{-1}}, ROC: \frac{1}{3} < |z| < 2$$

d) $x_4(n) = x_1(-n)$

Áp dụng tính chất biến đổi Z của tín hiệu gấp: $x(n) \leftrightarrow X(z) \Rightarrow x(-n) \leftrightarrow X(z^{-1})$

$\Rightarrow X_4(z) = X_1(z^{-1}) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z} - \frac{1}{1-2z}, ROC: \frac{1}{2} < |z| < 3 \rightarrow$ Chú ý nghịch đảo ROC lại.

3.4 Determine the z-transform of the following signals.

(a) $x(n) = n(-1)^n u(n)$
(b) $x(n) = n^2 u(n)$
(c) $x(n) = -na^n u(-n-1)$
(d) $x(n) = (-1)^n \left(\cos \frac{\pi}{3} n\right) u(n)$
(e) $x(n) = (-1)^n u(n)$
(f) $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 0, -1, 0, 1, -1, \ldots\}$

Giải:

a) Áp dụng công thức số 4 trong bảng 3.3.

$$\Rightarrow X(z) = \frac{-z^{-1}}{\left(1+z^{-1}\right)^2}, \; ROC: |z| < 1$$

b) Áp dụng công thức số 4 trong bảng 3.3.

$$\Rightarrow nu(n) \longleftrightarrow \frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}, \; ROC: |z| > 1$$

Áp dụng tính chất đạo hàm trên miền Z: $nx(n) \longleftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}$

$$\Rightarrow X(z) = -z.\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)' = -z.\frac{1.(z-1)^2 - z.2(z-1)}{(z-1)^4} = -z.\frac{z-1-2z}{(z-1)^3} = \frac{z^2+z}{(z-1)^3},\ ROC: |z| > 1$$

c) $x(n) = -na^n u(-n-1)$ → **Áp dụng công thức số 6 trong bảng 3.3.**

d) $x(n) = (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)u(n)$ → **Áp dụng công thức số 9 trong bảng 3.3.**

e) $x(n) = (-1)^n u(n) \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1+z^{-1}}, ROC: |z| > 1$

f) $\Rightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = 1 - z^{-2} + z^{-4} - z^{-5}, ROC: \forall z \setminus \{0\}$

2. Biến đổi Z ngược:

+ Dùng định nghĩa ngược:

$x(n) \leftrightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$, $ROC = C$, với C là một đường cong (curve) thường là đường tròn.

$$\Rightarrow X(z) \leftrightarrow x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C x(z).z^{n-1}dz$$

+ Khai triển chuỗi lũy thừa (phép chia dài - long divison):

$$x(n) \leftrightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \qquad \textbf{(*)}$$

- Nếu $x(n)$ là tín hiệu nhân quả: $x(n) = 0 \forall n < 0$

(*) $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \ldots$ → chuỗi lũy thừa theo z^{-1}.

(*) $\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n} = \ldots + x(-2)z^2 + x(-1)z^1$ → chuỗi lũy thừa theo z.

Ví dụ: Tìm $x(n)$ với $X(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$

a) $x(n)$ là tín hiệu nhân quả.

b) $x(n)$ là tín hiệu phản nhân quả.

Giải:

a) Triển khai $X(z)$ là chuỗi lũy thừa theo z^{-1} → *bậc cao nhất tử chia bậc cao nhất mẫu.*

$\Rightarrow X(z) = 1 + 4z^{-1} + 7z^{-2} + 10z^{-3} + 13z^{-4} + 16z^{-5} + \ldots = \sum x(n)z^{-n}$

$$\Rightarrow x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 4, 7, 10, 13, 16, \ldots\} = (1+3n)u(n)$$

b) Theo tính chất tín hiệu phản nhân quả tương ứng thì ta có $x(n) = -(1+3n)u(-n-1)$

→ *Bậc âm nhất tử chia bậc âm nhất mẫu.*

$\Rightarrow X(z) = \ldots + 17z^6 + 14z^5 + 11z^4 + 8z^3 + 5z^2 + 2z = \sum x(n)z^{-n}$

$$\Rightarrow x(n) = \{\ldots, 17, 14, 11, 8, 5, 2, \underset{\uparrow}{0}\} = -(1+3n)u(-n-1)$$

+ Khai triển phân số từng phần (Partical fraction): Áp dụng cho $X(z)$ dạng hữu tỷ (rational).

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}$$

- Nếu bậc tử >= bậc mẫu: chia đa thức
- Nếu bậc tử < bậc mẫu: Áp dụng phân số từng phần.

Ví dụ 1: Tìm $x(n)$ nhân quả với $X(z)=\frac{1-2z^{-1}}{\left(1+3z^{-1}\right)\left(1-4z^{-1}\right)}$

- **Cách 1:** Theo z^{-1}

$$X(z)=\frac{A}{1+3z^{-1}}+\frac{B}{1-4z^{-1}}=\frac{A\left(1-4z^{-1}\right)+B\left(1+3z^{-1}\right)}{\left(1+3z^{-1}\right)\left(1-4z^{-1}\right)}\Rightarrow\begin{cases}A+B=1\\3B-4A=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=5/7\\B=2/7\end{cases}$$

Ta có thể sử dụng phương pháp thặng dư (Residu):

$$A=\lim_{z^{-1}\to-1/3}\frac{1-2z^{-1}}{1-4z^{-1}}=\frac{5}{7},\quad B=\lim_{z^{-1}\to1/4}\frac{1-2z^{-1}}{1+3z^{-1}}=\frac{2}{7}$$

$\Rightarrow X(z)=\frac{5}{7}.\frac{1}{1+3z^{-1}}+\frac{2}{7}.\frac{1}{1-4z^{-1}}$, ta lại có: $\frac{1}{1-az^{-1}}\leftrightarrow\begin{cases}a^nu(n) & \to causal\\-a^nu(-n-1) & \to non-causal\end{cases}$

Theo đề bài $x(n)$ là tín hiệu nhân quả $\Rightarrow x(n)=\frac{5}{7}.\left(-3^n\right)u(n)+\frac{2}{7}4^nu(n)$

- **Cách 2:** Theo z → nhân cả tử và mẫu cho z^2

$$\Rightarrow X(z)=\frac{1-2z^{-1}}{\left(1+3z^{-1}\right)\left(1-4z^{-1}\right)}=\frac{z(z-2)}{(z+3)(z-4)}$$

Hạ bậc: $\frac{X(z)}{z}=\frac{z-2}{(z+3)(z-4)}=\frac{C}{z+3}+\frac{D}{z-4}\Rightarrow\begin{cases}C=5/7\\D=2/7\end{cases}$

$\Rightarrow X(z)=\frac{5}{7}.\frac{z}{z+3}+\frac{2}{7}.\frac{z}{z-4}$,ta lại có $\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}\leftrightarrow\begin{cases}a^nu(n) & \to causal\\-a^nu(-n-1) & \to non-causal\end{cases}$

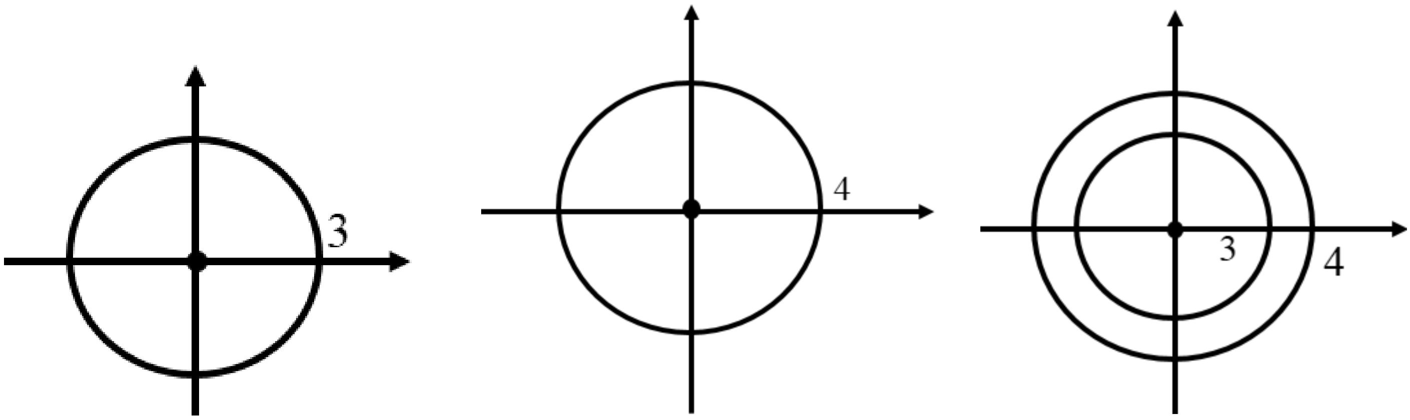
Theo đề bài $x(n)$ là tín hiệu nhân quả $\Rightarrow x(n)=\frac{5}{7}.\left(-3^n\right)u(n)+\frac{2}{7}4^nu(n)$

Ví dụ 2: Tìm $x(n)$, với $X(z)=\dfrac{1-2z^{-1}}{\left(1+3z^{-1}\right)\left(1-4z^{-1}\right)}$ → không xác định được tính nhân quả.

$$\Rightarrow X(z)=\frac{5}{7}.\frac{1}{1+3z^{-1}}+\frac{2}{7}.\frac{1}{1-4z^{-1}}$$

- Xét $\dfrac{1}{1+3z^{-1}}\leftrightarrow\begin{cases}(-3)^n u(n) & ,|z|>3\\ -(-3)^n u(-n-1) & ,|z|<3\end{cases}$

- Xét $\dfrac{1}{1-4z^{-1}}\leftrightarrow\begin{cases}4^n u(n) & ,|z|>4\\ -4^n u(-n-1) & ,|z|<4\end{cases}$



+ $|z|<3 \Rightarrow x(n)=-\dfrac{5}{7}.(-3)^n u(-n-1)-\dfrac{2}{7}4^n u(-n-1)$ → $x(n)$ phản nhân quả.

+ $3<|z|<4 \Rightarrow x(n)=\dfrac{5}{7}.(-3)^n u(n)-\dfrac{2}{7}4^n u(-n-1)$ → $x(n)$ không nhân quả.

+ $|z|>4 \Rightarrow x(n)=\dfrac{5}{7}.(-3)^n u(n)+\dfrac{2}{7}.4^n u(n)$ → $x(n)$ nhân quả.

Ví dụ 3: Tìm $x(n)$ nhân quả với $X(z)=\dfrac{1-2z^{-1}}{\left(1+3z^{-1}\right)^2\left(1-4z^{-1}\right)}$

- **Cách 1:** Theo z^{-1}

$$X(z)=\frac{A}{1-4z^{-1}}+\frac{Bz^{-1}+C}{\left(1+3z^{-1}\right)^2}=\frac{A}{1-4z^{-1}}+\frac{D}{1+3z^{-1}}+\frac{E}{\left(1+3z^{-1}\right)^2}$$

Ta có : $\dfrac{1}{1+3z^{-1}} \leftrightarrow (-3)^n u(n)$

$\Rightarrow n(-3)^n u(n) \leftrightarrow -z\left(\dfrac{1}{1+3z^{-1}}\right)' = -z.\dfrac{-3z^{-2}}{\left(1+3z^{-1}\right)^2} = \dfrac{3z^{-1}}{\left(1+3z^{-1}\right)^2}$ → Tính chất đạo hàm.

$\Rightarrow (n+1)(-3)^{n+1} u(n+1) \leftrightarrow z.\dfrac{3z^{-1}}{\left(1+3z^{-1}\right)^2} = \dfrac{3}{\left(1+3z^{-1}\right)^2}$ → Tính chất trễ - sớm.

$\Rightarrow (n+1)(-3)^{n+1}\left[\delta(n+1)+u(n)\right] = (n+1)(-3)^{n+1} u(n)$, do $(n+1)(-3)^n \delta(n+1) = 0$.

➢ ***Ta sử dụng phương pháp thặng dư (Residu) + đồng nhất thức:***

$$A = \lim_{z^{-1}\to 1/4} \frac{1-2z^{-1}}{\left(1+3z^{-1}\right)^2} = \frac{8}{49},\quad \begin{cases} 9A-4B=0 \\ A+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 18/49 \\ C = 41/49 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{8}{49}.\frac{1}{1-4z^{-1}} + \frac{1}{49}.\frac{18z^{-1}+41}{\left(1+3z^{-1}\right)^2}$$

$$\Rightarrow x(n) = \frac{8}{49}4^n u(n) + \frac{6}{49} n(-3)^n u(n) + \frac{41}{147}(n+1)(-3)^{n+1} u(n)$$

➢ ***Ta sử dụng phương pháp thặng dư (Residu):***

$$A = \lim_{z^{-1}\to 1/4} \frac{1-2z^{-1}}{\left(1+3z^{-1}\right)^2} = \frac{8}{49},\quad E = \lim_{z^{-1}\to -1/3} \frac{1-2z^{-1}}{1-4z^{-1}} = \frac{5}{7},\ D = \qquad\qquad = \frac{6}{49}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{8}{49}.\frac{1}{1-4z^{-1}} + \frac{6}{49}.\frac{1}{1+3z^{-1}} + \frac{5}{7}.\frac{1}{\left(1+3z^{-1}\right)^2}$$

$$\Rightarrow x(n) = \frac{8}{49}4^n u(n) + \frac{6}{49}(-3)^n u(n) + \frac{5}{21}(n+1)(-3)^{n+1} u(n)$$

- **Cách 2:** Theo z

Ví dụ 4: Tìm $x(n)$ nhân quả với $X(z) = \dfrac{1-2z^{-1}}{\left(1+4z^{-2}\right)\left(1-3z^{-1}\right)}$

- **Cách 1:** Theo z^{-1}

$$X(z) = \frac{A}{1-3z^{-1}} + \frac{B}{1+2jz^{-1}} + \frac{C}{1-2jz^{-1}} = \frac{A}{1-3z^{-1}} + \frac{Dz^{-1}+E}{1+4z^{-2}}$$

➢ ***Ta sử dụng phương pháp thặng dư (Residu):***

$$A=\lim_{z^{-1}\to 1/3}\frac{1-2z^{-1}}{1+4z^{-2}}=\frac{8}{49},\quad B=\lim_{z^{-1}\to -1/2j}\frac{1-2z^{-1}}{\left(1-2jz^{-1}\right)\left(1-3z^{-1}\right)}=-\frac{1}{2j}=re^{j\varphi},\ C=B^{*}=re^{-j\varphi}$$

$$\Rightarrow X(z)=\frac{A}{1-3z^{-1}}+\frac{re^{j\varphi}}{1+2jz^{-1}}+\frac{re^{-j\varphi}}{1-2jz^{-1}}$$

, nhắc lại: $\begin{cases} j=e^{j\frac{\pi}{2}} \\ -j=e^{-j\frac{\pi}{2}} \end{cases}$

$$\Rightarrow x(n)=A.3^{n}u(n)+re^{j\varphi}\left(-2j\right)^{n}u(n)+re^{-j\varphi}\left(2j\right)^{n}u(n)$$

$$\Rightarrow x(n)=A.3^{n}u(n)+r.2^{n}u(n)\left[e^{j\varphi}.e^{-nj\frac{\pi}{2}}+e^{-j\varphi}.e^{nj\frac{\pi}{2}}\right]=A.3^{n}u(n)+r.2^{n}u(n)\left[e^{-j\left(n\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}+e^{j\left(n\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}\right]$$

$$=A.3^{n}u(n)+2r.2^{n}u(n)\cos\left(\frac{\pi}{2}n-\varphi\right)$$

➢ ***Ta sử dụng phương pháp thặng dư (Residu) + đồng nhất thức:***

$$X(z)=\frac{A}{1-3z^{-1}}+\frac{Dz^{-1}+E}{1+4z^{-2}}$$

Nhắc lại: $\cos(n\omega_0)u(n)\leftrightarrow\dfrac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}\Rightarrow a^{n}\cos(n\omega_0)u(n)\leftrightarrow\dfrac{1-az^{-1}\cos\omega_0}{1-2a\cos\omega_0 z^{-1}+a^{2}z^{-2}}$

$$\sin(n\omega_0)u(n)\leftrightarrow\frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}\Rightarrow a^{n}\sin(n\omega_0)u(n)\leftrightarrow\frac{az^{-1}\sin\omega_0}{1-2a\cos\omega_0 z^{-1}+a^{2}z^{-2}}$$

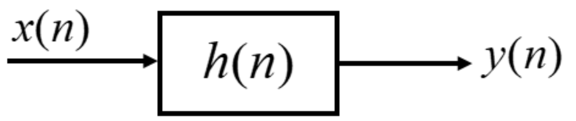
Nếu $\omega_0=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow a^{n}\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)u(n)\leftrightarrow\dfrac{1}{a+a^{2}z^{-2}},\quad a^{n}\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)u(n)\leftrightarrow\dfrac{az^{-1}}{1+a^{2}z^{-2}}$

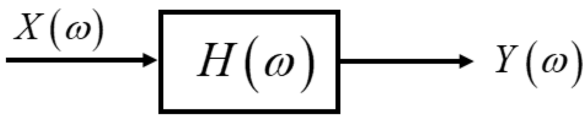
Như vậy: $\dfrac{Dz^{-1}}{1+4z^{-2}}=\dfrac{D}{2}.\dfrac{2z^{-1}}{1+4z^{-2}}\leftrightarrow\dfrac{D}{2}.2^{n}\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)u(n),\qquad\dfrac{E}{1+4z^{-2}}\leftrightarrow E.2^{n}\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)u(n)$

$$\Rightarrow x(n)=A.3^{n}u(n)+\frac{D}{2}.2^{n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)u(n)+E.2^{n}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)u(n)$$

II. ỨNG DỤNG BIẾN ĐỔI Z

1. Tìm hàm truyền (Transfer Function):





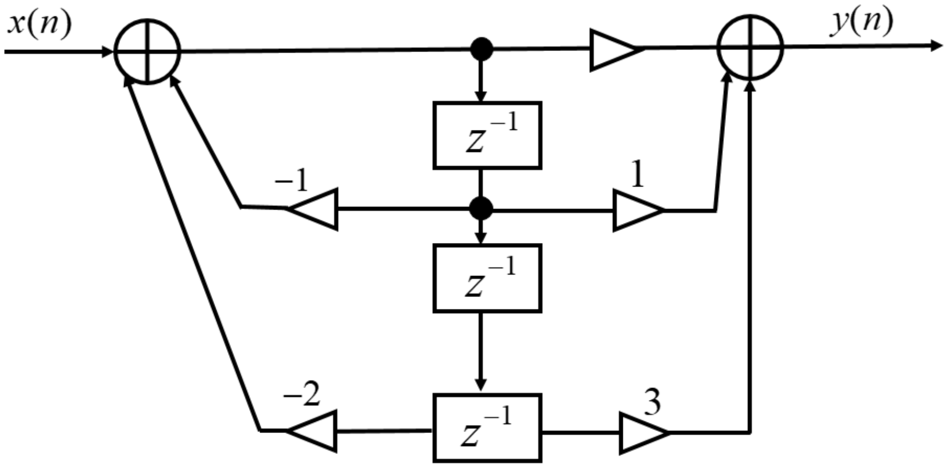
$$y(n)=x(n)*h(n)\ \Rightarrow Y(\omega)=X(\omega).H(\omega)$$

$\Rightarrow H(\omega)=\dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(n).z^{-n}$: Hàm truyền của hệ thống, có 2 cách để tìm hàm truyền.

+ Tỉ số giữa biến đổi Z của tín hiệu ngõ ra trên biến đổi Z của tín hiệu ngõ vào.

+ Biến đổi Z của đáp ứng xung.

Ví dụ: Tìm hàm truyền của hệ thống LTI được cho bởi sơ đồ khối sau:



$$\Rightarrow y(n) = x(n) + x(n-1) + 3x(n-3) - y(n-1) - 2y(n-2)$$

$$\Rightarrow Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z) + 3z^{-3}X(z) - z^{-1}Y(z) - 2z^{-2}Y(z)$$

$$\Rightarrow Y(z)\left[1 + z^{-1} + 2z^{-2}\right] = X(z)\left[1 + z^{-1} + 3z^{-3}\right] \quad \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1} + 3z^{-3}}{1 + z^{-1} + 2z^{-2}}$$

Ví dụ 2: Tìm hàm truyền của các hệ thống sau:

a) $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{1}{2}h(n-1)$ **(*)**

b) $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n), \quad y(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n-1)$

Giải:

a) **(*)** $\leftrightarrow H(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \dfrac{1}{2}z^{-1}H(z) \Leftrightarrow H(z)\left[1 + \dfrac{1}{2}z^{-1}\right] = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \Rightarrow H(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}$

b) $X(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \dfrac{1}{2}$

$$y(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1)$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{1}{3}.\frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{3} \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

2. Tìm đáp ứng xung:

$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)z^{-n} \Rightarrow h(n)=z^{-1}\{H(z)\}$ → **Biến đổi ngược của hàm truyền.**

Ví dụ: Cho 1 hệ thống có hàm truyền: $H(z)=\dfrac{\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$

a) Vẽ sơ đồ khối thực hiện hệ thống dạng chính tắc.

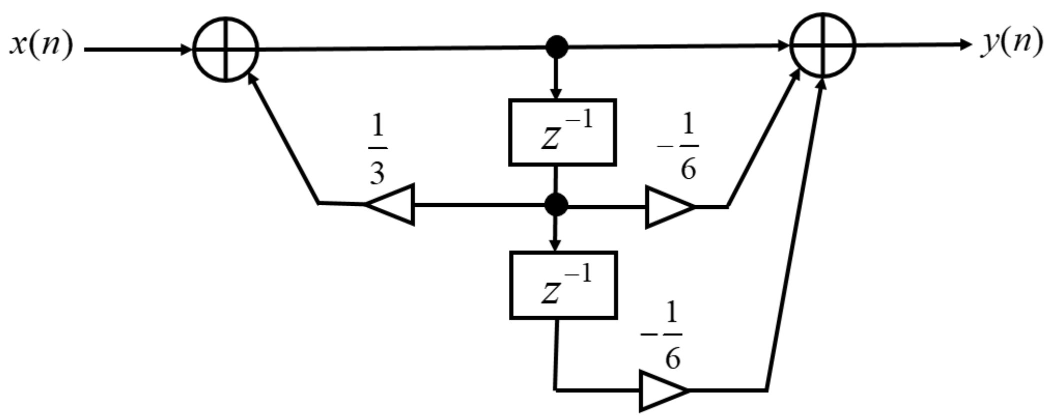
b) Tìm đáp ứng xung nhân quả $h(n)$ của hệ thống.

Giải:

a) $$H(z)=\frac{1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{Y(z)}{X(z)} \Leftrightarrow Y(z)\left[1-\frac{1}{3}z^{-1}\right]=X(z)\left[1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}\right]$$

$$\Leftrightarrow Y(z)=\frac{1}{3}z^{-1}Y(z)+X(z)-\frac{1}{6}z^{-1}X(z)-\frac{1}{6}z^{-2}X(z)$$

$$\Rightarrow y(n)=\frac{1}{3}y(n-1)+x(n)-\frac{1}{6}x(n-1)-\frac{1}{6}x(n-2)$$



b) Tìm đáp ứng xung $h(n)$

$$H(z)=\frac{1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=Az^{-1}+B+\frac{C}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \Rightarrow A=\frac{1}{2},\ C=\lim_{z^{-1}\to 3}\left(1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}\right)=-1$$

$\Rightarrow H(z)=\frac{1}{2}z^{-1}+2-\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$, do $h(n)$ là hệ thống nhân quả

$$\Rightarrow h(n) = \frac{1}{2}\delta(n-1) + {}_{2}\delta(n) - \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

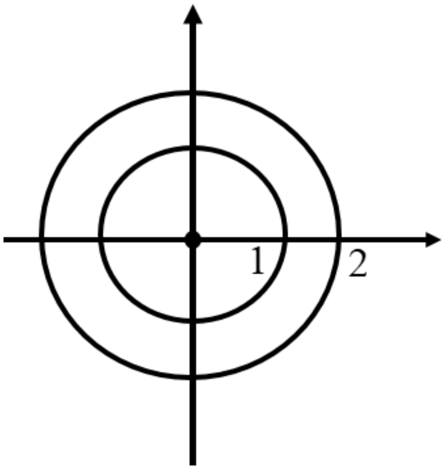
3. Tìm đáp ứng ngõ ra:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow Y(z) = X(z)H(z) \Rightarrow y(n) = z^{-1}\{Y(z)\}$$

Ví dụ: Tìm đáp ứng ngõ ra của hệ thống:

$[H]$: $y(n) = x(n) + 3x(n-1) - 2y(n-1)$ **(*)** **với** $x(n) = u(n)$

Giải:



(*): $Y(z) = \dfrac{1+3z^{-1}}{1+2z^{-1}}X(z)$

$x(n) = u(n) \Rightarrow X(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}}$, $|z| > 1$

$$\Rightarrow Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1+3z^{-1}}{(1+2z^{-1})(1-z^{-1})}, \quad |z| > 1$$

$$= \frac{A}{1-z^{-1}} + \frac{B}{1+2z^{-1}}$$

Do đề bài không đề cập cụ thể tính nhân quả, ta cần biện luận các trường hợp:

$+\ 1 < |z| < 2: \ \Rightarrow y(n) = Au(n) - B(-2)^n u(-n-1)$

$+\ |z| < 1: \Rightarrow y(n) = Au(n) + B(-2)^n u(n)$

4. Tìm đáp ứng bậc: $s(n)$

$$s(n) = y(n)|_{x(n)=u(n)} \Rightarrow S(z) = Y(z)|_{X(z)=U(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}}, \quad |z| > 1$$

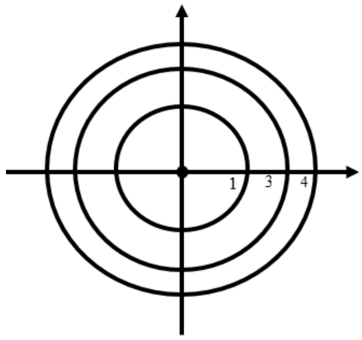
Ví dụ: Tìm đáp ứng bậc của hệ thống được cho bởi hàm truyền sau:

$$H(z) = \frac{1-z^{-1}}{(1+2z^{-1}-3z^{-2})(1-4z^{-1})}$$

Giải:

$$H(z)=\frac{1+z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1+3z^{-1}\right)\left(1-4z^{-1}\right)} \qquad \Rightarrow S(z)=H(z)U(z),\quad |z|>1$$

$$=\frac{1+z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2\left(1+3z^{-1}\right)\left(1+4z^{-1}\right)}=\frac{A}{1+3z^{-1}}+\frac{B}{1-4z^{-1}}+\frac{C}{1-z^{-1}}+\frac{D}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$



Ta sử dụng phương pháp thặng dư (Residu) để tìm ra các giá trị A, B, C, D.

$+\ |z|>4: s(n)=A(-3)^n u(n)+B.4^n u(n)+Cu(n)+D(n+1)u(n+1)$

$+\ 3<|z|<4: s(n)=A(-3)^n u(n)-B.4^n u(-n-1)+Cu(n)+D(n+1)u(n+1)$

$+\ 1<|z|<3: s(n)=-A(-3)^n u(-n-1)-B.4^n u(-n-1)+Cu(n)+D(n+1)u(n+1)$

Ta có thể rút gọn thêm: $D(n+1)u(n+1)=D(n+1)\left[\delta(n+1)+u(n)\right]=D(n+1)u(n)$

5. Giản đồ cực – zero, tính ổn định, nhân quả của hệ thống (zero – pole –pot/pattern)

Giả sử hệ thống có hàm truyền: $H(z)=\dfrac{B(z)}{A(z)}$ theo z.

+ Điểm zero (không): $z_{oj} \mid \lim\limits_{z\to z_{oj}} H(z)=0 \qquad \left[B(z)=0\right]$

+ Điểm cực (pole): $z_{pi} \mid \lim\limits_{z\to z_{pi}} H(z)=\infty \qquad \left[A(z)=0\right]$

+ Giản đồ cực – zero: là sự phân bố các điểm cực và các điểm zero trên mặt phẳng phức z theo quy ước:

- Điểm zero: tròn (circle).
- Điểm trực: chéo (cross).

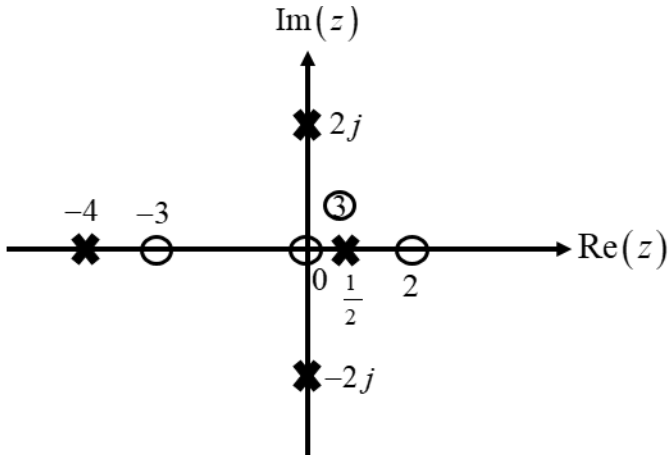
Ví dụ: Các định các điểm cực – zero và vẽ giản đồ cực – zero của hệ thống sau:

$$H(z)=\frac{\left(1-2z^{-1}\right)\left(1+3z^{-1}\right)}{\left(1+4z^{-2}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2\left(1+4z^{-1}\right)}$$

Giải: Đưa hàm truyền về mũ dương $\Rightarrow H(z)=\dfrac{z^3(z-2)(z+3)}{\left(z^2+4\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)^2(z+4)}$

+ Điểm zero: $z_{o1} = 0 \ (boi\ 3),\ z_{o2} = 2,\ z_{o3} = -3$

+ Điểm cực: $z_{p1,2} = \pm 2j,\ z_{p3} = \frac{1}{2}(kep),\ z_{p4} = -4$



Giả sử: Nếu tìm $h(n)$ bằng phương pháp phân số từng phần hay:

$H(z) = \frac{A}{1+2jz^{-1}} + \frac{A^*}{1-2jz^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{C}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} + \frac{D}{1+4z^{-1}}$, ta cần biện luận trên 3 vòng tròn

$|z| = 2,\quad |z| = \frac{1}{2},\ |z| = 4$ chính là module của các điểm cực.

→ Các vòng tròn cực: có bán kính là module của các điểm cực, từ đó có thể xác định được tính nhân quả, không nhân quả và phản nhân quả của hệ thống.

- **Hệ thống nhân quả:** $ROC: |z| > \max_i \{|z_{pi}|\}$ → nằm ngoài vòng tròn có bán kính lớn nhất.
- **Hệ thống phản nhân quả:** $ROC: |z| < \min_i \{|z_{pi}|\}$ → nằm trong vòng tròn có bán kính bé nhất.
- **Hệ thống không nhân quả:** Các trường hợp còn lại.

+ Tính ổn định của hệ thống thông qua giản đồ cực – zero:

- Điều kiện cần và đủ để một hệ thống là ổn định nếu miền hội ROC chứa vòng tròn đơn vị.
- Để hệ thống ổn định và nhân quả đồng thời thì tất cả các điểm cực nằm trong vòng tròn đơn vị (*module các điểm cực nhỏ hơn 1*).
- Nếu các điểm cực nằm trên vòng tròn đơn vị được gọi là ổn định mép/biên *(marginally stable).*

Ví dụ: Tìm đáp ứng xung của hệ thống: $[H]:\ y(n) = x(n) + 2x(n-1) - \frac{1}{3}y(n-1)$

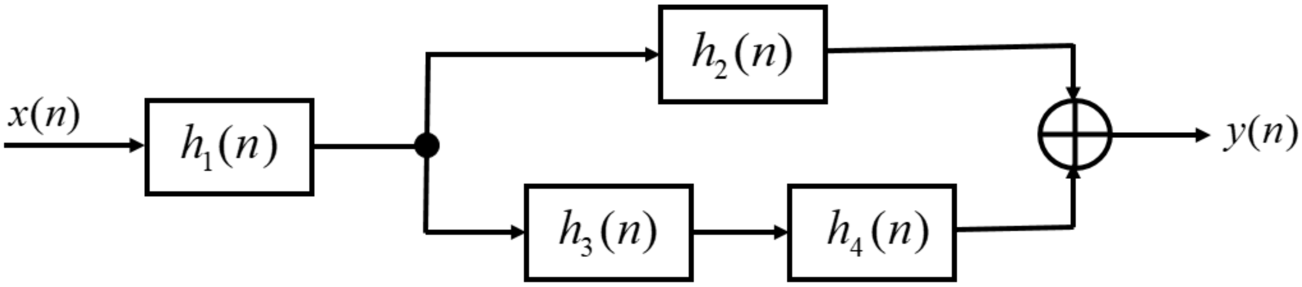
Hệ thống đã cho có ổn định, nhân quả hay không? Giải thích?

Giải:

$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+2z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{z+2}{z+\frac{1}{3}}$ có điểm cực $z=-\frac{1}{3}$ nằm trong vòng tròn đơn vị → Hệ thống đã cho ổn định và nhân quả đồng thời.

➢ **BÀI TẬP**

Bài 1: Cho sơ đồ khối của một hệ thống rời rạc:



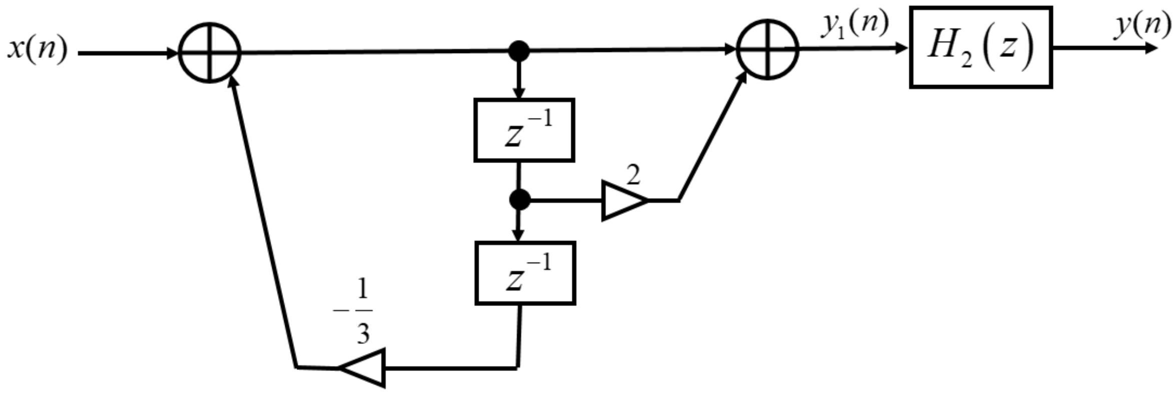
Cho biết: $h_1(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n),\ h_2(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n),\ h_3(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n),\ h_4(n)=\left(\frac{1}{5}\right)^n u(n)$

a) Tìm quan hệ giữa đáp ứng xung tương đương của toàn bộ hệ thống $h(n)$ theo các đáp ứng xung thành phần.

b) Tìm $y(n)$ nếu $x(n)=\left(\frac{1}{6}\right)^n(n)$.

c) Vẽ giản đồ cực – zero của hệ thống. Cho biết tính ổn định, nhân quả?

Bài 2: Cho sơ đồ khối của một hệ thống rời rạc, cho biết $H_2(z)=\frac{1+2z^{-1}}{\left(1-3z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$



a) Tìm phương trình sai phân của hệ thống H_2.

b) Tìm hàm truyền của hệ thống H_1.

c) Tìm đáp ứng xung nhân quả của toàn hệ thống.

- **Nghiệm thực đơn:**

$$H\left(z^{-1}\right)=\frac{M\left(z^{-1}\right)}{k\left(1-z_0z^{-1}\right)\left(1-z_1z^{-1}\right)\left(1-z_2z^{-1}\right)}=\frac{A}{\left(1-z_0z^{-1}\right)}+\frac{B}{\left(1-z_1z^{-1}\right)}+\frac{C}{\left(1-z_2z^{-1}\right)}$$

Trong đó:

$$A=\lim_{z^{-1}\to\frac{1}{z_0}}\frac{M\left(z^{-1}\right)}{k\left(1-z_1z^{-1}\right)\left(1-z_2z^{-1}\right)},\ B=\lim_{z^{-1}\to\frac{1}{z_1}}\frac{M\left(z^{-1}\right)}{k\left(1-z_0z^{-1}\right)\left(1-z_2z^{-1}\right)},C=\lim_{z^{-1}\to\frac{1}{z_2}}\frac{M\left(z^{-1}\right)}{k\left(1-z_0z^{-1}\right)\left(1-z_1z^{-1}\right)}$$

- **Nghiệm kép:**

$$H\left(z^{-1}\right)=\frac{M\left(z^{-1}\right)}{k\left(1-z_0z^{-1}\right)\left(1-z_1z^{-1}\right)^2}=\frac{A}{\left(1-z_0z^{-1}\right)}+\frac{B}{\left(1-z_1z^{-1}\right)^2}+\frac{C}{\left(1-z_1z^{-1}\right)}$$

Trong đó:

$$A=\lim_{z^{-1}\to\frac{1}{z_0}}\frac{M\left(z^{-1}\right)}{k\left(1-z_1z^{-1}\right)^2},\ B=\lim_{z^{-1}\to\frac{1}{z_1}}\frac{M\left(z^{-1}\right)}{k\left(1-z_0z^{-1}\right)}$$

Tìm C bằng cách giải phương trình đồng nhất hai vế, với giá trị $z^{-1}=m_0$ tùy ý.

- Nghiệm phức:

$$H\left(z^{-1}\right)=\frac{M\left(z^{-1}\right)}{k\left(1-z_0z^{-1}\right)\left(1+z_1z^{-1}+z_2z^{-2}\right)}=\frac{A}{\left(1-z_0z^{-1}\right)}+\frac{Bz^{-1}+C}{\left(1+z_1z^{-1}+z_2z^{-2}\right)}$$

Tìm A bởi $A=\lim_{z^{-1}\to\frac{1}{z_0}}\frac{M\left(z^{-1}\right)}{k\left(1+z_1z^{-1}+z_2z^{-2}\right)}$, tìm B và C bằng cách giải phương trình.

II. BÀI TẬP MINH HỌA

Bài 1: Chứng minh rằng các hệ thống sau có thể được ghép song song từ các hệ thống con, vẽ sơ đồ thực thi hệ thống trên.

a) $H(z)=\dfrac{1+2z^{-1}}{4-10z^{-1}+8z^{-2}-2z^{-3}}=\dfrac{1+2z^{-1}}{4\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)^2}=\dfrac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\dfrac{B}{\left(1-z^{-1}\right)^2}+\dfrac{C}{1-z^{-1}}$

b) $H(z)=\dfrac{1+2z^{-1}}{6-11z^{-1}+6z^{-2}-z^{-3}}=\dfrac{1+2z^{-1}}{6\left(1-z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$

c) $H(z)=\dfrac{2-z^{-2}}{1-z^{-3}}=\dfrac{2-z^{-2}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}+z^{-2}\right)}=\dfrac{A}{1-z^{-1}}+\dfrac{Bz^{-1}+C}{1+z^{-1}+z^{-2}}$

d) $H(z)=\dfrac{1-z^{-2}}{\left(1+z^{-1}\right)^2}=\dfrac{\left(1-z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)}{\left(1+z^{-1}\right)^2}=\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}=-1+\dfrac{2}{1+z^{-1}}$

e) $H(z)=\dfrac{1+z^{-1}+z^{-2}}{\left(1-3z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)^2}$

f) $H(z)=\dfrac{1+z^{-1}}{\left(1-z^{-2}\right)\left(1-4z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}+5z^{-2}\right)}=\dfrac{1}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-4z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}+5z^{-2}\right)}$

g) $H(z)=\dfrac{1}{\left(1+2z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)^2\left(1+z^{-2}\right)}$

h) $H(z)=\dfrac{z^{-1}+2z^{-2}+4z^{-3}}{\left(1+z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}+2z^{-2}\right)}$

i) $H(z)=\dfrac{z^{-1}\left(1+z^{-1}\right)}{1-z^{-3}}=\dfrac{z^{-1}+z^{-2}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}+z^{-2}\right)}=\dfrac{A}{1-z^{-1}}+\dfrac{Bz^{-1}+C}{1+z^{-1}+z^{-2}}$

$A=\lim\limits_{z^{-1}\to 1}\dfrac{z^{-1}+z^{-2}}{1+z^{-1}+z^{-2}}=\dfrac{2}{3}$, $\quad\begin{cases} z^{-1}=2\Rightarrow -\dfrac{6}{7}=-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{7}B+\dfrac{1}{7}C \\ z^{-1}=0\Rightarrow 0=\dfrac{2}{3}+C \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} B=-\dfrac{1}{3} \\ C=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow H(z)=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{1-z^{-1}}-\dfrac{1}{3}.\dfrac{z^{-1}}{1+z^{-1}+z^{-2}}-\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{1+z^{-1}+z^{-2}}=H_1(z)-\dfrac{1}{3}H_2(z)-\dfrac{2}{3}H_3(z)$

+ $H_1(z)=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{1-z^{-1}}\Rightarrow h_1(n)=\dfrac{2}{3}u(n)$

+ $H_3(z)=\dfrac{1}{1+z^{-1}+z^{-2}}$ $\quad\boxed{\text{AD:}}\ a^{n+1}\sin\left(\omega_0(n+1)\right)u(n)\longrightarrow\dfrac{a\sin\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$

+ Đồng nhất mẫu số ta có: $\begin{cases} a^2=1\Rightarrow a=1 \\ \cos\omega_0=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\omega_0=\dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}(n+1)\right)u(n)\longrightarrow\dfrac{\sqrt{3}/2}{1+z^{-1}+z^{-2}}\Rightarrow h_3(n)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}(n+1)\right)u(n)$

+ $H_2(z)=\dfrac{z^{-1}}{1+z^{-1}+z^{-2}}\Rightarrow x_2(n)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}n\right)u(n)$

$\Rightarrow h(n)=h_1(n)-\dfrac{1}{3}h_2(n)-\dfrac{2}{3}h_3(n)$

Bài 3: Cho hệ thống có phương trình sai phân: $y(n) = x(n) + 2x(n-1) + \frac{4}{5}y(n-1)$

a) Vẽ sơ đồ khối của hệ thống trên theo dạng chính tắc loại 1 và loại 2.

b) Tìm đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống

c) Tìm đáp ứng ngõ ra $y(n)$ khi ngõ vào $x(n) = (n+1)\left(\frac{2}{5}\right)^n u(n)$

Giải:

a) Tự vẽ

b) $Y(z) = X(z) + 2z^{-1}X(n) + \frac{4}{5}z^{-1}Y(z) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+2z^{-1}}{1-\frac{4}{5}z^{-1}} = -\frac{5}{2} + \frac{7/2}{1-\frac{4}{5}z^{-1}}$

$$\Rightarrow h(n) = -\frac{5}{2}\delta(n) + \frac{7}{2}.\left(\frac{4}{5}\right)^n u(n)$$

c) $X(z) = \dfrac{1}{\left(1-\frac{2}{5}z^{-1}\right)^2}$

$$\Rightarrow Y(z) = H(z).X(z) = \frac{1+2z^{-1}}{\left(1-0.8z^{-1}\right)\left(1-0.4z^{-1}\right)^2} = \frac{A}{1-0.8z^{-1}} + \frac{B}{\left(1-0.4z^{-1}\right)^2} + \frac{C}{1-0.4z^{-1}}$$

Bài 4: Cho $x(n)$ là tín hiệu ngõ vào của hai hệ thống rời rạc LTI có tên là H_1 và H_2 được ghép song song với nhau. Hàm truyền của hệ thống H_1 là $H_1(z)$. Hệ thống H_2 có tín hiệu ra là $y(n)$ và tín hiệu vào là $w(n)$.

$H_1(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = \dfrac{1-3z^{-1}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$, $[H_2]$: $y(n) = 2x(n) - 5x(n-1) - \frac{1}{4}y(n-1)$

a) Vẽ sơ đồ khối mô tả dạng chính tắc cho hệ thống rời rạc H_1

b) Hệ thống H_2 có ổn định và nhân quả không? Tại sao?

c) Tìm hàm truyền $H(z)$ của toàn hệ thống.

d) Vẽ giản đồ cực – zero của toàn hệ thống.

e) Tìm đáp ứng xung $h(n)$ không nhân quả của toàn hệ thống.

f) Vẽ sơ đồ khối toàn hệ thống theo dạng chính tắc.

Giải:

a) $$Y(z) - \frac{5}{6}z^{-1}Y(z) + \frac{1}{6}z^{-2}Y(z) = X(z) - 3z^{-1}X(z)$$

$$\Rightarrow y(n)=x(n)-3x(n-1)+\frac{5}{6}y(n-1)-\frac{1}{6}y(n-2)$$

b) $H_2(z)=\dfrac{2-5z^{-1}}{1+0.25z^{-1}}=\dfrac{2z-5}{z+0.25}$

Xét điểm cực: $z_p=-0.25$, **do** $|z_p|=0.25<1$ **nên hệ thống đã cho nhân quả và ổn định đồng thời.**

c) Do hệ thống ghép song song nên: $H(z)=H_1(z)+H_2(z)=\dfrac{1-3z^{-1}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}+\dfrac{2-5z^{-1}}{1+0.25z^{-1}}$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{3-\frac{113}{12}z^{-1}+\frac{15}{4}z^{-2}-\frac{5}{6}z^{-3}}{1-\frac{7}{12}z^{-1}-\frac{1}{24}z^{-2}+\frac{1}{24}z^{-3}}$$

d) $\Rightarrow H(z)=\dfrac{3z^3-\frac{113}{12}z^2+\frac{15}{4}z-\frac{5}{6}}{z^3-\frac{7}{12}z^2-\frac{1}{24}z+\frac{1}{24}}$

+ Các điểm cực: $z_{p1}=-0.25,\ z_{p2}=0.5,\ z_{p3}=1/3$

+ Các điểm zero: $z_{o1}=2.72,\ z_{o2}=0.21+0.24j,\ z_{o3}=0.21-0.24j$

→ Giản đồ cực – zero: Tự vẽ

e) $H(z)=H_1(z)+H_2(z)=\dfrac{1-3z^{-1}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}+\dfrac{2-5z^{-1}}{1+0.25z^{-1}}=\dfrac{1-3z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}+\dfrac{2-5z^{-1}}{1+0.25z^{-1}}$

$$=\frac{1-3z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}-20+\frac{22}{1+0.25z^{-1}}=\frac{16}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}-\frac{15}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{22}{1+0.25z^{-1}}-20$$

+ $\dfrac{1}{4}<|z|<\dfrac{1}{3}\Rightarrow h(n)=-16.\left(\dfrac{1}{3}\right)^n u(-n-1)+15.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n u(-n-1)+22.\left(\dfrac{1}{4}\right)^n u(n)-20\delta(n)$

+ $\dfrac{1}{3}<|z|<\dfrac{1}{2}$ **→ Tương tự.**

f) $\Rightarrow H(z)=\dfrac{3-\frac{113}{12}z^{-1}+\frac{15}{4}z^{-2}-\frac{5}{6}z^{-3}}{1-\frac{7}{12}z^{-1}-\frac{1}{24}z^{-2}+\frac{1}{24}z^{-3}}=\dfrac{Y(z)}{X(z)}$

$$\Rightarrow Y(z)-\frac{7}{12}z^{-1}Y(z)-\frac{1}{24}z^{-2}Y(z)+\frac{1}{24}z^{-3}Y(z)=3X(z)-\frac{113}{12}z^{-1}X(z)+\frac{15}{4}z^{-2}X(z)-\frac{5}{6}z^{-3}X(z)$$

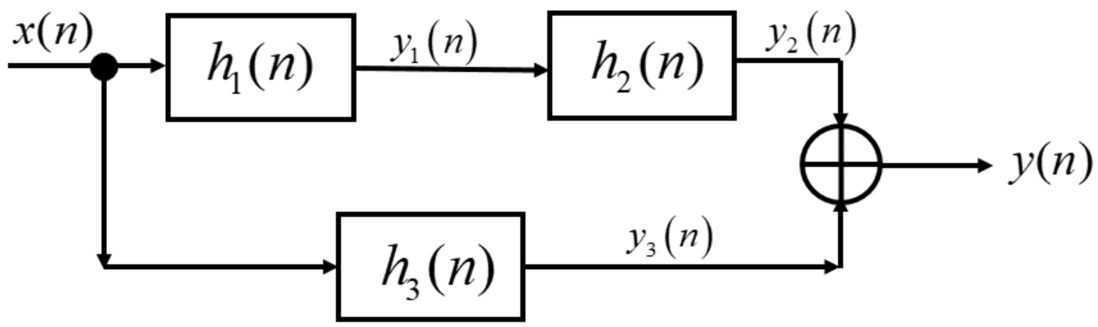
$$\Rightarrow y(n)=3x(n)-\frac{113}{12}x(n-1)+\frac{15}{4}x(n-2)-\frac{5}{6}x(n-3)+\frac{7}{12}y(n-1)+\frac{1}{24}y(n-2)-\frac{1}{24}y(n-3)$$

Bài 5: Cho hệ thống rời rạc có sơ đồ khối như sau:

Với $h_1(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$, $h_2(n)=(-1)^n u(n)$, h_3 là đáp ứng xung của hệ thống có phương trình sai phân: $y_3(n)=x(n)-x(n-2)+\frac{3}{2}y_3(n-1)+y_3(n-2)$

a) Tìm hàm truyền $H_1(z), H_2(z)$ và $H_3(z)$.

b) Tìm đáp ứng xung nhân quả của toàn hệ thống.



Giải:

a) $H_1(z)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, $|z|>\frac{1}{2}$

$$H_2(z)=\frac{1}{1+z^{-1}}, |z|>1$$

$$Y_3(z)=X(z)-z^{-2}X(z)+\frac{3}{2}z^{-1}Y_3(z)+z^{-2}Y_3(z)\Rightarrow H_3(z)=\frac{1-z^{-2}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}-z^{-2}}$$

b) $H(z)=H_1(z)H_2(z)+H_3(z)=\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)}+\dfrac{1-z^{-2}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}-z^{-2}}$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)}+1+\frac{3/2z^{-1}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}-z^{-2}}=\frac{1}{3}.\frac{1}{1-0.5z^{-1}}+\frac{2}{3}.\frac{1}{1+z^{-1}}+\frac{3}{5}.\frac{1}{1-2z^{-1}}-\frac{3}{5}.\frac{1}{1+0.5z^{-1}}+1$$

$$\Rightarrow h(n)=\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)+\frac{2}{3}(-1)^n u(n)+\frac{3}{5}.(-2)^n u(n)-\frac{3}{5}.\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Bài 6: Cho hàm truyền của hệ thống LTI:

$$H(z)=\frac{1+4z^{-2}}{\left(1-3z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)\left(1+4z^{-1}\right)}$$

a) Chứng minh rằng hệ thống trên có thể được ghép song song từ các hệ thống con và hãy cho biết hàm truyền của các hệ thống con đó.

b) Tìm đáp ứng xung không nhân quả của hệ thống trên.

c) Vẽ giản đồ cực – zero của hệ thống.

Giải:

a) $H(z)=\dfrac{A}{1-3z^{-1}}+\dfrac{B}{1-2z^{-1}}+\dfrac{C}{1+4z^{-1}}=H_1(z)+H_2(z)+H_3(z)$

b) Hai trường hợp: $2<|z|<3$ và $3<|z|<4$.

c) Tự làm

Bài 7: Cho hệ thống rời rạc có sơ đồ khối như hình:

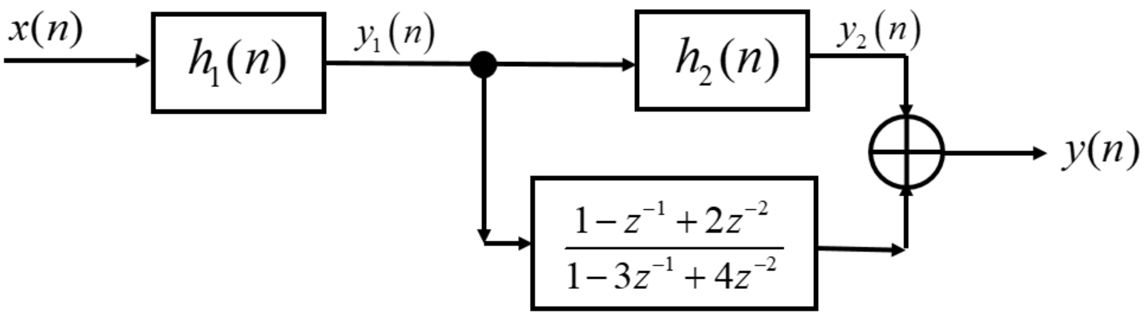
Giả sử các hệ thống thành phần đều là các hệ thống LTI. Đáp ứng xung của hệ thống 1 là $h_1(n)=\delta(n)-2\delta(n-3)-3h_1(n-1)$ và $h_2(n)$ là đáp ứng xung của hệ thống IIR có quan hệ vào ra $y_2(n)=y_1(n)-2y_1(n-1)+2y_2(n-3)$

a) Tìm đáp ứng xung $h_1(n)$ với vùng hội tụ $|z|>2$.

b) Xác định phương trình quan hệ vào ra và vẽ sơ đồ khối chính tắc mô tả toàn hệ thống trên.

c) Vẽ giản đồ cực - zero của toàn hệ thống.

d) Tìm đáp ứng xung nhân quả của toàn hệ thống.



Giải:

a) $H_1(z)=1-2z^{-3}-3z^{-1}H_1(z)\Rightarrow H_1(z)=\dfrac{1-2z^{-3}}{1+3z^{-1}}=-\dfrac{2}{3}z^{-2}+\dfrac{2}{9}z^{-1}-\dfrac{2}{27}+\dfrac{29}{27}.\dfrac{1}{1+3z^{-1}}$

+ $2<|z|<3\Rightarrow h_1(n)=-\dfrac{2}{3}\delta(n-2)+\dfrac{2}{9}\delta(n-1)-\dfrac{2}{27}\delta(n)-\dfrac{29}{27}.(-3)^n u(-n-1)$

+ $|z|>3\Rightarrow h_1(n)=-\dfrac{2}{3}\delta(n-2)+\dfrac{2}{9}\delta(n-1)-\dfrac{2}{27}\delta(n)+\dfrac{29}{27}.(-3)^n u(n)$

b) $Y_2(z)=Y_1(z)-2z^{-1}Y_1(z)+2z^{-3}Y_2(z)\Rightarrow H_2(z)=\dfrac{Y_2(z)}{Y_1(z)}=\dfrac{1-2z^{-1}}{1-2z^{-3}}$

$$H(z)=H_1(z)\left[H_2(z)+\frac{1-z^{-1}+2z^{-2}}{1-3z^{-1}+4z^{-2}}\right]=\frac{1-2z^{-3}}{1+3z^{-1}}.\frac{1-z^{-1}}{1-2z^{-3}}+\frac{1-2z^{-3}}{1+3z^{-1}}.\frac{1-z^{-1}+2z^{-2}}{1-3z^{-1}+4z^{-2}}$$

$$=\frac{1-z^{-1}}{1+3z^{-1}}+\frac{1-2z^{-3}}{1+3z^{-1}}.\frac{1-z^{-1}+2z^{-2}}{1-3z^{-1}+4z^{-2}}=\frac{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-3z^{-1}+4z^{-2}\right)+\left(1-2z^{-3}\right)\left(1-z^{-1}+2z^{-2}\right)}{\left(1+3z^{-1}\right)\left(1-3z^{-1}+4z^{-2}\right)}$$

$$=\frac{2-5z^{-1}+9z^{-2}-6z^{-3}+2z^{-4}-4z^{-5}}{1-5z^{-2}+12z^{-3}}=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\Rightarrow Y(z)-5z^{-2}Y(z)+12z^{-3}Y(z)=2X(z)-5z^{-1}X(z)+9z^{-2}X(z)-6z^{-3}X(z)+2z^{-4}X(z)-4z^{-5}X(z)$$

$$\Rightarrow y(n)=2x(n)-5x(n-1)+9x(n-2)-6x(n-3)+2x(n-4)-4x(n-5)+5y(n-2)-12y(n-3)$$

c)

$$H(z)=\frac{2-5z^{-1}+9z^{-2}-6z^{-3}+2z^{-4}-4z^{-5}}{1-5z^{-2}+12z^{-3}}=\frac{2z^5-5z^4+9z^3-6z^2+2z-4}{z^5-5z^3+12z^2}$$

d) $H(z)=H_1(z)\left[H_2(z)+\frac{1-z^{-1}+2z^{-2}}{1-3z^{-1}+4z^{-2}}\right]=\frac{1-z^{-1}}{1+3z^{-1}}+\frac{1-2z^{-3}}{1+3z^{-1}}.\frac{1-z^{-1}+2z^{-2}}{1-3z^{-1}+4z^{-2}}$

$$=\frac{1}{1+3z^{-1}}-\frac{1}{1+3z^{-1}}z^{-1}+\frac{1-z^{-1}+2z^{-2}}{\left(1+3z^{-1}\right)\left(1-3z^{-1}+4z^{-2}\right)}-\frac{1-z^{-1}+2z^{-2}}{\left(1+3z^{-1}\right)\left(1-3z^{-1}+4z^{-2}\right)}.2z^{-3}$$

$$\Rightarrow h(n)=h_1(n)-h_1(n-1)+h_2(n)-2h_2(n-3)$$

- $H_1(z)=\frac{1}{1+3z^{-1}}\Rightarrow h_1(n)=(-3)^n u(n)$
- $H_2(z)=\frac{1-z^{-1}+2z^{-2}}{\left(1+3z^{-1}\right)\left(1-3z^{-1}+4z^{-2}\right)}=\frac{A}{1+3z^{-1}}+\frac{Bz^{-1}+C}{1-3z^{-1}+4z^{-2}}$

Bài 8: Hãy kiểm chứng tính chất $x(n)*y(n)\overset{Z}{\longleftrightarrow}X(z)Y(z)$ bằng cách dùng hai tín hiệu mẫu sau:

$$x(n)=\delta(n)-2\delta(n-1)+\delta(n-3)-\delta(n-4)$$

$$y(n)=2\delta(n-1)-3\delta(n-2)+\delta(n+4)$$

❖ NHÂN ĐA THỨC SỬ DỤNG TÍCH CHẬP

+ Giả sử ta cần nhân hai đa thức $(a_1x^2 + a_2x + a_3)(b_1x^2 + b_2x + b_3)$, cần thực hiện các bước sau:

- Xác định số lượng kết quả cuối cùng bởi: $L = M + N - 1$
- Xác định bậc cao nhất của kết quả, bậc thấp nhất của kết quả.
- Tiến hành nhân chập các hệ số $[a_1 \ \ a_2 \ \ a_3]*[b_1 \ \ b_2 \ \ b_3]$ dùng bảng chập.
- Điền các hệ số tương ứng thứ tự bậc đã sắp.

Ví dụ 1: Thực hiện nhân hai đa thức sau: $(z^3 - z^2 + 5z + 1)(z^3 - 2z^2 + z + 1)$

- Số lượng các kết quả: $L = 4 + 4 - 1 = 7$
- Bậc cao nhất: $3 + 3 = 6$, bậc thấp nhất: $0 + 0 = 0$

	1	-1	5	1
1	1	-1	5	1
-2	-2	2	-10	-2
1	1	-1	5	1
1	1	-1	5	1

$\Rightarrow [1 \ -3 \ 8 \ -9 \ 2 \ 6 \ 1]$, bậc đang được sắp xếp theo thứ tự giảm dần.

$\Rightarrow KQ: z^6 - 3z^5 + 8z^4 - 9z^3 + 2z^2 + 6z + 1$

Ví dụ 2: Thực hiện nhân hai đa thức sau:

$(1 - z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4})(0.2 - 0.3z^{-1} + 0.3z^{-2} + 0.36z^{-3} + 0.21z^{-4} + 0.12z^{-5})$

- Số lượng các kết quả: $L = 5 + 6 - 1 = 10$
- Bậc cao nhất: $0 + 0 = 0$, bậc thấp nhất: $-4 - 5 = -9$

	0.2	-0.3	0.3	0.36	0.21	0.12
1	0.2	-0.3	0.3	0.36	0.21	0.12
-1	-0.2	0.3	-0.3	-0.36	-0.21	-0.12
2	0.4	-0.6	0.6	0.72	0.42	0.24
3	0.6	-0.9	0.9	1.08	0.63	0.36
4	0.8	-1.2	1.2	1.44	0.84	0.48

$\Rightarrow KQ: 0.2 - 0.5z^{-1} + z^{-2} + 0.06z^{-3} + 0.35z^{-4} + 0.33z^{-5} + 2.58z^{-6} + 2.31z^{-7} + 1.2z^{-8} + 0.48z^{-9}$

Ví dụ 3: Thực hiện nhân hai đa thức sau: $(1 - z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4})(1 - z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4)$

→ Sắp xếp lại theo đúng trình tự: $(1 - z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4})(4z^4 + 3z^3 + 2z^2 - z + 1)$

- Số lượng các kết quả: $L = 5 + 5 - 1 = 9$

- Bậc cao nhất: $4+0=4\left(1\times 4z^{4}\right)$, bậc thấp nhất: $0+4=4\left(1\times 4z^{-4}\right)$

	1	-1	2	3	4
4	4	-4	8	12	16
3	3	-3	6	9	12
2	2	-2	4	6	8
-1	-1	1	-2	-3	-4
1	1	-1	2	3	4

$\Rightarrow KQ: 4z^{4}-z^{3}+7z^{2}+15z+31+15z^{-1}+7z^{-2}-z^{-3}+4z^{-4}$

Câu 1: Cho hai hệ thống H_1 và H_2 lần lượt có đáp ứng xung là $h_1(n)$ và $h_2(n)$. Biết rằng

$$H_1(z)=\left(\frac{1-z^{-1}+3z^{-2}}{1-0.5z^{-1}+0.06z^{-2}}\right)\left(\frac{0.3-z^{-1}+0.85z^{-2}}{1-0.2z^{-1}+0.04z^{-2}}\right)$$

$$H_2(z)=\frac{0.1+z^{-1}+0.63z^{-2}}{1-0.4z^{-1}+0.04z^{-2}}$$

Câu 2: Cho hai hệ thống H_1 và H_2 lần lượt có đáp ứng xung là $h_1(n)$ và $h_2(n)$. Biết rằng:

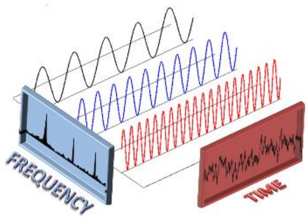
$$H_1=\frac{1-z^{-1}+z^{-2}+2z^{-3}+4z^{-5}}{5-z^{-1}+3.2z^{-2}+0.36z^{-4}}$$

$$H_2(z)=\frac{0.2-0.5z^{-1}+0.6z^{-2}+0.9z^{-3}-0.32z^{-4}}{2.11+5.3z^{-1}+0.3z^{-2}+0.25z^{-3}-4.2z^{-4}-0.81z^{-5}}$$

Câu 3: Cho hệ thống H có hàm truyền như sau:

$$H(z)=\frac{1-0.2z^{-2}+0.3z^{-2}-3.1z^{-3}-1.2z^{-4}+0.3z^{-5}}{6+z^{-1}+z^{-2}-2.2z^{-3}-3.1z^{-4}+0.12z^{-5}+0.1z^{-6}}$$

CHƯƠNG 4: PHÂN TÍCH TÍN HIỆU RỜI RẠC VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRÊN MIỀN TẦN SỐ.



I. CHUỖI FOURIER CỦA TÍN HIỆU RỜI RẠC TUẦN HOÀN (DTFS – DISCRETE TIME FOURIER SERIES)

+ Với $x(n)$ là tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ N, khác tín hiệu điều hòa.

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \Rightarrow X_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=|x_k|e^{j\theta k}$$

→Tần phổ tương ứng với: $\dfrac{2\pi}{N}k,\quad k=\overline{0,\ N-1}$

Đối với chuỗi CTFS cho tín hiệu liên tục gồm tổng các hài (harmonic) với tần số khác nhau, nhằm để đánh giá độ méo dạng hài tổng THD (Total Harmonic Distortion).

+ Công suất:

- $PSD: |X_k|^2$
- $P_x=\sum_{k=0}^{N-1}|X_k|^2$
- $E_{x(1N)}=N\sum_{k=0}^{N-1}|X_k|^2$

Ví dụ: Tìm X_k và $|X_k|,\ \theta_k$ của các tín hiệu sau:

a) $x(n)=(-1)^2$

b) $x(n)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}n\right)$

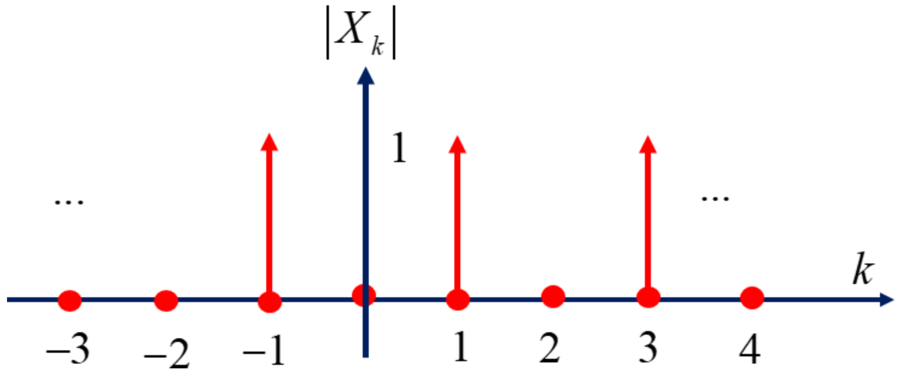
c) $x(n)=3+2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}n-\dfrac{\pi}{4}\right)+3\sin\left(\dfrac{\pi}{4}n-\dfrac{\pi}{6}\right)$

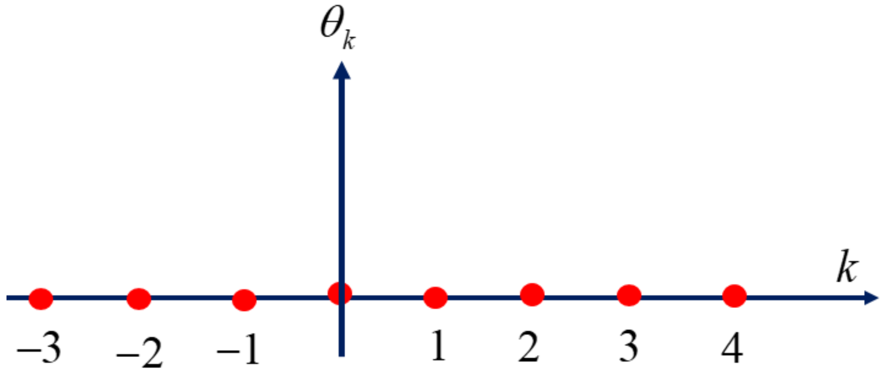
Giải:

a) $x(n)=(-1)^n \Rightarrow N=2 \qquad \Rightarrow X_k=\dfrac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{1}x(n)e^{-jk\pi n}$

$+\ k=0: X_0=\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{1}x(n)=\dfrac{1}{2}\left[x(0)+x(1)\right]=0$

$+\ k=1: X_1=\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{1}x(n)e^{j\pi n}=\dfrac{1}{2}\left[x(0)+x(1)e^{-j\pi}\right]=\dfrac{1}{2}[1+1]=1$





b) $x(n)=\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \Rightarrow N=4k=4,\ 8, \quad \Rightarrow X_k=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}x(n)e^{-jk\frac{\pi}{2}n}$, $k=\overline{0,\ 3}$

$+k=0 \Rightarrow X_0=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}x(n)=...$

……………………………

$+\ k=3 \Rightarrow X_3=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}x(n)e^{-jk\frac{3\pi}{2}n}=...$

Cách 2: Đối với tín hiệu điều hòa, ta có thể sử dụng công thức Eucler để đồng nhất hệ số:

$$\Rightarrow x(n)=\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right), \quad N=4$$

$$=\sum_{k=0}^{3}X_k e^{jk\frac{2\pi}{4}n}=\frac{1}{2}\left[e^{j\frac{\pi}{2}}+e^{-j\frac{\pi}{2}n}\right]=\frac{1}{2}\left[e^{j\frac{\pi}{2}}+e^{-j\frac{\pi}{2}n}.e^{j2\pi n}\right]=\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{4}n}+\frac{1}{2}e^{j.3.\frac{2\pi}{4}n}$$

$$\Rightarrow X_1=\frac{1}{2},\ X_3=\frac{1}{2},\ X_0=X_2=0$$

Bài 1: Tìm các hệ số phổ X_k và vẽ $|X_k|$, θ_k trong khai triển DTFS của các tín hiệu sau:

a) $x(n) = (-1)^n$

$$\rightarrow N = 2 \Rightarrow X_k = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{2}n} = \frac{1}{2}\left[x(0) + x(1)e^{-jk\pi}\right] \Rightarrow \begin{cases} X_0 = \frac{1}{2}\left[1 + (-1)\right] = 0 \\ X_1 = \frac{1}{2}\left[1 + (-1)(-1)\right] = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_k = \{0,\ 1\}$$

b) Chu kỳ trung tâm $x(n) = \{1, -1,\ 0,\ 2\}$, tuần hoàn với chu kỳ $N = 4$ mẫu.

$$\rightarrow N = 4 \Rightarrow X_k = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{4}n} = \frac{1}{4}\left[x(0) + x(1)e^{-jk\frac{2\pi}{4}} + x(3)e^{-jk\frac{2\pi}{4}.3}\right] = \frac{1}{4}\left[1 - e^{-jk\frac{2\pi}{4}} + 2e^{-jk\frac{6\pi}{4}}\right]$$

$$+\ k = 0 \Rightarrow X_0 = \frac{1}{4}\left[1 - 1 + 2\right] = \frac{1}{2}$$

$$+\ k = 1 \Rightarrow X_1 = \frac{1}{4}\left[1 - e^{-j\frac{2\pi}{4}} + 2e^{-j\frac{6\pi}{4}}\right] = \frac{1}{4}\left[1 + 1\angle\frac{-2\pi}{4}.(-1) + 2\angle\frac{-6\pi}{4}\right] = \frac{1+3j}{4} = \frac{\sqrt{10}}{4}\angle 1.25$$

$$+\ k = 2 \Rightarrow X_2 = 0$$

$$+\ k = 3 \Rightarrow X_3 = \frac{1-3j}{4} = \frac{\sqrt{10}}{4}\angle -1.25$$

$$\Rightarrow X_k = \left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4}j,\ 0,\ \frac{1}{4} - \frac{3}{4}j\right\}$$

c $x(n) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\delta(n-4k) + \delta(n-2-4k) - 2\delta(n-3-4k)\right] \quad \Rightarrow N = 4$

→ Chu kỳ trung tâm: $x_T(n) = \{1,\ 0,\ 1, -2\}$

$$\Rightarrow X_k = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{4}n} = \frac{1}{4}\left[1 + e^{-jk\frac{2\pi}{4}.2} - 2e^{-jk\frac{2\pi}{4}.3}\right],\ k = \overline{0,3}$$

d) $x(n) = 3 + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{\pi}{4}\right) + 3\sin\left(\frac{\pi}{6}n - \frac{\pi}{6}\right) \ \Rightarrow N = BCNN\{6,12\} = 12$

$$\Rightarrow x(n) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=-6}^{5} X_k e^{jk\frac{2\pi}{12}n}$$

$$x(n) = 3 + e^{j\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-j\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{3}{2j}e^{j\left(\frac{\pi}{6}n - \frac{\pi}{6}\right)} - \frac{3}{2j}e^{-j\left(\frac{\pi}{6}n - \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$= 3 + e^{-\frac{\pi}{4}j}.e^{jn\frac{\pi}{3}} + e^{\frac{\pi}{4}j}.e^{-jn\frac{\pi}{3}} + \frac{3}{2}.e^{-\frac{\pi}{2}j}.e^{-\frac{\pi}{6}j}.e^{jn\frac{\pi}{6}} - \frac{3}{2}.e^{-\frac{\pi}{2}j}.e^{\frac{\pi}{6}j}.e^{-jn\frac{\pi}{6}}$$

$$= 3 + e^{-\frac{\pi}{4}j}.e^{jn\frac{2\pi}{12}.2} + e^{\frac{\pi}{4}j}.e^{-jn\frac{2\pi}{12}.2} + \frac{3}{2}.e^{-\frac{2\pi}{3}j}.e^{jn\frac{2\pi}{12}} - \frac{3}{2}.e^{-\frac{\pi}{3}j}.e^{-jn\frac{2\pi}{12}}$$

$$\Rightarrow X_k = \left\{0,0,0,0,e^{j\frac{\pi}{4}}, -\frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}},\ \underset{\uparrow}{3}, \frac{3}{2}e^{-j\frac{2\pi}{3}},\ e^{-j\frac{\pi}{4}}\right\} \quad \Rightarrow |X_k| = \left\{0,0,0,0,1,\frac{3}{2},\underset{\uparrow}{3},\frac{3}{2},1\right\}$$

$$\Rightarrow \theta_k = \left\{0,0,0,0,\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3},0,-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{4}\right\} \Rightarrow P_x = \sum_{k=-6}^{5}|X_k|^2 = 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1$$

e) $x(n) = 3 + 2\sin\left(\frac{\pi}{3}n - 30^0\right) + \frac{3}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}n - 20^0\right) \Rightarrow N = BCNN\{6,8\} = 24$

$$\Rightarrow x(n) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=-6}^{5} X_k e^{jk\frac{2\pi}{12}n}$$

$$x(n) = 3 + \frac{1}{j}e^{j\left(\frac{\pi}{3}n - 30^0\right)} - \frac{1}{j}e^{-j\left(\frac{\pi}{3}n - 30^0\right)} + \frac{3}{8}e^{j\left(\frac{\pi}{4}n - 20^0\right)} + \frac{3}{8}e^{-j\left(\frac{\pi}{4}n - 20^0\right)}$$

$$= 3 + e^{-j90^0}e^{-j30^0}e^{j\frac{2\pi}{24}.4} -^{-j90^0}\ e^{j30^0}e^{-j\frac{2\pi}{24}.4} + \frac{3}{8}e^{-j20^0}e^{j\frac{2\pi}{24}.3} + \frac{3}{8}e^{j20^0}e^{-\frac{2\pi}{24}.3}$$

$$= 3 + e^{-j120^0}e^{j\frac{2\pi}{24}.4} -^{-j60^0}\ e^{-j\frac{2\pi}{24}.4} + \frac{3}{8}e^{-j20^0}e^{j\frac{2\pi}{24}.3} + \frac{3}{8}e^{j20^0}e^{-\frac{2\pi}{24}.3}$$

II. BIẾN ĐỔI FOURIER THỜI GIAN RỜI RẠC (DTFT – Discrete Time Fourier Transform)

+ Định nghĩa: $x(n) \Rightarrow X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-jn\Omega}$ → Thuận.

$$X(\Omega) \Rightarrow x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)e^{jn\Omega}$$ → Nghịch.

$$\Rightarrow X(\Omega) = |X(\Omega)|e^{j\varphi(\Omega)} = X_{\text{Re}}(\Omega) + jX_{\text{Im}}(\Omega)$$

Ví dụ: Tìm $X(\Omega)$

a) $x(n) = \delta(n) \Rightarrow X(\Omega) = e^{-j.0\Omega} = 1$

b) $x(n) = \delta(n - n_0) \Rightarrow X(\Omega) = e^{-jn_0\Omega}$

c) $x(n) = u(n) - u(n-4) = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 1, 1\} \Rightarrow X(\Omega) = 1 + e^{-j\Omega} + e^{-2j\Omega} + e^{-3j\Omega}$

+ Tính chất:

- Tính chất liên tục và tuần hoàn:

$X(\Omega)$ là một hàm liên tục theo Ω và tuần hoàn với chu kì π

- Đối xứng chẵn lẻ:

$$|X(\Omega)| = |X(-\Omega)|, \quad X_{\text{Re}}(\Omega) = X_{\text{Re}}(-\Omega)$$

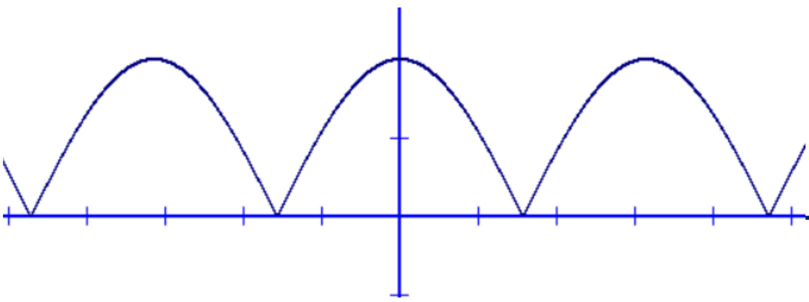
$$\varphi(\Omega) = -\varphi(-\Omega), \quad X_{\text{Im}}(\Omega) = -X_{\text{Im}}(-\Omega)$$

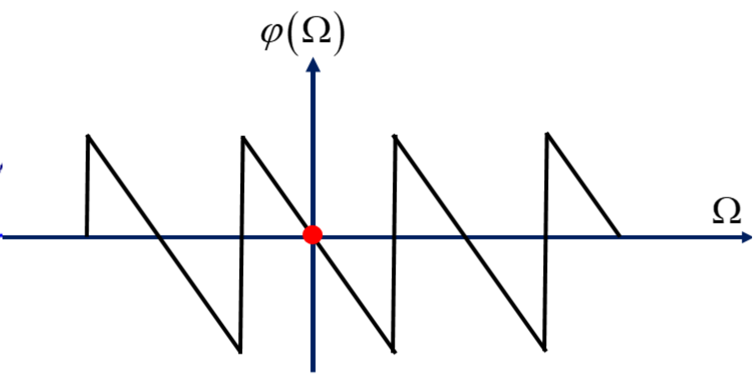
Ví dụ: Xác định và vẽ $|X(\Omega)|$, $\varphi(\Omega)$của tín hiệu sau:

$$x(n) = \delta(n) + \delta(n-2)$$

Giải:

$$X(\Omega) = 1 + e^{-j2\Omega} = e^{-j\Omega}\left(e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}\right) = 2\cos(\Omega)e^{-j\Omega} \Rightarrow \begin{cases} |X(\Omega) = 2|\cos(\Omega)|| \\ \varphi(\Omega) = -\Omega + \arg[\cos(\Omega)] \end{cases}$$





Với $\arg\left[\cos(\Omega)\right] = \begin{cases} 0\ , & \cos(\Omega) > 0 \\ \pm\pi, & \cos(\Omega) < 0 \end{cases}$

- **Tuyến tính:**

$$ax(n) + by(n) \leftrightarrow aX(\Omega) + bY(\Omega)$$

- **Tịnh tiến:**

$$x(n \pm n_0) \leftrightarrow X(\Omega)e^{\pm jn_0\Omega}$$

$$x(n)e^{\mp jn\Omega_0} \leftrightarrow X(\Omega \pm \Omega_0)$$

- **Điều chế:**

$$x(n)\cos(n\Omega_0) \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(\Omega - \Omega_0) + X(\Omega + \Omega_0)\right]$$

$$x(n)\sin(n\Omega_0) \leftrightarrow \frac{1}{2j}\left[X(\Omega - \Omega_0) - X(\Omega + \Omega_0)\right]$$

Ví dụ: Xác định và vẽ $|X(\Omega)|$, $\varphi(\Omega)$của tín hiệu sau:

$$x(n) = u(n) - u(n-4)$$

Cách 1:

$$x(n) = u(n) - u(n-4) \leftrightarrow X(\Omega) = \sum_{k=0}^{3} 1.e^{-jn\Omega} = \frac{1 - e^{-j4\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}} = \frac{e^{-j2\Omega}\left(e^{j2\Omega} - e^{-j2\Omega}\right)}{e^{-j\frac{\Omega}{2}}\left(e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}}\right)} = \frac{\sin(2\Omega)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}e^{-j\frac{3}{2}\Omega}$$

$$\Rightarrow |X(\Omega)| = \frac{|\sin(2\Omega)|}{\left|\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)\right|},\ \ \varphi(\Omega) = -\frac{3}{2}\Omega + \arg\left[\frac{|\sin(2\Omega)|}{\left|\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)\right|}\right]$$

Cách 2:

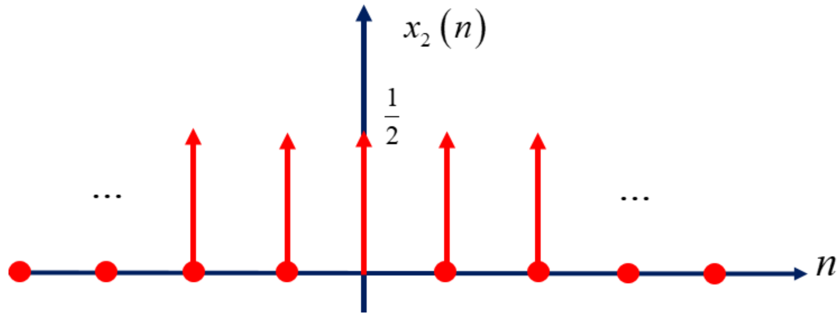
$$u(n) \leftrightarrow U(\Omega),\ u(n-4) \leftrightarrow e^{-j4\Omega}U(\Omega)$$

$$\Rightarrow X(\Omega) = \left(1 - e^{-j4\Omega}\right)U(\Omega)$$

Ví dụ: Tìm DTFT của $\quad x(n) = u(n)$

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n \ge 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases},\ \text{đặt}\ u(n) = x_1(n) + x_2(n)\ \ \text{với}\ \ x_1(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n \ge 0 \\ -\frac{1}{2}, & n < 0 \end{cases},\ x_2(n) = \frac{1}{2}$$

- Xét $x_2(n)=\frac{1}{2}$



Nhắc lại: $\frac{1}{T}\text{III}\left(\frac{t}{T}\right)\leftrightarrow\text{III}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)=\omega_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0)$

$$\Leftrightarrow X_2(\Omega)=\frac{1}{2}.\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\Omega-k\frac{2\pi}{N}\right)=\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega-k2\pi)\quad \textbf{(*)}$$

- Xét $x_1(n)$

Ta có: $x_1(n)-x_1(n-1)=\delta(n)\leftrightarrow X_1(\Omega)-e^{-j\Omega}X_1(\Omega)=1\Rightarrow X_1(\Omega)=\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}$ **(**)**

(*) và **(**)** $\Rightarrow X(\Omega)=\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega-k2\pi)$

➢ Tín hiệu gấp và tín hiệu liên hợp:

$$x(n)\leftrightarrow X(\Omega)\Rightarrow x(-n)\leftrightarrow X(-\Omega)$$

$$x^*(n)\leftrightarrow X^*(-\Omega)\Rightarrow x^*(-n)\leftrightarrow X^*(\Omega)$$

Từ đó, ta suy ra được các công thức:

$$x_e(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)+x(-n)\right]\leftrightarrow X_e(\Omega)=\frac{1}{2}\left[X(\Omega)+X(-\Omega)\right]$$

$$x_o(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)-x(-n)\right]\Rightarrow X_o(\Omega)$$

$$\mathrm{Re}\left[x(n)\right]=\frac{1}{2}\left[x(n)+x^*(n)\right]\Rightarrow \mathrm{Re}\left[X(\Omega)\right]$$

$$\mathrm{Im}\left[x(n)\right]=\frac{1}{2j}\left[x(n)-x^*(n)\right]\Rightarrow \mathrm{Im}\left[X(\Omega)\right]$$

➢ Nhân chập:

$$x(n)*y(n)\leftrightarrow X(\Omega)Y(\Omega)$$

$$x(n).y(n)\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}\left[X(\Omega)*Y(\Omega)\right]$$

➢ Định lý Parseval:

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \left| X(\Omega) \right|^2 d\Omega$$

TABLE 4.5 Properties of the Fourier Transform for Discrete-Time Signals

Property	Time Domain	Frequency Domain
Notation	$x(n)$	$X(\omega)$
	$x_1(n)$	$X_1(\omega)$
	$x_2(n)$	$X_2(\omega)$
Linearity	$a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)$	$a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega)$
Time shifting	$x(n-k)$	$e^{-j\omega k} X(\omega)$
Time reversal	$x(-n)$	$X(-\omega)$
Convolution	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(\omega) X_2(\omega)$
Correlation	$r_{x_1 x_2}(l) = x_1(l) * x_2(-l)$	$S_{x_1 x_2}(\omega) = X_1(\omega) X_2(-\omega)$
		$= X_1(\omega) X_2^*(\omega)$
		[if $x_2(n)$ is real]
Wiener–Khintchine theorem	$r_{xx}(l)$	$S_{xx}(\omega)$
Frequency shifting	$e^{j\omega_0 n} x(n)$	$X(\omega - \omega_0)$
Modulation	$x(n) \cos \omega_0 n$	$\frac{1}{2} X(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0)$
Multiplication	$x_1(n) x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda) X_2(\omega - \lambda) d\lambda$
Differentiation in		
the frequency domain	$n x(n)$	$j \frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Conjugation	$x^*(n)$	$X^*(-\omega)$
Parseval's theorem	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega) X_2^*(\omega) d\omega$	

+ Quan hệ với biến đổi Z:

$$x(n) \Rightarrow \begin{cases} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \\ X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-jn\Omega} \end{cases} \Rightarrow X(\Omega) = X(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}$$

+ Đáp ứng tần số thời gian rời rạc của hệ thống rời rạc:

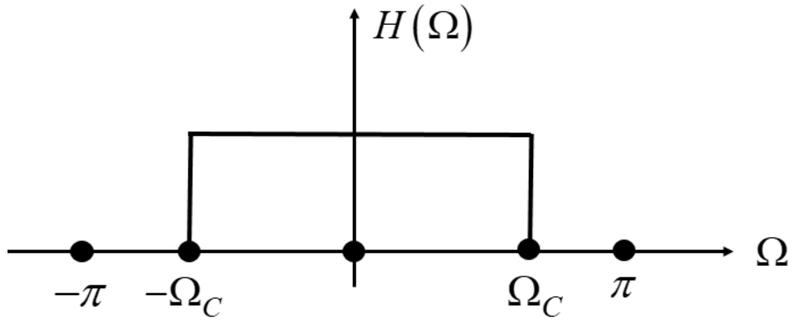
$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) \qquad x(\Omega) \longrightarrow \boxed{H(\Omega)} \longrightarrow y(\Omega)$$

$$y(n) = x(n) * h(n) \qquad \Rightarrow Y(\Omega) = X(\Omega) H(\Omega)$$

$$H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(n)e^{-jn\Omega}$$ → **Đáp ứng tần số của hệ thống rời rạc.**

$$H(\Omega)=|H(\Omega)|e^{j\varphi_H(\Omega)}=\frac{|Y(\Omega)|e^{j\varphi_Y(\Omega)}}{|X(\Omega)|e^{j\varphi_X(\Omega)}}\Rightarrow\begin{cases}|Y(\Omega)|=|X(\Omega)|.|H(\Omega)|\\ \varphi_Y(\Omega)=\varphi_X(\Omega)+\varphi_H(\Omega)\end{cases}$$

Ví dụ: Gọi tên hệ thống rời rạc sau:



Ta có: $H(\Omega)=\begin{cases}1, & |\Omega|<\Omega_C<\pi\\ 0, & |\Omega|>\Omega_C\end{cases}\Rightarrow Y(\Omega)=\begin{cases}X(\Omega), & |\Omega|<\Omega_C<\pi\\ 0, & |\Omega|>\Omega_C\end{cases}$

→ **Bộ lọc thông thấp (LPF) có tần số cắt (Cut – off) Ω_C**

Ví dụ: Tìm đáp ứng ngõ ra của hệ thống rời rạc có đáp ứng xung $h(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$ và kích thích ngõ vào $x(n)=\sqrt{3}e^{j\left(n\frac{\pi}{2}-30^o\right)}$

Giải:

Ta có: $\begin{cases}|Y(\Omega)|=|X(\Omega)|.|H(\Omega)|\\ \varphi_Y(\Omega)=\varphi_X(\Omega)+\varphi_H(\Omega)\end{cases}$

$$+\ x(n)=\sqrt{3}e^{j\left(n\frac{\pi}{2}-30^o\right)}=\sqrt{3}e^{-j30^o}.e^{jn\frac{\pi}{2}}\Rightarrow\Omega=\frac{\pi}{2},\ \left|X\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|=\sqrt{3},\ \varphi_X(\Omega)=-30^o$$

$$+\ h(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)\Rightarrow H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\Rightarrow H(\Omega)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$$

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{2}}}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}.(-j)}=\frac{1}{1+\frac{1}{3}j}=\frac{3}{3+j}=\frac{3}{\sqrt{10}}e^{j\varphi}\Rightarrow|H(\Omega)|=\frac{3}{\sqrt{10}},\ \varphi_H(\Omega)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left|Y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\\ \varphi_Y\frac{\pi}{2}=-30^o+\varphi\end{cases}\Rightarrow y(n)=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{10}}e^{j\left(n\frac{\pi}{2}-30^o+\varphi\right)}$$

Ví dụ:

5.18 Consider the FIR filter

$$y(n) = x(n) - x(n-4)$$

(a) Compute and sketch its magnitude and phase response.

(b) Compute its response to the input

$$x(n) = \cos\frac{\pi}{2}n + \cos\frac{\pi}{4}n, \qquad -\infty < n < \infty$$

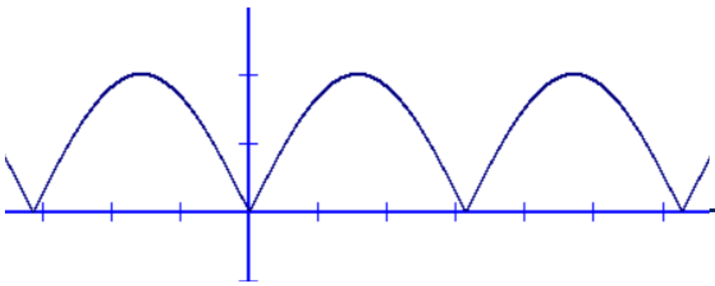
(c) Explain the results obtained in part (b) in terms of the answer given in part (a).

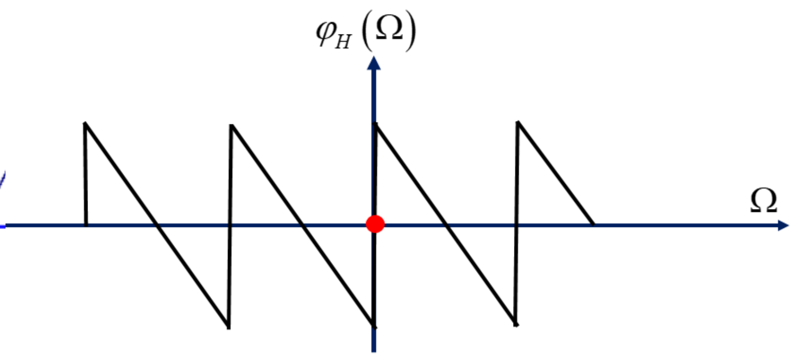
Giải:

a) $$Y(\Omega) = X(v) - e^{-j4\Omega}X(\Omega)$$

$$\Rightarrow H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = 1 - e^{-j4\Omega} = e^{-j2\Omega}\left(e^{j2\Omega} - e^{-j2\Omega}\right) = 2j\sin(2\Omega)e^{-j2\Omega}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |H(\Omega)| = 2|\sin(2\Omega)| \\ \varphi_H(\Omega) = \dfrac{\pi}{2} - 2\Omega + \arg\left[\sin(2\Omega)\right] \end{cases}$$





Với $\arg\left[\sin(\Omega)\right] = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \;, \; \sin(\Omega) > 0 \\ \dfrac{\pi}{2} \pm \pi, \; \sin(\Omega) < 0 \end{cases}$

b) $x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) = x_1(n) + x_2(n)$, $\qquad H(\Omega) = 1 - e^{-j4\Omega}$

$+ \; x_1(n) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \Rightarrow \Omega_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow H\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - e^{-j2\pi} = 0 \Rightarrow y_1(n) = 0$

$+ \; x_2(n) = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) \Rightarrow \Omega_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow H\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - e^{-j\pi} = 2 \Rightarrow y_2(n) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

$\Rightarrow y(n) = y_1(n) + y_2(n) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

Ví dụ:

5.12 Consider the filter

$$y(n) = 0.9y(n-1) + bx(n)$$

(a) Determine b so that $|H(0)| = 1$.

(b) Determine the frequency at which $|H(\omega)| = 1/\sqrt{2}$.

(c) Is this filter lowpass, bandpass, or highpass?

(d) Repeat parts (b) and (c) for the filter $y(n) = -0.9y(n-1) + 0.1x(n)$.

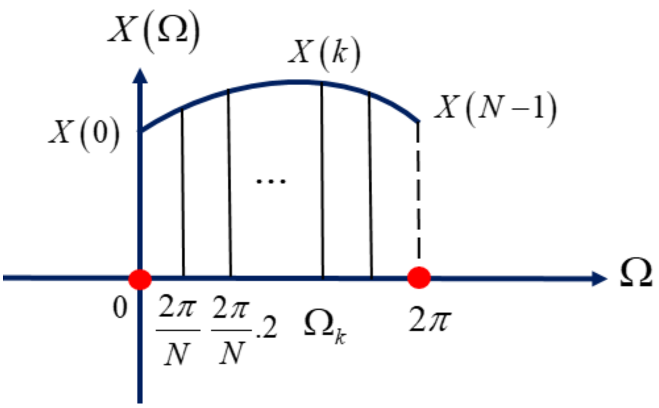
III. BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC N ĐIỂM (N – point Discrete Fourier Tranform - DFT)

Nhắc lại DTFT: $x(n) \xleftrightarrow[FT]{DT} X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-jn\Omega}$ là hàm liên tục, tuần hoàn với chu kỳ 2π

Giả sử $x(n)$ có L phổ: $x_0,\ x_1,\ x_2\ \ldots\ x_{L-1}$ $\Rightarrow x(n) \xleftrightarrow[FT]{DT} X(\Omega) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-jn\Omega}$

Tại $\Omega = \Omega_0 \Rightarrow X(\Omega_0) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-jn\Omega_0} = x(0) + x(1)e^{-j\Omega_0} + \ldots + x(L-1)e^{-j(L-1)\Omega_0}$

→ Tiêu tốn L phép nhân, và L – 1 phép cộng, do $X(\Omega)$ là hàm liên tục, nên có vô số tần số → số tần số Ω có trong 2π là vô số → vô số phép tính → chia nhỏ hữu hạn điểm.



$$\Omega_k = \frac{2\pi}{N}k,\ k = \overline{0,\ N-1}$$

$$\Rightarrow DFT : X(\Omega_k) = X(\Omega)|_{\Omega=\Omega_k}$$

→ DTF N điểm chính là DTFT được phân tích N điểm tần số cách đều nhau trong khoảng 2π.

+ Định nghĩa về DFT – N điểm

Giả sử $x(n)$ có L phổ với các trường hợp sau:

- $L > N$
- $L < N$ → chèn các số 0 vào (zero – padding).
- $L = N$

- **Biến đổi thuận:** $x(n) \xleftrightarrow[DFT]{N} X(\Omega_k) = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jn\frac{2\pi}{N}k}$
- **Biến đổi nghịch:** $X(k) \xleftrightarrow[IDFT]{N} x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{jn\frac{2\pi}{N}k}$

Ví dụ: Tìm N – DFT của các tín hiệu sau:

a) $x(n) = \delta(n) \Rightarrow X(k) = x(0)e^{-j0\frac{2\pi}{N}k} = 1$

b) $x(n) = \delta(n - n_0)\quad, 0 \le n_0 \le N-1 \Rightarrow X(k) = e^{-jn_0\frac{2\pi}{N}k}$

c) $x(n)=1 \Rightarrow X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} 1.e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{-jk\frac{2\pi}{N}}\right)^n = \frac{1-e^{-jk2\pi}}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}} = \begin{cases} N, & k=0 \\ 0, & k\neq 0 \end{cases} = N\delta(k)$

→ ***Công thức quan trọng:*** $1 \xleftrightarrow[DFT]{N} N\delta(k)$

d) $x(n)=u(n)-u(n-5) \Rightarrow X(k)=\sum_{n=0}^{4} 1.e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1-e^{-jk\frac{10\pi}{N}}}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}$

+ Tính chất:

- **Tuần hoàn:**

  Nếu $x(n)=x(n+N)$: tuần hoàn với chu kỳ N mẫu thì $X(k)=X(k+N)$

- **Tuyến tính:**

  Nếu $x(n) \xleftrightarrow[DFT]{N} X(k),\ y(n) \xleftrightarrow[DFT]{N} Y(k)$ thì

  $ax(n)+by(n) \xleftrightarrow[DFT]{N} aX(k)+bY(k)$

Ví dụ: Tìm $x(n) \xleftrightarrow[DFT]{10} X(k)=\begin{cases} 3, & k=0 \\ 1, & k\in[1,9] \end{cases}$

Viết lại biểu thức $X(k)=2\delta(k)+1$ và nhớ lại $\begin{cases} \delta(n) \xleftrightarrow[DFT]{N} 1 \\ 1 \xleftrightarrow[DFT]{N} N\delta(k) \end{cases}$

$\Rightarrow x(n)=2.\frac{1}{10}+\delta(n)=\frac{1}{5}+\delta(n),\ 0\le n\le 9.$

- **Gấp vòng (Circular folding):**

  Nếu $x(n) \xleftrightarrow[DFT]{N} X(k)$ thì:

  $x((-n))_N \xleftrightarrow[DFT]{N} X((-k))_N$

  $x^*(n) \xleftrightarrow[DFT]{N} X^*((-k))_N$

  $x^*((-n))_N \xleftrightarrow[DFT]{N} X^*(k)$

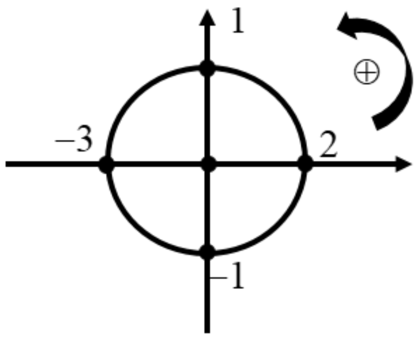
$\Rightarrow \mathrm{Re}[X(k)]=\frac{1}{2}[X(k)+X^*(k)] \xleftrightarrow[IDFT]{N} \frac{1}{2}[x(n)+x^*((-n))_N]$

$\Rightarrow \mathrm{Im}[X(k)]=\frac{1}{2j}[X(k)-X^*(k)] \xleftrightarrow[IDFT]{N} \frac{1}{2j}[x(n)-x^*((-n))_N]$

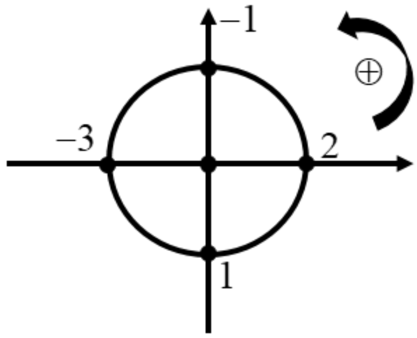
Ví dụ: Cho $x(n)=\{-1,\ \underset{\uparrow}{2},1,-3\}$, tìm $x((-n))_4,\ x((-n))_6$.

Giải: Với $N=4$ điểm

- **Cách 1: Dùng vòng tròn**



$x(n)$



$x((-n))_4$

$$\Rightarrow x((-n))_4 = \{\underset{\uparrow}{2}, -1, -3, 1\}$$

- **Cách 2: Ghi trực tiếp từ mũi tên sang phải rồi quay vòng lại mũi tên.**

$$x(n) = \{-1, \underset{\uparrow}{2}, 1, -3\} \Rightarrow x_4(n) = \{\underset{\uparrow}{2}, 1, -3, -1\} \Rightarrow x((-n))_4 = \{\underset{\uparrow}{2}, -1, -3, 1\}$$

Với $N = 6$ ***điểm, sử dụng cách ghi nhanh ta cũng có:***

$$x(n) = \{-1, \underset{\uparrow}{2}, 1, -3, 0, 0\} \Rightarrow x_6(n) = \{\underset{\uparrow}{2}, 1, -3, 0, 0, -1\} \Rightarrow x((-n))_6 = \{\underset{\uparrow}{2}, -1, 0, 0, -3, 1\}$$

Ví dụ: Cho $x(n) = 2\delta(n) + 3\delta(n-5)$

a) Tìm $X(k)$ là DFT – 10 điểm của $x(n)$

b) Tìm $y(n) \xleftrightarrow[DFT]{10} Y(k) = \mathrm{Re}[x(k)]$

Giải:

Viết lại $x(n) = \{\underset{\uparrow}{2}, 0, 0, 0, 0, 3\}$

a) $X(k) = \sum_{n=0}^{9} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{10}N} = 2 + 3e^{-jk\frac{2\pi}{10}.5} = 2 + 3\left(e^{-j\pi}\right)^k = 2 + 3.(-1)^k$, $k = \overline{0,\ 9}$

b)

$$Y(k) = \mathrm{Re}[X(k)] = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(k)] \Rightarrow y(n) = \frac{1}{2}\left[x(n) + x^*((-n))_{10}\right] = \frac{1}{2}\left[x(n) + x((-n))_{10}\right]$$

$$x_{10}(n) = \{\underset{\uparrow}{2}, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0\} \Rightarrow x((-n))_{10} = \{\underset{\uparrow}{2}, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0\}$$

$$\Rightarrow y(n) = \{\underset{\uparrow}{2}, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0\} = 2\delta(n) + 3\delta(n-5)$$

- **Tịnh tiến vòng trên miền thời gian (Circular Time – Shifting):**

Nếu $x(n) \xleftrightarrow[DFT]{N} X(k)$ thì $x\left(\left(n \pm n_0\right)\right)_N \xleftrightarrow[DFT]{N} X(k) e^{\pm jk\frac{2\pi}{N}n_0}$

Ví dụ: Cho $\underset{\uparrow}{x(n) = \{1, -2, -1, 1, 3\}}$, tìm $x\left(\left(n-2\right)\right)_6$, $x\left(\left(n+4\right)\right)_6$

Giải:

$$x_6(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, -2, -1, 1, 3, 0\} \Rightarrow x\left(\left(n-2\right)\right) = \{\,0, 1, -2, -1, 1, 3\,\}$$

$$x_6(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, -2, -1, 1, 3, 0\} \Rightarrow x\left(\left(n+4\right)\right) = \{\,0, 1, -2, -1, 1, 3\,\}$$

Ví dụ: Cho $x(n) = 2\delta(n) + 3\delta(n-5)$, tìm $y(n) \xleftrightarrow[DFT]{10} Y(k) = X(k) e^{jk\frac{2\pi}{5}}$

Giải:

$$Y(k) = X(k) e^{jk\frac{2\pi}{10}.2} \Rightarrow y(n) = x\left(\left(n+2\right)\right)_{10}$$

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{2}, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0\,\} \Rightarrow y(n) = \{\,\underset{\uparrow}{0}, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 2, 0\,\}$$

- **Tịnh tiến vòng trên miền tần số:**

Nếu $x(n) \xleftrightarrow[DFT]{N} X(k)$ thì $x(n) e^{\mp jk_0\frac{2\pi}{N}n} \longleftrightarrow X\left(\left(k \pm k_0\right)\right)_N$

- **Tích chập vòng (Circular Convolution):**

$$x(n) \bigcirc y(n) \xleftrightarrow[DFT]{N} X(k) Y(k)$$

$$x(n) y(n) \longleftrightarrow \frac{1}{N}\left[X(k) \bigcirc Y(k)\right]$$

- ***Định nghĩa về chập vòng:***

$$z(n) = x(n) \bigcirc y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) y\left(\left(n-m\right)\right)_N = \sum_{m=0}^{N-1} y(m) x\left(\left(n-m\right)\right)_N$$

- ***Phương pháp tính chập vòng:***
  - Tính trực tiếp từ định nghĩa, sử dụng vòng tròn.
  - Sử dụng chập tuyến tính.

Đối với phương pháp sử dụng chập tuyến tính ra thực hiện các bước:

- **Bước 1:** Tính $v(n) = x(n) * y(n)$ → sử dụng bảng chập.

- **Bước 2:** $z(n) = v(n) + v(n-N) + v(n+N), \quad 0 \le n \le N-1$

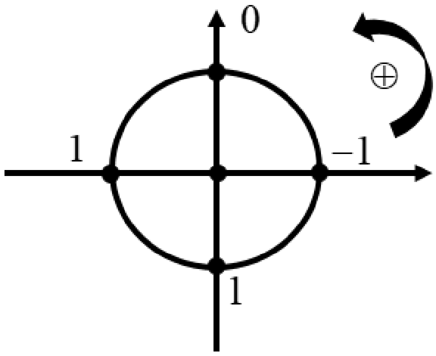
Ví dụ: Cho $x(n) = \{1, \underset{\uparrow}{-1}, 0, 1\}$, $y(n) = \{-1, \underset{\uparrow}{1}, 1\}$.

Tính $z(n) = x(n) \underset{4}{\bigcirc} y(n)$, $w(n) = x(n) \underset{6}{\bigcirc} y(n)$

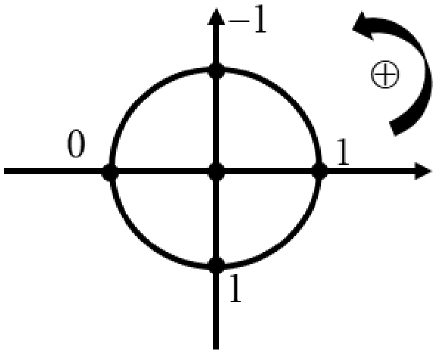
Giải:

- **Cách 1: Sử dụng vòng tròn:**

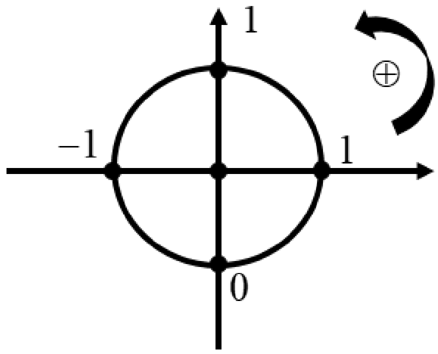
$$z(n) = x(n) \underset{4}{\bigcirc} y(n) = \sum_{m=0}^{3} x(m)\, y((n-m))_4$$



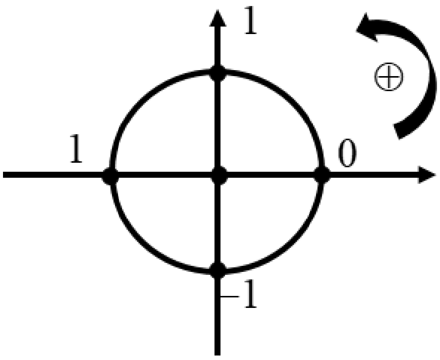
$x(m)$



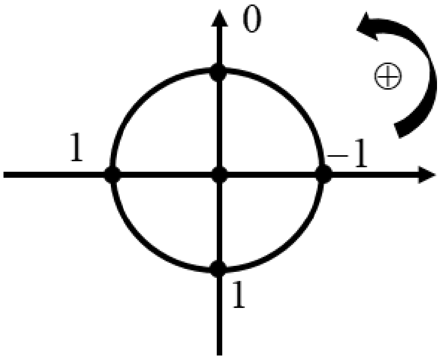
$y((-m))_4$



$y((1-m))_4$



$y((2-m))_4$



$y((3-m))_4$

$$+n = 0 \Rightarrow z(0) = \sum_{m=0}^{3} x(m)\, y((-m))_4 = 0$$

$$+n = 1 \Rightarrow z(1) = \sum_{m=0}^{3} x(m)\, y((1-m))_4 = -2$$

$$+n=2 \Rightarrow z(2)=\sum_{m=0}^{3} x(m)\,y((2-m))_4 = 0$$

$$+n=3 \Rightarrow z(3)=\sum_{m=0}^{3} x(m)\,y((3-m))_4 = 3$$

$$\Rightarrow z(n)=\{\underset{\uparrow}{0},\ -2,\ 0,\ 3\}$$

- **Cách 2: Sử dụng chập tuyến tính:** $v(n)=x(n)*y(n)$

	1	-0	0	1
-1	**-1**	**1**	**0**	**-1**
1	**1**	**-1**	**0**	**1**
1	**1**	**-1**	**0**	**1**

$$\Rightarrow v(n)=\{-1,\ 2,\ \underset{\uparrow}{0},\ -2,\ 1,\ 1\}$$

$$\Rightarrow v(n-4)=\{0,\ 0,\ \underset{\uparrow}{-1},\ 2,\ 0,\ -2,\ 1,\ 1\}$$

$$\Rightarrow v(n+4)=\{-1,\ 2,\ 0,\ -2,\ 1,\ 1,\ \underset{\uparrow}{0}\}$$

$$\Rightarrow z(n)=v(n)+v(n-4)+v(n+4)=\{\underset{\uparrow}{0},\ -2,\ 0,\ 3\},\ 0\le n\le 3$$

Ví dụ: Cho $x(n)=\{\underset{\uparrow}{0},\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

a) Tìm $y(n)\xleftrightarrow[DFT]{6} Y(k)=X(k)W_3^k$, với $W_3=e^{-j\frac{2\pi}{3}k}$

b) Tìm $w(n)\xleftrightarrow[DFT]{6} W(k)=X(k)Y(k)$, với $Y(k)\xleftrightarrow[DFT]{6} y(k)=\begin{cases}1, & 0\le k\le 4\\ 0, & 5\le k<6\end{cases}$

c) Tìm $z(n)\xleftrightarrow[DFT]{6} Z(k)=\mathrm{Re}\left[x(k)\right]+2j\,\mathrm{Im}\left[X(k)\right]$.

d) Tìm $v(n)\xleftrightarrow[DFT]{3} V(k)=X(2k)$.

Giải:

a) $Y(k)=X(k)e^{-j\frac{2\pi}{3}k}=X(k)e^{-j\frac{2\pi}{6}.2} \Rightarrow y(n)=x((n-2))_6$

Với $x_6(n) = \{0, 1, 2, 3, 4, 0\} \Rightarrow y(n) = \{4, 0, 0, 1, 2, 3\}$
$\quad\quad\uparrow \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \uparrow$

b) $W(k) = X(k)Y(k) \Rightarrow w(n) = x(n) \underset{6}{\bigcirc} y(n) = ...$

c) $z(n) \xleftrightarrow[DFT]{6} Z(k) = \text{Re}\left[x(k)\right] + 2j\,\text{Im}\left[x(k)\right] = X_1(k) + X_2(k)$

+ $X_1(k) = \text{Re}\left[X(k)\right] = \frac{1}{2}\left[X(k) + X^*(k)\right] \Rightarrow x_1(n) = \frac{1}{2}\left[x(n) + x^*\left((-n)\right)_6\right]$

+ $X_2(k) = \text{Im}\left[X(k)\right] = \frac{1}{2j}\left[X(k) - X^*(k)\right] \Rightarrow x_2(n) = \frac{1}{2j}\left[x(n) - x^*\left((-n)\right)_6\right]$

d) $x(n) \xleftrightarrow[DFT]{N} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$

$$\Rightarrow X(2k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2k\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N/2}n} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N/2}n}$$

Với chuỗi thứ 2 ta đặt $m = n - \frac{N}{2}$

$$\Rightarrow X(2k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N/2}n} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x\left(m + \frac{N}{2}\right) e^{-jk\frac{2\pi}{N/2}\left(m+\frac{N}{2}\right)}$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N/2}n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x\left(n + \frac{N}{2}\right) e^{-jk\frac{2\pi}{N/2}n} . e^{-jk2\pi} == \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N/2}n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x\left(n + \frac{N}{2}\right) e^{-jk\frac{2\pi}{N/2}n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right)\right] e^{-jk\frac{2\pi}{N/2}n} = V(k)$$

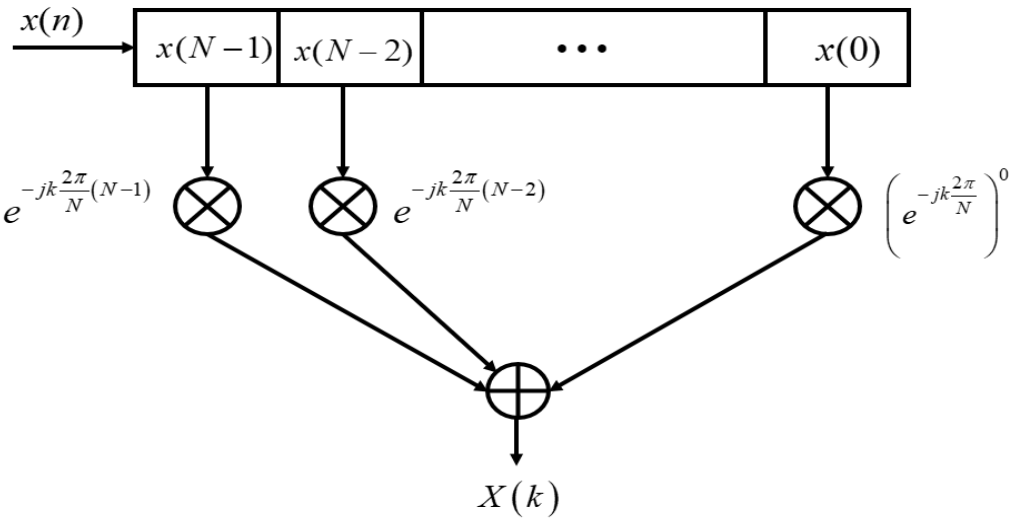
$\Rightarrow v(n) = x(n) + x(n+3)$, $0 \le n \le 2$

$= \{0, 1, 2, 3, 4\} + \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $0 \le n \le 2$
$\quad \uparrow \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \uparrow$

$= \{3, 5, 2\}$
$\quad \uparrow$

IV. BIẾN ĐỔI FOURIER NHANH ĐIỂM (N – Point FFT – Fast Fourier Transform)

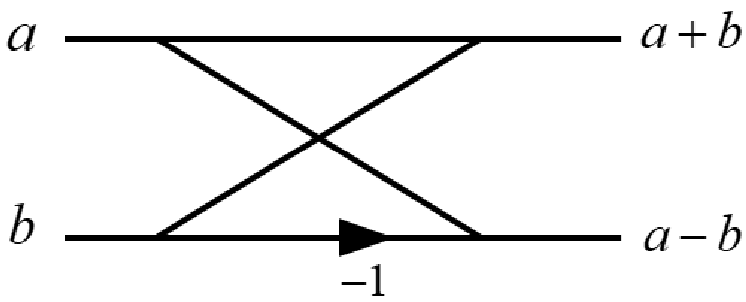
$$N-DFT:\ x(n)\xleftrightarrow[DFT]{N}X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jn\frac{2\pi}{N}k}\ ,k=\overline{0,\ N-1}$$



- Đặt $W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ là trọng số theo N điểm.

Bài tập: Chứng minh rằng $W_N^k=W_{N,m\in\mathbb{Z}}^{k+mN}=-W_N^{k+N/2}$

3.1 Sơ đồ bướm:



3.2 Sơ đồ FFT 4 điểm:

$$N=4\Rightarrow W_N=e^{-j\frac{2\pi}{4}}\Rightarrow 4-DFT:X(k)=\sum_{n=0}^{3}x(n)W_4^{kn}\ ,\ k=\overline{0,\ 3}$$

$$+\ k=0\Rightarrow X(0)=\sum_{0}^{3}x(n)W_4^0=x(0)W_4^0+x(1)W_4^0+x(2)W_4^0+x(3)W_4^0$$

$$=\left[x(0)+x(2)\right]W_4^0+\left[x(1)+x(3)\right]W_4^0$$

$$+\ k=1\Rightarrow X(1)=\sum_{0}^{3}x(n)W_4^n=x(0)W_4^0+x(1)W_4^1+x(2)W_4^2+x(3)W_4^3$$

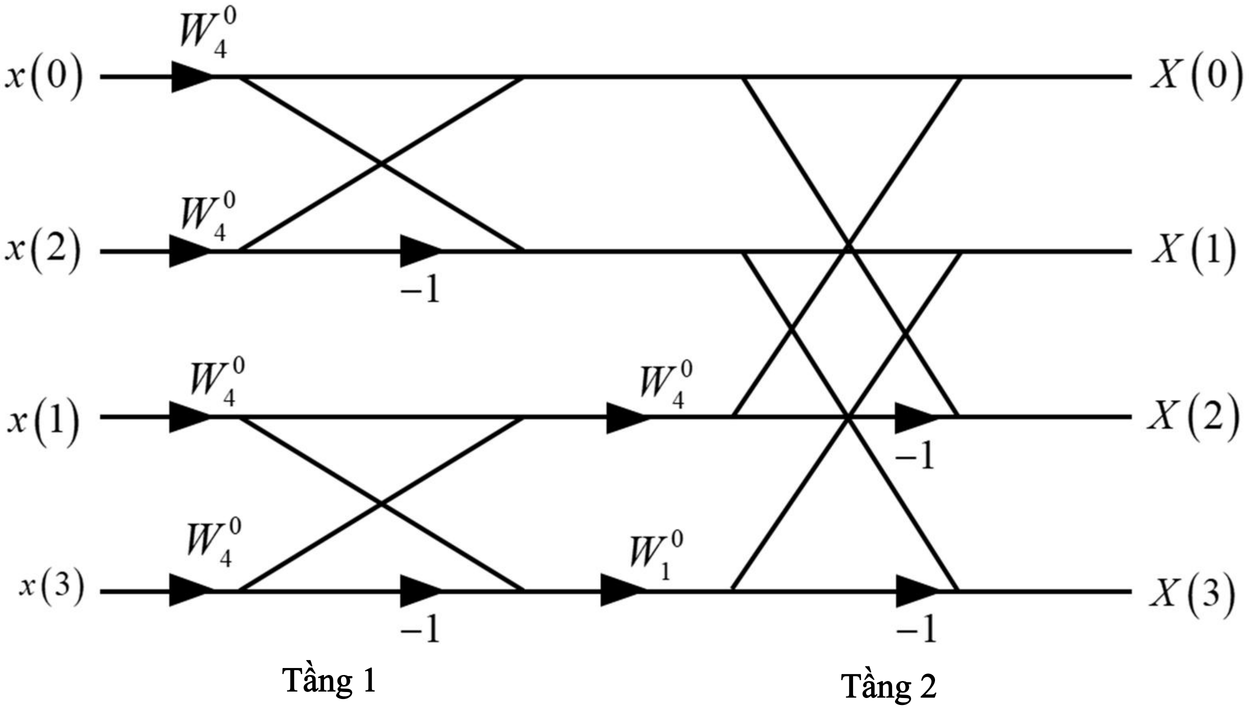
$$=\left[x(0)-x(2)\right]W_4^0+\left[x(1)-x(3)\right]W_4^1$$

$$+\ k=2 \Rightarrow X(2)=\sum_{0}^{3} x(n)W_4^{2n} = x(0)W_4^0 + x(1)W_4^2 + x(2)W_4^4 + x(3)W_4^6$$

$$=\left[x(0)+x(2)\right]W_4^0 - \left[x(1)+x(3)\right]W_4^0$$

$$+\ k=3 \Rightarrow X(3)=\sum_{0}^{3} x(n)W_4^{3n} = x(0)W_4^0 + x(1)W_4^3 + x(2)W_4^6 + x(3)W_4^9$$

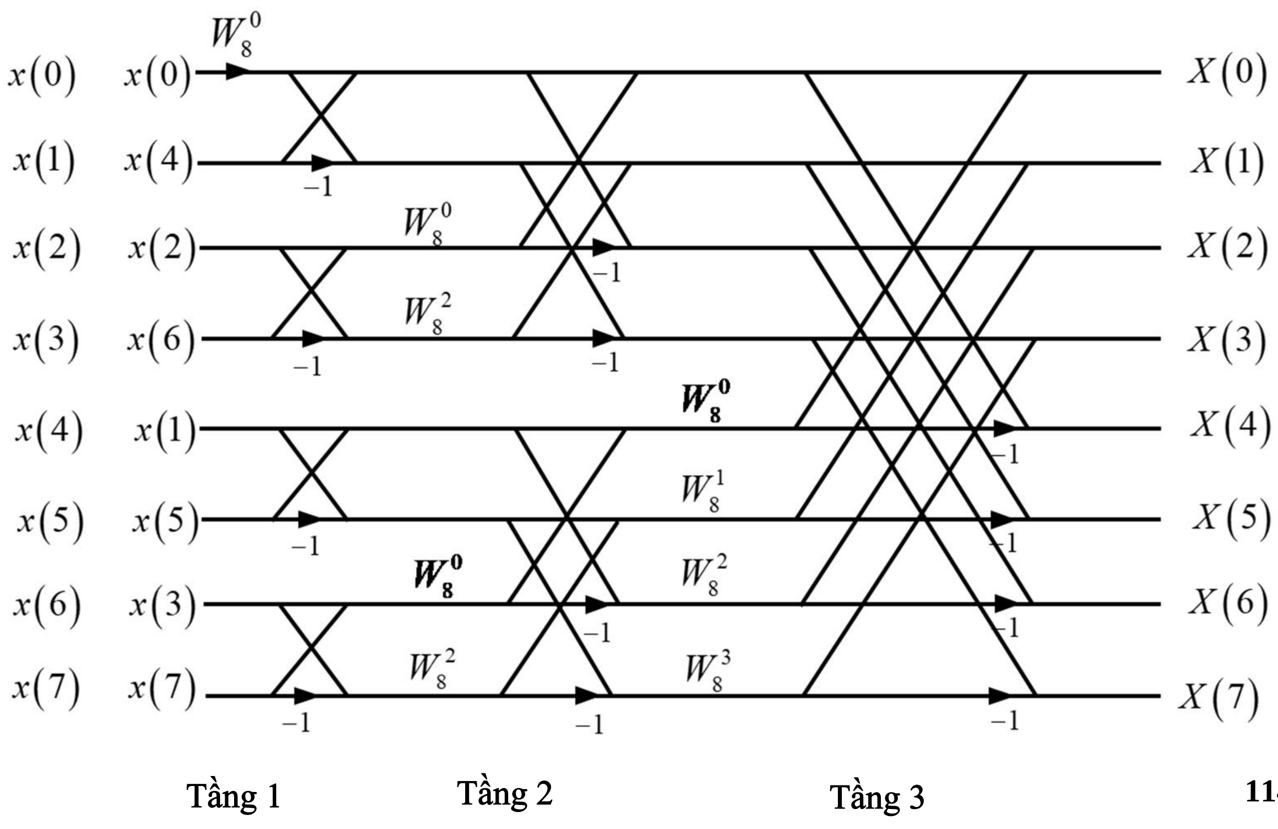
$$=\left[x(0)-x(2)\right]W_4^0 - \left[x(1)-x(3)\right]W_4^1$$



➢ **Chú ý:** $N=4=2^2$ → có 2 tầng bướm 2.

$\frac{N}{2}=2$ → sử dụng 2 trọng số: $W_4^0,\ W_4^1$, sử dụng ghép từ 2 bướm 2.

3.2 Sơ đồ FFT 8 điểm:



➢ **Chú ý:** $N = 8 = 2^3$ → có 3 tầng bướm 2.

$\frac{N}{2} = 4$ → sử dụng 4 trọng số: $W_8^0,\ W_8^1,\ W_8^2,\ W_8^3$, sử dụng ghép từ 2 bướm 4.

Đưa các trọng số về cơ số 8:

$$\Rightarrow W_4^0 = \left(e^{-j\frac{2\pi}{4}}\right)^0 = \left(e^{-j\frac{2\pi}{8}}\right)^0 = W_8^0 \qquad \Rightarrow W_4^1 = \left(e^{-j\frac{2\pi}{4}}\right)^1 = \left(e^{-j\frac{2\pi}{8}}\right)^2 = W_8^2$$

$$\Rightarrow W_8^0 = 1 \qquad \Rightarrow W_8^1 = \left(e^{-j\frac{2\pi}{8}}\right)^1 = e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-j)$$

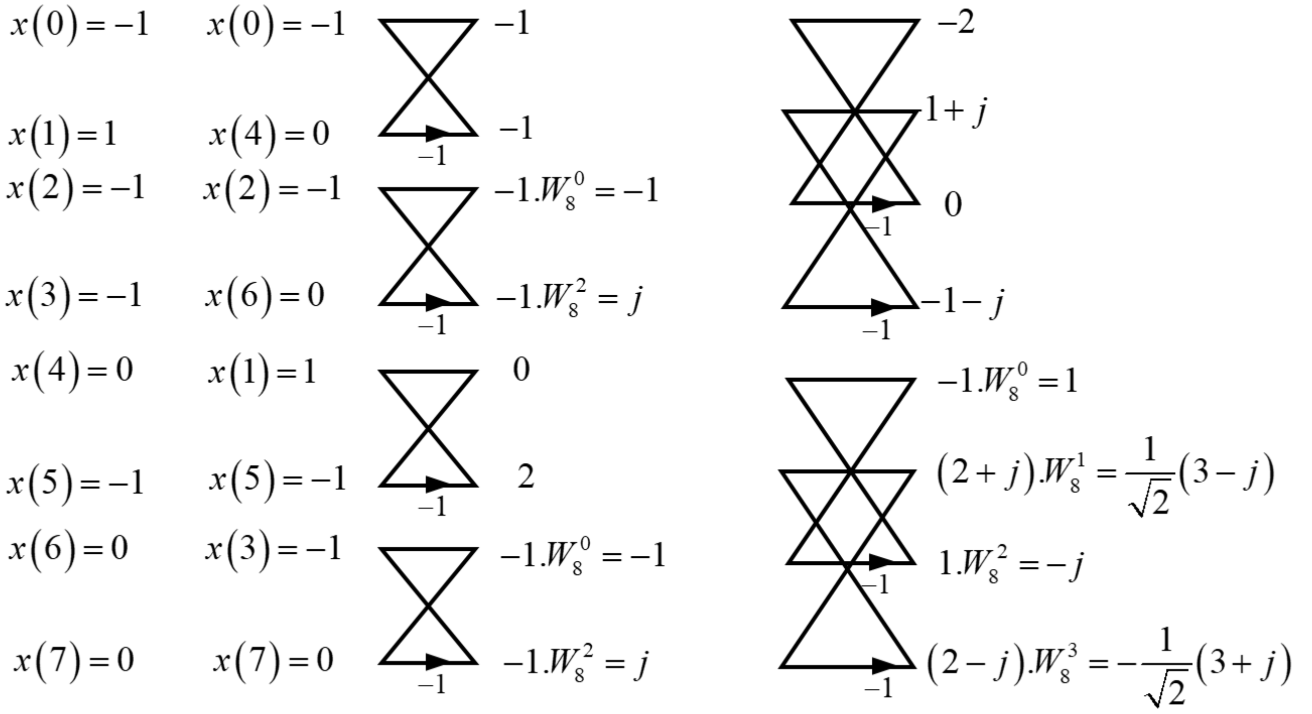
$$\Rightarrow W_8^2 = \left(e^{-j\frac{2\pi}{8}}\right)^2 = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j \qquad \Rightarrow W_8^3 = \left(e^{-j\frac{2\pi}{8}}\right)^3 = e^{-j\frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+j)$$

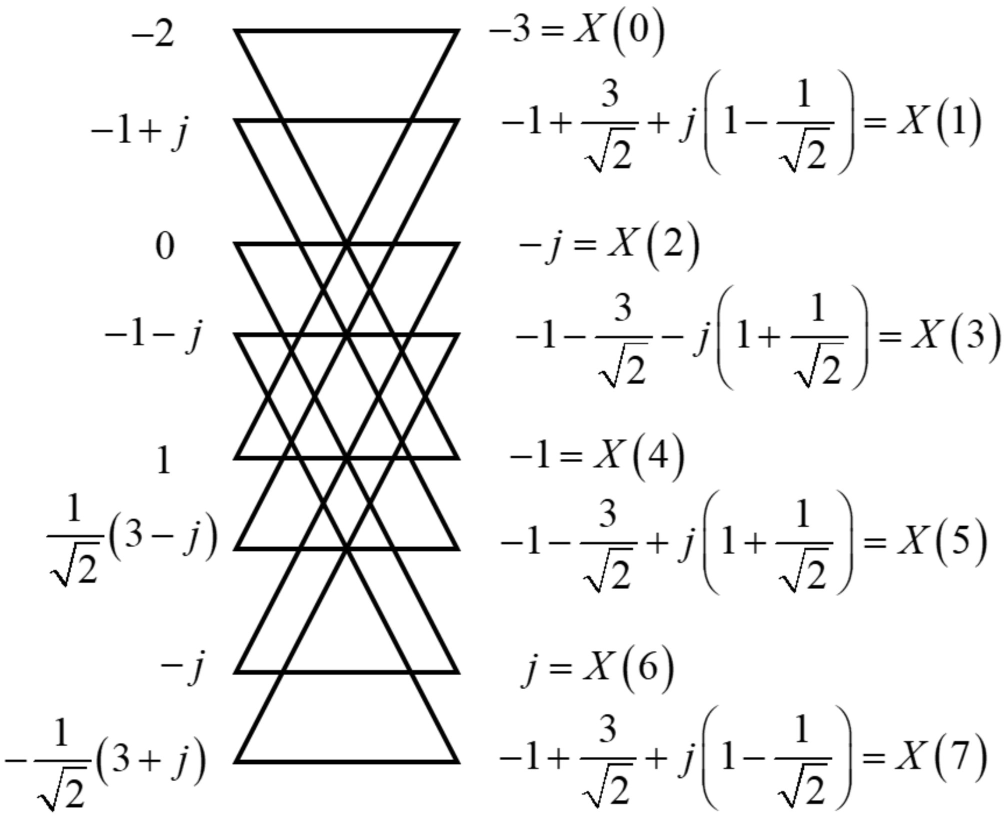
Ví dụ: Tìm 8 – DFT của tín hiệu sau:

$$x(n) = \{-1, 1, -1, -1, 0, -1\}$$

Giải:

$$N = 8 \Rightarrow x_8(n) = \{-1, 1, -1, -1, 0, -1, 0, \}$$





Kết luận: $X(k)=\{\ldots,\ldots\}$

Ví dụ: Cho $X(k)$ là kết quả của ví dụ trên. Tìm $x(n)\xleftrightarrow[DFT]{8}X(k)$

Giải:

Nhắc lại: $N-DFT: x(n)\longleftrightarrow X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{Kn}$

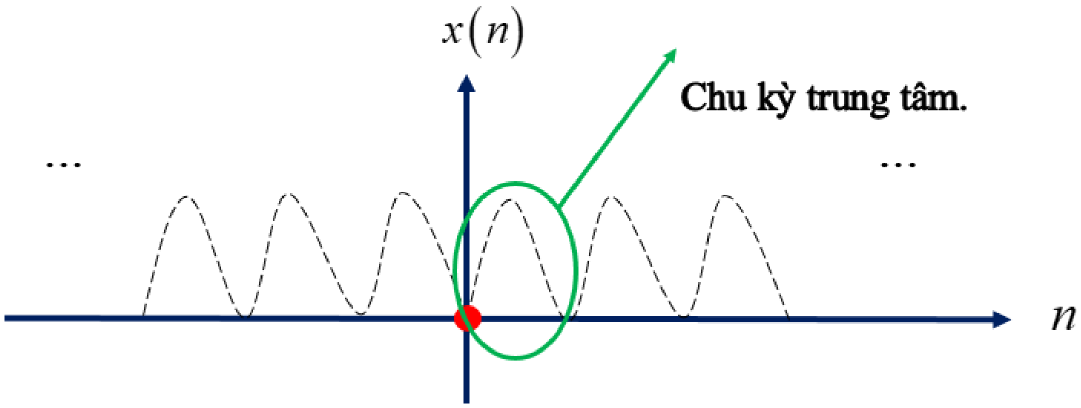
$$\Rightarrow X(k)\xleftrightarrow[FT]{ID}x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}\Rightarrow x(-n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{kn}$$

$$\Rightarrow Nx((-n))_N=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{kn}\Rightarrow x(n)=\frac{1}{N}x_1((-n))_N$$

Ví dụ 3: Tìm các hệ số tần phổ $X(k)$ của khai triển DTFS cho 1 tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ 8 mẫu có chu kỳ trung tâm là: $x(n)=\{-1, 1, -1, -1, 0, -1, 0, 1\}$.

Giải:

Chu kỳ trung tâm:



Nhắc lại tính chất tuần hoàn của N – DFT:

Nếu $x(n) \xleftrightarrow[DFT]{N} X(k)$ thì $x(n) = x(n+N) \Rightarrow X(k) = X(k+N)$

Nhắc lại NDFT: $x(n) \xleftrightarrow[DTF]{N} X(k) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$

Nhắc lại DTFS: $x_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{X(k)}{N}$

→ ***Bước 1:*** Tính $X(k)$. ***Bước 2:*** $x(k) = \frac{X(k)}{N}$

Ví dụ: Tìm 8 – FFT của tín hiệu:

$$x(n) = \{-1, -1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 1, -1, -1, 1\}$$

Giải:

Viết lại tín hiệu tương đương với tín hiệu $x(n)$ $\Rightarrow x_8(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 1, -1, -1, 1, -1, -1\}$

→ Tiếp tục tính toán như bình thường.

➢ **BÀI TẬP [PRO_556]**

8.1 Show that each of the numbers

$$e^{j(2\pi/N)k}, \qquad 0 \le k \le N-1$$

corresponds to an Nth root of unity. Plot these numbers as phasors in the complex plane and illustrate, by means of this figure, the orthogonality property

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)kn} e^{-j(2\pi/N)ln} = \begin{cases} N, & \text{if } k = l \\ 0, & \text{if } k \ne l \end{cases}$$

Chứng minh rằng trong mỗi con số bên dưới [...], tương ứng với căn bậc N của 1 đơn vị. Vẽ các con số này về pha trong mặt phẳng phức và minh họa, bằng phương tiện hình vẽ cái tính chất trực giao của nó.

8.2 **(a)** Show that the phase factors can be computed recursively by

$$W_N^{ql} = W_N^q W_N^{q(l-1)}$$

(b) Perform this computation once using single-precision floating-point arithmetic and once using only four significant digits. Note the deterioration due to the accumulation of round-off errors in the latter case.

(c) Show how the results in part (b) can be improved by resetting the result to the correct value $-j$, each time $ql = N/4$.

a) Chứng minh rằng, các hệ số pha có thể được tính toán một cách đệ quy bởi [..].

b) Thực hiện phép toán này một lần, sử dụng bộ số học số thực dấu chấm động với độ chính xác đơn và chỉ sử dụng với 4 chữ số có nghĩa. Chú ý sai số do việc tích lũy các lỗi trong việc làm tròn trong các trường hợp sau đó.

8.3 Let $x(n)$ be a real-valued N-point ($N = 2^\nu$) sequence. Develop a method to compute an N-point DFT $X'(k)$, which contains only the odd harmonics [i.e., $X'(k) = 0$ if k is even] by using only a real $N/2$-point DFT.

Đặt $x(n)$ là một chuỗi giá trị thực N điểm với N có dạng 2^v. Phát triển/Đưa ra một phương pháp để tính toán một chuỗi DFT N điểm $X'(k)$, chỉ chứa các hài lẻ [...] bằng cách chỉ sử dụng phép DFT N/2 điểm thực.

8.4 A designer has available a number of eight-point FFT chips. Show explicitly how he should interconnect three such chips in order to compute a 24-point DFT.

Một nhà thiết kế có sẵn một số con chip tính toán FFT 8 điểm. Hãy chỉ ra một cách rõ ràng làm thế nào anh ấy có thể liên kết nối 3 con chip trên để tính toán được FFT 24 điểm.

8.5 The z-transform of the sequence $x(n) = u(n) - u(n-7)$ is sampled at five points on the unit circle as follows:

$$x(k) = X(z)|_z = e^{j2\pi k/5}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Determine the inverse DFT $x'(n)$ of $X(k)$. Compare it with $x(n)$ and explain the results.

Biến đổi Z của chuỗi [...] được lấy mẫu tại 5 điểm trên vòng tròn đơn vị như bên dưới [...]. Xác định biến đổi DFT ngược [...] của [...]. So sánh với [...] và giải thích kết quả.

8.33 **(a)** Suppose that $x(n)$ is a finite-duration sequence of $N = 1024$ points. It is desired to evaluate the z-transform $X(z)$ of the sequence at the points

$$z_k = e^{j(2\pi/1024)k}, \qquad k = 0, 100, 200, \ldots, 1000$$

by using the most efficient method or algorithm possible. Describe an algorithm for performing this computation efficiently. Explain how you arrived at your answer by giving the various options or algorithms that can be used.

(b) Repeat part (a) if $X(z)$ is to be evaluated at

$$z_k = 2(0.9)^k e^{j[(2\pi/5000)k+\pi/2]}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 999$$

7.12 Consider a finite-duration sequence

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 4\}$$

(a) Sketch the sequence $s(n)$ with six-point DFT

$$S(k) = W_2^* X(k), \qquad k = 0, 1, \ldots, 6$$

(b) Determine the sequence $y(n)$ with six-point DFT $Y(k) = \Re|X(k)|$.

(c) Determine the sequence $v(n)$ with six-point DFT $V(k) = \Im|X(k)|$.