I. PROAKIS

3.1 Determine the z-transform of the following signals.

(a) $x(n) = \{3, 0, 0, 0, 0, \underset{\uparrow}{6}, 1, -4\}$

(b) $x(n) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n, & n \geq 5 \\ 0, & n \leq 4 \end{cases}$

Giải:

a) $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = 3.z^{-(-5)} + 6.z^0 + z^{-1} - 4z^{-2}, \quad ROC : \forall z \setminus \{0, \infty\}$

b) $X(z) = \sum_{n=5}^{\infty} x(n) z^{-n}$

$$= \sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n - \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^0 - \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^1 - \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^4$$
$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - 1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3} - \frac{1}{16}z^{-4}, \quad ROC : \left|\frac{1}{2}z^{-1}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > \frac{1}{2}$$

Cách 2: $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-5) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-5} u(n-5) = \frac{1}{32} x_1(n-5)$**, với** $x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

$$\Rightarrow X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad ROC : |z| > \frac{1}{2}$$

Áp dụng tính chất trễ - sớm: $x(n) \leftrightarrow X(z) \Rightarrow x(n - n_0) \leftrightarrow z^{-n_0} X(z)$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{32} z^{-5} X_1(z) = \frac{1}{32} \cdot \frac{z^{-5}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad ROC : |z| > \frac{1}{2}$$

3.2 Determine the z-transforms of the following signals and sketch the corresponding pole–zero patterns.

(a) $x(n) = (1+n)u(n)$

(b) $x(n) = (a^n + a^{-n})u(n)$, a real

(c) $x(n) = (-1)^n 2^{-n} u(n)$

(d) $x(n) = (na^n \sin \omega_0 n)u(n)$

(e) $x(n) = (na^n \cos \omega_0 n)u(n)$

(f) $x(n) = Ar^n \cos(\omega_0 n + \phi)u(n)$, $0 < r < 1$

(g) $x(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n)(\frac{1}{3})^{n-1} u(n-1)$

(h) $x(n) = (\frac{1}{2})^n [u(n) - u(n-10)]$

Giải:

a) $x(n) = u(n) + nu(n) = x_1(n) + x_2(n)$ → **Áp dụng công thức số 2 và số 4 trong bảng 3.3:**

- $X_1(z) = \dfrac{1}{1 - z^{-1}},\ ROC_1 : |z| > 1$
- $X_2(z) = \dfrac{z^{-1}}{\left(1 - z^{-1}\right)^2}, ROC_2 : |z| > 1$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{\left(1 - z^{-1}\right)^2} = \frac{1}{\left(1 - z^{-1}\right)^2},\ ROC : |z| > 1$$

b) $x(n) = \left(a^n + a^{-n}\right)u(n) = a^n u(n) + a^{-n}u(n) = x_1(n) + x_2(n)$

Áp dụng công thức biến đổi Z trong bảng 3.3 cho nhanh: $a^n u(n) \longleftrightarrow \dfrac{1}{1 - az^{-1}},\ ROC : |z| > |a|$

- $X_1(z) = \dfrac{1}{1 - az^{-1}},\ ROC_1 : |z| > |a|$
- $X_2(z) = \dfrac{1}{1 - a^{-1}z^{-1}},\ ROC_2 : |z| > \left|\dfrac{1}{a}\right|$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} + \frac{1}{1 - a^{-1}z^{-1}},\ ROC : |z| > \max\left\{|a|,\ \left|\frac{1}{a}\right|\right\}$$

Ở đây có $\max\left\{|a|,\ \left|\dfrac{1}{a}\right|\right\}$ *bởi vì chưa biết rằng* $|a|$ *hay* $\left|\dfrac{1}{a}\right|$ *lớn hơn, ví dụ:* $2 > \dfrac{1}{2}$*, tuy nhiên* $0.1 < \dfrac{1}{0.1}$*. Oki nha.*

c) $x(n) = (-1)^n 2^{-n} u(n) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n u(n) \qquad \Rightarrow X(z) = \dfrac{1}{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)z^{-1}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{2}z^{-1}},\quad |z| > \dfrac{1}{2}$

d) $x(n) = \left(na^n \sin\omega_0 n\right)u(n) = \left(nx_1(n)\right)u(n)$

Áp dụng công thức số 10 trong bảng 3.3: $\left(a^n \sin\omega_0 n\right)u(n) \leftrightarrow \dfrac{az^{-1}\sin\omega_0}{1 - 2az^{-1}\cos\omega_0 + a^2z^{-2}},\ |z| > |a|$

$$\Rightarrow X_1(Z) = \frac{az^{-1}\sin\omega_0}{1 - 2az^{-1}\cos\omega_0 + a^2z^{-2}} = \frac{a\sin\omega_0 z}{z^2 - 2a\cos\omega_0 z + a^2},\ ROC : |z| > |a|$$

Áp dụng tính chất đạo hàm trên miền Z: $nx(n) \longleftrightarrow -z\dfrac{dX(z)}{dz}$

$$\Rightarrow X(z) = -z.\frac{dX_1(z)}{dz} = -z.\left(\frac{a\sin\omega_0 z}{z^2 - 2a\cos\omega_0 z + a^2}\right)'$$

$$= -z.\left(\frac{a\sin\omega_0.\left(z^2 - 2a\cos\omega_0 z + a^2\right) - a\sin\omega_0 z.\left(2z - 2a\cos\omega_0\right)}{\left(z^2 - 2a\cos\omega_0 z + a^2\right)^2}\right)$$

$$= -z.\left(\frac{-a\sin\omega_0 z^2 + a^3\sin\omega_0}{\left(z^2 - 2a\cos\omega_0 z + a^2\right)^2}\right) = \frac{a\sin\omega_0 z^3 - a^3\sin\omega_0 z}{\left(z^2 - 2a\cos\omega_0 z + a^2\right)^2},\ ROC: |z| > |a|$$

e) Tương tự câu d: $x(n) = \left(nx_1(n)\right)u(n)$

$$\Rightarrow X_1(z) = \frac{1 - a\cos\omega_0 z^{-1}}{1 - 2a\cos\omega_0 z^{-1} + a^2 z^{-2}} = \frac{z^2 - a\cos\omega_0 z}{z^2 - 2a\cos\omega_0 z + a^2},\ ROC: |z| > |a|$$

$$\Rightarrow X(z) = -z.\frac{dX_1(z)}{dz} = -z.\left(\frac{z^2 - a\cos\omega_0 z}{z^2 - 2a\cos\omega_0 z + a^2}\right)'$$ → **Mệt!**

f) $x(n) = Ar^n\cos(\omega_0 n + \phi)u(n) = Ar^n\left[\cos(\omega_0 n)\cos\phi - \sin(\omega_0 n)\sin\phi\right]u(n)$

$= A\cos\phi r^n\cos(\omega_0 n) - A\sin\phi r^n\sin(\omega_0 n) = x_1(n) - x_2(n)$

- $X_1(z) = A\cos\phi\dfrac{1 - r\cos\omega_0 z^{-1}}{1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}},\ ROC_1: |z| > |r|$
- $X_2(z) = A\sin\phi\dfrac{rz^{-1}\sin\omega_0}{1 - 2rz^{-1}\cos\omega_0 + r^2 z^{-2}},\ ROC_2: |z| > |r|$

$$\Rightarrow X(z) = A\cos\phi\frac{1 - r\cos\omega_0 z^{-1}}{1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}} - A\sin\phi\frac{rz^{-1}\sin\omega_0}{1 - 2rz^{-1}\cos\omega_0 + r^2 z^{-2}}$$

$$= \frac{A\cos\phi - Arz^{-1}\left[\cos\phi\cos\omega_0 + \sin\phi\sin\omega_0\right]}{1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}} = \frac{A\cos\phi - Arz^{-1}\cos(\omega_0 - \phi)}{1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}},\ ROC: |z| > |r|$$

g) $x(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}u(n-1) = \frac{1}{2}n^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}u(n-1) + \frac{1}{2}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}u(n-1)$

$= n.x_1(n) + x_1(n)$**, với** $x_1(n) = \frac{1}{2}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}u(n-1) = \frac{1}{2}nx_2(n)$**, với**

$x_2(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}u(n-1) = x_3(n-1)$ **với** $x_3(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$

Như vậy, ta có:

$$X_3(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}},\ ROC: |z| > \frac{1}{3}$$

Áp dụng tính chất trễ - sớm: $x(n) \leftrightarrow X(z) \Rightarrow x(n-n_0) \leftrightarrow z^{-n_0}X(z)$

$$\Rightarrow X_2(z) = z^{-1}X_3(z) = \frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{1}{z-1/3}$$

Áp dụng tính chất đạo hàm trên miền Z: $nx(n) \longleftrightarrow -z\dfrac{dX(z)}{dz}$

$$\Rightarrow X_1(z) = \frac{1}{2}\left(-z.\frac{dX_2(z)}{dz}\right) = \frac{1}{2}\left[-z.\left(\frac{1}{z-1/3}\right)'\right] = \frac{1}{2}\left(-z.\frac{-1}{(z-1/3)^2}\right) = \frac{z}{2(z-1/3)^2}$$

→ Xử lý tiếp cụm $nx_1(n)$ **vẫn sử dụng tính chất đạo hàm:**

$$nx_1(n) \leftrightarrow -z.\frac{dX_1(z)}{dz} = -z.\left(\frac{z}{2(z-1/3)^2}\right)'$$

$$= -\frac{z}{2}.\frac{1.(z-1/3)^2 - z.2(z-1/3)}{(z-1/3)^4} = -\frac{z}{2}.\frac{z-1/3-2z}{(z-1/3)^3} = -\frac{z}{2}.\frac{-z-1/3}{(z-1/3)^3} = \frac{z^2+\frac{1}{3}z}{2(z-1/3)^3}$$

Như vậy: $X(z) = \dfrac{z^2+\frac{1}{3}z}{2(z-1/3)^3} + \dfrac{z}{2(z-1/3)^2} = \dfrac{z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^3},\ ROC: |z| > \dfrac{1}{3}$

g) $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-10) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-10} u(n-10)$

$= x_1(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} x_1(n-10)$**, với** $x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

- $X_1(z) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},\ ROC: |z| > \dfrac{1}{2}$

Áp dụng tính chất trễ - sớm: $x(n) \leftrightarrow X(z) \Rightarrow x(n-n_0) \leftrightarrow z^{-n_0}X(z)$

$$\Rightarrow x_1(n-10) \longleftrightarrow z^{-10}X_1(z) = \frac{z^{-10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{(2z)^{-10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1-(2z)^{-10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},\ ROC: |z| > \frac{1}{2}$$

3.3 Determine the z-transforms and sketch the ROC of the following signals.

(a) $x_1(n) = \begin{cases} (\frac{1}{3})^n, & n \geq 0 \\ (\frac{1}{2})^{-n}, & n < 0 \end{cases}$

(b) $x_2(n) = \begin{cases} (\frac{1}{3})^n - 2^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$

(c) $x_3(n) = x_1(n+4)$

(d) $x_4(n) = x_1(-n)$

Giải:

a) Viết lại tín hiệu theo hàm bước cho dể, sài định nghĩa lâu:

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n-1)$$

Áp dụng công thức số 3 và 5 trong bảng 3.3 :

- $\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \longleftrightarrow \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}},\ ROC_1 : |z| > \dfrac{1}{3}$ **(*)**
- $\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n-1) \longleftrightarrow -\dfrac{1}{1-2z^{-1}},\ ROC_2 : |z| < 2$ **(**)**

Từ (*) và (**): $\Rightarrow X(z) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \dfrac{1}{1-2z^{-1}}, ROC : \dfrac{1}{3} < |z| < 2$

b) $x_2(n) = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2^n\right] u(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - 2^n u(n) = x_{21}(n) - x_{22}(n)$

→ Bài này dể, áp dụng công thức là ra.

c) $x_3(n) = x_1(n+4)$

Áp dụng tính chất trễ - sớm: $x(n) \leftrightarrow X(z) \Rightarrow x(n-n_0) \leftrightarrow z^{-n_0} X(z)$

$$\Rightarrow X_3(z) = z^4 X_1(z) = \frac{z^4}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{z^4}{1-2z^{-1}}, ROC : \frac{1}{3} < |z| < 2$$

d) $x_4(n) = x_1(-n)$

Áp dụng tính chất biến đổi Z của tín hiệu gấp: $x(n) \leftrightarrow X(z) \Rightarrow x(-n) \leftrightarrow X(z^{-1})$

$$\Rightarrow X_4(z) = X_1(z^{-1}) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z} - \frac{1}{1-2z}, ROC: \frac{1}{2} < |z| < 3$$ → **Chú ý nghịch đảo ROC lại.**

3.4 Determine the z-transform of the following signals.

(a) $x(n) = n(-1)^n u(n)$

(b) $x(n) = n^2 u(n)$

(c) $x(n) = -na^n u(-n-1)$

(d) $x(n) = (-1)^n \left(\cos \frac{\pi}{3} n\right) u(n)$

(e) $x(n) = (-1)^n u(n)$

(f) $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 0, -1, 0, 1, -1, \ldots\}$

Giải:

a) Áp dụng công thức số 4 trong bảng 3.3.

$$\Rightarrow X(z) = \frac{-z^{-1}}{\left(1+z^{-1}\right)^2}, ROC: |z| < 1$$

b) Áp dụng công thức số 4 trong bảng 3.3.

$$\Rightarrow nu(n) \longleftrightarrow \frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2} = \frac{z}{\left(z-1\right)^2}, ROC: |z| > 1$$

Áp dụng tính chất đạo hàm trên miền Z: $nx(n) \longleftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}$

$$\Rightarrow X(z) = -z.\left(\frac{z}{\left(z-1\right)^2}\right)' = -z.\frac{1.\left(z-1\right)^2 - z.2\left(z-1\right)}{\left(z-1\right)^4} = -z.\frac{z-1-2z}{\left(z-1\right)^3} = \frac{z^2+z}{\left(z-1\right)^3}, ROC: |z| > 1$$

c) $x(n) = -na^n u(-n-1)$ → **Áp dụng công thức số 6 trong bảng 3.3.**

d) $x(n) = (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{3} n\right) u(n)$ → **Áp dụng công thức số 9 trong bảng 3.3.**

e) $x(n) = (-1)^n u(n) \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1+z^{-1}}, ROC: |z| > 1$

f) $\Rightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = 1 - z^{-2} + z^{-4} - z^{-5}, ROC: \forall z \setminus \{0\}$