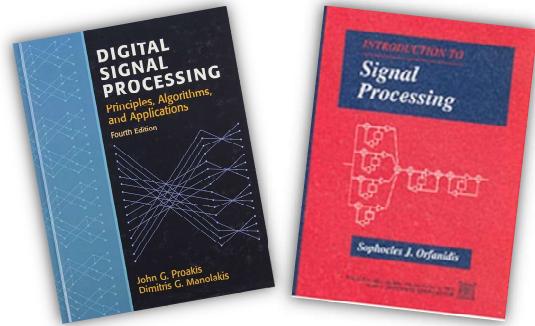


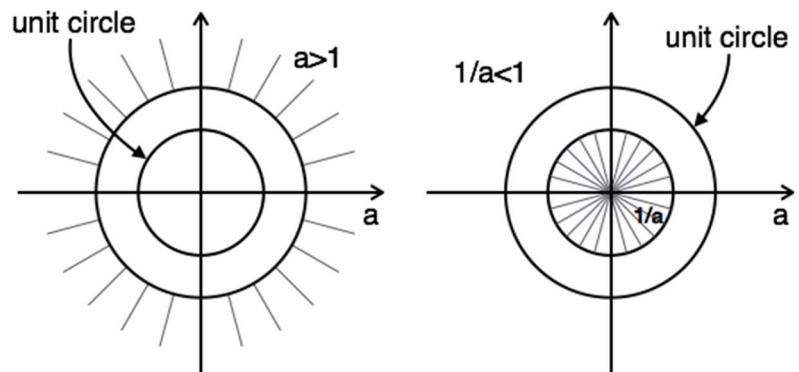


DIGITAL SIGNAL PROCESSING



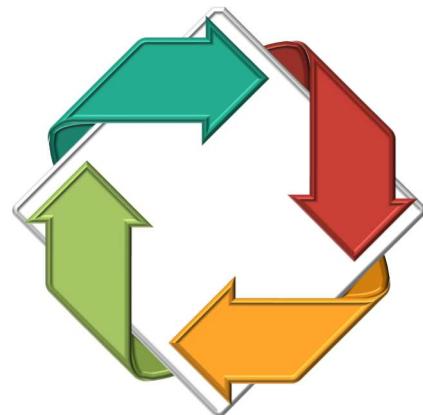
THE Z - TRANSFORM APPLICATIONS

$$X(z) = \sum_{k=0}^N x[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^N x[k](z^{-1})^k$$



DO TRUNG HAU

CONTENTS



1. THE Z - TRANSFORM

2. THE I – Z TRANSFORM

3. ITS APPLICATIONS

4. REVIEWS

1. Định nghĩa, miền hội tụ

2. Biến đổi Z bằng công thức

3. Tính chất của biến đổi Z

1. Khai triển phân số nghiệm đơn

2. Khai triển phân số nghiệm bội

3. Khai triển phân số nghiệm phức

4. Khôi phục về miền thời gian

1. Xác định hàm truyền

2. Xác định đáp ứng xung

3. Xác định đáp ứng ngo ra

4. Xác định đáp ứng bậc

5. Giản đồ cực - zero

1. Hệ thống đơn

2. Hệ thống Cascade

3. Hệ thống kết hợp

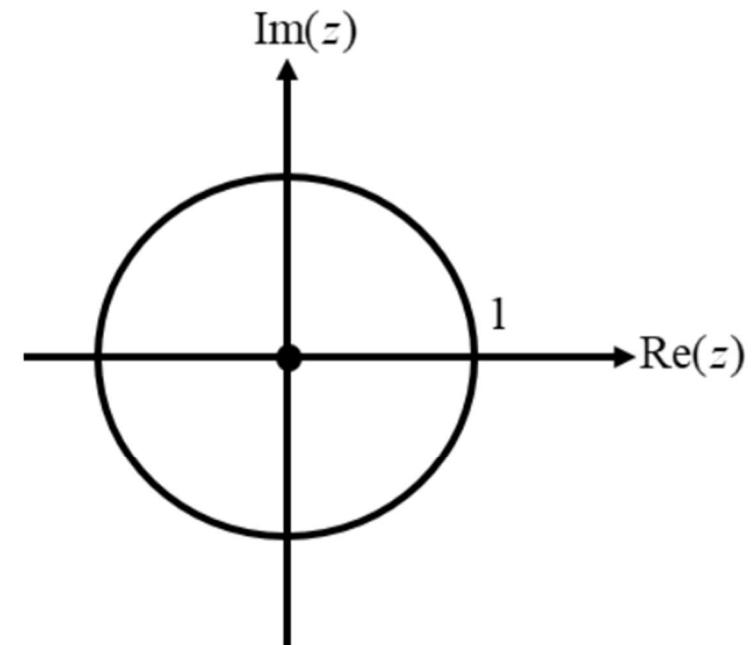
+ **Định nghĩa và miền hội tụ (ROC – Region of Convergence)**

$$x(n) \leftrightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C} \quad ROC = \{z \mid x(z) \neq \infty\}$$

c) $x(n) = u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 1 \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z^{-1})^n = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

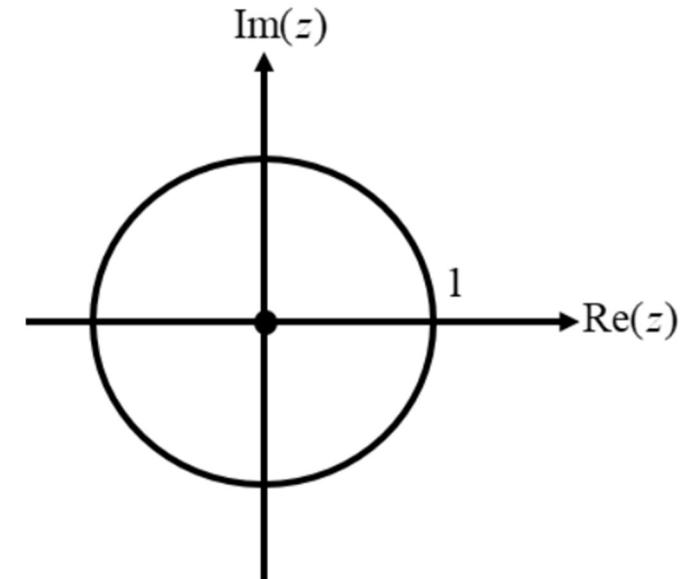
$$\Rightarrow ROC: |z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$$



d) $x(n) = -u(-n-1) = \begin{cases} 0, & n \geq 0 \\ -1, & n < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1) \cdot z^{-n} = - \sum_{n=1}^{+\infty} z^n = - \left[\sum_{n=0}^{+\infty} z^n - z^0 \right] = - \left(\frac{1}{1-z} - 1 \right)$$

$$= \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}} \Rightarrow ROC: |z| < 1$$



3.1 Determine the z -transform of the following signals.

(a) $x(n) = \{3, 0, 0, 0, 0, 6, 1, -4\}$

a) $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = 3.z^{-(-5)} + 6.z^0 + z^{-1} - 4z^{-2}, \quad ROC: \forall z \setminus \{0, \infty\}$

The Z - Transform

Biến đổi Z bằng công thức

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \Rightarrow X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$x_2(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1) \Rightarrow X_2(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{2}$$

a) $x(n) = u(n) + nu(n) = x_1(n) + x_2(n) \rightarrow$ Áp dụng công thức số 2 và số 4 trong bảng 3.3:

- $X_1(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad ROC_1 : |z| > 1$
- $X_2(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}, \quad ROC_2 : |z| > 1$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{1}{(1 - z^{-1})^2}, \quad ROC : |z| > 1$$

b) $x(n) = (a^n + a^{-n})u(n) = a^n u(n) + a^{-n} u(n) = x_1(n) + x_2(n)$

Áp dụng công thức biến đổi Z trong bảng 3.3 cho nhanh: $a^n u(n) \longleftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}}$, ROC : $|z| > |a|$

- $X_1(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$, $ROC_1 : |z| > |a|$
- $X_2(z) = \frac{1}{1 - a^{-1}z^{-1}}$, $ROC_2 : |z| > \left|\frac{1}{a}\right|$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} + \frac{1}{1 - a^{-1}z^{-1}}, ROC : |z| > \max \left\{ |a|, \left| \frac{1}{a} \right| \right\}$$

$$\text{c)} \quad x(n) = (-1)^n 2^{-n} u(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) \quad \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)z^{-1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

3.4 Determine the z -transform of the following signals.

(a) $x(n) = n(-1)^n u(n)$

a) Áp dụng công thức số 4 trong bảng 3.3.

$$\Rightarrow X(z) = \frac{-z^{-1}}{\left(1 + z^{-1}\right)^2}, \quad ROC : |z| < 1$$

c) $x(n) = -na^n u(-n-1) \rightarrow$ Áp dụng công thức số 6 trong bảng 3.3.

d) $x(n) = (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) u(n) \rightarrow$ Áp dụng công thức số 9 trong bảng 3.3.

The Z - Transform

Biến đổi Z bằng công thức

Ví dụ: Tìm $X(z)$, ROC của tín hiệu sau: $x(n) = 3^{-|n|}$

Ta có: $x(n) = 3^{-|n|} = \begin{cases} 3^{-n}, & n \geq 0 \\ 3^n, & n < 0 \end{cases} = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + 3^n u(-n-1)$

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \Rightarrow X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

$$x_2(n) = 3^n u(-n-1) \Rightarrow X_2(z) = -\frac{1}{1 - 3z^{-1}}, \quad |z| < 3$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{1}{1 - 3z^{-1}}, \quad ROC = ROC_1 \cap ROC_2 = \frac{1}{3} < |z| < 3$$

e) $x(n) = (-1)^n u(n) \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 + z^{-1}}, ROC : |z| > 1$

f) $x(n) = \underbrace{\{1, 0, -1, 0, 1, -1, \dots\}}_{\uparrow}$

f) $\Rightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = 1 - z^{-2} + z^{-4} - z^{-5}, ROC : \forall z \setminus \{0\}$

3.3 Determine the z -transforms and sketch the ROC of the following signals.

(a) $x_1(n) = \begin{cases} (\frac{1}{3})^n, & n \geq 0 \\ (\frac{1}{2})^{-n}, & n < 0 \end{cases}$

a) Viết lại tín hiệu theo hàm bước cho dễ, saì định nghĩa lâu:

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n-1)$$

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n-1)$$

Áp dụng công thức số 3 và 5 trong bảng 3.3 :

- $\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \longleftrightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, ROC_1 : |z| > \frac{1}{3}$ (*)
- $\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n-1) \longleftrightarrow -\frac{1}{1 - 2z^{-1}}, ROC_2 : |z| < 2$ (**)

Từ (*) và (**): $\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, ROC : \frac{1}{3} < |z| < 2$

$$\mathbf{(b)} \quad x_2(n) = \begin{cases} (\frac{1}{3})^n - 2^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{b)} \quad x_2(n) = \left[\left(\frac{1}{3} \right)^n - 2^n \right] u(n) = \left(\frac{1}{3} \right)^n u(n) - 2^n u(n) = x_{21}(n) - x_{22}(n)$$

$$\mathbf{f)} \quad x(n) = Ar^n \cos(\omega_0 n + \phi) u(n) = Ar^n [\cos(\omega_0 n) \cos \phi - \sin(\omega_0 n) \sin \phi] u(n)$$

$$= A \cos \phi r^n \cos(\omega_0 n) - A \sin \phi r^n \sin(\omega_0 n) = x_1(n) - x_2(n)$$

- $$X_1(z) = A \cos \phi \frac{1 - r \cos \omega_0 z^{-1}}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}, \quad ROC_1 : |z| > |r|$$

- $$X_2(z) = A \sin \phi \frac{rz^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2rz^{-1} \cos \omega_0 + r^2 z^{-2}}, \quad ROC_2 : |z| > |r|$$

+ **Tính trễ - sóm:** $x(n) \leftrightarrow X(z) \Rightarrow x(n - n_0) \leftrightarrow z^{-n_0} X(z)$

+ **Tính tuyến tính:** $ax(n) + by(n) \leftrightarrow aX(z) + bY(z)$

+ **Biến đổi Z của tín hiệu gấp và tín hiệu liên hợp phức:**

Nếu $x(n) \leftrightarrow X(z)$ thì:

$$x(-n) \leftrightarrow X(z^{-1})$$

$$x^*(n) \leftrightarrow X^*(z^{-1})$$

Tương tự, ta thực hiện các biến đổi Z sau:

$$\text{Re}[x(n)] = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(n)] \Rightarrow X_{\text{Re}}(z)$$

$$\text{Im}[x(n)] = \frac{1}{2j} [x(n) - x^*(n)] \Rightarrow X_{\text{Im}}(z)$$

$$x_e[x(n)] = \frac{1}{2} [x(n) + x(-n)] \Rightarrow X_e(z)$$

$$x_o[x(n)] = \frac{1}{2} [x(n) - x(-n)] \Rightarrow X_o(z)$$

+ **Đạo hàm trên miền Z:**

Nếu $x(n) \leftrightarrow X(z)$ thì: $nx(n) \leftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz}$

+ **Tích chập trên miền thời gian:**

$$x(n)^* y(n) \leftrightarrow X(z).Y(z)$$

Ví dụ: Tìm $X(z)$, ROC của tín hiệu sau:

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u(n-2) = x_1(n) - x_2(n)$$

Cách 1:

$$+ x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \Rightarrow X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$+ x_2(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u(n-2) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u(n-2) = \frac{1}{4} x_1(n-2)$$

$$\Rightarrow X_2(z) = \frac{1}{4} \cdot \frac{z^{-2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2} \Rightarrow X(z) = X_1(z) - X_2(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = 1 + \frac{1}{2}z^{-1}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Cách 2: Ta biến đổi:

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u(n-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^n [u(n) - u(n-2)] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 [\delta(n) + \delta(n-1)]$$

$$\Rightarrow X(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1}$$

Ví dụ:

$$x(n) = e^{n^{2023}} \sin\left(\frac{\pi}{2023}n\right)u(n) - e^{(n-1)^{2023}} \sin\left(\frac{\pi}{2023}n\right)u(n-1)$$

$$x(n) = e^{n^{2023}} \sin\left(\frac{\pi}{2023}n\right)[u(n) - u(n-1)] = e^{n^{2023}} \sin\left(\frac{\pi}{2023}n\right)\delta(n) = \delta(n)$$

$$\Rightarrow X(z) = 1, \quad ROC: \forall z$$

$$(b) \quad x(n) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n, & n \geq 5 \\ 0, & n \leq 4 \end{cases}$$

Cách 2: $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-5) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-5} u(n-5) = \frac{1}{32} x_1(n-5)$, với $x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

$$\Rightarrow X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad ROC : |z| > \frac{1}{2}$$

Áp dụng tính chất trễ - sóm: $x(n) \leftrightarrow X(z) \Rightarrow x(n - n_0) \leftrightarrow z^{-n_0} X(z)$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{32} z^{-5} X_1(z) = \frac{1}{32} \cdot \frac{z^{-5}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad ROC : |z| > \frac{1}{2}$$

(h) $x(n) = (\frac{1}{2})^n [u(n) - u(n - 10)]$

g) $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-10} u(n-10) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-10} u(n-10)$

$$= x_1(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} x_1(n-10), \text{ với } x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

- $X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, ROC : |z| > \frac{1}{2}$ $\Rightarrow x_1(n-10) \longleftrightarrow z^{-10} X_1(z) = \frac{z^{-10}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{(2z)^{-10}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1 - (2z)^{-10}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, ROC : |z| > \frac{1}{2}$$

3.4 Determine the z -transform of the following signals.

(a) $x(n) = n(-1)^n u(n)$

(b) $x(n) = n^2 u(n)$

b) Áp dụng công thức số 4 trong bảng 3.3.

$$\Rightarrow nu(n) \longleftrightarrow \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{z}{(z - 1)^2}, \text{ ROC : } |z| > 1$$

Áp dụng tính chất đạo hàm trên miền Z: $nx(n) \longleftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz}$

$$\Rightarrow X(z) = -z \cdot \left(\frac{z}{(z - 1)^2} \right)' = -z \cdot \frac{1 \cdot (z - 1)^2 - z \cdot 2(z - 1)}{(z - 1)^4} = -z \cdot \frac{z - 1 - 2z}{(z - 1)^3} = \frac{z^2 + z}{(z - 1)^3}, \text{ ROC : } |z| > 1$$

$$(d) \quad x(n) = (na^n \sin \omega_0 n)u(n) \quad d) \quad x(n) = (na^n \sin \omega_0 n)u(n) = (nx_1(n))u(n)$$

$$\Rightarrow X_1(Z) = \frac{az^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2az^{-1} \cos \omega_0 + a^2 z^{-2}} = \frac{a \sin \omega_0 z}{z^2 - 2a \cos \omega_0 z + a^2}, \text{ ROC : } |z| > |a|$$

Áp dụng tính chất đạo hàm trên miền Z: $nx(n) \longleftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow X(z) &= -z \cdot \frac{dX_1(z)}{dz} = -z \cdot \left(\frac{a \sin \omega_0 z}{z^2 - 2a \cos \omega_0 z + a^2} \right)' \\ &= -z \cdot \left\{ \frac{a \sin \omega_0 \cdot (z^2 - 2a \cos \omega_0 z + a^2) - a \sin \omega_0 z \cdot (2z - 2a \cos \omega_0)}{(z^2 - 2a \cos \omega_0 z + a^2)^2} \right\} \\ &= -z \cdot \left(\frac{-a \sin \omega_0 z^2 + a^3 \sin \omega_0}{(z^2 - 2a \cos \omega_0 z + a^2)^2} \right) = \frac{a \sin \omega_0 z^3 - a^3 \sin \omega_0 z}{(z^2 - 2a \cos \omega_0 z + a^2)^2}, \text{ ROC : } |z| > |a| \end{aligned}$$

(g) $x(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n)(\frac{1}{3})^{n-1}u(n-1)$

g) $x(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1) = \frac{1}{2}n^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1) + \frac{1}{2}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1)$

$$x_3(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \quad X_3(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \text{ ROC : } |z| > \frac{1}{3}$$

$$x_2(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1) = x_3(n-1) \Rightarrow X_2(z) = z^{-1}X_3(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{1}{z - 1/3}$$

$$x_1(n) = \frac{1}{2}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1) = \frac{1}{2}nx_2(n)$$

$$\Rightarrow X_1(z) = \frac{1}{2} \left(-z \cdot \frac{dX_2(z)}{dz} \right) = \frac{1}{2} \left[-z \cdot \left(\frac{1}{z-1/3} \right)' \right] = \frac{1}{2} \left(-z \cdot \frac{-1}{(z-1/3)^2} \right) = \frac{z}{2(z-1/3)^2}$$

$$nx_1(n) \leftrightarrow -z \cdot \frac{dX_1(z)}{dz} = -z \cdot \left(\frac{z}{2(z-1/3)^2} \right)'$$

$$= -\frac{z}{2} \cdot \frac{1 \cdot (z-1/3)^2 - z \cdot 2(z-1/3)}{(z-1/3)^4} = -\frac{z}{2} \cdot \frac{z-1/3-2z}{(z-1/3)^3} = -\frac{z}{2} \cdot \frac{-z-1/3}{(z-1/3)^3} = \frac{z^2 + \frac{1}{3}z}{2(z-1/3)^3}$$

+ **Khai triển phân số từng phần (Partical fraction):** Áp dụng cho $X(z)$ dạng hữu tỷ (rational).

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

- Nếu bậc tử \geq bậc mẫu: chia đa thức
- Nếu bậc tử $<$ bậc mẫu: Áp dụng phân số từng phần.

$$X(z) = \frac{M(z)}{N(z)} = \frac{M(z)}{k(1-az^{-1})(1-bz^{-1})(1-cz^{-1})} = \frac{A}{(1-az^{-1})} + \frac{B}{(1-bz^{-1})} + \frac{C}{(1-cz^{-1})}$$

$$\Rightarrow A = \lim_{z^{-1} \rightarrow \frac{1}{a}} \left(\frac{M(z)}{k(1-bz^{-1})(1-cz^{-1})} \right)$$

$$\Rightarrow B = \lim_{z^{-1} \rightarrow \frac{1}{b}} \left(\frac{M(z)}{k(1-az^{-1})(1-cz^{-1})} \right)$$

$$\Rightarrow C = \lim_{z^{-1} \rightarrow \frac{1}{c}} \left(\frac{M(z)}{k(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} \right)$$

Ví dụ: Khai triển hàm truyền sau thành phân số từng phần.

$$X(z) = \frac{1-2z^{-1}}{(1+3z^{-1})(1-4z^{-1})}$$

Ta có thể sử dụng phương pháp thăng dư (Residu):

$$A = \lim_{z^{-1} \rightarrow -1/3} \frac{1-2z^{-1}}{1-4z^{-1}} = \frac{5}{7}, \quad B = \lim_{z^{-1} \rightarrow 1/4} \frac{1-2z^{-1}}{1+3z^{-1}} = \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{1+3z^{-1}} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{1-4z^{-1}}$$

Ví dụ: Khai triển hàm truyền sau thành phân số từng phần.

$$X(z) = \frac{z(z-4)}{(z+3)(z-5)} = \frac{z^2 - 4z}{(z+3)(z-5)} = \frac{1-4z^{-1}}{(1+3z^{-1})(1-5z^{-1})}$$

Ví dụ: Khai triển hàm truyền sau thành phân số từng phần.

$$X(z) = \frac{1}{1-1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

$$X(z) = \frac{1}{0.5(z^{-1}-2)(z^{-1}-1)} = \frac{1}{0.5 \cdot 2 \cdot (0.5z^{-1}-1)(z^{-1}-1)} = \frac{1}{(1-z^{-1})\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

Ví dụ: Khai triển hàm truyền sau thành phân số từng phần.

$$X(z) = \frac{1}{6-5z^{-1} + z^{-2}} = \frac{1}{(z^{-1}-2)(z^{-1}-3)} = \frac{1}{2 \cdot (0.5z^{-1}-1) \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{3}z^{-1}-1\right)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\left(1-0.5z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$X(z) = \frac{M(z)}{N(z)} = \frac{M(z)}{k(1-az^{-1})(1-bz^{-1})(1-cz^{-1})^2} = \frac{A}{1-az^{-1}} + \frac{B}{1-bz^{-1}} + \frac{C}{(1-cz^{-1})^2} + \frac{D}{1-cz^{-1}}$$

$$\Rightarrow A = \lim_{z^{-1} \rightarrow \frac{1}{a}} \left(\frac{M(z)}{k(1-bz^{-1})(1-cz^{-1})^2} \right)$$

$$\Rightarrow B = \lim_{z^{-1} \rightarrow \frac{1}{b}} \left(\frac{M(z)}{k(1-az^{-1})(1-cz^{-1})^2} \right)$$

$$\Rightarrow C = \lim_{z^{-1} \rightarrow \frac{1}{c}} \left(\frac{M(z)}{k(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} \right)$$

$$\Rightarrow D = \lim_{z^{-1} \rightarrow \frac{1}{c}} \left(\frac{M(z)}{k(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} \right)'$$

Ví dụ: Khai triển hàm truyền sau thành phân số từng phần.

$$X(z) = \frac{1-2z^{-1}}{(1+3z^{-1})^2(1-4z^{-1})}$$

$$X(z) = \frac{A}{1-4z^{-1}} + \frac{Bz^{-1} + C}{(1+3z^{-1})^2} = \frac{A}{1-4z^{-1}} + \frac{D}{1+3z^{-1}} + \frac{E}{(1+3z^{-1})^2}$$

➤ **Ta sử dụng phương pháp thặng dư (Residu):**

$$A = \lim_{z^{-1} \rightarrow 1/4} \frac{1-2z^{-1}}{(1+3z^{-1})^2} = \frac{8}{49}, \quad E = \lim_{z^{-1} \rightarrow -1/3} \frac{1-2z^{-1}}{1-4z^{-1}} = \frac{5}{7}, \quad D = \lim_{z^{-1} \rightarrow -1/3} \left(\frac{1-2z^{-1}}{1-4z^{-1}} \right)' = \frac{6}{49}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{8}{49} \cdot \frac{1}{1-4z^{-1}} + \frac{6}{49} \cdot \frac{1}{1+3z^{-1}} + \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{(1+3z^{-1})^2}$$

$$X(z) = \frac{M(z)}{N(z)} = \frac{M(z)}{(1 - az^{-1})(b + cz^{-1} + dz^{-2})} \quad z^{-1} = x \pm yi$$

$$= \frac{M(z)}{(1 - az^{-1})(1 - mz^{-1})(1 - nz^{-1})} = \frac{A}{1 - az^{-1}} + \frac{B}{1 - mz^{-1}} + \frac{B^*}{1 - nz^{-1}}$$

$$\Rightarrow A = \lim_{\substack{z^{-1} \rightarrow 1 \\ a}} \left(\frac{M(z)}{(1 - mz^{-1})(1 - nz^{-1})} \right) \quad \Rightarrow B = \lim_{\substack{z^{-1} \rightarrow 1 \\ m}} \left(\frac{M(z)}{(1 - az^{-1})(1 - nz^{-1})} \right)$$

$$= |B| e^{\arg B}$$

Ví dụ: Khai triển hàm truyền sau thành phân số từng phần.

$$X(z) = \frac{1-2z^{-1}}{(1+4z^{-2})(1-3z^{-1})} = \frac{1-2z^{-1}}{(1-3z^{-1})4(z^{-1}-0.5i)(z^{-1}+0.5i)}$$

$$= \frac{1-2z^{-1}}{(1-3z^{-1}).4 \times 0.5i \times (-2iz^{-1}-1) \times 0.5i \times (-2iz^{-1}+1)} = \frac{1-2z^{-1}}{(1-3z^{-1})(1+2iz^{-1})(1-2iz^{-1})}$$

$$X(z) = \frac{A}{1-3z^{-1}} + \frac{B}{1+2iz^{-1}} + \frac{B^*}{1-2iz^{-1}} \Rightarrow A = \lim_{z^{-1} \rightarrow \frac{1}{3}} \left(\frac{1-2z^{-1}}{1+4z^{-2}} \right) = \frac{3}{13}$$

$$\Rightarrow B = \lim_{z^{-1} \rightarrow -\frac{1}{2i}} \left(\frac{1-2z^{-1}}{(1-3z^{-1})(1-2iz^{-1})} \right) = \frac{5}{13} + \frac{1}{13}i = \frac{\sqrt{26}}{13} e^{j11.31^\circ} \Rightarrow B^* = \frac{\sqrt{26}}{13} e^{-j11.31^\circ}$$

Ví dụ: Tìm biến đổi Z ngược của các hàm sau:

a)

$$X(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, \quad |z| > 2$$

b)

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

c)

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad x(n) \text{ nhân quả}$$

d)

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \text{phản nhân quả}$$

Ví dụ: Tìm biến đổi Z ngược của các hàm sau:

e)

$$X(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})^2}$$

f)

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{2}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Ví dụ 1: Tìm $x(n)$ nhân quả với $X(z) = \frac{1-2z^{-1}}{(1+3z^{-1})(1-4z^{-1})}$

Ta có thể sử dụng phương pháp thăng dư (Residu):

$$A = \lim_{z^{-1} \rightarrow -1/3} \frac{1-2z^{-1}}{1-4z^{-1}} = \frac{5}{7}, \quad B = \lim_{z^{-1} \rightarrow 1/4} \frac{1-2z^{-1}}{1+3z^{-1}} = \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{1+3z^{-1}} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{1-4z^{-1}}, \text{ ta lại có: } \frac{1}{1-az^{-1}} \leftrightarrow \begin{cases} a^n u(n) & \rightarrow \text{causal} \\ -a^n u(-n-1) & \rightarrow \text{non-causal} \end{cases}$$

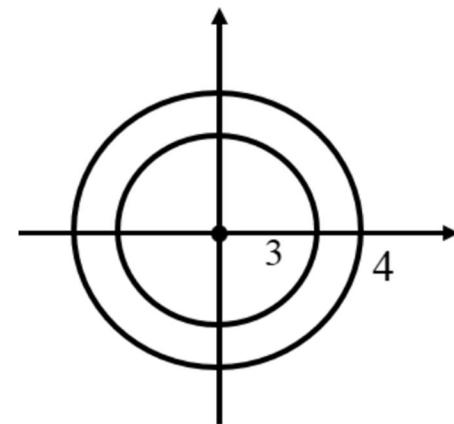
Theo đề bài $x(n)$ là tín hiệu nhân quả $\Rightarrow x(n) = \frac{5}{7} \cdot (-3^n)u(n) + \frac{2}{7}4^n u(n)$

Ví dụ 2: Tìm $x(n)$, với $X(z) = \frac{1-2z^{-1}}{(1+3z^{-1})(1-4z^{-1})} \Rightarrow X(z) = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{1+3z^{-1}} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{1-4z^{-1}}$

+ $|z| < 3 \Rightarrow x(n) = -\frac{5}{7} \cdot (-3)^n u(-n-1) - \frac{2}{7} 4^n u(-n-1) \rightarrow x(n)$ phản nhân quả.

+ $3 < |z| < 4 \Rightarrow x(n) = \frac{5}{7} \cdot (-3)^n u(n) - \frac{2}{7} 4^n u(-n-1) \rightarrow x(n)$ không nhân quả.

+ $|z| > 4 \Rightarrow x(n) = \frac{5}{7} \cdot (-3)^n u(n) + \frac{2}{7} 4^n u(n) \rightarrow x(n)$ nhân quả.



Ví dụ 3: Tìm $x(n)$ nhân quả với $X(z) = \frac{1-2z^{-1}}{(1+3z^{-1})^2(1-4z^{-1})}$

$$A = \lim_{z^{-1} \rightarrow 1/4} \frac{1-2z^{-1}}{(1+3z^{-1})^2} = \frac{8}{49}, \quad E = \lim_{z^{-1} \rightarrow -1/3} \frac{1-2z^{-1}}{1-4z^{-1}} = \frac{5}{7}, \quad D = \lim_{z^{-1} \rightarrow -1/3} \left(\frac{1-2z^{-1}}{1-4z^{-1}} \right)' = \frac{6}{49}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{8}{49} \cdot \frac{1}{1-4z^{-1}} + \frac{6}{49} \cdot \frac{1}{1+3z^{-1}} + \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{(1+3z^{-1})^2}$$

$$\Rightarrow x(n) = \frac{8}{49} 4^n u(n) + \frac{6}{49} (-3)^n u(n) + \frac{5}{21} (n+1)(-3)^{n+1} u(n)$$

Ví dụ 4: Tìm $x(n)$ nhân quả với $X(z) = \frac{1-2z^{-1}}{(1+4z^{-2})(1-3z^{-1})}$

$$X(z) = \frac{3}{13} \cdot \frac{1}{1-3z^{-1}} + \frac{\sqrt{26}}{13} e^{j11.31^0} \frac{1}{1+2iz^{-1}} + \frac{\sqrt{26}}{13} e^{-j11.31^0} \frac{1}{1-2iz^{-1}}$$

, nhắc lại: $\begin{cases} j = e^{j\frac{\pi}{2}} \\ -j = e^{-j\frac{\pi}{2}} \end{cases}$

$$\Rightarrow x(n) = \frac{3}{13}(-3)^n u(n) + \frac{\sqrt{26}}{13} e^{j11.31^0} (-2i)^n u(n) + \frac{\sqrt{26}}{13} e^{-j11.31^0} (2i)^n u(n)$$

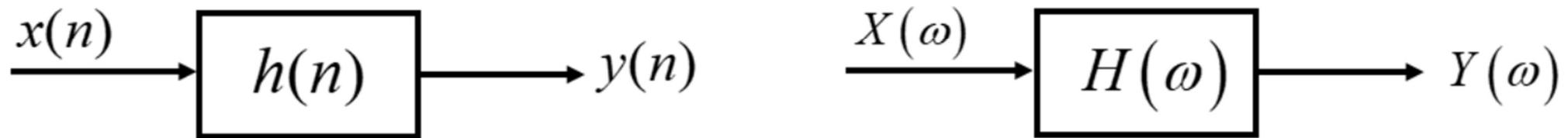
$$\Rightarrow x(n) = \frac{3}{13}(-3)^n u(n) + \frac{\sqrt{26}}{13} \cdot 2^n \left[e^{j11.31^0} \cdot e^{-jn\frac{\pi}{2}} + e^{-j11.31^0} \cdot e^{jn\frac{\pi}{2}} \right] u(n)$$

$$\Rightarrow x(n) = \frac{3}{13}(-3)^n u(n) + \frac{\sqrt{26}}{13} \cdot 2^n \cdot \left[e^{j\left(11.31^0 - n\frac{\pi}{2}\right)} + e^{-j\left(11.31^0 - jn\frac{\pi}{2}\right)} \right] u(n)$$

$$\Rightarrow x(n) = \frac{3}{13}(-3)^n u(n) + \frac{\sqrt{26}}{13} \cdot 2^n \cdot 2 \cos\left(11.31^0 - jn\frac{\pi}{2}\right) u(n)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2} \left[e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} \right]$$

1. Tìm hàm truyền (Transfer Function):

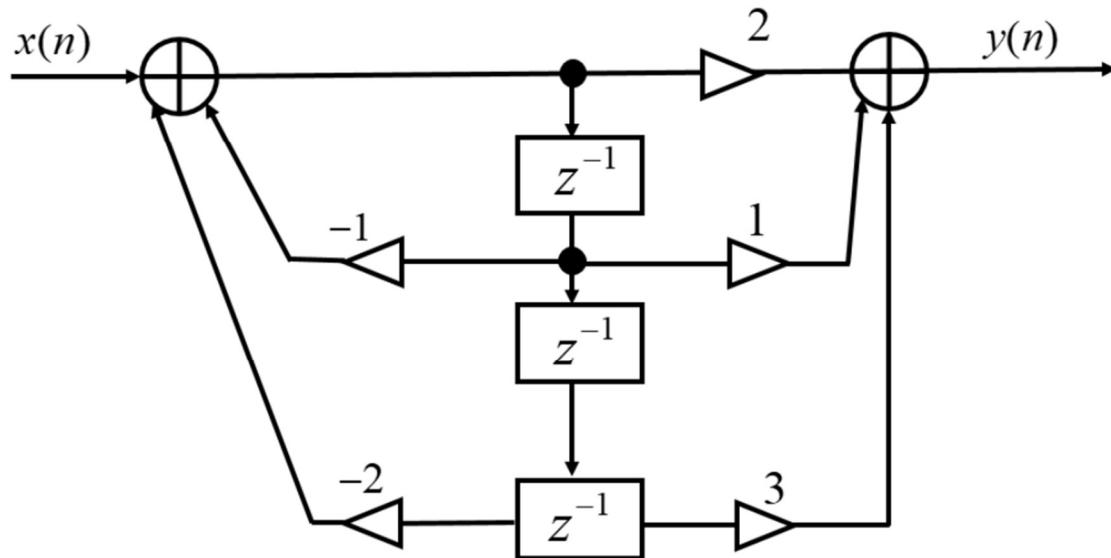


$$y(n) = x(n) * h(n) \Rightarrow Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

$\Rightarrow H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)z^{-n}$: Hàm truyền của hệ thống, có 2 cách để tìm hàm truyền.

- + Tỉ số giữa biến đổi Z của tín hiệu ngõ ra trên biến đổi Z của tín hiệu ngõ vào.
- + Biến đổi Z của đáp ứng xung.

Ví dụ: Tìm hàm truyền của hệ thống LTI được cho bởi sơ đồ khối sau:



$$\Rightarrow y(n) = x(n) + x(n-1) + 3x(n-3) - y(n-1) - 2y(n-2)$$

$$\Rightarrow Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z) + 3z^{-3}X(z) - z^{-1}Y(z) - 2z^{-2}Y(z)$$

$$\Rightarrow Y(z)[1 + z^{-1} + 2z^{-2}] = X(z)[1 + z^{-1} + 3z^{-3}] \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1} + 3z^{-3}}{1 + z^{-1} + 2z^{-2}}$$

Ví dụ 2: Tìm hàm truyền của các hệ thống sau:

a) $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{1}{2}h(n-1)$ (*)

a) (*) $\Leftrightarrow H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{2}z^{-1}H(z) \Leftrightarrow H(z) \left[1 + \frac{1}{2}z^{-1} \right] = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \Rightarrow H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}$

b) $X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$

$$y(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1)$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{3} \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

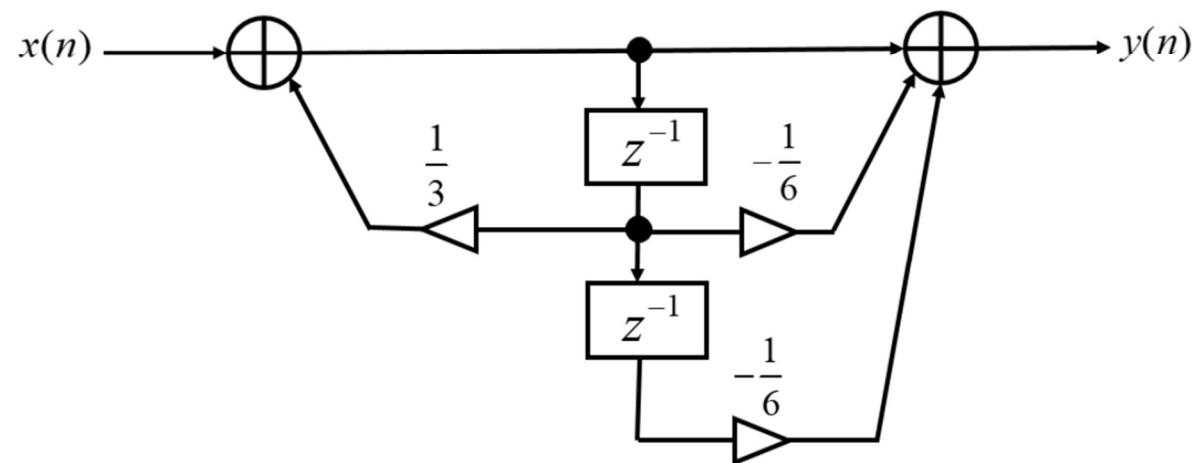
Ví dụ: Cho 1 hệ thống có hàm truyền: $H(z) = \frac{\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$

- a) Vẽ sơ đồ khối thực hiện hệ thống dạng chính tắc.
- b) Tìm đáp ứng xung nhân quả $h(n)$ của hệ thống.

a)
$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \Leftrightarrow Y(z) \left[1 - \frac{1}{3}z^{-1} \right] = X(z) \left[1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2} \right]$$

$$\Leftrightarrow Y(z) = \frac{1}{3}z^{-1}Y(z) + X(z) - \frac{1}{6}z^{-1}X(z) - \frac{1}{6}z^{-2}X(z)$$

$$\Rightarrow y(n) = \frac{1}{3}y(n-1) + x(n) - \frac{1}{6}x(n-1) - \frac{1}{6}x(n-2)$$



b) Tìm đáp ứng xung $h(n)$

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} = Az^{-1} + B + \frac{C}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \Rightarrow A = B = \frac{1}{2}, C = \lim_{z^{-1} \rightarrow 3} \left(1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2} \right) = -1$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \text{ do } h(n) \text{ là hệ thống nhân quả}$$

3. Tìm đáp ứng ngo ra:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow Y(z) = X(z)H(z) \Rightarrow y(n) = z^{-1}\{Y(z)\}$$

Ví dụ: Tìm đáp ứng ngo ra của hệ thống:

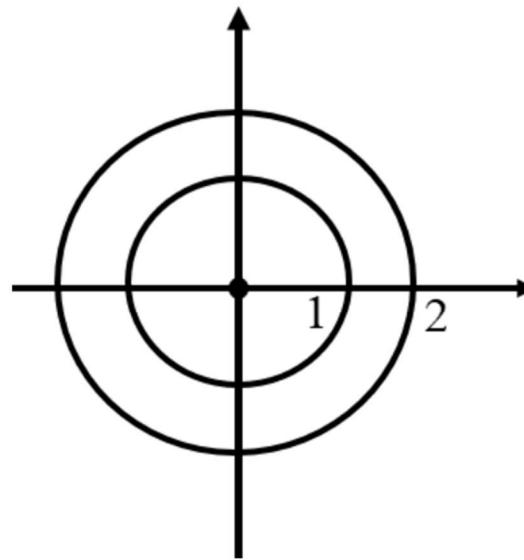
$$[H]: y(n) = x(n) + 3x(n-1) - 2y(n-1) \ (*) \text{ với } x(n) = u(n)$$

Giải:

$$(*): Y(z) = \frac{1+3z^{-1}}{1+2z^{-1}} X(z)$$

$$x(n) = u(n) \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, |z| > 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y(z) &= H(z)X(z) = \frac{1+3z^{-1}}{(1+2z^{-1})(1-z^{-1})}, |z| > 1 \\ &= \frac{A}{1-z^{-1}} + \frac{B}{1+2z^{-1}} \end{aligned}$$



4. Tìm đáp ứng bậc: $s(n)$

$$s(n) = y(n)|_{x(n)=u(n)} \Rightarrow S(z) = Y(z)|_{X(z)=U(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}}, \quad |z| > 1$$

Ví dụ: Tìm đáp ứng bậc của hệ thống được cho bởi hàm truyền sau:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2})(1 - 4z^{-1})}$$

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 3z^{-1})(1 - 4z^{-1})} \Rightarrow S(z) = H(z)U(z), \quad |z| > 1$$

$$= \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2(1 + 3z^{-1})(1 + 4z^{-1})} = \frac{A}{1 + 3z^{-1}} + \frac{B}{1 - 4z^{-1}} + \frac{C}{1 - z^{-1}} + \frac{D}{(1 - z^{-1})^2}$$



5. Giản đồ cực – zero, tính ổn định, nhân quả của hệ thống (zero – pole –pot/pattern)

Giả sử hệ thống có hàm truyền: $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ theo z .

+ **Điểm zero (không):** $z_{oj} \mid \lim_{z \rightarrow z_{oj}} H(z) = 0 \quad [B(z) = 0]$

+ **Điểm cực (pole):** $z_{pi} \mid \lim_{z \rightarrow z_{pi}} H(z) = \infty \quad [A(z) = 0]$

+ **Giản đồ cực – zero:** là sự phân bố các điểm cực và các điểm zero trên mặt phẳng phức z theo quy ước:

- Điểm zero: tròn (circle).
- Điểm trực: chéo (cross).

Ví dụ: Các định các điểm cực – zero và vẽ giản đồ cực – zero của hệ thống sai

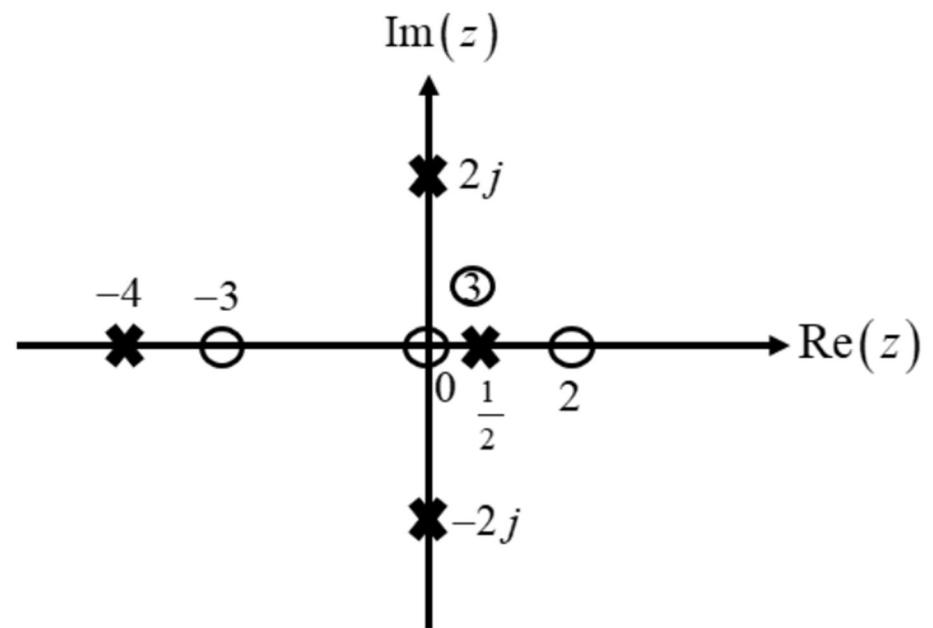
$$H(z) = \frac{(1-2z^{-1})(1+3z^{-1})}{(1+4z^{-2})\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2(1+4z^{-1})}$$

Giải: Đưa hàm truyền về mũ dương $\Rightarrow H(z) = \frac{z^3(z-2)(z+3)}{(z^2+4)\left(z-\frac{1}{2}\right)^2(z+4)}$

Giải: Đưa hàm truyền về mũ dương $\Rightarrow H(z) = \frac{z^3(z-2)(z+3)}{(z^2+4)\left(z-\frac{1}{2}\right)^2(z+4)}$

+ Điểm zero: $z_{o1} = 0$ (boi 3), $z_{o2} = 2$, $z_{o3} = -3$

+ Điểm cực: $z_{p1,2} = \pm 2j$, $z_{p3} = \frac{1}{2}$ (kep), $z_{p4} = -4$



- **Hệ thống nhân quả:** $ROC : |z| > \max_i \{ |z_{pi}| \} \rightarrow$ nằm ngoài vòng tròn có bán kính lớn nhất.
 - **Hệ thống phản nhân quả:** $ROC : |z| < \min_i \{ |z_{pi}| \} \rightarrow$ nằm trong vòng tròn có bán kính bé nhất.
 - **Hệ thống không nhân quả:** Các trường hợp còn lại.
- + **Tính ổn định của hệ thống thông qua giản đồ cực – zero:**
- Điều kiện cần và đủ để một hệ thống là ổn định nếu miền hội ROC chứa vòng tròn đơn vị.
 - Để hệ thống ổn định và nhân quả đồng thời thì tất cả các điểm cực nằm trong vòng tròn đơn vị (*module các điểm cực nhỏ hơn 1*).
 - Nếu các điểm cực nằm trên vòng tròn đơn vị được gọi là ổn định mép/biên (*marginally stable*).

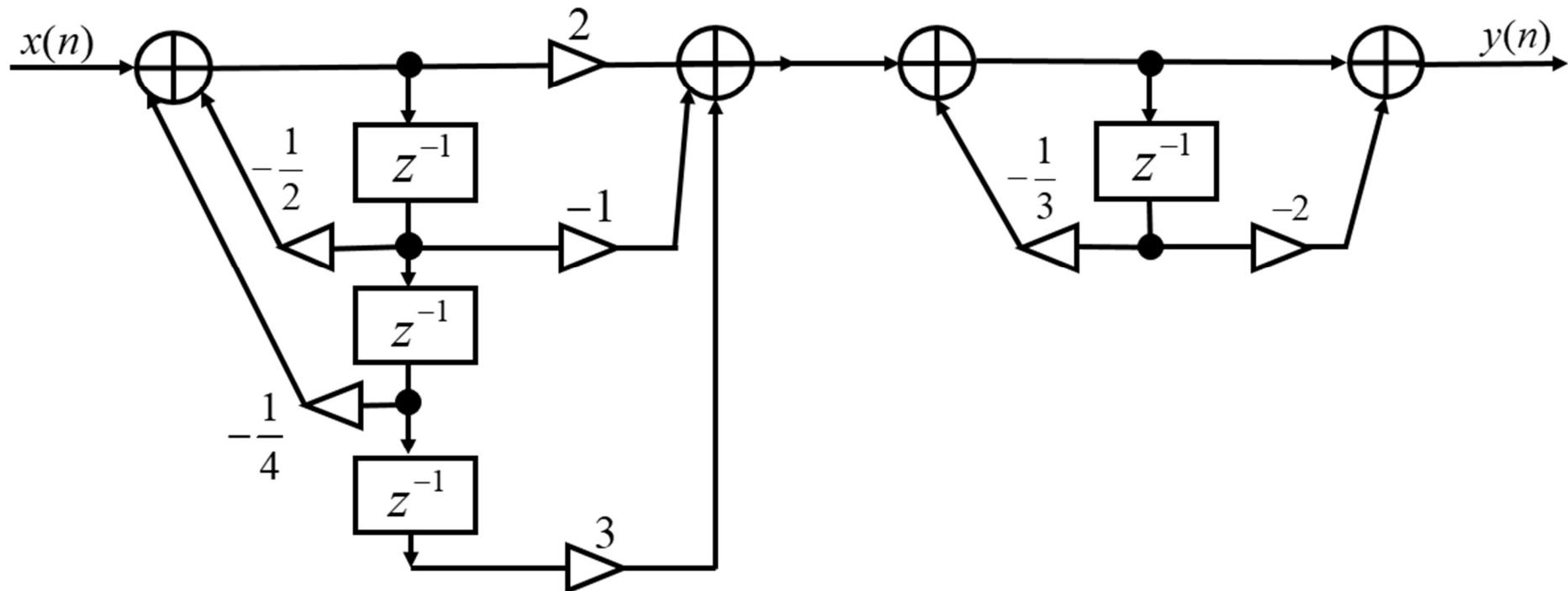
Ví dụ: Tìm đáp ứng xung của hệ thống: $[H]: y(n) = x(n) + 2x(n-1) - \frac{1}{3}y(n-1)$

Hệ thống đã cho có ổn định, nhân quả hay không? Giải thích?

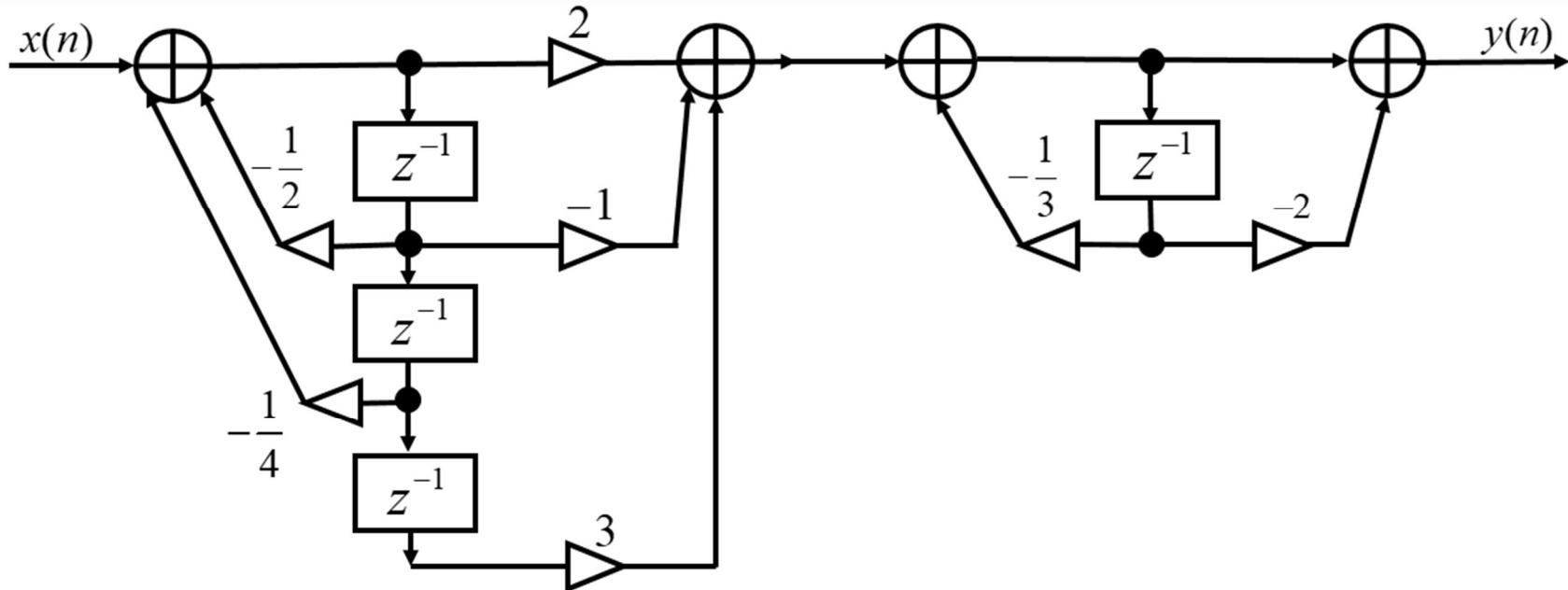
$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+2z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{z+2}{z+\frac{1}{3}}$ có điểm cực $z = -\frac{1}{3}$ nằm trong vòng tròn đơn vị \rightarrow Hệ thống

đã cho ổn định và nhân quả đồng thời.

Cho hệ thống có sơ đồ khối như hình vẽ:



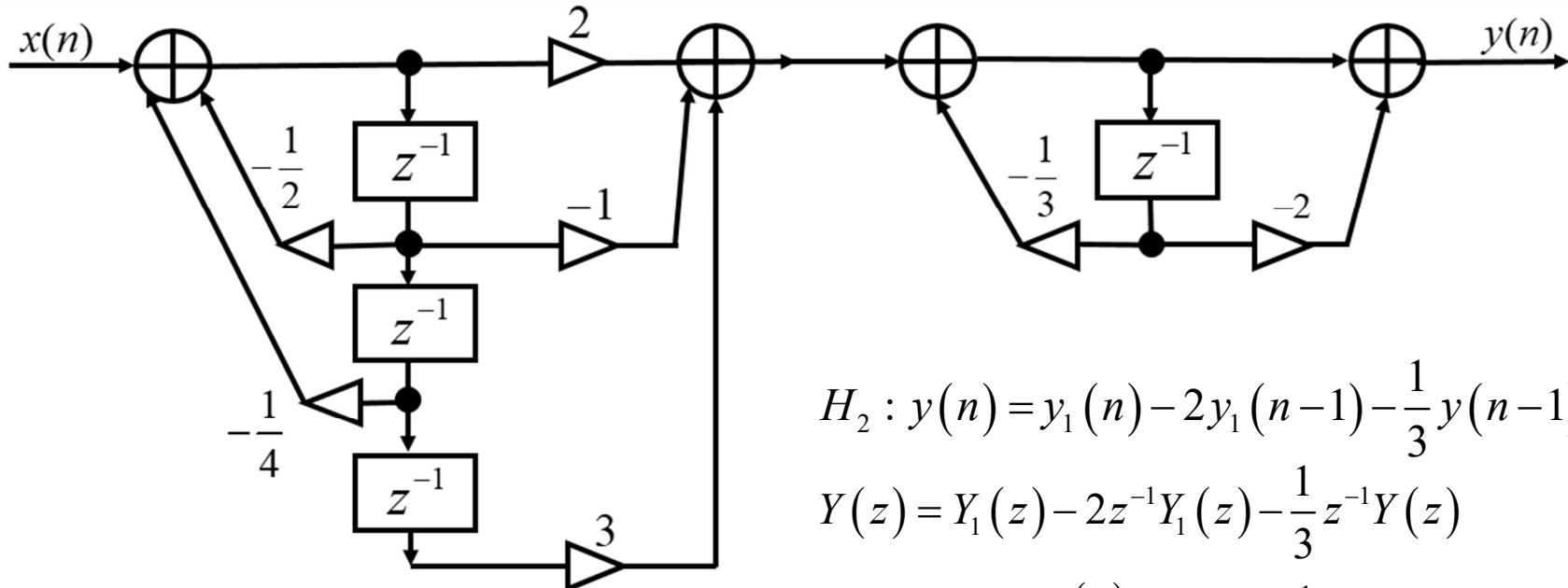
- a) Tìm hàm truyền của hệ thống
- b) Tìm đáp ứng xung nhân quả



$$H_1 : y(n) = 2x(n) - x(n-1) + 3x(n-3) - \frac{1}{2}y(n-1) - \frac{1}{4}y(n-2)$$

$$Y(z) + \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) + \frac{1}{4}z^{-2}Y(z) = 2X(z) - z^{-1}X(z) + 3z^{-3}X(z)$$

$$\Rightarrow H_1(z) = \frac{Y_1(z)}{X(z)} = \frac{2 - z^{-1} + 3z^{-3}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}$$



$$H_2 : y(n) = y_1(n) - 2y_1(n-1) - \frac{1}{3}y(n-1)$$

$$Y(z) = Y_1(z) - 2z^{-1}Y_1(z) - \frac{1}{3}z^{-1}Y(z)$$

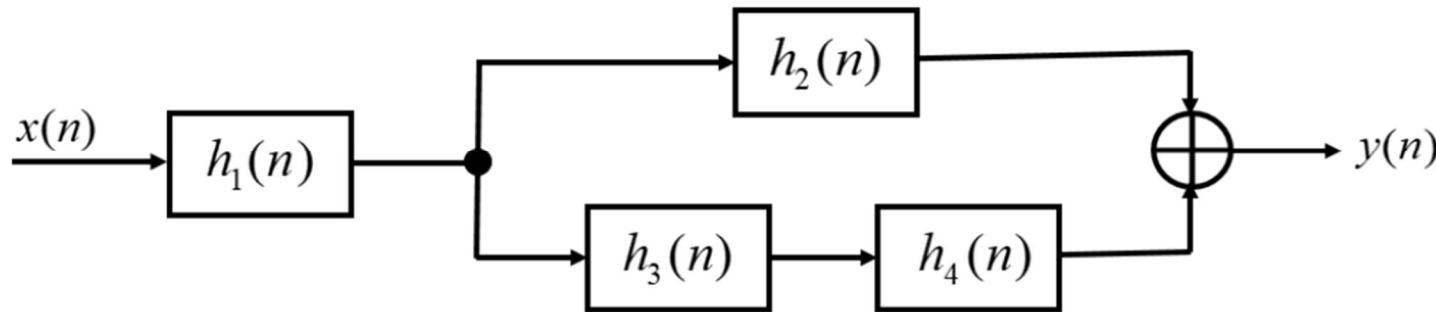
$$\Rightarrow H_2(z) = \frac{Y(z)}{Y_1(z)} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow H(z) = H_1(z)H_2(z) = \frac{2 - z^{-1} + 3z^{-3}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} \cdot \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H(z) &= H_1(z)H_2(z) = \frac{2 - z^{-1} + 3z^{-3}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} \cdot \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{2 - 5z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} - 6z^{-4}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{5}{12}z^{-2} + \frac{1}{12}z^{-3}} \\ &= -72z^{-1} + 396 - \frac{394 + 328z^{-1} + 103z^{-2}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{5}{12}z^{-2} + \frac{1}{12}z^{-3}} = -72z^{-1} + 396 + K(z) \end{aligned}$$

$$K(z) = \frac{394 + 328z^{-1} + 103z^{-2}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{5}{12}z^{-2} + \frac{1}{12}z^{-3}} = \frac{394 + 328z^{-1} + 103z^{-2}}{\frac{1}{12}(z^{-1} + 3)(z^{-1} - (1 + \sqrt{3}i))(z^{-1} + (1 + \sqrt{3}i))}$$

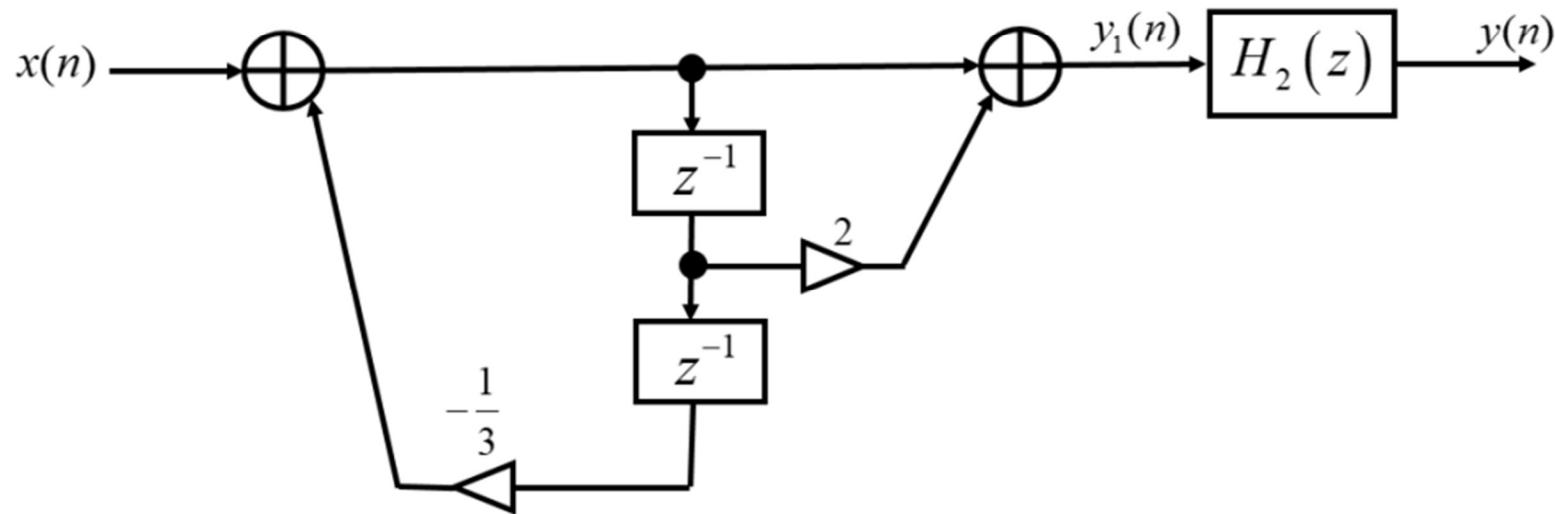
Bài 1: Cho sơ đồ khối của một hệ thống rời rạc:



Cho biết: $h_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$, $h_2(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$, $h_3(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$, $h_4(n) = \left(\frac{1}{5}\right)^n u(n)$

- Tìm quan hệ giữa đáp ứng xung tương đương của toàn bộ hệ thống $h(n)$ theo các đáp ứng xung thành phần.
- Tìm $y(n)$ nếu $x(n) = \left(\frac{1}{6}\right)^n u(n)$.
- Vẽ giản đồ cực – zero của hệ thống. Cho biết tính ổn định, nhân quả?

Bài 2: Cho sơ đồ khối của một hệ thống rời rạc, cho biết $H_2(z) = \frac{1+2z^{-1}}{(1-3z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}$



- a) Tìm phương trình sai phân của hệ thống H_2 .
- b) Tìm hàm truyền của hệ thống H_1 .
- c) Tìm đáp ứng xung nhân quả của toàn hệ thống.