Primer parcial GAL 2

Evaluación Virtual

Setiembre 2021

1 Verdadero - Falso

1.1 VF1

Versión 1: Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ un parámetro, sea

$$A = \begin{pmatrix} 5\cos(\alpha) & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 24 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & -50 & 1 & 7 \\ 5 & 3 & 1 & -99 & 1 \\ -5 & 8 & 4 & -5 & 71 \end{pmatrix}$$

Entonces, para todo valor de α, $\det(A) > 0$.

Respuesta: F.

Versión 2:

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ un parámetro, sea

$$A = \begin{pmatrix} -71 & 8 & 4 & -5 & 6 \\ -3 & 99 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 50 & 7 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & -24 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 5\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Existen valores de α para los cuales $\det(A) < 0$. Respuesta: V.

Versión 3:

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ un parámetro, sea

$$A = \begin{pmatrix} 21 & -2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 8\cos(\alpha) & -2 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & -35 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 6 & -70 & -3 \\ 10 & -8 & 14 & 15 & 89 \end{pmatrix}$$

Entonces, para todo valor de α, $\det(A) > 0$.

Respuesta: F.

Versión 4:

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ un parámetro, sea

$$A = \begin{pmatrix} 70 & 1 & -2 & 6 & 3 \\ 10 & -89 & -8 & 14 & 15 \\ 0 & -1 & 8\cos(\alpha) & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -21 & 1 \\ 3 & 4 & 7 & 1 & 35 \end{pmatrix}$$

Existen valores de α para los cuales $\det(A) < 0$.

Respuesta: V.

Solución versión 1.

Los cículos de Gerschgorin de A son

$$\begin{aligned} C_1 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 5\cos(\alpha)| \leq 2\} \\ C_2 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 24| \leq 6\} \\ C_3 &= \{z \in \mathbb{C} : |z + 50| \leq 14\} \\ C_4 &= \{z \in \mathbb{C} : |z + 99| \leq 10\} \\ C_5 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 71| \leq 22\}. \end{aligned}$$

C_1 no intersecta a ninguno de los demás círculos, porque $\cos(\alpha) \in [-1, 1]$, de manera que $C_1 \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 7\}$.

Como los círculos son disjuntos y las entradas de A son reales, se concluye que A tiene 5 valores propios reales distintos, $\lambda_1, \cdots, \lambda_5$, con cada $\lambda_i \in C_i$.

Por lo tanto A es diagonalizable. De manera que A es semejante a una matriz diagonal cuyo determinante es el producto de los valores propios de A.

Tomando α tal que $\cos(\alpha) = -1$, por ejemplo, $\alpha = \pi$, se cumple que $C_1 \subseteq \{z \in \mathbb{C} : Re(z) < 0\}$, con lo cual, por la ubicación de los cículos, A tendrá tres valores propios negativos y tres positivos, por lo que el determinante será negativo.

Así concluímos que la aseveración es falsa.

Solución versión 2.

Los cículos de Gerschgorin de A son

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \{z \in \mathbb{C} : |z + 71| \leq 23\} \\
C_2 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 99| \leq 6\} \\
C_3 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 50| \leq 13\} \\
C_4 &= \{z \in \mathbb{C} : |z + 24| \leq 6\} \\
C_5 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 5\cos(\alpha)| \leq 2\}.
\end{aligned}
$$

C_5 no intersecta a ninguno de los demás círculos, porque $\cos(\alpha) \in [-1, 1]$, de manera que $C_5 \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 7\}$.

Como los círculos son disjuntos y las entradas de A son reales, se concluye que A tiene 5 valores propios reales distintos, $\lambda_1, \cdots, \lambda_5$, con cada $\lambda_i \in C_i$.

Por lo tanto A es diagonalizable. De manera que A es semejante a una matriz diagonal cuyo determinante es el producto de los valores propios de A.

Tomando α tal que $\cos(\alpha) = -1$, por ejemplo, $\alpha = \pi$, se cumple que $C_5 \subseteq \{z \in \mathbb{C} : Re(z) < 0\}$, con lo cual, por la ubicación de los cículos, A tendrá tres valores propios negativos y tres positivos, por lo que el determinante será negativo.

Así concluímos que la aseveración es verdadera.

Solución versión 3.

Los cículos de Gerschgorin de A son

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 21| \leq 7\} \\
C_2 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 8\cos(\alpha)| \leq 5\} \\
C_3 &= \{z \in \mathbb{C} : |z + 35| \leq 15\} \\
C_4 &= \{z \in \mathbb{C} : |z + 70| \leq 12\} \\
C_5 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 89| \leq 47\}.
\end{aligned}
$$

C_2 no intersecta a ninguno de los demás círculos, porque $\cos(\alpha) \in [-1, 1]$, de manera que $C_2 \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 13\}$.

Como los círculos son disjuntos y las entradas de A son reales, se concluye que A tiene 5 valores propios reales distintos, $\lambda_1, \cdots, \lambda_5$, con cada $\lambda_i \in C_i$.

Por lo tanto A es diagonalizable. De manera que A es semejante a una matriz diagonal cuyo determinante es el producto de los valores propios de A.

Tomando α tal que $\cos(\alpha) = -1$, por ejemplo, $\alpha = \pi$, se cumple que $C_2 \subseteq \{z \in \mathbb{C} : Re(z) < 0\}$, con lo cual, por la ubicación de los cículos,

A tendrá tres valores propios negativos y tres positivos, por lo que el determinante será negativo.

Así concluímos que la aseveración es falsa.

Solución versión 4.

Los cículos de Gerschgorin de A son

$$\begin{aligned} C_1 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 70| \leq 12\} \\ C_2 &= \{z \in \mathbb{C} : |z + 89| \leq 47\} \\ C_3 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 8\cos(\alpha)| \leq 5\} \\ C_4 &= \{z \in \mathbb{C} : |z + 21| \leq 7\} \\ C_5 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 35| \leq 15\}. \end{aligned}$$

C_3 no intersecta a ninguno de los demás círculos, porque $\cos(\alpha) \in [-1, 1]$, de manera que $C_3 \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 7\}$.

Como los círculos son disjuntos y las entradas de A son reales, se concluye que A tiene 5 valores propios reales distintos, $\lambda_1, \cdots, \lambda_5$, con cada $\lambda_i \in C_i$.

Por lo tanto A es diagonalizable. De manera que A es semejante a una matriz diagonal cuyo determinante es el producto de los valores propios de A.

Tomando α tal que $\cos(\alpha) = -1$, por ejemplo, $\alpha = \pi$, se cumple que $C_3 \subseteq \{z \in \mathbb{C} : Re(z) < 0\}$, con lo cual, por la ubicación de los cículos, A tendrá tres valores propios negativos y tres positivos, por lo que el determinante será negativo.

Así concluímos que la aseveración es verdadera.

1.2 VF2

<u>Versión 1:</u> Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$ tal que todas las raices características de A están en el cuerpo. Entonces el determinante de A es igual al producto de los autovalores de A, contados con sus multiplicidades.

Respuesta: V

<u>Versión 2:</u> Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Entonces el determinante de A es igual al producto de los autovalores de A, contados con sus multiplicidades.

Respuesta: V

<u>Versión 3:</u> Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que todas las raices características de A están en el cuerpo. Entonces el determinante de A es igual al producto de los autovalores de A, contados con sus multiplicidades.

Respuesta: V

<u>Versión 4:</u> Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces el determinante de A es igual al producto de los autovalores de A, contados con sus multiplicidades.

Respuesta: F

Solución: Si todas la raíces características de A están en el cuerpo como en las versiones $1, 2, 3$ son valores propios y por lo tanto las afirmaciones son verdaderas. En el caso 4, la matriz podría tener raíces características que no sean valores propios.

1.3 VF3

<u>Versión 1:</u>

Sea V un espacio vectorial de dimensión 4 y $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $rango(T - 2Id) = 1$ y 3 es valor propio de T. Entonces T es diagonalizable. Respuesta: V

Si $rango(T - 2Id) = 1$ entonces 2 es valor propio de T y $dim(S_2) = 3$. Además como 3 es valor propio tenemos que $dim(S_3) \geq 1$. Entonces V admite una base formada por vectores propios de T y por lo tanto T es diagonalizable.

<u>Versión 2:</u> Sea V un espacio vectorial de dimensión 3 y $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $\chi_T(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$ y $rango(T-Id) = 2$. Entonces T es diagonalizable. Respuesta: F

Si $rango(T-Id) = 2$ entonces $dim(S_1) = 1$. Luego, T no es diagonalizable porque $mg(1) \neq ma(1)$.

<u>Versión 3:</u> Sea V un espacio vectorial de dimensión 4 y $T : V \to V$ una transformación lineal tal que 3 y 5 son sus valores propios, $rango(T - 3Id) = 2$ y $ma(5) = 1$. Entonces T es diagonalizable. Respuesta: F

Si $rango(T - 3Id) = 2$ entonces $dim(S_3) = 1$ y, como $ma(5) = 1$, tenemos que $dim(S_5) = 1$. Entonces no hay suficientes vectores propios de T para formar una base y por lo tanto T no es diagonalizable.

<u>Versión 4:</u>Sea V un espacio vectorial de dimensión 3 y $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $\chi_T(\lambda) = (\lambda-5)^2(\lambda-4)$ y $rango(T-5Id) = 1$. Entonces T es diagonalizable. Respuesta: V
Si $rango(T - 5Id) = 1$ entonces 5 es valor propio de T y $dim(S_2) = 2$. Además como 4 es valor propio tenemos que $dim(S_4) \geq 1$. Entonces V admite una base formada por vectores propios de T y por lo tanto T es diagonalizable.

1.4 VF4

<u>Versión 1:</u>

Sea $V = \mathcal{P}_2$ el espacio de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2. Entonces $\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$

un producto interno en V. Respuesta: V

Versión 2:

Sea $V = \mathcal{P}_2$ el espacio de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2. Entonces $\langle p, q\rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2)$ es un producto interno en V. Respuesta: F

Versión 3:

Sea $V = \mathcal{P}_2$ el espacio de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2 $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$ es un producto interno en V. Respuesta: V

Versión 4:

Sea $V = \mathcal{P}_2$ el espacio de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2. Entonces $\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(1)q(1)$ es un producto interno en V. Respuesta: F

Solución:

Versión 1: Para $i = 1, 2, 3$, sean $p_i \in \mathcal{P}_2$ y $a \in \mathbb{R}$. Veamos que $\langle , \rangle$ es un producto interno:

- $\langle p_1 + p_2, p_3\rangle = (p_1 + p_2)(-1)p_3(-1) + (p_1 + p_2)(0)p_3(0) + (p_1 + p_2)(1)p_3(1) = p_1(-1)p_3(-1)+p_2(-1)p_3(-1)+p_1(0)p_3(0)+p_2(0)p_3(0)+p_1(1)p_3(1) + p_2(1)p_3(1) = \langle p_1, p_3\rangle + \langle p_2, p_3\rangle$
- $\langle ap_1, p_2\rangle = ap_1(-1)p_2(-1) + ap_1(0)p_2(0) + ap_1(1)p_2(1) = a\langle p_1, p_2\rangle$
- $\langle p_1, p_2\rangle = p_1(-1)p_2(-1)+p_1(0)p_2(0)+p_1(1)p_2(1) = \langle p_2, p_1\rangle = \overline{\langle p_2, p_1\rangle}$ por ser números reales.
- $\langle p, p\rangle = p(-1)^2+p(0)^2+p(1)^2 \geq 0$ por ser suma de números positivos. Si se da la igualdad, $p(-1) = p(0) = p(-1) = 0$. Luego, si $p(x) = ax^2 + bx + c$, tenemos que

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ \qquad\quad c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

  Concluimos que $\langle p, p\rangle = 0$ si y solo si $p = 0$.

Versión 2: En este caso $\langle , \rangle$ no es un producto interno:

Si $p(x) = x^2 - 3x + 2$, $\langle p, p\rangle = (1 - 3 + 2)^2 + (4 - 6 + 2)^2 = 0$.

Las otras versiones son similares.

1.5 VF5

<u>Versión 1:</u> Sea V un espacio vectorial con p.i. S_1, S_2, S_3 subespacios vectoriales no nulos tales que $S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 = V$. Si $S_1^\perp = S_2 + S_3$, entonces $(S_1 + S_2)^\perp = S_3$. Respuesta: F

<u>Versión 2:</u> Sea V un espacio vectorial con p.i. S_1, S_2, S_3 subespacios vectoriales no nulos tales que $S_1 + S_2 + S_3 = V$. Si $S_1^\perp = S_2 + S_3$, entonces $(S_1 \cap S_2)^\perp = V$. Respuesta: V

<u>Versión 3:</u> Sea V un espacio vectorial con p.i. S_1, S_2, S_3 subespacios vectoriales no nulos tales que $S_1 + S_2 + S_3 = V$. Si $(S_2 \cap S_3)^\perp = S_1$, entonces $S_1 \oplus S_2 = V$. Respuesta: F

<u>Versión 4:</u> Sea V un espacio vectorial con p.i. S_1, S_2, S_3 subespacios vectoriales no nulos tales que $S_1 + S_2 + S_3 = V$. Si $(S_2 \cap S_3)^\perp = S_1$, entonces $S_1 \oplus S_3 = V$. Respuesta: F

Soluciones: Versión 1: Consideramos V un espacio de dimensión 3, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V tal que $v_2 \not\perp v_3$ pero v_1 es ortogonal a v_2 y v_3. Tomemos $S_i = [v_i]$. Entonces $S_1^\perp = S_2 + S_3$ pero $(S_1 + S_2)^\perp \neq S_3$.

Versión 2: $(S_1 \cap S_2)^\perp = S_1^\perp + S_2^\perp = S_2 + S_3 + S_2^\perp = V$.

Versión 3: Sea V de dimensión 4, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ base ortogonal , $S_1 = [v_1, v_2, v_4]$, $S_2 = [v_2, v_3]$, $S_3 = [v_3, v_4]$. Entonces $(S_2 \cap S_3)^\perp = [v_3]^\perp = S_1$. Se tiene que $S_1 + S_2 = V$ pero la suma no es directa.

Versión 4: Adaptar la solución anterior.

2 Múltiple opción

2.1 <u>Versión 1:</u> Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

A) A es diagonalizable para todo $a \in \mathbb{R}$
B) A no es diagonalizable para ningún valor de a
C) existe un único valor de a para el cual A no es diagonalizable
D) existen tres valores de a para los cuales A no es diagonalizable

Respuesta: (D)

<u>Versión 2:</u>

Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

A) A es diagonalizable para todo $a \in \mathbb{R}$

B) A no es diagonalizable para ningún valor de a

C) existe un único valor de a para el cual A no es diagonalizable

D) existen dos valores de a para los cuales A no es diagonalizable

Respuesta: (D)

<u>Versión 3:</u>

Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

A) A es diagonalizable para todo $a \in \mathbb{R}$

B) A no es diagonalizable para ningún valor de a

C) existe un único valor de a para el cual A no es diagonalizable

D) existen tres valores de a para los cuales A no es diagonalizable

Respuesta: (C)

<u>Versión 4:</u> Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

A) A es diagonalizable para todo $a \in \mathbb{R}$

B) A no es diagonalizable para ningún valor de a

C) existe un único valor de a para el cual A no es diagonalizable

D) existen dos valores de a para los cuales A no es diagonalizable

Respuesta: (C)

Solución MO1 Versión1:

$$\chi_A(\lambda) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & a^2 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - a^2)$$

Entonces los valores propios de A son 1, a y $-a$.

– Si $a \neq 0$ y $a^2 \neq 1$ entonces A tiene tres valores propios distintos y por lo tanto es diagonalizable.

- Si $a = 0$
  En este caso los valores propios de A resultan 1 con $ma(1) = 1$ y 0 con $ma(0) = 2$.
  $dim(S_0) = 3 - rango(A - 0Id) = 3 - rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$
  Entonces A no es diagonalizable.
- Si $a = 1$
  En este caso los valores propios de A resultan 1 con $ma(1) = 2$ y -1 con $ma(-1) = 1$.
  $dim(S_1) = 3 - rango(A - Id) = 3 - rango \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1$
  Entonces A no es diagonalizable.
- Si $a = -1$
  En este caso los valores propios de A resultan 1 con $ma(1) = 1$ y -1 con $ma(-1) = 2$.
  $dim(S_{-1}) = 3 - rango(A + Id) = 3 - rango \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$
  Entonces A no es diagonalizable.

Solución MO1 Versión2:
$\chi(\lambda) = detA = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & a-\lambda & 1 \\ 1 & a & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(1-\lambda)(\lambda - 1 - a)$
Entonces los valores propios de A son 0, 1, $a + 1$.

- Si $a \neq 0$ y $a \neq -1$, entonces A tiene tres valores propios distintos y por lo tanto es diagonalizable.
- Si $a = 0$
  En este caso los valores propios de A resultan 0 con $ma(0) = 1$ y 1 con $ma(1) = 2$.
  $dim(S_1) = 3 - rango(A - Id) = 3 - rango \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$
  Entonces A no es diagonalizable.
- Si $a = -1$
  En este caso los valores propios de A resultan 0 con $ma(0) = 2$ y 1 con $ma(1) = 1$.
  $dim(S_0) = 3 - rango(A - 0Id) = 3 - rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1$
  Entonces A no es diagonalizable.

Solución MO1 versión3:

$$\chi_A(\lambda) = det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & a^2 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - a^2)$$

Entonces los valores propios de A son 0, a, $-a$.

- Si $a \neq 0$, entonces A tiene tres valores propios distintos y por lo tanto es diagonalizable.
- Si $a = 0$

  En este caso, el valor propio resulta 0 con $ma(0) = 3$.

  $$dim(S_0) = 3 - rango(A - 0Id) = 3 - rango\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

  Entonces A no es diagonalizable.

Solución MO1 Versión4:

$$\chi_A(\lambda) = det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & a-\lambda & 1 \\ 1 & a & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^2(\lambda - 1 - a)$$

Entonces los valores propios de A son 0 y $1 + a$.

- Si $a \neq -1$

  En este caso, los valores propios resultan 0 con $ma(0) = 2$ y $1 + a$ con $ma(1 + a) = 1$.

  $$dim(S_0) = 3 - rango(A - 0Id) = 3 - rango\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} = 2$$

  Entonces A es diagonalizable.
- Si $a = -1$

  En este caso, el valor propio de A resulta 0 con $ma(0) = 3$.

  $$dim(S_0) = 3 - rango(A - 0Id) = 3 - rango\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

  Entonces A no es diagonalizable.

2.2 Versión 1:

Sea $S = [(2, 0, -1)] \cup \{(1, 1, 0)\}$ un subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Se considera el producto interno $\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1x_2 + 2y_1y_2 + 3z_1z_2$.

Seleccione la opción correcta:

1. $S^\perp$ no está bien definido dado que S no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$
2. $S^\perp = [(-2, 3, \frac{2}{3})]$

3. $S^{\perp} = [(-2, 0, \frac{-4}{3}), (0, \frac{2}{3}, -2)]$
4. $S^{\perp} = [(-2, 1, \frac{-4}{3})]$

Respuesta correcta: 4

Solución: Tenemos que $(x, y, x) \in S^{\perp}$ si y solo si $\langle (x, y, z), (2, 0, -1) \rangle = 0$ y $\langle (x, y, z), (1, 1, 0) \rangle = 0$. Esto nos da el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - 3z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema obtenemos que $S^{\perp} = \{(-2y, y, \frac{-4}{3}y) : y \in \mathbb{R}\}$, y $\{(-2, 1, \frac{-4}{3})\}$ resulta ser base.

<u>Versión 2:</u>

Sea $S = [(-1, 1, 2)] \cup \{(3, 1, 1)\}$ un subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Se considera el producto interno $\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = 2x_1x_2 + 2y_1y_2 + 3z_1z_2$. Seleccione la opción correcta:

1. $S^{\perp} = [(1, -7, \frac{8}{3})]$
2. $S^{\perp}$ no está bien definido dado que S no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$
3. $S^{\perp} = [2, -3, \frac{-2}{3}]$
4. $S^{\perp} = [(-1, 3, 0), (0, \frac{-2}{3}, -1)]$

Respuesta correcta: 1

Solución: Tenemos que $(x, y, x) \in S^{\perp}$ si y solo si $\langle (x, y, z), (-1, 1, 2) \rangle = 0$ y $\langle (x, y, z), (3, 1, 1) \rangle = 0$. Esto nos da el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -2x + 2y + 6z = 0 \\ 6x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema obtenemos que $S^{\perp} = \{(x, -7x, \frac{8}{3}x) : x \in \mathbb{R}\}$, y $\{(1, -7, \frac{8}{3})\}$ resulta ser base.

<u>Versión 3:</u>

Sea $S = [(-1, -3, 0)] \cup \{(1, 0, 4)\}$ un subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Se considera el producto interno $\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = 3x_1x_2 + y_1y_2 + 2z_1z_2$. Seleccione la opción correcta:

1. $S^{\perp} = [(2, -1, \frac{3}{2})]$
2. $S^{\perp} = [(1, -1, \frac{-3}{8})]$
3. $S^{\perp} = [(0, 2, \frac{-1}{8}), (3, -1, 0)]$

4. $S^{\perp}$ no está bien definido dado que S no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

Respuesta correcta: 2

Solución: Tenemos que $(x, y, x) \in S^{\perp}$ si y solo si $\langle (x, y, z), (-1, -3, 0) \rangle = 0$ y $\langle (x, y, z), (1, 0, 4) \rangle = 0$. Esto nos da el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -3x - 3y = 0 \\ 3x + 8x = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema obtenemos que $S^{\perp} = \{(x, -x, \frac{3}{8}x) : x \in \mathbb{R}\}$, y $\{(1, -1, \frac{-3}{8})\}$ resulta ser base.

<u>Versión 4:</u>

Sea $S = [(1, -1, 1)] \cup \{(0, 3, -1)\}$ un subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Se considera el producto interno $\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = 3x_1x_2 + y_1y_2 + 2z_1z_2$ Seleccione la opción correcta:

1. $S^{\perp}$ no está bien definido dado que S no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$
2. $S^{\perp} = [(-2, \frac{2}{3}, 0), (1, 0, \frac{1}{3})]$
3. $S^{\perp} = [(\frac{-2}{3}, 1, \frac{3}{2})]$
4. $S^{\perp} = [(\frac{4}{3}, 3, -2)]$

Respuesta correcta: 3

Solución: Tenemos que $(x, y, x) \in S^{\perp}$ si y solo si $\langle (x, y, z), (1, -1, 1) \rangle = 0$ y $\langle (x, y, z), (0, 3, -1) \rangle = 0$. Esto nos da el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema obtenemos que $S^{\perp} = \{(\frac{-2}{3}y, y, \frac{3}{2}y) : y \in \mathbb{R}\}$, y $\{(\frac{-2}{3}, 1, \frac{3}{2})\}$ resulta ser base

2.3 <u>Versión 1:</u> Una base de Jordan para la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es:

A) $B = \{(1, 0, 0, 0), (A - 3Id)(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\}$

B) $B = \{(1, 0, 0, 0), (A - 3Id)(1, 0, 0, 0), (A - 3Id)^2(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}$

C) $B = \{(1, 0, 0, 0), (A - 3Id)(1, 0, 0, 0), (A - 3Id)^2(1, 0, 0, 0), (A - 3Id)^3(1, 0, 0, 0)\}$

D) $B = \{(1, 0, 0, 0), (A - 3Id)(1, 0, 0, 0), (1, 2, 0, 0), (A - 3Id)(1, 2, 0, 0)\}$

Versión 2: Una base de Jordan para la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ es:

A) $B = \{(1,0,0,0), (A - 3Id)(1,0,0,0), (0,0,1,0), (0,1,0,0)\}$

B) $B = \{(1,0,0,0), (A - 3Id)(1,0,0,0), (A - 3Id)^2(1,0,0,0), (0,1,0,0)\}$

C) $B = \{(1,0,0,0), (A-3Id)(1,0,0,0), (A-3Id)^2(1,0,0,0), (A-3Id)^3(1,0,0,0)\}$

D) $B = \{(1,0,0,0), (A - 3Id)(1,0,0,0), (1,2,0,0), (A - 3Id)(1,2,0,0)\}$

Versión 3: Una base de Jordan para la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ es:

A) $B = \{(1,0,0,0), (A - 3Id)(1,0,0,0), (0,0,1,0), (0,1,0,0)\}$

B) $B = \{(1,0,0,0), (A - 3Id)(1,0,0,0), (A - 3Id)^2(1,0,0,0), (0,1,0,0)\}$

C) $B = \{(1,0,0,0), (A-3Id)(1,0,0,0), (A-3Id)^2(1,0,0,0), (A-3Id)^3(1,0,0,0)\}$

D) $B = \{(1,0,0,0), (A - 3Id)(1,0,0,0), (1,2,0,0), (A - 3Id)(1,2,0,0)\}$

Versión 4: Una base de Jordan para la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es:

A) $B = \{(1,0,0,0), (A - 3Id)(1,0,0,0), (0,0,1,0), (0,1,0,0)\}$

B) $B = \{(1,0,0,0), (A - 3Id)(1,0,0,0), (A - 3Id)^2(1,0,0,0), (0,1,0,0)\}$

C) $B = \{(1,0,0,0), (A-3Id)(1,0,0,0), (A-3Id)^2(1,0,0,0), (A-3Id)^3(1,0,0,0)\}$

D) $B = \{(1,0,0,0), (A - 3Id)(1,0,0,0), (1,2,0,0), (A - 3Id)(1,2,0,0)\}$

1. Versión 1:

   $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

   Solución:

   A tiene como único valor propio a $\lambda = 3$ con $ma(\lambda) = 4$. Si calculamos el subespacio propio S_3 vemos que tiene dimensión 3 y que está generado por los vectores

   $$S_3 = [(0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)]$$

Por lo tanto sabemos que la forma de Jordan de A tiene 3 sub-bloques asociados al valor propio 3 y entonces la forma de Jordan correspondiente debe ser (salvo el orden) la siguiente:

$$J_A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Si notamos una base de Jordan por $B_J = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, tenemos que :

- $v_1 \in Ker(A - 3Id)^2 - Ker(A - 3Id)$
- $v_2 = (A - 3Id)(v_1)$
- v_3 y v_4 son vectores de S_3 linealmente independientes con el vector propio $v_2 = (A - 3Id)(v_1)$

Por lo tanto alcanza con ver que $(1, 0, 0, 0) \in Ker(A - 3Id)^2 - Ker(A - 3Id) = \mathbb{R}^4 - S_3$ y que $v_2 = (A - 3Id)(v_1) = (0, 2, 1, 1)$, $v_3 = (0, 0, 1, 0)$ y $v_4 = (0, 0, 0, 1)$ son vectores de S_3 linealmente independientes.

Por lo tanto la respuesta correcta es: Una base de Jordan para la matriz A es

$$B = \{(1, 0, 0, 0), (A - 3Id)(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\}$$

2. Versión 2: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

   Solución:

   A tiene como único valor propio a $\lambda = 3$ con $ma(\lambda) = 4$. Si calculamos el subespacio propio S_3 vemos que tiene dimensión 2 y que está generado por los vectores

   $$S_3 = [(0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)]$$

   Por lo tanto sabemos que la forma de Jordan de A tiene 2 sub-bloques asociados al valor propio 3. Para saber como es su forma de Jordan nos está faltando conocer que potencia de $A - 3Id$ se anula primero. Calculando vemos que $(A - 3Id)^2 \neq 0$ pero $(A - 3Id)^3 = 0$. De ahí deducimos que el sub-bloque más grande tiene tamaño 3 y entonces la forma de Jordan correspondiente debe ser (salvo el orden) la siguiente:

   $$J_A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Si notamos una base de Jordan por $B_J = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, tenemos que :

- $v_1 \in Ker(A - 3Id)^3 - Ker(A - 3Id)^2$
- $v_2 = (A - 3Id)(v_1)$
- $v_3 = (A - 3Id)(v_2) = (A - 3Id)^2(v_1)$
- v_4 es vector de S_3 linealmente independiente con el vector propio $v_3 = (A - 3Id)^2(v_1)$

Por lo tanto alcanza con ver que $(1,0,0,0) \in Ker(A - 3Id)^3 - Ker(A - 3Id)^2 = \mathbb{R}^4 - [(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)]$ y que $v_3 = (A-3Id)^2(v_1) = (0,0,0,1)$, y $v_4 = (0,1,0,0)$ son vectores de S_3 linealmente independientes.

Por lo tanto la respuesta correcta es: Una base de Jordan para la matriz A es

$$B = \{(1,0,0,0),(A - 3Id)(1,0,0,0),(A - 3Id)^2(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$$

3. Versión 3: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

   Solución:

   A tiene como único valor propio a $\lambda = 3$ con $ma(\lambda) = 4$. Si calculamos el subespacio propio S_3 vemos que tiene dimensión 1 y que está generado por el vector
$$S_3 = [(0,0,0,1)]$$

   Por lo tanto sabemos que la forma de Jordan de A tiene 1 sólo sub-bloque asociado al valor propio 3. Entonces la forma de Jordan correspondiente debe ser la siguiente:

$$J_A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   Si notamos una base de Jordan por $B_J = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, tenemos que :

   - $v_1 \in Ker(A - 3Id)^4 - Ker(A - 3Id)^3$
   - $v_2 = (A - 3Id)(v_1)$
   - $v_3 = (A - 3Id)(v_2) = (A - 3Id)^2(v_1)$
   - $v_4 = (A - 3Id)(v_3) = (A - 3Id)^3(v_1)$ es vector de S_3

Por lo tanto alcanza con ver que $(1,0,0,0) \in Ker(A-3Id)^4 - Ker(A-3Id)^3 = \mathbb{R}^4 - [(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)]$ y que $v_4 = (A-3Id)^3(v_1) = (0,0,0,1)$ es un vector de S_3.

Por lo tanto la respuesta correcta es: Una base de Jordan para la matriz A es

$$B = \{(1,0,0,0),(A-3Id)(1,0,0,0),(A-3Id)^2(1,0,0,0),(A-3Id)^3(1,0,0,0)\}$$

4. Versión 4: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Solución:

A tiene como único valor propio a $\lambda = 3$ con $ma(\lambda) = 4$. Si calculamos el subespacio propio S_3 vemos que tiene dimensión 2 y que está generado por los vectores
$$S_3 = [(0,0,1,0),(0,0,0,1)]$$

Por lo tanto sabemos que la forma de Jordan de A tiene 2 sub-bloques asociados al valor propio 3. Para saber como es su forma de Jordan nos está faltando conocer que potencia de $A-3Id$ se anula primero. Calculando vemos que $(A-3Id)^2 = 0$. De ahí deducimos que el sub-bloque más grande tiene tamaño 2 y entonces la forma de Jordan correspondiente debe ser la siguiente:

$$J_A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si notamos una base de Jordan por $B_J = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, tenemos que :

- $v_1, v_3 \in Ker(A-3Id)^2 - Ker(A-3Id)$
- $v_2 = (A-3Id)(v_1)$
- $v_4 = (A-3Id)(v_3)$

Por lo tanto alcanza con ver que $(1,0,0,0),(1,2,0,0) \in Ker(A-3Id)^2 - Ker(A-3Id) = \mathbb{R}^4 - [(0,0,1,0),(0,0,0,1)]$ y que $v_2 = (A-3Id)(1,0,0,0) = (0,0,1,1)$ y $v_4 = (A-3Id)(1,2,0,0) = (0,0,1,0)$ son vectores de S_3 linealmente independientes.

Por lo tanto la respuesta correcta es: Una base de Jordan para la matriz A es

$$B = \{(1,0,0,0),(A-3Id)(1,0,0,0),(1,2,0,0),(A-3Id)(1,2,0,0)\}$$

3 Respuesta Corta

3.1 Versión 1:

Consideremos $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual, y sea $S = [(1,3,-1)]$, $v = (23,26,-20)$. Entonces $\| P_{S^\perp}(v) \|^2 = 274$

Solución: Se tiene que $v = P_S(v) + P_{S^\perp}(v)$, de donde $P_{S^\perp}(v) = v - P_S(v)$. El conjunto $\{\frac{1}{\sqrt{11}}(1,3,-1)\}$ es base ortonormal de S, por lo que:

$$\begin{aligned}
P_S(v) &= \left\langle v, \frac{1}{\sqrt{11}}(1,3-1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{11}}(1,3,-1) \\
&= \frac{1}{11} \langle (23,26,-20),(1,3,-1) \rangle (1,3,-1) \\
&= \frac{23+78+20}{11}(1,3,-1) \\
&= \frac{121}{11}(1,3,-1) = 11(1,3,-1) \\
&= (11,33,-11)
\end{aligned}$$

Luego $P_{S^\perp}(v) = v - P_S(v) = (23,26,-20) - (11,33,-11) = (12,-7,-9)$,

Versión 2:

Consideremos $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual, y sea $S = [(2,-1,1)]$, $v = (3,23,-19)$. Entonces $\| P_{S^\perp}(v) \|^2 = 683$

Solución: Se tiene que $v = P_S(v) + P_{S^\perp}(v)$, de donde $P_{S^\perp}(v) = v - P_S(v)$. El conjunto $\{\frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1)\}$ es base ortonormal de S, por lo que:

$$\begin{aligned}
P_S(v) &= \left\langle v, \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1) \\
&= \frac{1}{6} \langle (3,23,-19),(2,-1,1) \rangle (2,-1,1) \\
&= \frac{6-23-19}{6}(2,-1,1) \\
&= \frac{-36}{6}(2,-1,1) = -6(2,-1,1) \\
&= (-12,6,-6)
\end{aligned}$$

Luego $P_{S^\perp}(v) = v - P_S(v) = (3,23,-19) - (-12,6,-6) = (15,17,-13)$,

Versión 3:

Consideremos $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual, y sea $S = [(-2,-1,2)]$, $v = (-38,-31,5)$. Entonces $\| P_{S^\perp}(v) \|^2 = 909$

Solución: Se tiene que $v = P_S(v) + P_{S^\perp}(v)$, de donde $P_{S^\perp}(v) = v - P_S(v)$. El conjunto $\{\frac{1}{3}(-2,-1,2)\}$ es base ortonormal de S, por lo que:

$$\begin{aligned} P_S(v) &= \left\langle v, \frac{1}{3}(-2,-1,2) \right\rangle \frac{1}{3}(-2,-1,2) \\ &= \frac{1}{9} \langle (-38,-31,5), (-2,-1,2) \rangle (-2,-1,2) \\ &= \frac{76+31+10}{9}(-2,-1,2) \\ &= \frac{117}{9}(-2,-1,2) = 13(-2,-1,2) \\ &= (-26,-13,26) \end{aligned}$$

Luego $P_{S^\perp}(v) = v - P_S(v) = (-38,-31,5) - (-26,-13,26) = (-12,-18,-21)$.

Versión 4:

Consideremos $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual, y sea $S = [(1,-1,2)]$, $v = (-44,28,-9)$. Entonces $\| P_{S^\perp}(v) \|^2 = 1451$

Solución: Se tiene que $v = P_S(v) + P_{S^\perp}(v)$, de donde $P_{S^\perp}(v) = v - P_S(v)$. El conjunto $\{\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)\}$ es base ortonormal de S, por lo que:

$$\begin{aligned} P_S(v) &= \left\langle v, \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2) \\ &= \frac{1}{6} \langle (-44,28,-9), (1,-1,2) \rangle (1,-1,2) \\ &= \frac{-44-28-18}{6}(1,-1,2) \\ &= \frac{-90}{6}(1,-1,2) = -15(1,-1,2) \\ &= (-15,15,-30) \end{aligned}$$

Luego $P_{S^\perp}(v) = v - P_S(v) = (-44,28,-9) - (-15,15,-30) = (-29,13,21)$.

3.2 Versión 1: Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal que verifica

- El polinomio característico de T tiene todas sus raíces reales.
- $N(T - 2Id) \neq 0$.
- 5 es valor propio de T con $m.a(5) > 1$.
- $rg(T - 4Id) \neq 4$.

Entonces la traza de T es:

Solución: Como la traza de una matriz es igual a la de cualquier matriz semejante, se puede difinir la $Tr(T) = Tr(A)$ siendo A su forma de Jordan.

El item 1 garantiza que T tiene forma de Jordan. Podemos asegurar que la suma de las multilplicidades algebraicas de los valores propios será 4. Los Items $2, 3, 4$ nos dicen que $2, 5, 4$ son valores propios de T. Por lo tanto para que las multiplicidades sumen 4 y $m.a(5) > 1$ se debe tener: $m.a(2) = 1, m.a(5) = 2, m.a(4) = 1$. Así la traza será: $2 + 5 + 5 + 4 = 16$.

Versión 2: Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal que verifica

- El polinomio característico de T tiene todas sus raíces reales.
- $N(T - 3Id) \neq 0$.
- 4 es valor propio de T con $m.a(4) > 1$.
- $rg(T + 4Id) \neq 4$.

Entonces la traza de T es: 7 Adaptar la solución de la versión 1.

Versión 3: Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal que verifica

- El polinomio característico de T tiene todas sus raíces reales.
- $N(T - Id) \neq 0$.
- 5 es valor propio de T con $m.a(5) > 1$.
- $rg(T + Id) \neq 4$.

Entonces la traza de T es: 10 Adaptar la solución de la versión 1.

Versión 4: Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal que verifica

- El polinomio característico de T tiene todas sus raíces reales.
- $N(T - 2Id) \neq 0$.
- 4 es valor propio de T con $m.a(4) > 1$.
- $rg(T + Id) \neq 4$.

Entonces la traza de T es: 9 Adaptar la solución de la versión 1.