Các bài toán Lý thuyết Số
từ các kỳ thi Olympic Quốc gia và Quốc tế 2015-2024

Ban biên soạn

Tạp chí Pi
Hội toán học Việt Nam

Ngày 7 tháng 5 năm 2025

Mục lục

Introduction **3**

I Các bài toán **4**

1 Năm 2015 **5**
1.1 Các đề thi quốc gia . . . 5
1.2 Các đề thi quốc tế . . . 16

II Gợi ý **21**

III Lời giải **22**

IV Công cụ **23**

2 Định lý, bổ đề, và hằng đẳng thức **24**
2.1 Các nguyên lý và chiến lược giải toán . . . 24
2.2 Các định lý giải tích . . . 26
2.3 Số nguyên tố và phép chia hết . . . 27
2.4 Số học đồng dư cơ bản . . . 29
2.5 Các hàm số học . . . 31
2.6 Phương trình nghiệm nguyên . . . 33
2.7 Phân bố đều và số vô tỉ . . . 34
2.8 Căn nguyên thủy và đẳng thức cổ điển . . . 35
2.9 Chuẩn p-adic và định lý LTE . . . 37
2.10 Đa thức . . . 38
2.11 Số dư bậc hai và ký hiệu Legendre . . . 40
2.12 Căn nguyên thủy và bậc lũy thừa (phần nâng cao) . . . 42
2.13 Bậc lũy thừa theo hợp số . . . 43
2.14 Thủ thuật, kỹ thuật và công cụ hiếm gặp . . . 44

3 Tiêu chuẩn Xếp hạng MOHS **45**

Từ điển chú giải **48**

Mở đầu

Lời nói đầu

Cuốn sách này được biên soạn dành cho giáo viên và học sinh luyện thi Đội tuyển Quốc gia Việt Nam dự thi IMO. Tài liệu tập hợp *các bài toán mới trong vòng 10 năm trở lại đây* từ các kỳ thi quan trọng như IMO Shortlist, các cuộc thi quốc tế uy tín như MEMO, BMO, APMO, EGMO, cũng như các kỳ thi quốc gia của 20 nước hàng đầu thế giới.

Mỗi bài toán được *xếp hạng theo thang độ khó MOHS*, đi kèm với *danh sách các định lý, bổ đề, hằng đẳng thức quan trọng* cần thiết cho lời giải. Các yếu tố này được liên kết trong một hệ thống đồ thị tri thức, giúp người đọc dễ dàng tra cứu và hiểu rõ mối liên hệ giữa các công cụ toán học. Ngoài ra, mỗi bài toán còn được gắn *thẻ thông tin chi tiết* về kỳ thi (năm, vòng), giúp thuận tiện cho việc tìm kiếm và tham khảo.

Để hỗ trợ người học, mỗi bài toán có một *mã định danh duy nhất* (UUID), kèm theo *gợi ý* khi gặp khó khăn. Nếu có nhiều cách giải, tất cả sẽ được trình bày các chuyên đề liên quan đến cách giải để giúp người đọc mở rộng tư duy.

Cấu trúc sách gồm bốn phần chính tương ứng với bốn lĩnh vực quan trọng của toán học thi đấu: Đại số, Tổ hợp, Hình học và Số học. Mỗi phần chia thành các chương theo từng chuyên đề cụ thể với các bài toán liên quan.

Đây là một cuốn sách *mở, luôn được cập nhật và có sẵn trên Internet* để bất kỳ ai cũng có thể truy cập. Người dùng có thể đóng góp bằng cách đề xuất bài toán mới hoặc thay đổi mức độ khó, gợi ý, hoặc thêm lời giải mới cho bài toán bằng cách gửi *một tệp duy nhất theo định dạng LaTeX quy định*. Việc đóng góp tập trung vào nội dung mà không cần lo lắng về định dạng, tổ chức, mã LaTeX hay quy trình xuất bản.

Toàn bộ quá trình này được giám sát bởi các nhân sự được ủy quyền từ Hội Toán Học Việt Nam và Tạp chí Pi, nhằm đảm bảo chất lượng và tính nhất quán của tài liệu.

Chúng tôi hy vọng tài liệu này sẽ trở thành một nguồn tham khảo hữu ích, giúp giáo viên và học sinh tiến xa hơn trong hành trình chinh phục các kỳ thi toán quốc tế.

Ban Biên soạn

Phần I

Các bài toán

Chương 1

Năm 2015

1.1 Các đề thi quốc gia

Bulgaria

1.1.1 (BGR 2015 MO/P1)**.** Dãy số $a_1, a_2, \ldots$ được xác định bởi các đẳng thức $a_1 = 2, a_2 = 12$ và $a_{n+1} = 6a_n - a_{n-1}$ với mọi số nguyên dương $n \geq 2$. Chứng minh rằng không có phần tử nào của dãy số này bằng một lũy thừa hoàn chỉnh (lớn hơn một) của một số nguyên dương.

1.1.2 (BGR 2015 EGMO TST/P1)**.** Cho $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ là một dãy vô hạn các số nguyên dương tăng chặt, sao cho tồn tại một số nguyên dương k và với mọi số nguyên $n > k$, số hạng a_n là tổng của hai phần tử nào đó trong dãy. Chứng minh rằng dãy này chứa vô hạn hợp số.

1.1.3 (BGR 2015 EGMO TST/P4)**.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương m, tồn tại vô số cặp số nguyên dương (x, y) nguyên tố cùng nhau sao cho:

$$x \mid y^2 + m, \text{ và } y \mid x^2 + m.$$

1.1.4 (BGR 2015 EGMO TST/P6)**.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \geq 3$, tồn tại n số nguyên dương phân biệt sao cho tổng các lập phương của chúng cũng là một lập phương hoàn hảo.

Canada

1.1.5 (CAN 2015 QRC/P1)**.** Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $7x^2y^2 + 4x^2 = 77y^2 + 1260$.

1.1.6 (CAN 2015 QRC/P3)**.** Cho N là một số có ba chữ số phân biệt và khác 0. Ta gọi N là một số *tầm thường* nếu nó có tính chất sau: khi viết ra tất cả 6 hoán vị có ba chữ số từ các chữ số của N, trung bình cộng của chúng bằng chính N. Ví dụ: $N = 481$ là số *tầm thường* vì trung bình cộng của các số $\{418, 481, 148, 184, 814, 841\}$ bằng 481. Hãy xác định số *tầm thường* lớn nhất.

1.1.7 (CAN 2015 MO/P5)**.** Cho p là một số nguyên tố sao cho $\frac{p-1}{2}$ cũng là một số nguyên tố, và cho a, b, c là các số nguyên không chia hết cho p. Chứng minh rằng có nhiều nhất $1 + \sqrt{2p}$ số nguyên dương n thỏa mãn $n < p$ và p chia hết $a^n + b^n + c^n$.

China

1.1.8 (CHN 2015 NMO/10/P1)**.** Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình

$$\frac{xyz}{w} + \frac{yzw}{x} + \frac{zwx}{y} + \frac{wxy}{z} = 4.$$

1.1.9 (CHN 2015 NMO/10/P3). Nếu $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}$ thì $\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_s}\right)$. Tìm số nguyên dương nhỏ nhất n sao cho $\phi(n) = \frac{2^5}{47}n$.

1.1.10 (CHN 2015 NMO/10/P7). Biết rằng các số nguyên tố lẻ x, y, z thỏa mãn

$$x \mid (y^5 + 1), \ y \mid (z^5 + 1), \ z \mid (x^5 + 1).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của tích xyz.

1.1.11 (CHN 2015 WMO/P8). Cho k là một số nguyên dương, và $n = (2^k)!$. Chứng minh rằng $\sigma(n)$ có ít nhất một ước nguyên tố lớn hơn 2^k, trong đó $\sigma(n)$ là tổng các ước dương của n.

1.1.12 (CHN 2015 SEMO/10/P4). Với mỗi số nguyên dương n, ta có tập hợp $P_n = \{n^k \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$. Với các số nguyên dương a, b, c, ta gọi bộ ba (a, b, c) là may mắn nếu tồn tại một số nguyên dương m sao cho $a - 1$, $ab - 12$, $abc - 2015$ (ba số này không nhất thiết phải khác nhau) thuộc tập P_m. Tìm số lượng các bộ ba may mắn.

1.1.13 (CHN 2015 SEMO/11/P4). Cho 8 số nguyên dương phân biệt từng đôi một $a_1, a_2, \dots, a_8$ sao cho ước số chung lớn nhất của bất kỳ ba số nào trong chúng đều bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương $n \geq 8$ và n số nguyên dương phân biệt từng đôi một $m_1, m_2, \dots, m_n$ sao cho ước số chung lớn nhất của tất cả n số này bằng 1, đồng thời với mọi bộ ba số nguyên dương $1 \leq p < q < r \leq n$, tồn tại hai số nguyên dương $1 \leq i < j \leq 8$ sao cho $a_i a_j \mid m_p + m_q + m_r$.

1.1.14 (CHN 2015 NML/P4). Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho với mọi số nguyên dương n, $2^{(k-1)n+1}$ không chia hết $\frac{(kn)!}{n!}$.

1.1.15 (CHN 2015 NML/P8). Chứng minh rằng tồn tại vô hạn bộ ba số nguyên dương (a, b, c) $(a, b, c > 2015)$ sao cho

$$a \mid bc - 1, \quad b \mid ac + 1, \quad c \mid ab + 1.$$

1.1.16 (CHN 2015 GMO/P4). Gọi $g(n)$ là ước số chung lớn nhất của n và 2015. Tìm số bộ ba (a, b, c) thỏa mãn hai điều kiện sau:

(1) $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 2015\}$;

(2) $g(a), \ g(b), \ g(c), \ g(a + b), \ g(b + c), \ g(c + a), \ g(a + b + c)$ đôi một khác nhau.

1.1.17 (CHN 2015 GMO/P5). Xác định số tam giác vuông phân biệt sao cho ba cạnh của nó đều có độ dài nguyên, và diện tích của tam giác bằng 999 lần chu vi của nó. (Các tam giác đồng dạng được coi là giống nhau.)

1.1.18 (CHN 2015 MO/P4). Xác định tất cả các số nguyên k sao cho tồn tại vô hạn số nguyên dương n không thỏa mãn

$$n + k \mid \binom{2n}{n}.$$

1.1.19 (CHN 2015 TST1/P2). Cho dãy các số nguyên dương phân biệt $a_1, a_2, a_3, \dots$, và một hằng số thực $0 < c < \dfrac{3}{2}$. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương k sao cho:

$$\operatorname{lcm}(a_k, a_{k+1}) > ck.$$

1.1.20 (CHN 2015 TST1/P5). Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương a, b, c không vượt quá $3n^2 + 4n$, tồn tại các số nguyên x, y, z có giá trị tuyệt đối không vượt quá $2n$ và không đồng thời bằng 0, sao cho

$$ax + by + cz = 0.$$

1.1.21 (CHN 2015 TST2/P6). Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên n sao cho $n^2 + 1$ là số không có thừa số chính phương.

1.1.22 (CHN 2015 TST3/3). Cho a, b là hai số nguyên sao cho ước số chung lớn nhất của chúng có ít nhất hai thừa số nguyên tố. Gọi $S = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \equiv a \pmod{b}\}$ và gọi $y \in S$ là không phân tích được nếu không thể biểu diễn y dưới dạng tích của hai hoặc nhiều phần tử của S (không nhất thiết khác nhau). Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên t sao cho mọi phần tử của S đều có thể được biểu diễn dưới dạng tích của nhiều nhất t phần tử không phân tích được.

1.1.23 (CHN 2015 TST3/6). Với mọi số tự nhiên n, định nghĩa $f(n) = \tau(n!) - \tau((n-1)!)$, trong đó $\tau(a)$ là số lượng ước dương của a. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số hợp n sao cho với mọi số tự nhiên $m < n$, ta có $f(m) < f(n)$.

France

1.1.24 (FRA 2015 TST1/P3). Cho n là một số nguyên dương sao cho $n(n + 2015)$ là một số chính phương.

- Chứng minh rằng n không phải là số nguyên tố.
- Cho một ví dụ về số nguyên n như vậy.

1.1.25 (FRA 2015 TST1/P7). Cho các số nguyên a, b, c, n với $n \geq 2$. Gọi p là một số nguyên tố chia hết cả hai biểu thức $a^2 + ab + b^2$ và $a^n + b^n + c^n$, nhưng không chia hết $a + b + c$. Chứng minh rằng n và $p - 1$ không nguyên tố cùng nhau.

1.1.26 (FRA 2015 TST3/P5). Xác định tất cả các số nguyên tự nhiên m và n thỏa mãn phương trình $2^n = 3^m + 23$.

1.1.27 (FRA 2015 TST3/P5). Cho $n \geq 2$ là một số nguyên. Ta ký hiệu A_n là tập hợp

$$A_n = \{2^n - 2^k \mid k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq k \leq n\}.$$

Xác định số nguyên dương lớn nhất không thể viết được dưới dạng tổng của một hoặc nhiều phần tử (không nhất thiết khác nhau) của A_n.

1.1.28 (FRA 2015 TST4/P1). Tìm tất cả các đa thức f với hệ số nguyên sao cho với mọi số nguyên $n > 0$, ta có:

$$f(n) \mid 3n - 1.$$

1.1.29 (FRA 2015 TST4/P6). Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn:

$$x^2 = y^2(y^4 + 2y^2 + x).$$

1.1.30 (FRA 2015 RMM/P3). Cho số nguyên tố $p \geq 5$. Chứng minh rằng tập hợp

$$K = \left\{a \in \mathbb{Z} \mid a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}\right\}$$

chứa ít nhất hai số nguyên tố lẻ phân biệt nhỏ hơn p.

Germany

1.1.31 (GER 2015 MO/P2). Một số nguyên dương n được gọi là **trơn** nếu tồn tại các số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sao cho:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n = n.$$

Hãy tìm tất cả các số trơn.

1.1.32 (GER 2015 MO/P4). Cho số nguyên dương k. Định nghĩa n_k là số có dạng thập phân $70\underbrace{00\ldots0}_{k \text{ chữ số } 0}1$.

Chứng minh rằng:

- Không có số nào trong các số n_k chia hết cho 13.
- Có vô số số n_k chia hết cho 17.

1.1.33 (GER 2015 TST/P2). Một số nguyên dương n được gọi là **nghịch ngợm** nếu có thể viết dưới dạng

$$n = ab + b$$

với các số nguyên $a, b \geq 2$.

Hỏi có tồn tại một dãy gồm 102 số nguyên dương liên tiếp sao cho chính xác 100 trong số đó là các số nghịch ngợm hay không?

1.1.34 (GER 2015 TST/P4). Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) sao cho

$$\sqrt[3]{7x^2 - 13xy + 7y^2} = |x - y| + 1.$$

Hungary

1.1.35 (HUN 2015 TST/KMA/633). Chứng minh rằng nếu n là một số nguyên dương đủ lớn, thì trong bất kỳ tập hợp gồm n số nguyên dương khác nhau nào cũng tồn tại bốn số sao cho bội chung nhỏ nhất của chúng lớn hơn $n^{3,99}$.

1.1.36 (HUN 2015 TST/KMA/635). Chứng minh rằng với mọi số thực $c > 0$ đều tồn tại một số nguyên dương n sao cho $\varphi(\sigma(n)) > cn$. (Với mọi số nguyên dương k, $\varphi(k)$ là số lượng số nguyên dương không vượt quá k và nguyên tố cùng nhau với k, còn $\sigma(k)$ là tổng các ước dương của k.)

1.1.37 (HUN 2015 TST/KMA/640). Xác định tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương n sao cho các số có dạng $(k+1)^n - 2k^n$ (với $k = 1, 2, \ldots, p$) tạo thành một hệ đầy đủ các lớp dư modulo p.

1.1.38 (HUN 2015 TST/KMA/643). Với mỗi số nguyên dương n, ký hiệu $P(n)$ là ước số nguyên tố lớn nhất của $n^2 + 1$. Hãy chứng minh rằng tồn tại vô hạn bộ bốn số nguyên dương (a, b, c, d) thỏa mãn $a < b < c < d$ và $P(a) = P(b) = P(c) = P(d)$.

India

1.1.39 (IND 2015 MO/P2). Với mọi số tự nhiên $n > 1$, phân số $\frac{1}{n}$ với số chữ số thập phân hữu hạn dưới dạng thập phân vô hạn ví dụ như: 0.5 được viết là $\frac{1}{2} = 0.4\overline{9}$. Hãy xác định độ dài phần không tuần hoàn trong biểu diễn thập phân vô hạn của $\frac{1}{n}$.

1.1.40 (IND 2015 MO/P6). Chứng minh rằng từ một tập gồm 11 số chính phương, ta luôn có thể chọn ra sáu số $a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2$ sao cho:

$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv d^2 + e^2 + f^2 \pmod{12}$$

1.1.41 (IND 2015 TST1/P1). Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $\frac{a^2+b}{b^2-a}$ và $\frac{b^2+a}{a^2-b}$ cũng là các số nguyên.

1.1.42 (IND 2015 TST2/P2). Với một số hợp n, ký hiệu d_n là ước số riêng lớn nhất của n. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số n sao cho $d_n + d_{n+1}$ là một số chính phương.

1.1.43 (IND 2015 TST4/P3). Cho $n > 1$ là một số nguyên cho trước. Chứng minh rằng có vô hạn số hạng của dãy $(a_k)_{k\geq 1}$, được xác định bởi

$$a_k = \left\lfloor \frac{n^k}{k} \right\rfloor,$$

là các số lẻ. (Với một số thực x, ký hiệu $\lfloor x \rfloor$ là phần nguyên của x, tức là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.)

Iran

1.1.44 (IRN 2015 MO2/P6). Cho $n \geq 50$ là một số tự nhiên. Chứng minh rằng n có thể được biểu diễn dưới dạng tổng của hai số tự nhiên $n = x + y$ sao cho với mọi số nguyên tố p mà $p \mid x$ hoặc $p \mid y$, ta có $\sqrt{n} \geq p$. Ví dụ: với $n = 94$ ta có $x = 80$, $y = 14$.

1.1.45 (IRN 2015 MO3/NP1). Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số tự nhiên n sao cho n không thể được viết dưới dạng tổng của hai số nguyên dương có các thừa số nguyên tố nhỏ hơn 1394.

1.1.46 (IRN 2015 MO3/NP2). Gọi $M_0 \subset \mathbb{N}$ là một tập hợp không rỗng gồm hữu hạn phần tử. Ali tạo ra các tập $M_1, M_2, \ldots, M_n$ theo thứ tự sau: Ở bước n, Ali chọn một phần tử $b_n \in M_{n-1}$ và định nghĩa

$$M_n = \{b_n m + 1 \mid m \in M_{n-1}\}.$$

Chứng minh rằng sau một số bước, Ali thu được một tập mà không có phần tử nào trong đó chia hết cho một phần tử khác.

1.1.47 (IRN 2015 MO3/NP3). Cho $p > 5$ là một số nguyên tố và $A = \{b_1, b_2, \ldots, b_{\frac{p-1}{2}}\}$ là tập hợp tất cả các số chính phương modulo p, không bao gồm số 0. Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên a, c sao cho $(ac, p) = 1$ và tập hợp

$$B = \{ab_1 + c,\ ab_2 + c,\ \ldots,\ ab_{\frac{p-1}{2}} + c\}$$

và tập A là hai tập rời modulo p.

1.1.48 (IRN 2015 MO3/NP4). Giả sử a, b, c, d, k, l là các số nguyên dương sao cho với mọi số tự nhiên n, tập hợp các thừa số nguyên tố của hai số $n^k + a^n + c$ và $n^l + b^n + d$ là giống nhau. Chứng minh rằng $k = l$, $a = b$, $c = d$.

1.1.49 (IRN 2015 MO3/NP5). Cho $p > 30$ là một số nguyên tố. Chứng minh rằng tồn tại một số trong các số sau có dạng $x^2 + y^2$:

$$p + 1,\ 2p + 1,\ 3p + 1,\ \ldots,\ (p - 3)p + 1.$$

1.1.50 (IRN 2015 TST1/P3). Gọi $b_1 < b_2 < b_3 < \ldots$ là dãy tất cả các số tự nhiên có thể viết được dưới dạng tổng hai bình phương của hai số tự nhiên. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số tự nhiên m sao cho $b_{m+1} - b_m = 2015$.

1.1.51 (IRN 2015 TST1/P4). Cho trước số tự nhiên n. Tìm giá trị nhỏ nhất của k sao cho với mọi tập A gồm k số tự nhiên, luôn tồn tại một tập con của A có số phần tử chẵn và tổng các phần tử chia hết cho n.

1.1.52 (IRN 2015 TST3/P2). Giả sử a_1, a_2, a_3 là ba số nguyên dương cho trước. Xét dãy số được xác định bởi công thức:

$$a_{n+1} = \text{lcm}[a_n, a_{n-1}] - \text{lcm}[a_{n-1}, a_{n-2}] \quad \text{với } n \geq 3,$$

trong đó $[a, b]$ ký hiệu bội chung nhỏ nhất của a và b, và chỉ được áp dụng với các số nguyên dương.

Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương $k \leq a_3 + 4$ sao cho $a_k \leq 0$.

Japan

1.1.53 (JPN 2015 MO/P1). Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho

$$\frac{10^n}{n^3 + n^2 + n + 1}$$

là một số nguyên.

1.1.54 (JPN 2015 MO/P3). Một dãy số nguyên dương $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ được gọi là *tăng mạnh* nếu với mọi số nguyên dương n, ta có:

$$a_n < a_{n+1} < a_n + a_{n+1} < a_{n+2}.$$

(a) Chứng minh rằng nếu $\{a_n\}$ là dãy tăng mạnh thì các số nguyên tố lớn hơn a_1 chỉ xuất hiện hữu hạn lần trong dãy.

(b) Chứng minh rằng tồn tại dãy $\{a_n\}$ tăng mạnh sao cho không có số nào chia hết cho bất kỳ số nguyên tố nào đã xuất hiện trong dãy.

1.1.55 (JPN 2015 EGMO TST/P4). Với mỗi số nguyên dương n, ký hiệu:

- $\varphi(n)$ là số lượng số nguyên từ 1 đến n nguyên tố cùng nhau với n (hàm Euler);
- $d(n)$ là số lượng ước dương của n.

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho

$$\varphi(n) = d(n).$$

Poland

1.1.56 (POL 2015 MO2/P3). Cho $a_n = |n(n+1) - 19|$ với $n = 0, 1, 2, \dots$ và $n \neq 4$. Chứng minh rằng nếu $\gcd(a_n, a_k) = 1$ với mọi $k < n$, thì a_n là một số nguyên tố.

1.1.57 (POL 2015 MO3/P6). Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương a, tồn tại một số nguyên $b > a$ sao cho:

$$1 + 2^a + 3^a \mid 1 + 2^b + 3^b.$$

Republic of Korea

1.1.58 (KOR 2015 MO/P1). Với một số nguyên dương m, hãy chứng minh rằng số lượng các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau là một số chẵn hoặc bằng 0:

(i) $x^2 - 3y^2 + 2 = 16m$

(ii) $2y \leq x - 1$

1.1.59 (KOR 2015 MO/P8). Với một số nguyên dương n, các số $a_1, a_2, \dots, a_k$ là các số nguyên dương không lặp lại, không vượt quá n, và nguyên tố cùng nhau với n. Giả sử $k > 8$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^{k} \left| a_i - \frac{n}{2} \right| < \frac{n(k-4)}{2}.$$

1.1.60 (KOR 2015 MO/P1). Với một số nguyên dương cố định k, ta định nghĩa hai dãy số A_n và B_n theo quy luật sau:

$$A_1 = k, \quad A_2 = k, \quad A_{n+2} = A_n A_{n+1},$$
$$B_1 = 1, \quad B_2 = k, \quad B_{n+2} = \frac{B_{n+1}^3 + 1}{B_n}.$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, biểu thức $A_{2n} B_{n+3}$ là một số nguyên.

Romania

1.1.61 (ROU 2015 JBMO TST/D1/P4). Tìm các nghiệm nguyên không âm của phương trình sau:

$$21^x + 4^y = z^2.$$

1.1.62 (ROU 2015 JBMO TST/D2/P1). Tìm tất cả các số nguyên dương N có số chữ số chẵn với tính chất rằng nếu ta nhân hai số thu được bằng cách cắt N ở giữa thì ta được một số là ước của N (ví dụ, 12 thỏa mãn vì $1 \cdot 2$ chia hết 12).

1.1.63 (ROU 2015 JBMO TST/D4/P1). Cho $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Xác định tất cả các tập $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{N}$ chứa 2015 và có tính chất rằng $|a_i - a_j|$ là số nguyên tố với mọi $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

1.1.64 (ROU 2015 JBMO TST/D4/P2). Giải trong tập $\mathbb{N}^*$ phương trình:

$$4^a \cdot 5^b - 3^c \cdot 11^d = 1.$$

1.1.65 (ROU 2015 JBMO TST/D5/P1). Chứng minh rằng số 1 có thể được biểu diễn dưới dạng tổng của một số hữu hạn n số thực nhỏ hơn 1, không nhất thiết khác nhau, và trong phần biểu diễn thập phân của mỗi số chỉ chứa các chữ số 0 và/hoặc 7. Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của n.

1.1.66 (ROU 2015 SOM/J/P2). Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số tự nhiên lẻ $m_1 < m_2 < \ldots$ và vô hạn số tự nhiên $n_1 < n_2 < \ldots$ sao cho $\gcd(m_k, n_k) = 1$ và $m_k^4 - 2n_k^4$ là một số chính phương với mọi $k \in \mathbb{N}$.

1.1.67 (ROU 2015 SOM/J/P4). Cho $n \geq 5$ là một số nguyên dương và $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Chứng minh rằng có ít nhất $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$ số trong các số

$$a_1, \; a_1 + a_2, \; \ldots, \; a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

cho dư khác nhau khi chia cho n.

1.1.68 (ROU 2015 MO/7/P1). Tìm tất cả các số nguyên dương r sao cho tồn tại các số nguyên tố dương p và q thỏa mãn

$$p^2 + pq + q^2 = r^2.$$

1.1.69 (ROU 2015 MO/8/P4). Một số nguyên dương được gọi là *điển hình* nếu tổng các chữ số thập phân của nó là bội số của 2011.

(a) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số điển hình, mỗi số trong đó có ít nhất 2011 bội số cũng là số điển hình.

(b) Có tồn tại số nguyên dương nào sao cho mọi bội số của nó đều là số điển hình không?

1.1.70 (ROU 2015 MO/9/P1). Chứng minh rằng trong các căn bậc hai của 2015 số tự nhiên đầu tiên, không thể chọn ra một cấp số cộng gồm 45 phần tử.

1.1.71 (ROU 2015 MO/10/P2). Xét một số tự nhiên n sao cho tồn tại một số tự nhiên k và k số nguyên tố phân biệt thỏa mãn $n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$.

- Tìm số lượng các hàm $f : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho tích $f(1) \cdot f(2) \cdots f(n)$ chia hết n.
- Nếu $n = 6$, hãy tìm số lượng các hàm $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sao cho tích $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot f(4) \cdot f(5) \cdot f(6)$ chia hết cho 36.

1.1.72 (ROU 2015 TST/D1/P3). Một bộ ba Pythagore là một nghiệm của phương trình $x^2 + y^2 = z^2$ trong các số nguyên dương, thỏa mãn $x < y$. Cho trước một số nguyên không âm n, hãy chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương xuất hiện trong đúng n bộ ba Pythagore phân biệt.

1.1.73 (ROU 2015 TST/D1/P4). Cho k là một số nguyên dương thỏa mãn $k \equiv 1 \pmod 4$ và không phải là một số chính phương. Đặt $a = \frac{1+\sqrt{k}}{2}$. Chứng minh rằng:

$$\left\{\left\lfloor a^2 n\right\rfloor - \left\lfloor a \left\lfloor an\right\rfloor\right\rfloor : n \in \mathbb{N}_{>0}\right\} = \{1, 2, \ldots, \lfloor a\rfloor\}.$$

1.1.74 (ROU 2015 TST/D2/P1).

Cho a là một số nguyên và n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng tổng sau đây chia hết cho n:

$$\sum_{k=1}^{n} a^{(k,n)},$$

trong đó (x, y) là ước chung lớn nhất của hai số x và y.

1.1.75 (ROU 2015 TST/D3/P3). Nếu k và n là các số nguyên dương, với $k \leq n$, ký hiệu $M(n, k)$ là bội chung nhỏ nhất của các số $n, n-1, \ldots, n-k+1$. Gọi $f(n)$ là số nguyên dương lớn nhất $k \leq n$ sao cho:

$$M(n, 1) < M(n, 2) < \ldots < M(n, k).$$

Chứng minh rằng:

(a) Với mọi số nguyên dương n, ta có $f(n) < 3\sqrt{n}$.

(b) Với mọi số nguyên dương N, tồn tại hữu hạn số n sao cho $f(n) \leq N$.

1.1.76 (ROU 2015 TST/D4/P2). Cho một số nguyên $k \geq 2$, xác định số lượng lớn nhất các ước của hệ số nhị thức $\binom{n}{k}$ nằm trong đoạn $n-k+1, \ldots, n$, khi n chạy qua các số nguyên lớn hơn hoặc bằng k.

1.1.77 (ROU 2015 TST/D5/P3). Định nghĩa một dãy số nguyên bởi $a_0 = 1$, và

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a_k, \quad n \geq 1.$$

Cho m là một số nguyên dương, p là một số nguyên tố, và q, r là các số nguyên không âm. Chứng minh rằng:

$$a_{p^m q+r} \equiv a_{p^{m-1} q+r} \pmod{p^m}.$$

Russia

1.1.78 (RUS 2015 TMO/J/P2). Ta gọi một số là *hài hước* (funny) nếu nó chia hết cho tổng các chữ số của nó cộng thêm 1. (Ví dụ: $1+2+1 = 4$ và $4 \mid 12$, nên 12 là số hài hước.)

Hỏi dãy số hài hước liên tiếp dài nhất có thể có bao nhiêu số?

1.1.79 (RUS 2015 TMO/J/P4). Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương n sao cho trong biểu diễn thập phân của mỗi số $\sqrt{n}$, $\sqrt[3]{n}$, $\ldots$, $\sqrt[10]{n}$, dãy chữ số 2015 xuất hiện ngay sau dấu phẩy thập phân.

1.1.80 (RUS 2015 TMO/J/P6). Có tồn tại một dãy (a_n) các số tự nhiên sao cho:

- Các hiệu $\{a_{n+1} - a_n\}$ nhận mọi giá trị tự nhiên đúng một lần, và
- Các hiệu $\{a_{n+2} - a_n\}$ nhận mọi giá trị tự nhiên lớn hơn 2015 đúng một lần hay không?

1.1.81 (RUS 2015 TMO/S/P4). Giả sử $n! = ab^2$, trong đó a là số không chứa thừa số chính phương (tức là a là phần không chính phương của $n!$).

Chứng minh rằng với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại n đủ lớn sao cho:

$$2^{(1-\varepsilon)n} < a < 2^{(1+\varepsilon)n}.$$

1.1.82 (RUS 2015 TMO/S/P5). There is some natural number $n > 1$ on the board. Operation is adding to number on the board it maximal non-trivial divisor. Prove, that after some some operations we get number, that is divisible by 3^{2000}.

1.1.83 (RUS 2015 TMO/S/P6). Cho các số nguyên $0 \leq b \leq c \leq d \leq a$ và $a > 14$. Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên n không thể được biểu diễn dưới dạng:

$$n = x(ax + b) + y(ay + c) + z(az + d),$$

với x, y, z là các số nguyên.

1.1.84 (RUS 2015 SMO/9/P1). Có tồn tại đa thức bậc hai $f(x)$ với hệ số nguyên sao cho $f(f(\sqrt{2})) = 0$ hay không?

1.1.85 (RUS 2015 SMO/10/P4). Một số nguyên dương n được gọi là *số Olympic* nếu tồn tại một tam thức bậc hai $f(x)$ với hệ số nguyên sao cho $f(f(\sqrt{n})) = 0$.

Xác định, có chứng minh, số Olympic lớn nhất không vượt quá 2015.

1.1.86 (RUS 2015 SMO/10/P6). Một dãy số nguyên được định nghĩa như sau: $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3$ và với $n > 3$, a_n là số nguyên nhỏ nhất chưa xuất hiện trước đó, nguyên tố cùng nhau với a_{n-1} nhưng không nguyên tố cùng nhau với a_{n-2}. Chứng minh rằng mọi số tự nhiên xuất hiện đúng một lần trong dãy này.

1.1.87 (RUS 2015 SMO/11/P2). Cho $a, b > 1$ là các số tự nhiên, và $a^2 + b,\ a + b^2$ đều là các số nguyên tố. Chứng minh rằng:

$$\gcd(ab + 1,\ a + b) = 1.$$

1.1.88 (RUS 2015 MO/9/P3). Cho a, x, y là các số nguyên dương thỏa mãn $a > 100,\ x > 100,\ y > 100$ và

$$y^2 - 1 = a^2(x^2 - 1).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{a}{x}$.

1.1.89 (RUS 2015 MO/10/P4). Ký hiệu $S(k)$ là tổng các chữ số của một số nguyên dương k. Ta gọi một số nguyên dương a là *tốt với bậc n* (hay n-tốt) nếu tồn tại một dãy các số nguyên dương $a_0, a_1, \dots, a_n$ sao cho $a_n = a$ và

$$a_{i+1} = a_i - S(a_i), \quad \text{với mọi } i = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Có đúng là với mọi số nguyên dương n, tồn tại một số nguyên dương b sao cho b là n-tốt nhưng không phải là $(n + 1)$-tốt?

1.1.90 (RUS 2015 MO/11/P2). Cho $n > 1$ là một số tự nhiên. Ta viết các phân số $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$ sao cho tất cả đều ở dạng tối giản. Gọi tổng các tử số trong những phân số này là $f(n)$.

Tìm tất cả các $n > 1$ sao cho một trong hai số $f(n)$ và $f(2015n)$ là số lẻ, còn số kia là số chẵn.

1.1.91 (RUS 2015 TST/D7/P4). Cho $p \geq 5$ là một số nguyên tố. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương $a < p - 1$ sao cho cả hai số

$$a^{p-1} - 1 \quad \text{và} \quad (a + 1)^{p-1} - 1$$

đều không chia hết cho p^2.

1.1.92 (RUS 2015 TST/D9/P1). Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (a, b) thỏa mãn các điều kiện sau:

- $b - 1$ chia hết cho $a + 1$, và
- $a^2 + a + 2$ chia hết cho b.

1.1.93 (RUS 2015 TST/D10/P2). Cho $p \geqslant 5$ là một số nguyên tố. Chứng minh rằng tập hợp $\{1, 2, \dots, p - 1\}$ có thể được chia thành hai tập con không rỗng sao cho: tổng tất cả các phần tử trong một tập con và tích tất cả các phần tử trong tập con còn lại cho cùng một số dư modulo p.

1.1.94 (RUS 2015 TST/D10/P3)**.** Tìm tất cả các số nguyên k sao cho tồn tại vô hạn bộ ba số nguyên (a, b, c) thỏa mãn:

$$(a^2 - k)(b^2 - k) = c^2 - k.$$

1.1.95 (RUS 2015 TST/D11/P1)**.** Chứng minh rằng tồn tại hai số tự nhiên a, b sao cho với mọi cặp số tự nhiên m, n nguyên tố cùng nhau, ta có:

$$|a - m| + |b - n| > 1000.$$

Taiwan

1.1.96 (TWN 2015 TST2/Q2/P1)**.** Cho dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi:

$$a_{n+1} = a_n^3 + 103, \quad \text{với } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Chứng minh rằng có nhiều nhất một số hạng a_n là số chính phương.

1.1.97 (TWN 2015 TST3/Q2/P2)**.** Xét một hoán vị của $1, 2, \ldots, n$, được ký hiệu là $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Ký hiệu $f(n)$ là số lượng các hoán vị thỏa mãn các điều kiện sau:

1. $a_1 = 1$
2. $|a_i - a_{i-1}| \le 2$, với $i = 2, 3, \ldots, n$

Hỏi phần dư của $f(2015)$ khi chia cho 4 là bao nhiêu?

1.1.98 (TWN 2015 TST3/Q3/P1)**.** Với mỗi số nguyên dương n, định nghĩa:

$$a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n + 2^{k-1}}{2^k} \right\rfloor,$$

trong đó $\lfloor x \rfloor$ là phần nguyên của x, tức là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

Tính giá trị của a_{2015}.

1.1.99 (TWN 2015 TST3/M2/P3)**.** Cho $c \ge 1$ là một số nguyên. Xét dãy các số nguyên dương được định nghĩa bởi:

$$a_1 = c, \quad a_{n+1} = a_n^3 - 4c \cdot a_n^2 + 5c^2 \cdot a_n + c \quad \text{với mọi } n \ge 1.$$

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $n \ge 2$, tồn tại một số nguyên tố p chia hết a_n nhưng không chia hết bất kỳ số nào trong các số $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Thailand

1.1.100 (THA 2015 MO/P1)**.** Cho p là một số nguyên tố, và $a_1, a_2, a_3, \ldots$ là một dãy các số nguyên dương thỏa mãn:

$$a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2 + p \quad \text{với mọi số nguyên dương } n.$$

Chứng minh rằng $a_{n+1} \mid (a_n + a_{n+2})$ với mọi số nguyên dương n.

1.1.101 (THA 2015 MO/P5)**.** Cho n là một số nguyên lớn hơn 6. Chứng minh rằng nếu $n + 1$ là một số nguyên tố, thì:

$$\left\lceil \frac{(n-1)!}{n(n+1)} \right\rceil$$

là một số lẻ, trong đó $\lceil x \rceil$ là giá trị nguyên nhỏ nhất không nhỏ hơn x.

1.1.102 (THA 2015 MO/P1)**.** Cho m và n là các số nguyên dương sao cho $m - n$ là số lẻ. Chứng minh rằng biểu thức $(m + 3n)(5m + 7n)$ không thể là một số chính phương.

1.1.103 (THA 2015 TSTST/Q/P1)**.** Tìm tất cả các số nguyên tố $1 < p < 100$ sao cho phương trình:

$$x^2 - 6y^2 = p$$

có nghiệm nguyên (x, y).

1.1.104 (THA 2015 TSTST/Q/P1)**.** Xác định số nguyên nhỏ nhất $n > 1$ sao cho trung bình bình phương (quadratic mean) của n số nguyên dương đầu tiên là một số nguyên.

Chú thích: Trung bình bình phương của các số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ được định nghĩa là:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

1.1.105 (THA 2015 TSTST/E/P1)**.** Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên n sao cho cả ba số $n,\ n+1,\ n+2$ đều là tổng của hai bình phương các số nguyên.

1.1.106 (THA 2015 TSTST/E/P2)**.** Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình:

$$y^2 = 2x^4 + 17.$$

1.1.107 (THA 2015 TSTST/E/P3)**.** Tìm số màu lớn nhất có thể sử dụng để tô màu các số nguyên n từ 49 đến 94 sao cho nếu hai số a, b (không nhất thiết khác nhau) có cùng màu còn số c có màu khác, thì c không chia hết $a + b$.

United Kingdom

1.1.108 (GBR 2015 MO1/P2)**.** Các số nguyên dương p, a, b thỏa mãn phương trình $p^2 + a^2 = b^2$. Chứng minh rằng nếu p là một số nguyên tố lớn hơn 3, thì a là bội số của 12 và $2(p + a + 1)$ là một số chính phương.

1.1.109 (GBR 2015 MO1/P4)**.** Cho x là một số thực sao cho $t = x + \frac{1}{x}$ là một số nguyên lớn hơn 2. Chứng minh rằng $t_n = x^n + \frac{1}{x^n}$ là một số nguyên với mọi số nguyên dương n. Xác định tất cả các giá trị của n sao cho $t \mid t_n$.

1.1.110 (GBR 2015 TST/F2/P2)**.** Cho $n > 1$ là một số nguyên đã cho. Định nghĩa dãy số:

$$a_k := \left\lfloor \frac{n^k}{k} \right\rfloor, \quad \text{với mỗi } k \geq 1.$$

Chứng minh rằng có vô hạn số hạng của dãy (a_k) là số lẻ.

(Với một số thực x, ký hiệu $\lfloor x \rfloor$ là phần nguyên của x, tức là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.)

1.1.111 (GBR 2015 TST/N3/P3)**.** Cho $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ là các số nguyên dương đôi một nguyên tố cùng nhau, với a_1 là số nguyên tố và $a_1 \geq n + 2$. Xét đoạn thẳng $I = [0, a_1 a_2 \cdots a_n]$ trên trục số thực. Trên đoạn này, đánh dấu tất cả các số nguyên chia hết cho ít nhất một trong các số $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Các điểm này chia đoạn I thành một số đoạn nhỏ hơn. Chứng minh rằng tổng bình phương độ dài của các đoạn nhỏ này chia hết cho a_1.

United States of America

1.1.112 (USA 2015 MO/P2)**.** Giải phương trình sau trong tập số nguyên:

$$x^2 + xy + y^2 = \left(\frac{x + y}{3} + 1\right)^3.$$

1.1.113 (USA 2015 MO/P5). Cho a, b, c, d, e là các số nguyên dương phân biệt thỏa mãn:

$$a^4 + b^4 = c^4 + d^4 = e^5.$$

Chứng minh rằng $ac + bd$ là một hợp số.

1.1.114 (USA 2015 TSTST/P3). Gọi P là tập hợp tất cả các số nguyên tố, và M là một tập con không rỗng của P. Giả sử rằng với mọi tập con không rỗng $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ của M, tất cả các thừa số nguyên tố của $p_1 p_2 \cdots p_k + 1$ đều nằm trong M. Chứng minh rằng $M = P$.

1.1.115 (USA 2015 TSTST/P5). Ký hiệu $\varphi(n)$ là số lượng các số nguyên dương nhỏ hơn n và nguyên tố cùng nhau với n. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương m sao cho phương trình $\varphi(n) = m$ có ít nhất 2015 nghiệm n.

1.1.116 (USA 2015 TST/P2). Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại một tập hợp S gồm n số nguyên dương sao cho với mọi cặp phân biệt $a, b \in S$, hiệu $a - b$ chia hết cả a và b, nhưng không chia hết bất kỳ phần tử nào khác của S.

1.2 Các đề thi quốc tế

Asian Pacific Mathematics Olympiad

1.2.1 (APMO 2015/P3). Một dãy số thực $a_0, a_1, \ldots$ được gọi là "tốt"nếu thỏa mãn ba điều kiện sau:

- Giá trị của a_0 là một số nguyên dương.
- Với mọi số nguyên không âm i, ta có:

$$a_{i+1} = 2a_i + 1 \quad \text{hoặc} \quad a_{i+1} = \frac{a_i}{a_i + 2}.$$

- Tồn tại một số nguyên dương k sao cho $a_k = 2014$.

Tìm số nguyên dương nhỏ nhất n sao cho tồn tại một dãy "tốt"$a_0, a_1, \ldots$ với $a_n = 2014$.

1.2.2 (APMO 2015/P5). Xác định tất cả các dãy số $a_0, a_1, a_2, \ldots$ gồm các số nguyên dương với $a_0 \geq 2015$ sao cho với mọi số nguyên $n \geq 1$ ta có:

- a_{n+2} chia hết cho a_n;
- $|s_{n+1} - (n+1)a_n| = 1$, trong đó

$$s_{n+1} = a_{n+1} - a_n + a_{n-1} - \cdots + (-1)^{n+1} a_0.$$

Balkan Mathematics Olympiad

1.2.3 (BMO 2015/P4). Chứng minh rằng trong bất kỳ 20 số nguyên dương liên tiếp nào cũng tồn tại một số nguyên d sao cho với mọi số nguyên dương n, bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$n\sqrt{d}\left\{n\sqrt{d}\right\} > \frac{5}{2},$$

trong đó $\{x\}$ ký hiệu phần thập phân (phần lẻ) của số thực x, được định nghĩa là hiệu giữa số x và phần nguyên lớn nhất không vượt quá x.

1.2.4 (BMO 2015 SL/P1)**.** Cho d là một số nguyên dương chẵn.

John viết các số $1^2, 3^2, \ldots, (2n-1)^2$ lên bảng. Sau đó, anh ta chọn ba trong số các số đó, gọi là a_1, a_2, a_3, xóa chúng khỏi bảng và thay vào bằng số:

$$1 + \sum_{1 \le i < j \le 3} |a_i - a_j|.$$

Anh ta tiếp tục quá trình này cho đến khi chỉ còn lại hai số trên bảng.

Chứng minh rằng tổng bình phương của hai số còn lại sẽ không thuộc tập các số $1^2, 3^2, \ldots, (2n-1)^2$.

1.2.5 (BMO 2015 SL/P2)**.** Dãy $(a_n)_{n\ge 0}$ được định nghĩa như sau:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 6,$$

và với mọi $n \ge 0$,

$$a_{n+4} = 2a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n.$$

Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên n sao cho $n^2 \mid a_n$.

1.2.6 (BMO 2015 SL/P3)**.** Cho a là một số nguyên dương. Với mọi số nguyên dương n, định nghĩa:

$$a_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}.$$

Giả sử s, t là hai số nguyên dương khác nhau thỏa mãn tính chất sau: Nếu p là một ước số nguyên tố của $s - t$, thì $p \mid (a-1)$.

Chứng minh rằng số

$$\frac{a_s - a_t}{s - t}$$

là một số nguyên.

1.2.7 (BMO 2015 SL/P4)**.** Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn tính chất sau:

Nếu a, b là hai ước số nguyên dương nguyên tố cùng nhau của $x^3 + y^3$, thì $a + b - 1$ cũng là một ước của $x^3 + y^3$.

1.2.8 (BMO 2015 SL/P5)**.** Với một số nguyên dương s, ký hiệu $v_2(s)$ là số mũ lớn nhất của 2 chia hết s.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương m, ta có:

$$v_2\left(\prod_{n=1}^{2^m} \binom{2n}{n}\right) = m \cdot 2^{m-1} + 1.$$

1.2.9 (BMO 2015 SL/P7)**.** Một số nguyên dương m được gọi là hoán vị chữ số (anagram) của một số nguyên dương n nếu mỗi chữ số a xuất hiện trong biểu diễn thập phân của m đúng bằng số lần nó xuất hiện trong biểu diễn thập phân của n.

Có thể tìm được bốn số nguyên dương phân biệt sao cho mỗi số trong bốn số đó là hoán vị chữ số của tổng ba số còn lại không?

Baltic Way

1.2.10 (BW 2015/P16)**.** Ký hiệu $P(n)$ là ước số nguyên tố lớn nhất của n. Tìm tất cả các số nguyên $n \ge 2$ sao cho:

$$P(n) + \lfloor \sqrt{n} \rfloor = P(n+1) + \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor.$$

1.2.11 (BW 2015/P17)**.** Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $2^{2015} \mid n^{n-1} - 1$ nhưng $2^{2016} \nmid n^{n-1} - 1$.

1.2.12 (BW 2015/P18)**.** Cho $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ là một đa thức bậc $n \geq 1$ có n nghiệm nguyên (không nhất thiết phân biệt). Giả sử tồn tại các số nguyên tố phân biệt $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ sao cho với mọi $i = 0, 1, \ldots, n-1$, ta có $a_i > 1$ và là một lũy thừa của p_i. Hỏi có những giá trị nào của n là thỏa mãn?

1.2.13 (BW 2015/P19)**.** Ba số nguyên dương phân biệt từng đôi một a, b, c thỏa mãn $\gcd(a, b, c) = 1$, đồng thời:

$$a \mid (b-c)^2, \quad b \mid (a-c)^2, \quad c \mid (a-b)^2.$$

Chứng minh rằng không tồn tại tam giác không suy biến nào có độ dài ba cạnh là a, b, c.

1.2.14 (BW 2015/P20)**.** Với mỗi số nguyên $n \geq 2$, ta định nghĩa A_n là số lượng các số nguyên dương m thỏa mãn tính chất sau:

Khoảng cách từ n đến bội gần nhất của m bằng khoảng cách từ n^3 đến bội gần nhất của m. (Khoảng cách giữa hai số nguyên a và b được định nghĩa là $|a-b|$.)

Tìm tất cả các số nguyên $n \geq 2$ sao cho A_n là số lẻ.

Benelux

1.2.15 (BxMO 2015/P3)**.** Có tồn tại số nguyên tố nào có dạng thập phân là $3811\cdots1$ hay không, tức là bắt đầu bằng các chữ số $3, 8, 1, 1$, theo đúng thứ tự, và sau đó là một hoặc nhiều chữ số 1?

Czech-Polish-Slovak Match

1.2.16 (CPS 2015/P4)**.** Một chiếc máy tính lạ chỉ có hai nút, mỗi nút mang một số nguyên dương gồm đúng hai chữ số. Ban đầu, máy hiển thị số 1. Mỗi khi nhấn một nút có giá trị N, máy sẽ thay số đang hiển thị X bằng $X \cdot N$ hoặc $X + N$. Hai phép toán nhân và cộng sẽ xen kẽ nhau, bắt đầu bằng phép nhân.

(Ví dụ: nếu nút 1 có giá trị 10, nút 2 có giá trị 20, và ta lần lượt nhấn nút 1, nút 2, nút 1, nút 1 thì ta sẽ thu được: $1 \cdot 10 = 10$, $10 + 20 = 30$, $30 \cdot 10 = 300$, và $300 + 10 = 310$).

Hỏi có tồn tại hai giá trị cụ thể cho hai nút (mỗi giá trị là số có hai chữ số) sao cho ta có thể tạo ra vô hạn số khác nhau (bằng cách tiếp tục nhấn nút, không xóa màn hình) sao cho mỗi số thu được đều có tận cùng là:

(a) 2015,

(b) 5813?

European Girls' Mathematical Olympiad

1.2.17 (EGMO 2015/P3)**.** Cho n, m là các số nguyên lớn hơn 1, và $a_1, a_2, \ldots, a_m$ là các số nguyên dương không vượt quá n^m. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên dương $b_1, b_2, \ldots, b_m$ không vượt quá n, sao cho:

$$\gcd(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m) < n,$$

trong đó $\gcd(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ là ước chung lớn nhất của các số $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

European Mathematical Cup

1.2.18 (EMC 2015/J/P3)**.** Ký hiệu $d(n)$ là số lượng ước dương của n. Với số nguyên dương n, ta định nghĩa:

$$f(n) = d(k_1) + d(k_2) + \cdots + d(k_m),$$

trong đó $1 = k_1 < k_2 < \cdots < k_m = n$ là tất cả các ước của số n.

Ta gọi một số nguyên $n > 1$ là *gần hoàn hảo* (almost perfect) nếu $f(n) = n$.

Hãy tìm tất cả các số gần hoàn hảo.

1.2.19 (EMC 2015/S/P1)**.** Cho $A = \{a, b, c\}$ là một tập hợp gồm ba số nguyên dương. Chứng minh rằng ta có thể tìm được một tập con $B \subset A$, với $B = \{x, y\}$, sao cho với mọi số nguyên dương lẻ m, n, ta có:

$$10 \mid x^m y^n - x^n y^m.$$

Middle European Mathematical Olympiad

1.2.20 (MEMO 2015/I/P4)**.** Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (m, n) sao cho tồn tại các số nguyên $a, b > 1$ nguyên tố cùng nhau, thỏa mãn:

$$\frac{a^m + b^m}{a^n + b^n} \in \mathbb{Z}.$$

1.2.21 (MEMO 2015/I/P7)**.** Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) sao cho:

$$a! + b! = a^b + b^a.$$

1.2.22 (MEMO 2015/I/P8)**.** Cho $n \geq 2$ là một số nguyên. Xác định số lượng các số nguyên dương m sao cho $m \leq n$ và $m^2 + 1$ chia hết cho n.

Nordic Mathematical Contest

1.2.23 (NMC 2015/P2)**.** Tìm các số nguyên tố p, q, r sao cho một trong hai số pqr và $p + q + r$ bằng 101 lần số còn lại.

Rioplatense Mathematical Olympiad, Level 3

1.2.24 (ROM 2015 MO/P3)**.** Ta gọi một số nguyên $n \geq 1$ là *bảo thủ* (conservative) nếu ước số nguyên tố nhỏ nhất của biểu thức $(n!)^n + 1$ không vượt quá $n + 2015$.

Hãy xác định xem có vô hạn số bảo thủ hay không.

Romanian Master of Mathematics

1.2.25 (RMM 2015/P1)**.** Có tồn tại một dãy vô hạn các số nguyên dương $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sao cho hai số a_m và a_n nguyên tố cùng nhau nếu và chỉ nếu $|m - n| = 1$ hay không?

1.2.26 (RMM 2015/P5)**.** Cho $p \geq 5$ là một số nguyên tố. Với một số nguyên dương k, ký hiệu $R(k)$ là phần dư của k khi chia cho p, với $0 \leq R(k) \leq p - 1$.

Xác định tất cả các số nguyên dương $a < p$ sao cho với mọi $m = 1, 2, \ldots, p - 1$, ta có:

$$m + R(ma) > a.$$

International Mathematical Olympiad

1.2.27 (IMO 2015 SL/P1)**.** Xác định tất cả các số nguyên dương M sao cho dãy $a_0, a_1, a_2, \ldots$ được định nghĩa bởi:

$$a_0 = M + \frac{1}{2} \qquad \text{và} \qquad a_{k+1} = a_k \lfloor a_k \rfloor \quad \text{với } k = 0, 1, 2, \ldots$$

chứa ít nhất một số nguyên trong dãy.

1.2.28 (IMO 2015 SL/P2). Cho a và b là các số nguyên dương sao cho $a! + b! \mid a!b!$. Chứng minh rằng:

$$3a \geq 2b + 2.$$

1.2.29 (IMO 2015 SL/P3). Cho m và n là các số nguyên dương sao cho $m > n$. Định nghĩa:

$$x_k = \frac{m+k}{n+k} \quad \text{với } k = 1, 2, \dots, n+1.$$

Chứng minh rằng nếu tất cả các số $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ đều là số nguyên, thì $x_1 x_2 \cdots x_{n+1} - 1$ chia hết cho một số nguyên tố lẻ.

1.2.30 (IMO 2015 SL/P4). Giả sử $a_0, a_1, \dots$ và $b_0, b_1, \dots$ là hai dãy số nguyên dương sao cho $a_0, b_0 \geq 2$, và:

$$a_{n+1} = \gcd(a_n, b_n) + 1, \qquad b_{n+1} = \operatorname{lcm}(a_n, b_n) - 1.$$

Chứng minh rằng dãy a_n là tuần hoàn sau cùng, tức là tồn tại các số nguyên $N \geq 0$ và $t > 0$ sao cho:

$$a_{n+t} = a_n \quad \text{với mọi } n \geq N.$$

1.2.31 (IMO 2015/P2). Find all positive integers (a, b, c) such that

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

are all powers of 2.

1.2.32 (IMO 2015 SL/P6). Ký hiệu $\mathbb{Z}_{>0}$ là tập các số nguyên dương. Xét một hàm $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$. Với mọi $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, ta định nghĩa:

$$f^n(m) = \underbrace{f(f(\dots f}_{n \text{ lần}}(m)\dots)).$$

Giả sử hàm f thỏa mãn hai tính chất sau:

- Với mọi $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, ta có $\frac{f^n(m)-m}{n} \in \mathbb{Z}_{>0}$;
- Tập $\mathbb{Z}_{>0} \setminus \{f(n) \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ là hữu hạn.

Chứng minh rằng dãy số $f(1) - 1, f(2) - 2, f(3) - 3, \dots$ là tuần hoàn.

1.2.33 (IMO 2015 SL/P7). Ký hiệu $\mathbb{Z}_{>0}$ là tập các số nguyên dương. Với một số nguyên dương k, ta gọi một hàm $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ là *hàm k-tốt* nếu:

$$\gcd(f(m) + n,\ f(n) + m) \leq k \quad \text{với mọi } m \neq n.$$

Tìm tất cả các giá trị k sao cho tồn tại một hàm k-tốt.

1.2.34 (IMO 2015 SL/P8). Với mỗi số nguyên dương n có phân tích thành thừa số nguyên tố $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, định nghĩa:

$$\mho(n) = \sum_{\substack{i: \\ p_i > 10^{100}}} \alpha_i.$$

Nói cách khác, $\mho(n)$ là tổng số mũ của các thừa số nguyên tố lớn hơn 10^{100} trong phân tích thừa số nguyên tố của n, tính cả bội số.

Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *tăng chặt* (tức là $a > b \Rightarrow f(a) > f(b)$) sao cho:

$$\mho(f(a) - f(b)) \leq \mho(a - b) \quad \text{với mọi } a > b \text{ trong } \mathbb{Z}.$$

Phần II

Gợi ý

Phần III

Lời giải

Phần IV

Công cụ

Chương 2

Định lý, bổ đề, và hằng đẳng thức

2.1 Các nguyên lý và chiến lược giải toán

Định lý 2.1.1 (Nguyên lý quy nạp toán học)

Giả sử $P(n)$ là một mệnh đề toán học xác định với mọi số nguyên $n \geq n_0$, trong đó n_0 là một số nguyên cố định. Nếu thỏa mãn:

- (Cơ sở quy nạp) $P(n_0)$ đúng;
- (Bước quy nạp) Với mọi $k \geq n_0$, nếu $P(k)$ đúng thì $P(k+1)$ cũng đúng,

thì $P(n)$ đúng với mọi $n \geq n_0$.

Định lý 2.1.2 (Nguyên lý Dirichlet)

Nếu có nhiều hơn n đối tượng được phân vào n ngăn, thì tồn tại ít nhất một ngăn chứa từ hai đối tượng trở lên.

Định lý 2.1.3 (Nguyên lý cực hạn)

Trong một tập hợp hữu hạn các đối tượng, nếu mỗi đối tượng được gán một giá trị theo tiêu chí nhất định, thì tồn tại phần tử đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất (gọi là phần tử cực đại hoặc cực tiểu).

Việc chọn phần tử như vậy (cực đại hoặc cực tiểu) thường giúp đơn giản hóa bài toán hoặc dẫn đến mâu thuẫn khi giả sử ngược.

Định lý 2.1.4 (Nguyên lý bất biến)

Trong một quá trình gồm nhiều bước biến đổi, nếu tồn tại một đại lượng không thay đổi qua mỗi bước (gọi là bất biến), thì có thể dùng bất biến đó để suy ra tính chất hoặc kết thúc của quá trình.

Nguyên lý này đặc biệt hữu ích để chứng minh rằng một trạng thái nào đó là không thể đạt được, hoặc rằng quá trình phải dừng sau hữu hạn bước.

Định lý 2.1.5 (Nguyên lý đổi biến đơn điệu)

Giả sử trong một quá trình, có một đại lượng luôn tăng hoặc luôn giảm qua mỗi bước (gọi là biến đơn điệu, hay monovariant), và đại lượng đó bị chặn, thì quá trình phải kết thúc sau hữu hạn bước.

Nguyên lý này thường dùng để chứng minh một quá trình không thể tiếp diễn vô hạn.

Định lý 2.1.6 (Nguyên lý phản chứng)

Để chứng minh một mệnh đề P là đúng, ta có thể giả sử rằng P sai và từ đó suy ra một mâu thuẫn logic. Khi đó, kết luận rằng P là đúng.

Đây là một trong những phương pháp chứng minh phổ biến và hiệu quả nhất trong toán học.

Định lý 2.1.7 (Chiến lược xét chẵn/lẻ)

Trong các bài toán liên quan đến số nguyên, việc phân tích tính chẵn/lẻ (parity) của các đại lượng có thể giúp phát hiện các mâu thuẫn hoặc bất biến, từ đó giải được bài toán.

Tính chẵn/lẻ là một dạng đặc biệt của bất biến hoặc monovariant.

2.2 Các định lý giải tích

Bổ đề 2.2.1 (Tính phân kỳ của chuỗi điều hoà)
Chuỗi điều hoà $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ tăng mà không bị chặn, tức là:

$$\lim_{n \to \infty} H_n = \infty.$$

Ngoài ra, với mọi $n \geq 1$, ta có đánh giá gần đúng:

$$\log n < H_n < 1 + \log n.$$

2.3 Số nguyên tố và phép chia hết

Định nghĩa 2.3.1 (Số nguyên tố)**.** Một số nguyên $p > 1$ được gọi là **số nguyên tố** nếu p chỉ có đúng hai ước dương là 1 và p (tức là không chia hết cho số nguyên dương nào khác ngoài 1 và chính nó).

Định nghĩa 2.3.2 (Hợp số)**.** Một số nguyên $n > 1$ được gọi là **hợp số** nếu tồn tại một số nguyên dương d sao cho $1 < d < n$ và $d \mid n$ (tức là n có ước khác ngoài 1 và chính nó).

Định lý 2.3.3 (Định lý cơ bản của số học)
Mọi số tự nhiên lớn hơn 1 có thể viết một cách duy nhất (không kể sự sai khác về thứ tự các thừa số) thành tích các thừa số nguyên tố:
$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$
với p_i là các số nguyên tố khác nhau và $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$.

Định lý 2.3.4 (Định lý Euclid)
Có vô số số nguyên tố. Cụ thể, với bất kỳ tập hữu hạn các số nguyên tố $p_1, p_2, \dots, p_k$, tồn tại số nguyên tố p không thuộc tập đó.

Định lý 2.3.5 (Định lý Bertrand)
Với mọi số nguyên $n > 1$, tồn tại số nguyên tố p sao cho:
$$n < p < 2n.$$

Định lý 2.3.6 (Định lý số nguyên tố — dạng yếu)
Hàm đếm số nguyên tố $\pi(n)$ thỏa mãn:
$$\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}, \quad \text{và } \pi(n) < \frac{1.25506n}{\log n}.$$

Định lý 2.3.7 (Tính chất cơ bản của phép chia)
Với các số nguyên x, y, z, ta có:

- $x \mid x$, $1 \mid x$, $x \mid 0$
- Nếu $x \mid y$ và $y \mid z$ thì $x \mid z$
- Nếu $x \mid y$ thì tồn tại $k \in \mathbb{Z}$ sao cho $y = kx$
- Nếu $x \mid y$ thì $x \mid yz$ với mọi z
- Nếu $x \mid y$ và $x \mid z$ thì $x \mid (ay + bz)$ với mọi $a, b \in \mathbb{Z}$
- Nếu $x \mid y$ và $y \mid x$ thì $x = \pm y$

Định lý 2.3.8 (Tính chất gcd và lcm)
Với $a, b \in \mathbb{Z}^+$, ta có:

$$\gcd(a, b) \cdot \text{lcm}(a, b) = ab.$$

Ngoài ra:

- $\gcd(a, b) \mid a$ và $\gcd(a, b) \mid b$
- $\text{lcm}(a, b)$ là bội chung nhỏ nhất

Định lý 2.3.9 (Định lý chia có dư)
Với $a \in \mathbb{Z}$ và $b \in \mathbb{Z}^+$, tồn tại duy nhất $q, r \in \mathbb{Z}$ sao cho:

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b.$$

Định lý 2.3.10 (Thuật toán Euclid)
Thuật toán tìm $\gcd(a, b)$ dựa vào lặp lại định lý chia:

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b).$$

Định lý 2.3.11 (Định lý Bézout)
Với $a, b \in \mathbb{Z}$, tồn tại $x, y \in \mathbb{Z}$ sao cho:

$$ax + by = \gcd(a, b).$$

Định lý 2.3.12 (Tính chất số nguyên tố)
Nếu p là số nguyên tố và $p \mid ab$, thì $p \mid a$ hoặc $p \mid b$.

Định lý (Chia hết trong tích khi nguyên tố cùng nhau)
Nếu $a \mid bc$ và $\gcd(a, b) = 1$, thì $a \mid c$.

Bổ đề 2.3.13 (Biểu diễn số có các chữ số 1)
Với mọi số nguyên dương n, ta có:

$$\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ chữ số } 1} = \frac{10^n - 1}{9}.$$

2.4 Số học đồng dư cơ bản

Định nghĩa 2.4.1 (Đồng dư modulo n). Với $a, b, n \in \mathbb{Z}$, ta nói $a \equiv b \pmod{n}$ khi $n \mid (a - b)$.

Định lý 2.4.2 (Tính chất đại số của phép đồng dư)
Với $a \equiv r \pmod{n}$ và $b \equiv s \pmod{n}$, ta có:

- $a + b \equiv r + s \pmod{n}$
- $ab \equiv rs \pmod{n}$
- $ka \equiv kr \pmod{n}$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$

Định lý 2.4.3 (Ước nguyên tố dạng $4k + 3$)
Mỗi số nguyên dương có dạng $4s + 3$ đều có ít nhất một ước nguyên tố cũng có dạng đó, tức là $\equiv -1 \pmod{4}$ (see Định lý Dirichlet về cấp số cộng nguyên tố).

Định lý 2.4.4 (Định lý nhỏ Fermat)
Nếu p là số nguyên tố và $\gcd(a, p) = 1$, thì:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Hệ quả: $a^p \equiv a \pmod{p}$ với mọi $a \in \mathbb{Z}$.

Định lý 2.4.5 (Định lý số dư Trung Hoa)
Cho các số nguyên $n_1, \ldots, n_k$ đôi một nguyên tố cùng nhau và các số nguyên $a_1, \ldots, a_k$, tồn tại duy nhất $x \mod N = n_1 n_2 \cdots n_k$ sao cho:

$$x \equiv a_i \pmod{n_i}, \quad \forall i.$$

Định lý 2.4.6 (Định lý Euler)
Với $\gcd(a, n) = 1$, ta có:

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Định lý 2.4.7 (Định lý Wilson)
Với số nguyên tố p, ta có:

$$(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Định lý 2.4.8 (Hủy nhân trong đồng dư)

Nếu $ad \equiv bd \pmod{n}$, thì:

$$a \equiv b \pmod{\frac{n}{\gcd(d,n)}}.$$

Định lý 2.4.9 (Định lý Dirichlet về cấp số cộng nguyên tố)

Cho hai số nguyên dương a và d sao cho $\gcd(a,d) = 1$. Khi đó, cấp số cộng $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$ chứa vô hạn số nguyên tố.

2.5 Các hàm số học

Định nghĩa 2.5.1 (Hàm số ước số dương)**.** Với $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$, ta có:

$$\tau(n) = (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_k).$$

Hàm này đếm số ước dương của n. Cũng được ký hiệu là $d(n)$.

Định nghĩa 2.5.2 (Hàm tổng ước số)**.** Với $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$, ta có:

$$\sigma(n) = (1 + p_1 + \cdots + p_1^{a_1}) \cdots (1 + p_k + \cdots + p_k^{a_k}) .$$

Đây là tổng các ước dương của n.

Định nghĩa 2.5.3 (Hàm phi Euler)**.** Với $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$, ta có:

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Hàm này đếm số nguyên dương nhỏ hơn n và nguyên tố cùng nhau với n.

Định nghĩa 2.5.4 (Hàm Möbius)**.** Với $n \in \mathbb{Z}^+$, định nghĩa:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 1, \\ (-1)^k & \text{nếu } n \text{ là tích của } k \text{ số nguyên tố phân biệt,} \\ 0 & \text{nếu } n \text{ chia hết bình phương của số nguyên tố.} \end{cases}$$

Định lý 2.5.5 (GCD Power Sum Identity)
For any positive integer n and any real or complex number a, we have

$$\sum_{k=1}^{n} a^{\gcd(k,n)} = \sum_{d|n} \phi(d)\, a^{n/d}.$$

Định nghĩa 2.5.6 (Phép nhân Dirichlet)**.** Với hai hàm số số học $f, g \colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$, định nghĩa:

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d).$$

Định lý 2.5.7 (Đẳng thức $\tau = 1 * 1$)
Hàm $\tau(n)$ là tích Dirichlet của hai hàm hằng:

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1 = (1 * 1)(n).$$

Định lý 2.5.8 (Đẳng thức $\sigma = \mathrm{id} * 1$)
Hàm tổng ước $\sigma(n)$ là tích Dirichlet của hàm đồng nhất và hàm hằng:

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d = (\mathrm{id} * 1)(n).$$

Định lý 2.5.9 (Tổng $\mu(d)$ trên các ước)
Với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, ta có:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 1, \\ 0 & \text{nếu } n > 1. \end{cases}$$

Định lý 2.5.10 (Nghịch đảo Möbius tổng quát)
Nếu $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$, thì:

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(n/d).$$

Định lý 2.5.11 (Bất đẳng thức cho $\varphi(n)$)
Với $n \geq 3$, ta có:

$$\frac{n}{\log\log n} < \varphi(n) < n.$$

Định lý 2.5.12 (Tổng các giá trị $\varphi(n)$)
Khi $x \to \infty$, ta có:

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n) \sim \frac{3}{\pi^2} x^2.$$

Định lý (Tổng các số nguyên tố cùng nhau với m)
Gọi T là tổng các số nguyên dương nhỏ hơn m và nguyên tố cùng nhau với m, thì ta có:

$$T = \frac{m\varphi(m)}{2}.$$

2.6 Phương trình nghiệm nguyên

Định lý 2.6.1 (Đẳng thức Simon yêu thích)
Với các biểu thức như $xy + ax + by + c$, ta có:

$$xy + ax + by + c = (x + a)(y + b) + (c - ab).$$

Được dùng để đưa phương trình hai biến về dạng tích.

Bổ đề 2.6.2 (Nguyên lý hạ vô hạn (Infinite Descent))
Nếu tồn tại dãy vô hạn các số nguyên dương $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots$ mà mỗi x_i thỏa mãn tính chất P, thì có mâu thuẫn. Do đó, giả thiết ban đầu là sai.

Định lý 2.6.3 (Monovariant $S = |x| + |y| + |z|$)
Nếu một quá trình biến đổi bộ số nguyên luôn làm giảm hoặc giữ nguyên $S = |x| + |y| + |z|$ và $S \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, thì quá trình phải kết thúc sau hữu hạn bước.

Định lý 2.6.4 (Kỹ thuật Vieta Jumping)
Với phương trình đối xứng $P(x, y) = 0$, nếu (a, b) là nghiệm nguyên và $x^2 - (a+b)x + ab = 0$, thì nghiệm còn lại x' cũng là nghiệm. Nếu $x' < a$, ta có thể sử dụng Vieta Jumping để tìm nghiệm nhỏ hơn — dẫn đến mâu thuẫn.

Bổ đề 2.6.5 (Mâu thuẫn đồng dư)
Nếu giả sử $a \equiv b \pmod p$ nhưng rút ra $a \equiv c \not\equiv b \pmod p$, thì mâu thuẫn xảy ra. Kỹ thuật dùng để loại nghiệm.

Định lý 2.6.6 (Định lý Fermat Giáng Sinh)
Phương trình:

$$x^4 + y^4 = z^2$$

không có nghiệm nguyên dương khác 0.

2.7 Phân bố đều và số vô tỉ

Bổ đề 2.7.1 (Phân bố đều của phần thập phân số vô tỉ)

Cho $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Khi đó dãy $\{n\alpha\}$ phân bố đều trên khoảng $(0, 1)$, tức là với mọi $0 \le a < b \le 1$, ta có:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \left|\{1 \le n \le N : \{n\alpha\} \in [a, b)\}\right| = b - a.$$

Ở đây $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ là phần thập phân của x.

2.8 Căn nguyên thủy và đẳng thức cổ điển

Định nghĩa 2.8.1 (Bậc modulo n)**.** Với $a \in \mathbb{Z}$, $\gcd(a, n) = 1$, bậc của a modulo n, ký hiệu $\operatorname{ord}_n(a)$, là số nguyên dương nhỏ nhất d sao cho:

$$a^d \equiv 1 \pmod{n}.$$

Định lý 2.8.2 (Tính chia hết của bậc)
Nếu $a^k \equiv 1 \pmod{n}$, thì $\operatorname{ord}_n(a) \mid k$.

Bổ đề 2.8.3 (Tính chất đồng dư theo bậc)
Nếu $\operatorname{ord}_n(a) = d$, thì:

$$a^i \equiv a^j \pmod{n} \iff i \equiv j \pmod{d}.$$

Bổ đề 2.8.4 (Tổng Euler lũy thừa theo modulo)
Với mọi số nguyên tố p và số nguyên $j \geq 1$, và với mọi $x \in \mathbb{Z}$, ta có:

$$\sum_{k=0}^{j} \phi\left(p^k\right) x^{p^{j-k}} \equiv 0 \pmod{p^j}.$$

Định nghĩa 2.8.5 (Căn nguyên thủy)**.** Một số $g \in \mathbb{Z}$ được gọi là căn nguyên thủy modulo n nếu:

$$\operatorname{ord}_n(g) = \varphi(n).$$

Khi đó g sinh ra nhóm $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

Định lý 2.8.6 (Tồn tại căn nguyên thủy)
Căn nguyên thủy tồn tại nếu và chỉ nếu:

$$n = 1,\ 2,\ 4,\ p^k,\ 2p^k \text{ với } p \text{ là số nguyên tố lẻ.}$$

Bổ đề 2.8.7 (Bậc của lũy thừa)
Nếu $\operatorname{ord}_n(a) = d$, thì:

$$\operatorname{ord}_n(a^k) = \frac{d}{\gcd(k, d)}.$$

Định lý 2.8.8 (Đẳng thức Sophie Germain)
Với mọi $a, b \in \mathbb{Z}$, ta có:
$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab).$$

2.9 Chuẩn p-adic và định lý LTE

Định nghĩa 2.9.1 (Chuẩn p-adic)**.** Với p là số nguyên tố và $n \in \mathbb{Z}$, định nghĩa:

$$\nu_p(n) = \begin{cases} \max\{k \in \mathbb{N}_0 : p^k \mid n\} & \text{nếu } n \neq 0, \\ \infty & \text{nếu } n = 0. \end{cases}$$

Định lý 2.9.2 (Tính chất cơ bản của ν_p)
Với $a, b \in \mathbb{Z}$, ta có:

- $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$
- $\nu_p(a^k) = k\nu_p(a)$
- $\nu_p\left(\frac{a}{b}\right) = \nu_p(a) - \nu_p(b)$
- $\nu_p(a+b) \geq \min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}$

Dấu bằng xảy ra nếu $\nu_p(a) \neq \nu_p(b)$.

Định lý 2.9.3 (Định lý LTE cho hiệu — $p \mid x - y$)
Cho $x, y \in \mathbb{Z}$, p là số nguyên tố lẻ, $n \in \mathbb{Z}^+$, nếu $p \mid x - y$ và $p \nmid xy$, thì:

$$\nu_p(x^n - y^n) = \nu_p(x - y) + \nu_p(n).$$

Định lý 2.9.4 (Định lý LTE cho tổng — $p \mid x + y$)
Cho $p > 2$ là số nguyên tố, $x, y \in \mathbb{Z}$, $p \mid x + y$, và $p \nmid xy$. Khi đó với n lẻ:

$$\nu_p(x^n + y^n) = \nu_p(x + y) + \nu_p(n).$$

Định lý 2.9.5 (Định lý LTE cho $\nu_2(x^n - 1)$)
Với $x \in \mathbb{Z}$ lẻ và $n \in \mathbb{Z}^+$, ta có:

$$\nu_2(x^n - 1) = \nu_2(x - 1) + \nu_2(x + 1) + \nu_2(n) - 1.$$

Định lý 2.9.6 (Định lý Zsigmondy)
Nếu $a > b > 0$, $\gcd(a, b) = 1$, và $n > 1$, thì tồn tại ước nguyên tố của $a^n - b^n$ không chia $a^k - b^k$ với $k < n$, trừ các ngoại lệ:

$$(a, b, n) = (2, 1, 6), \text{ hoặc } a + b \text{ là lũy thừa của 2 và } n = 2.$$

2.10 Đa thức

Định lý 2.10.1 (Định lý nghiệm hữu tỉ)
Nếu $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ có nghiệm hữu tỉ $\frac{r}{s}$ với $\gcd(r, s) = 1$, thì:

$$r \mid a_0, \quad s \mid a_n.$$

Định lý 2.10.2 (Định lý chia đa thức)
Với $F(x), G(x) \in \mathbb{Z}[x]$, tồn tại duy nhất $Q(x), R(x) \in \mathbb{Z}[x]$ sao cho:

$$F(x) = G(x)Q(x) + R(x), \quad \deg R < \deg G.$$

Định lý 2.10.3 (Nội suy Lagrange)
Cho $n + 1$ điểm phân biệt $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, tồn tại một đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, bậc không vượt quá n, sao cho $P(x_i) = y_i$ với mọi i. Cụ thể:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \ne i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Bổ đề 2.10.4 (Đồng dư đa thức theo hiệu)
Nếu $a \equiv b \pmod{a - b}$, thì với mọi đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, ta có:

$$P(a) \equiv P(b) \pmod{a - b}.$$

Định lý 2.10.5 (Định lý cơ bản của đại số — dạng thực)
Mọi đa thức hệ số thực bậc ít nhất 1 có thể phân tích thành tích của các đa thức bậc nhất hoặc bậc hai không khả quy trong $\mathbb{R}[x]$.

Định lý 2.10.6 (Định lý Lucas)
Cho số nguyên tố p và $m, n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$, viết:

$$m = m_0 + m_1 p + \cdots + m_k p^k, \quad n = n_0 + n_1 p + \cdots + n_k p^k,$$

thì:

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^{k} \binom{m_i}{n_i} \pmod{p}.$$

Định lý 2.10.7 (Đẳng thức Vandermonde)
Với $m, n, r \in \mathbb{Z}^+$, ta có:
$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$$

2.11 Số dư bậc hai và ký hiệu Legendre

Định nghĩa 2.11.1 (Ký hiệu Legendre)**.** Với số nguyên tố lẻ p và $a \in \mathbb{Z}$, định nghĩa:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } p \mid a, \\ 1 & \text{nếu } a \not\equiv 0 \pmod p \text{ và } \exists x \in \mathbb{Z} : x^2 \equiv a \pmod p, \\ -1 & \text{nếu } a \text{ không là bình phương chính phương modulo } p. \end{cases}$$

Định lý 2.11.2 (Tính chất của ký hiệu Legendre)

Với $a, b \in \mathbb{Z}$ và số nguyên tố lẻ p, ta có:

- $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$
- $\left(\frac{a^2}{p}\right) = 1$ nếu $p \nmid a$
- $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$
- $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$

Định lý 2.11.3 (Tổng cấp số nhân modulo p)

Cho số nguyên tố p, và $a \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ sao cho $a^k \equiv 1 \pmod p$, ta có:

$$\sum_{i=0}^{k-1} a^i \equiv 0 \pmod p.$$

Đây là tổng của một cấp số nhân bậc k với công bội $a \not\equiv 1 \pmod p$ trong $\mathbb{F}_p$.

Định lý 2.11.4 (Tồn tại căn bậc hai của -1)

Với số nguyên tố lẻ p, ta có:

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } p \equiv 1 \pmod 4, \\ -1 & \text{nếu } p \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Do đó, -1 là số chính phương modulo p khi và chỉ khi $p \equiv 1 \pmod 4$.

Định lý 2.11.5 (Định luật tương hỗ bậc hai)

Với hai số nguyên tố lẻ phân biệt p, q, ta có:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

Hệ quả (Tổng Legendre bằng 0)

Với số nguyên tố lẻ p, ta có:

$$\sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a}{p}\right) = 0.$$

Định lý 2.11.6 (Ước lượng số dư bậc hai nhỏ nhất)

Với số nguyên tố $p > 3$, tồn tại số nguyên $r \in \{2, 3, \ldots, \lfloor\sqrt{p}\rfloor + 1\}$ sao cho r không là số dư bậc hai modulo p. Do đó:

$$r < \sqrt{p} + 1.$$

2.12 Căn nguyên thủy và bậc lũy thừa (phần nâng cao)

Bổ đề 2.12.1 (Tồn tại phần tử bậc d)
Nếu $d \mid p-1$, thì tồn tại $a \in \mathbb{Z}$ sao cho:
$$\operatorname{ord}_p(a) = d.$$
Có chính xác $\varphi(d)$ phần tử như vậy trong $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.

Định lý 2.12.2 (Tập các phần tử bậc d)
Nếu $d \mid p-1$, thì tập các phần tử bậc d trong $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ có đúng $\varphi(d)$ phần tử. Hợp của các tập này (khi $d \mid p-1$) chính là toàn bộ nhóm $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.

Định lý 2.12.3 (Các nghiệm của $x^d \equiv 1 \pmod p$)
Với $d \mid p-1$, phương trình $x^d \equiv 1 \pmod p$ có đúng d nghiệm phân biệt modulo p, tạo thành một nhóm con cyclic của $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.

Bổ đề 2.12.4 (Tính chia hết qua bậc)
Nếu $a^k \equiv 1 \pmod p$, thì $\operatorname{ord}_p(a) \mid k$.

Định lý 2.12.5 (Cấu trúc nhóm nhân modulo p)
Với số nguyên tố p, nhóm $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ là cyclic cấp $p-1$, tức là tồn tại $g \in \mathbb{Z}$ sao cho:
$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times = \{g^1, g^2, \ldots, g^{p-1}\}.$$

Bổ đề 2.12.6 (Rút gọn đồng dư theo mũ)
Nếu $a^k \equiv b^k \pmod p$ và $\gcd(k, p-1) = 1$, thì:
$$a \equiv b \pmod p.$$

2.13 Bậc lũy thừa theo hợp số

Định nghĩa 2.13.1 (Hàm Carmichael)**.** Hàm Carmichael $\lambda(n)$ là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho:

$$a^{\lambda(n)} \equiv 1 \pmod{n} \quad \text{với mọi } a \in \mathbb{Z} \text{ sao cho } \gcd(a,n) = 1.$$

Nếu $n = \operatorname{lcm}(m_1, \ldots, m_k)$, thì:

$$\lambda(n) = \operatorname{lcm}(\lambda(m_1), \ldots, \lambda(m_k)).$$

Với số nguyên tố p, ta có:

$$\lambda(p^e) = \begin{cases} \varphi(p^e) & \text{nếu } p \text{ lẻ, hoặc } p = 2, e \le 2, \\ \frac{1}{2}\varphi(p^e) & \text{nếu } p = 2, e \ge 3. \end{cases}$$

Định lý 2.13.2 (Bậc modulo hợp số)

Với $a \in \mathbb{Z}$, $\gcd(a,n) = 1$, ta có:

$$\operatorname{ord}_n(a) \mid \lambda(n), \quad \text{và } a^{\operatorname{ord}_n(a)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Bổ đề 2.13.3 (Bậc modulo tích các lũy thừa số nguyên tố)

Nếu $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$, và $\gcd(a,n) = 1$, thì:

$$\operatorname{ord}_n(a) = \operatorname{lcm}\big(\operatorname{ord}_{p_1^{e_1}}(a),\ \operatorname{ord}_{p_2^{e_2}}(a),\ \ldots,\ \operatorname{ord}_{p_k^{e_k}}(a)\big).$$

2.14 Thủ thuật, kỹ thuật và công cụ hiếm gặp

Định lý 2.14.1 (Trung bình số ước)
Gọi $d(k)$ là số ước dương của k. Khi đó:

$$\log n - 1 \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d(k) \leq \log n + 1.$$

Tức là trung bình số ước thỏa $\Theta(\log n)$.

Định lý 2.14.2 (Tổng tất cả các ước từ 1 đến n)
Ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(i) = \sum_{i=1}^{n} i \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor.$$

Đây là tổng các ước dương của tất cả các số từ 1 đến n.

Định lý 2.14.3 (Ma trận ước số $D_{i,j}$)
Xét bảng D cấp $n \times n$ với phần tử:

$$D_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } j \mid i, \\ 0 & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Tổng theo hàng thứ i là $\tau(i)$, tổng theo cột thứ j là $\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor$.

Định lý 2.14.4 (Tổng nghịch đảo ước số)
Với mọi $n \geq 1$, ta có:

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d} \leq \log n + 1.$$

Chương 3

Tiêu chuẩn Xếp hạng MOHS

Thang độ khó MOHS

Trong tài liệu này, Evan Chen cung cấp xếp hạng độ khó cá nhân cho các bài toán từ một số kỳ thi gần đây. Điều này đòi hỏi phải xác định một tiêu chí đánh giá độ khó một cách cẩn thận. Evan Chen gọi hệ thống này là **thang độ khó MOHS** (phát âm là "moez"); đôi khi anh cũng sử dụng đơn vị "M" (viết tắt của "Mohs").

Thang đo này tiến hành theo bước nhảy 5M, với mức thấp nhất là 0M và mức cao nhất là 60M. Tuy nhiên, trên thực tế, rất ít bài toán được xếp hạng cao hơn 50M, nên có thể coi nó chủ yếu là một thang đo từ 0M đến 50M, với một số bài toán thuộc dạng "vượt mức thông thường".

Bên dưới là bản dịch tiếng Việt từ tài liêu trên.

Xếp hạng dựa theo ý kiến cá nhân của Evan Chen

Mặc dù có rất nhiều điều đã được viết ra ở đây, nhưng cuối cùng, những xếp hạng này vẫn chỉ là ý kiến cá nhân của Evan Chen. Evan Chen không khẳng định rằng các xếp hạng này là khách quan hoặc phản ánh một sự thật tuyệt đối nào đó.

Lưu ý hài hước (Bảo hành xếp hạng). Các xếp hạng được cung cấp "nguyên trạng", không có bất kỳ bảo hành nào, dù rõ ràng hay ngụ ý, bao gồm nhưng không giới hạn ở các bảo hành về khả năng thương mại, sự phù hợp với một mục đích cụ thể, và việc không vi phạm quyền sở hữu trí tuệ. Trong mọi trường hợp, Evan không chịu trách nhiệm đối với bất kỳ khiếu nại, thiệt hại hoặc trách nhiệm pháp lý nào phát sinh từ, liên quan đến, hoặc có liên quan đến những xếp hạng này.

Hướng dẫn sử dụng

Cảnh báo quan trọng: Lạm dụng các xếp hạng này có thể gây hại cho bạn.

Ví dụ, nếu bạn quyết định không nghiêm túc thử sức với một số bài toán chỉ vì chúng được xếp hạng 40M trở lên, bạn có thể tự làm khó mình bằng cách tước đi cơ hội tiếp xúc với những bài toán khó. Nếu bạn không thường xuyên thử sức với các bài toán cấp độ IMO3 một cách nghiêm túc, bạn sẽ không bao giờ đạt đến mức độ có thể thực sự giải được chúng.

Vì lý do này, nghịch lý thay, đôi khi việc không biết bài toán khó đến mức nào lại tốt hơn, để bạn không vô thức có thái độ bỏ cuộc ngay từ đầu.

Các xếp hạng này được thiết kế để làm tài liệu tham khảo. Một cách sử dụng hợp lý là không xem xếp hạng bài toán cho đến khi bạn đã giải xong; điều này mô phỏng tốt nhất điều kiện thi đấu thực tế, khi bạn không biết độ khó của bài toán cho đến khi bạn giải được nó hoặc hết giờ và thấy những ai khác đã giải được. Bạn đã được cảnh báo. Chúc may mắn!

Ý nghĩa của các mức xếp hạng bài toán

Dưới đây là ý nghĩa của từng mức độ xếp hạng bài toán theo thang đo MOHS.

Định nghĩa (0M)**.** Bài toán có mức 0M quá dễ để xuất hiện trong IMO. Thông thường, một học sinh giỏi trong lớp toán nâng cao có thể giải được bài toán này mà không cần đào tạo chuyên sâu về toán olympic.

Định nghĩa (5M)**.** Đây là mức dễ nhất có thể xuất hiện trong IMO nhưng vẫn đáp ứng tiêu chuẩn của kỳ thi. Những bài toán này có thể được giải quyết rất nhanh.

Ví dụ:

- IMO 2019/1 về phương trình $f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$
- IMO 2017/1 về căn bậc hai $\sqrt{a_n}$ hoặc $a_n + 3$

Định nghĩa (10M)**.** Đây là mức độ dành cho các bài toán IMO số 1 hoặc 4 mà hầu hết các thí sinh không gặp khó khăn khi giải. Tuy nhiên, vẫn cần có một số công việc để hoàn thành lời giải.

Ví dụ:

- IMO 2019/4 về $k! = (2^n - 1)\dots$
- IMO 2018/1 về $DE \parallel FG$

Định nghĩa (15M)**.** Đây là mức thấp nhất của các bài toán có thể xuất hiện dưới dạng bài số 2 hoặc 5 của IMO, nhưng thường phù hợp hơn với bài số 1 hoặc 4. Những bài toán này thường có thể được giải quyết dễ dàng bởi các đội tuyển thuộc top 10 thế giới.

Ví dụ:

- IMO 2019/5 về bài toán "Ngân hàng Bath"
- IMO 2018/4 về "Amy/Ben và lưới 20×20"
- IMO 2017/4 về tiếp tuyến KT của Γ

Định nghĩa (20M)**.** Những bài toán ở mức này có thể quá khó để xuất hiện dưới dạng IMO 1/4 nhưng vẫn chưa đạt đến độ khó trung bình của IMO 2/5.

Ví dụ:

- IMO 2018/5 về $a_1, a_2, \dots, a_n$ sao cho $\frac{a_1}{a_2} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \in \mathbb{Z}$

Định nghĩa (25M)**.** Đây là mức độ phù hợp nhất với các bài toán IMO 2/5. Những bài toán này là thử thách thực sự ngay cả với các đội tuyển hàng đầu.

Ví dụ:

- IMO 2019/2 về "P_1, Q_1, P, Q đồng viên"

Định nghĩa (30M)**.** Những bài toán ở mức này khó hơn một chút so với mức trung bình của IMO 2/5, nhưng vẫn chưa đủ khó để được sử dụng làm bài số 3 hoặc 6.

Ví dụ:

- IMO 2018/2 về phương trình $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$

Định nghĩa (35M)**.** Đây là mức độ khó cao nhất dành cho các bài toán IMO 2/5 và cũng là mức độ dễ nhất của các bài toán IMO 3/6.

Ví dụ:

- IMO 2019/6 về "$DI \cap PQ$ trên phân giác góc ngoài $\angle A$"
- IMO 2017/5 về "Ngài Alex và các cầu thủ bóng đá"

Định nghĩa (40M)**.** Những bài toán ở mức này quá khó để xuất hiện ở IMO 2/5. Ngay cả các đội tuyển hàng đầu cũng không thể đạt điểm tuyệt đối với bài toán ở mức này.

Ví dụ:

- IMO 2019/3 về “mạng xã hội và xor tam giác”
- IMO 2017/2 về phương trình $f(f(x)f(y)) + f(x + y) = f(xy)$
- IMO 2017/3 về “thợ săn và con thỏ”
- IMO 2017/6 về “nội suy đa thức thuần nhất”

Định nghĩa (45M)**.** Bài toán thuộc hạng này thường chỉ có một số ít thí sinh giải được. Đây là mức độ của những bài toán IMO 3/6 khó hơn mức trung bình.

Ví dụ:

- IMO 2018/3 về “tam giác phản Pascal”
- IMO 2018/6 về “$\angle BXA + \angle DXC = 180°$”

Định nghĩa (50M)**.** Đây là mức khó nhất mà một bài toán vẫn có thể xuất hiện trong kỳ thi IMO hoặc bài kiểm tra chọn đội tuyển của các quốc gia hàng đầu.

Định nghĩa (55M)**.** Bài toán ở mức này quá dài dòng hoặc tốn nhiều thời gian để giải quyết trong một kỳ thi có giới hạn thời gian.

Định nghĩa (60M)**.** Bài toán ở mức này không thể giải trong vòng 4,5 giờ bởi học sinh trung học, nhưng vẫn có thể được giải quyết trong điều kiện không giới hạn thời gian. Ví dụ, một kết quả từ một nghiên cứu tổ hợp với chứng minh dài 15 trang có thể rơi vào hạng này.

Lưu ý: Evan Chen sử dụng bội số của 5 để tránh nhầm lẫn giữa số bài toán (ví dụ: bài toán số 6) với mức độ khó (ví dụ: 30M).

Từ điển chú giải

APMO 2015 Asian Pacific Mathematical Olympiad 2015 16

BGR 2015 EGMO TST Bulgaria EGMO TST 2015 5

BGR 2015 MO Bulgaria MO 2015 5

BMO 2015 Balkan Mathematical Olympiad 2015 16

BMO 2015 SL Balkan Mathematical Olympiad Shortlist 2015 17

BW 2015 Baltic Way 2015 17, 18

BxMO 2015 Benelux Mathematical Olympiad 2015 18

CAN 2015 MO Canada National Olympiad 2015 5

CAN 2015 QRC Canada Qualifying Repêchage Competition 2015 5

CHN 2015 GMO China National Girl Math Olympiad 2015 6

CHN 2015 MO China National Olympiad 2015 6

CHN 2015 NML China National Math League Olympiad 2015 6

CHN 2015 NMO China National Northern Mathematical Olympiad 2015 5, 6

CHN 2015 SEMO China National South East Mathematical Olympiad 2015 6

CHN 2015 TST China Team Selection Test 2015 6, 7

CHN 2015 WMO China National Western Mathematical Olympiad 2015 6

CPS 2015 Czech-Polish-Slovak Match 2015 18

EGMO 2015 European Girls' Mathematical Olympiad 2015 18

EMC 2015 European Mathematical Cup 2015 18, 19

FRA 2015 RMM France Romania Masters 2015 7

FRA 2015 TST France Team Selection Test 2015 7

GBR 2015 MO Great Britain National Olympiad 2015 15

GBR 2015 TST Great Britain Team Selection Test 2015 15

GER 2015 MO Germany National Olympiad 2015 7

GER 2015 TST Germany Team Selection Test 2015 8

HUN 2015 TST Hungary Team Selection Test 2015 8

IMO 2015 International Mathematical Olympiad 2015 20

IMO 2015 SL International Mathematical Olympiad Shortlist 2015 19, 20

IND 2015 MO India National Olympiad 2015 8

IND 2015 TST India Team Selection Test 2015 8

IRN 2015 MO Iran National Olympiad 2015 9

IRN 2015 TST Iran Team Selection Test 2015 9

JPN 2015 EGMO TST Japan EGMO Team Selection Test 2015 10

JPN 2015 MO Japan National Olympiad 2015 9, 10

KOR 2015 MO Korea National Olympiad 2015 10

MEMO 2015 Middle European Mathematical Olympiad 2015 19

NMC 2015 Nordic Mathematical Contest 2015 19

POL 2015 MO Polish National Olympiad 2015 10

RMM 2015 Romaniaan Masters of Mathematics 2015 19

ROM 2015 MO Rioplatense Mathematical Olympiad Level 3 2015 19

ROU 2015 JBMO TST Romania Junior Balkan MO Team Selection Test 2015 11

ROU 2015 MO Romania Olympiad 2015 11

ROU 2015 SOM Romania Stars Of Mathematics 2015 11

ROU 2015 TST Romania Team Selection Test 2015 11, 12

RUS 2015 MO All-Russia Olympiad 2015 13

RUS 2015 SMO Russia Saint Petersburg Olympiad 2015 13

RUS 2015 TMO Russia Tuymaada Olympiad 2015 12, 13

RUS 2015 TST Russia Team Selection Test 2015 13, 14

THA 2015 MO Thailand National Olympiad 2015 14, 15

THA 2015 TSTST Thailand TSTST 2015 15

TWN 2015 TST Taiwan Team Selection Test 2015 14

USA 2015 MO USA Juior Mathematical Olympiad 2015 15

USA 2015 MO USA Mathematical Olympiad 2015 16

USA 2015 TST USA Team Selection Test 2015 16

USA 2015 TSTST USA TSTST 2015 16