Các bài toán Lý thuyết Số
từ các kỳ thi Olympic Quốc gia và Quốc tế 2015-2024

Ban biên soạn

Tạp chí Pi
Hội toán học Việt Nam

Ngày 10 tháng 5 năm 2025

Mục lục

Introduction 4

I Các bài toán 5

1 Năm 2015 6
- 1.1 Các đề thi quốc gia . . . 6
- 1.2 Các đề thi quốc tế . . . 18

II Gợi ý 23

2 Năm 2015 24
- 2.1 Các đề thi quốc gia . . . 24
- 2.2 Các đề thi quốc tế . . . 26

III Lời giải 29

3 Năm 2015 30
- 3.1 Các đề thi quốc gia . . . 30
- 3.2 Các đề thi quốc tế . . . 42

IV Công cụ 89

4 Định lý, bổ đề, và hằng đẳng thức 90
- 4.1 Các nguyên lý và chiến lược giải toán . . . 90
- 4.2 Các định lý giải tích . . . 92
- 4.3 Số nguyên tố và phép chia hết . . . 93
- 4.4 Số học đồng dư cơ bản . . . 95
- 4.5 Các hàm số học . . . 97
- 4.6 Phương trình nghiệm nguyên . . . 99
- 4.7 Phân bố đều và số vô tỉ . . . 100
- 4.8 Căn nguyên thủy và đẳng thức cổ điển . . . 101
- 4.9 Chuẩn p-adic và định lý LTE . . . 103
- 4.10 Đa thức . . . 104
- 4.11 Số dư bậc hai và ký hiệu Legendre . . . 106
- 4.12 Căn nguyên thủy và bậc lũy thừa (phần nâng cao) . . . 108
- 4.13 Bậc lũy thừa theo hợp số . . . 109
- 4.14 Thủ thuật, kỹ thuật và công cụ hiếm gặp . . . 110

5 Tiêu chuẩn Xếp hạng MOHS **111**

Từ điển chú giải **114**

Mở đầu

Lời nói đầu

Cuốn sách này được biên soạn dành cho giáo viên và học sinh luyện thi Đội tuyển Quốc gia Việt Nam dự thi IMO. Tài liệu tập hợp *các bài toán mới trong vòng 10 năm trở lại đây* từ các kỳ thi quan trọng như IMO Shortlist, các cuộc thi quốc tế uy tín như MEMO, BMO, APMO, EGMO, cũng như các kỳ thi quốc gia của 20 nước hàng đầu thế giới.

Mỗi bài toán được *xếp hạng theo thang độ khó MOHS*, đi kèm với *danh sách các định lý, bổ đề, hằng đẳng thức quan trọng* cần thiết cho lời giải. Các yếu tố này được liên kết trong một hệ thống đồ thị tri thức, giúp người đọc dễ dàng tra cứu và hiểu rõ mối liên hệ giữa các công cụ toán học. Ngoài ra, mỗi bài toán còn được gắn *thẻ thông tin chi tiết* về kỳ thi (năm, vòng), giúp thuận tiện cho việc tìm kiếm và tham khảo.

Để hỗ trợ người học, mỗi bài toán có một *mã định danh duy nhất* (UUID), kèm theo *gợi ý* khi gặp khó khăn. Nếu có nhiều cách giải, tất cả sẽ được trình bày các chuyên đề liên quan đến cách giải để giúp người đọc mở rộng tư duy.

Cấu trúc sách gồm bốn phần chính tương ứng với bốn lĩnh vực quan trọng của toán học thi đấu: Đại số, Tổ hợp, Hình học và Số học. Mỗi phần chia thành các chương theo từng chuyên đề cụ thể với các bài toán liên quan.

Đây là một cuốn sách *mở, luôn được cập nhật và có sẵn trên Internet* để bất kỳ ai cũng có thể truy cập. Người dùng có thể đóng góp bằng cách đề xuất bài toán mới hoặc thay đổi mức độ khó, gợi ý, hoặc thêm lời giải mới cho bài toán bằng cách gửi *một tệp duy nhất theo định dạng LaTeX quy định*. Việc đóng góp tập trung vào nội dung mà không cần lo lắng về định dạng, tổ chức, mã LaTeX hay quy trình xuất bản.

Toàn bộ quá trình này được giám sát bởi các nhân sự được ủy quyền từ Hội Toán Học Việt Nam và Tạp chí Pi, nhằm đảm bảo chất lượng và tính nhất quán của tài liệu.

Chúng tôi hy vọng tài liệu này sẽ trở thành một nguồn tham khảo hữu ích, giúp giáo viên và học sinh tiến xa hơn trong hành trình chinh phục các kỳ thi toán quốc tế.

Ban Biên soạn

Phần I

Các bài toán

Chương 1

Năm 2015

1.1 Các đề thi quốc gia

Bulgaria

1.1.1 (BGR 2015 MO/P1). Dãy số $a_1, a_2, ...$ được xác định bởi các đẳng thức $a_1 = 2, a_2 = 12$ và $a_{n+1} = 6a_n - a_{n-1}$ với mọi số nguyên dương $n \geq 2$. Chứng minh rằng không có phần tử nào của dãy số này bằng một lũy thừa hoàn chỉnh (lớn hơn một) của một số nguyên dương.

1.1.2 (BGR 2015 EGMO TST/P1). Cho $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ là một dãy vô hạn các số nguyên dương tăng chặt, sao cho tồn tại một số nguyên dương k và với mọi số nguyên $n > k$, số hạng a_n là tổng của hai phần tử nào đó trong dãy. Chứng minh rằng dãy này chứa vô hạn hợp số.

1.1.3 (BGR 2015 EGMO TST/P4). Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương m, tồn tại vô số cặp số nguyên dương (x, y) nguyên tố cùng nhau sao cho:

$$x \mid y^2 + m, \text{ và } y \mid x^2 + m.$$

1.1.4 (BGR 2015 EGMO TST/P6). Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \geq 3$, tồn tại n số nguyên dương phân biệt sao cho tổng các lập phương của chúng cũng là một lập phương hoàn hảo.

Canada

1.1.5 (CAN 2015 QRC/P1). Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $7x^2y^2 + 4x^2 = 77y^2 + 1260$.

1.1.6 (CAN 2015 QRC/P3). Cho N là một số có ba chữ số phân biệt và khác 0. Ta gọi N là một số *tầm thường* nếu nó có tính chất sau: khi viết ra tất cả 6 hoán vị có ba chữ số từ các chữ số của N, trung bình cộng của chúng bằng chính N. Ví dụ: $N = 481$ là số *tầm thường* vì trung bình cộng của các số $\{418, 481, 148, 184, 814, 841\}$ bằng 481. Hãy xác định số *tầm thường* lớn nhất.

1.1.7 (CAN 2015 MO/P5). Cho p là một số nguyên tố sao cho $\frac{p-1}{2}$ cũng là một số nguyên tố, và cho a, b, c là các số nguyên không chia hết cho p. Chứng minh rằng có nhiều nhất $1 + \sqrt{2p}$ số nguyên dương n thỏa mãn $n < p$ và p chia hết $a^n + b^n + c^n$.

China

1.1.8 (CHN 2015 NMO/10/P1). Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình

$$\frac{xyz}{w} + \frac{yzw}{x} + \frac{zwx}{y} + \frac{wxy}{z} = 4.$$

1.1.9 (CHN 2015 NMO/10/P3)**.** Nếu $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}$ thì $\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_s}\right)$. Tìm số nguyên dương nhỏ nhất n sao cho $\phi(n) = \frac{2^5}{47}n$.

1.1.10 (CHN 2015 NMO/10/P7)**.** Biết rằng các số nguyên tố lẻ x, y, z thỏa mãn

$$x \mid (y^5 + 1),\ \ y \mid (z^5 + 1),\ \ z \mid (x^5 + 1).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của tích xyz.

1.1.11 (CHN 2015 WMO/P8)**.** Cho k là một số nguyên dương, và $n = \left(2^k\right)!$. Chứng minh rằng $\sigma(n)$ có ít nhất một ước nguyên tố lớn hơn 2^k, trong đó $\sigma(n)$ là tổng các ước dương của n.

1.1.12 (CHN 2015 SEMO/10/P4)**.** Với mỗi số nguyên dương n, ta có tập hợp $P_n = \{n^k \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$. Với các số nguyên dương a, b, c, ta gọi bộ ba (a, b, c) là may mắn nếu tồn tại một số nguyên dương m sao cho $a - 1$, $ab - 12$, $abc - 2015$ (ba số này không nhất thiết phải khác nhau) thuộc tập P_m. Tìm số lượng các bộ ba may mắn.

1.1.13 (CHN 2015 SEMO/11/P4)**.** Cho 8 số nguyên dương phân biệt từng đôi một $a_1, a_2, \dots, a_8$ sao cho ước số chung lớn nhất của bất kỳ ba số nào trong chúng đều bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương $n \geq 8$ và n số nguyên dương phân biệt từng đôi một $m_1, m_2, \dots, m_n$ sao cho ước số chung lớn nhất của tất cả n số này bằng 1, đồng thời với mọi bộ ba số nguyên dương $1 \leq p < q < r \leq n$, tồn tại hai số nguyên dương $1 \leq i < j \leq 8$ sao cho $a_i a_j \mid m_p + m_q + m_r$.

1.1.14 (CHN 2015 NML/P4)**.** Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho với mọi số nguyên dương n, $2^{(k-1)n+1}$ không chia hết $\frac{(kn)!}{n!}$.

1.1.15 (CHN 2015 NML/P8)**.** Chứng minh rằng tồn tại vô hạn bộ ba số nguyên dương (a, b, c) $(a, b, c > 2015)$ sao cho

$$a \mid bc - 1, \quad b \mid ac + 1, \quad c \mid ab + 1.$$

1.1.16 (CHN 2015 GMO/P4)**.** Gọi $g(n)$ là ước số chung lớn nhất của n và 2015. Tìm số bộ ba (a, b, c) thỏa mãn hai điều kiện sau:

(1) $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 2015\}$;

(2) $g(a),\ g(b),\ g(c),\ g(a + b),\ g(b + c),\ g(c + a),\ g(a + b + c)$ đôi một khác nhau.

1.1.17 (CHN 2015 GMO/P5)**.** Xác định số tam giác vuông phân biệt sao cho ba cạnh của nó đều có độ dài nguyên, và diện tích của tam giác bằng 999 lần chu vi của nó. (Các tam giác đồng dạng được coi là giống nhau.)

1.1.18 (CHN 2015 MO/P4)**.** Xác định tất cả các số nguyên k sao cho tồn tại vô hạn số nguyên dương n không thỏa mãn

$$n + k \mid \binom{2n}{n}.$$

1.1.19 (CHN 2015 TST1/P2)**.** Cho dãy các số nguyên dương phân biệt $a_1, a_2, a_3, \dots$, và một hằng số thực $0 < c < \dfrac{3}{2}$. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương k sao cho:

$$\text{lcm}(a_k, a_{k+1}) > ck.$$

1.1.20 (CHN 2015 TST1/P5)**.** Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương a, b, c không vượt quá $3n^2 + 4n$, tồn tại các số nguyên x, y, z có giá trị tuyệt đối không vượt quá $2n$ và không đồng thời bằng 0, sao cho

$$ax + by + cz = 0.$$

1.1.21 (CHN 2015 TST2/P6)**.** Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên n sao cho $n^2 + 1$ là số không có thừa số chính phương.

1.1.22 (CHN 2015 TST3/3). Cho a, b là hai số nguyên sao cho ước số chung lớn nhất của chúng có ít nhất hai thừa số nguyên tố. Gọi $S = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \equiv a \pmod b\}$ và gọi $y \in S$ là không phân tích được nếu không thể biểu diễn y dưới dạng tích của hai hoặc nhiều phần tử của S (không nhất thiết khác nhau). Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên t sao cho mọi phần tử của S đều có thể được biểu diễn dưới dạng tích của nhiều nhất t phần tử không phân tích được.

1.1.23 (CHN 2015 TST3/6). Với mọi số tự nhiên n, định nghĩa $f(n) = \tau(n!) - \tau((n-1)!)$, trong đó $\tau(a)$ là số lượng ước dương của a. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số hợp n sao cho với mọi số tự nhiên $m < n$, ta có $f(m) < f(n)$.

France

1.1.24 (FRA 2015 TST1/P3). Cho n là một số nguyên dương sao cho $n(n + 2015)$ là một số chính phương.

- Chứng minh rằng n không phải là số nguyên tố.
- Cho một ví dụ về số nguyên n như vậy.

1.1.25 (FRA 2015 TST1/P7). Cho các số nguyên a, b, c, n với $n \geq 2$. Gọi p là một số nguyên tố chia hết cả hai biểu thức $a^2 + ab + b^2$ và $a^n + b^n + c^n$, nhưng không chia hết $a + b + c$. Chứng minh rằng n và $p - 1$ không nguyên tố cùng nhau.

1.1.26 (FRA 2015 TST3/P3). Xác định tất cả các số nguyên tự nhiên m và n thỏa mãn phương trình $2^n = 3^m + 23$.

1.1.27 (FRA 2015 TST3/P5). Cho $n \geq 2$ là một số nguyên. Ta ký hiệu A_n là tập hợp

$$A_n = \{2^n - 2^k \mid k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq k \leq n\}.$$

Xác định số nguyên dương lớn nhất không thể viết được dưới dạng tổng của một hoặc nhiều phần tử (không nhất thiết khác nhau) của A_n.

1.1.28 (FRA 2015 TST4/P1). Tìm tất cả các đa thức f với hệ số nguyên sao cho với mọi số nguyên $n > 0$, ta có:

$$f(n) \mid 3n - 1.$$

1.1.29 (FRA 2015 TST4/P6). Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn:

$$x^2 = y^2(y^4 + 2y^2 + x).$$

1.1.30 (FRA 2015 RMM/P3). Cho số nguyên tố $p \geq 5$. Chứng minh rằng tập hợp

$$K = \left\{a \in \mathbb{Z} \mid a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}\right\}$$

chứa ít nhất hai số nguyên tố lẻ phân biệt nhỏ hơn p.

Germany

1.1.31 (GER 2015 MO/P2). Một số nguyên dương n được gọi là **trơn** nếu tồn tại các số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_n$ sao cho:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n = n.$$

Hãy tìm tất cả các số trơn.

1.1.32 (GER 2015 MO/P4). Cho số nguyên dương k. Định nghĩa n_k là số có dạng thập phân $70\underbrace{00\ldots0}_{k \text{ chữ số } 0}1$.

Chứng minh rằng:

- Không có số nào trong các số n_k chia hết cho 13.
- Có vô số số n_k chia hết cho 17.

1.1.33 (GER 2015 TST/P2). Một số nguyên dương n được gọi là **nghịch ngợm** nếu có thể viết dưới dạng

$$n = ab + b$$

với các số nguyên $a, b \geq 2$.

Hỏi có tồn tại một dãy gồm 102 số nguyên dương liên tiếp sao cho chính xác 100 trong số đó là các số nghịch ngợm hay không?

1.1.34 (GER 2015 TST/P4). Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) sao cho

$$\sqrt[3]{7x^2 - 13xy + 7y^2} = |x - y| + 1.$$

Hungary

1.1.35 (HUN 2015 TST/KMA/633). Chứng minh rằng nếu n là một số nguyên dương đủ lớn, thì trong bất kỳ tập hợp gồm n số nguyên dương khác nhau nào cũng tồn tại bốn số sao cho bội chung nhỏ nhất của chúng lớn hơn $n^{3,99}$.

1.1.36 (HUN 2015 TST/KMA/635). Chứng minh rằng với mọi số thực $c > 0$ đều tồn tại một số nguyên dương n sao cho $\varphi(\sigma(n)) > cn$. (Với mọi số nguyên dương k, $\varphi(k)$ là số lượng số nguyên dương không vượt quá k và nguyên tố cùng nhau với k, còn $\sigma(k)$ là tổng các ước dương của k.)

1.1.37 (HUN 2015 TST/KMA/640). Xác định tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương n sao cho các số có dạng $(k+1)^n - 2k^n$ (với $k = 1, 2, \ldots, p$) tạo thành một hệ đầy đủ các lớp dư modulo p.

1.1.38 (HUN 2015 TST/KMA/643). Với mỗi số nguyên dương n, ký hiệu $P(n)$ là ước số nguyên tố lớn nhất của $n^2 + 1$. Hãy chứng minh rằng tồn tại vô hạn bộ bốn số nguyên dương (a, b, c, d) thỏa mãn $a < b < c < d$ và $P(a) = P(b) = P(c) = P(d)$.

India

1.1.39 (IND 2015 MO/P2). Với mọi số tự nhiên $n > 1$, phân số $\frac{1}{n}$ với số chữ số thập phân hữu hạn dưới dạng thập phân vô hạn ví dụ như: 0.5 được viết là $\frac{1}{2} = 0.4\overline{9}$. Hãy xác định độ dài phần không tuần hoàn trong biểu diễn thập phân vô hạn của $\frac{1}{n}$.

1.1.40 (IND 2015 MO/P6). Chứng minh rằng từ một tập gồm 11 số chính phương, ta luôn có thể chọn ra sáu số $a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2$ sao cho:

$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv d^2 + e^2 + f^2 \pmod{12}$$

1.1.41 (IND 2015 TST1/P1). Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $\frac{a^2+b}{b^2-a}$ và $\frac{b^2+a}{a^2-b}$ cũng là các số nguyên.

1.1.42 (IND 2015 TST2/P2). Với một số hợp n, ký hiệu d_n là ước số riêng lớn nhất của n. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số n sao cho $d_n + d_{n+1}$ là một số chính phương.

1.1.43 (IND 2015 TST4/P3). Cho $n > 1$ là một số nguyên cho trước. Chứng minh rằng có vô hạn số hạng của dãy $(a_k)_{k\geq 1}$, được xác định bởi

$$a_k = \left\lfloor \frac{n^k}{k} \right\rfloor,$$

là các số lẻ. (Với một số thực x, ký hiệu $\lfloor x \rfloor$ là phần nguyên của x, tức là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.)

Iran

1.1.44 (IRN 2015 MO2/P6)**.** Cho $n \geq 50$ là một số tự nhiên. Chứng minh rằng n có thể được biểu diễn dưới dạng tổng của hai số tự nhiên $n = x + y$ sao cho với mọi số nguyên tố p mà $p \mid x$ hoặc $p \mid y$, ta có $\sqrt{n} \geq p$. Ví dụ: với $n = 94$ ta có $x = 80$, $y = 14$.

1.1.45 (IRN 2015 MO3/NP1)**.** Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số tự nhiên n sao cho n không thể được viết dưới dạng tổng của hai số nguyên dương có các thừa số nguyên tố nhỏ hơn 1394.

1.1.46 (IRN 2015 MO3/NP2)**.** Gọi $M_0 \subset \mathbb{N}$ là một tập hợp không rỗng gồm hữu hạn phần tử. Ali tạo ra các tập $M_1, M_2, \ldots, M_n$ theo thứ tự sau: Ở bước n, Ali chọn một phần tử $b_n \in M_{n-1}$ và định nghĩa

$$M_n = \{b_n m + 1 \mid m \in M_{n-1}\}.$$

Chứng minh rằng sau một số bước, Ali thu được một tập mà không có phần tử nào trong đó chia hết cho một phần tử khác.

1.1.47 (IRN 2015 MO3/NP3)**.** Cho $p > 5$ là một số nguyên tố và $A = \{b_1, b_2, \ldots, b_{\frac{p-1}{2}}\}$ là tập hợp tất cả các số chính phương modulo p, không bao gồm số 0. Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên a, c sao cho $(ac, p) = 1$ và tập hợp

$$B = \{ab_1 + c,\ ab_2 + c,\ \ldots,\ ab_{\frac{p-1}{2}} + c\}$$

và tập A là hai tập rời modulo p.

1.1.48 (IRN 2015 MO3/NP4)**.** Giả sử a, b, c, d, k, l là các số nguyên dương sao cho với mọi số tự nhiên n, tập hợp các thừa số nguyên tố của hai số $n^k + a^n + c$ và $n^l + b^n + d$ là giống nhau. Chứng minh rằng $k = l$, $a = b$, $c = d$.

1.1.49 (IRN 2015 MO3/NP5)**.** Cho $p > 30$ là một số nguyên tố. Chứng minh rằng tồn tại một số trong các số sau có dạng $x^2 + y^2$:

$$p + 1,\ 2p + 1,\ 3p + 1,\ \ldots,\ (p - 3)p + 1.$$

1.1.50 (IRN 2015 TST1/P3)**.** Gọi $b_1 < b_2 < b_3 < \ldots$ là dãy tất cả các số tự nhiên có thể viết được dưới dạng tổng hai bình phương của hai số tự nhiên. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số tự nhiên m sao cho $b_{m+1} - b_m = 2015$.

1.1.51 (IRN 2015 TST1/P4)**.** Cho trước số tự nhiên n. Tìm giá trị nhỏ nhất của k sao cho với mọi tập A gồm k số tự nhiên, luôn tồn tại một tập con của A có số phần tử chẵn và tổng các phần tử chia hết cho n.

1.1.52 (IRN 2015 TST3/P2)**.** Giả sử a_1, a_2, a_3 là ba số nguyên dương cho trước. Xét dãy số được xác định bởi công thức:

$$a_{n+1} = \operatorname{lcm}[a_n, a_{n-1}] - \operatorname{lcm}[a_{n-1}, a_{n-2}] \quad \text{với } n \geq 3,$$

trong đó $[a, b]$ ký hiệu bội chung nhỏ nhất của a và b, và chỉ được áp dụng với các số nguyên dương.

Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương $k \leq a_3 + 4$ sao cho $a_k \leq 0$.

Japan

1.1.53 (JPN 2015 MO/P1)**.** Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho

$$\frac{10^n}{n^3 + n^2 + n + 1}$$

là một số nguyên.

1.1.54 (JPN 2015 MO/P3). Một dãy số nguyên dương $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ được gọi là *tăng mạnh* nếu với mọi số nguyên dương n, ta có:

$$a_n < a_{n+1} < a_n + a_{n+1} < a_{n+2}.$$

(a) Chứng minh rằng nếu $\{a_n\}$ là dãy tăng mạnh thì các số nguyên tố lớn hơn a_1 chỉ xuất hiện hữu hạn lần trong dãy.

(b) Chứng minh rằng tồn tại dãy $\{a_n\}$ tăng mạnh sao cho không có số nào chia hết cho bất kỳ số nguyên tố nào đã xuất hiện trong dãy.

1.1.55 (JPN 2015 EGMO TST/P4). Với mỗi số nguyên dương n, ký hiệu:

- $\varphi(n)$ là số lượng số nguyên từ 1 đến n nguyên tố cùng nhau với n (hàm Euler);
- $d(n)$ là số lượng ước dương của n.

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho

$$\varphi(n) = d(n).$$

Poland

1.1.56 (POL 2015 MO2/P3). Cho $a_n = |n(n+1) - 19|$ với $n = 0, 1, 2, \dots$ và $n \neq 4$. Chứng minh rằng nếu $\gcd(a_n, a_k) = 1$ với mọi $k < n$, thì a_n là một số nguyên tố.

1.1.57 (POL 2015 MO3/P6). Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương a, tồn tại một số nguyên $b > a$ sao cho:

$$1 + 2^a + 3^a \mid 1 + 2^b + 3^b.$$

Republic of Korea

1.1.58 (KOR 2015 MO/P1). Với một số nguyên dương m, hãy chứng minh rằng số lượng các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau là một số chẵn hoặc bằng 0:

(i) $x^2 - 3y^2 + 2 = 16m$

(ii) $2y \leq x - 1$

1.1.59 (KOR 2015 MO/P8). Với một số nguyên dương n, các số $a_1, a_2, \dots, a_k$ là các số nguyên dương không lặp lại, không vượt quá n, và nguyên tố cùng nhau với n. Giả sử $k > 8$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^{k} \left| a_i - \frac{n}{2} \right| < \frac{n(k-4)}{2}.$$

1.1.60 (KOR 2015 TST/P5). Với một số nguyên dương cố định k, ta định nghĩa hai dãy số A_n và B_n theo quy luật sau:

$$A_1 = k, \quad A_2 = k, \quad A_{n+2} = A_n A_{n+1},$$
$$B_1 = 1, \quad B_2 = k, \quad B_{n+2} = \frac{B_{n+1}^3 + 1}{B_n}.$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, biểu thức $A_{2n} B_{n+3}$ là một số nguyên.

Romania

1.1.61 (ROU 2015 JBMO TST/D1/P4). Tìm các nghiệm nguyên không âm của phương trình sau:

$$21^x + 4^y = z^2.$$

1.1.62 (ROU 2015 JBMO TST/D2/P1). Tìm tất cả các số nguyên dương N có số chữ số chẵn với tính chất rằng nếu ta nhân hai số thu được bằng cách cắt N ở giữa thì ta được một số là ước của N (ví dụ, 12 thỏa mãn vì $1 \cdot 2$ chia hết 12).

1.1.63 (ROU 2015 JBMO TST/D4/P1). Cho $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Xác định tất cả các tập $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{N}$ chứa 2015 và có tính chất rằng $|a_i - a_j|$ là số nguyên tố với mọi $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

1.1.64 (ROU 2015 JBMO TST/D4/P2). Giải trong tập $\mathbb{N}^*$ phương trình:

$$4^a \cdot 5^b - 3^c \cdot 11^d = 1.$$

1.1.65 (ROU 2015 JBMO TST/D5/P1). Chứng minh rằng số 1 có thể được biểu diễn dưới dạng tổng của một số hữu hạn n số thực nhỏ hơn 1, không nhất thiết khác nhau, và trong phần biểu diễn thập phân của mỗi số chỉ chứa các chữ số 0 và/hoặc 7. Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của n.

1.1.66 (ROU 2015 SOM/J/P2). Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số tự nhiên lẻ $m_1 < m_2 < \ldots$ và vô hạn số tự nhiên $n_1 < n_2 < \ldots$ sao cho $\gcd(m_k, n_k) = 1$ và $m_k^4 - 2n_k^4$ là một số chính phương với mọi $k \in \mathbb{N}$.

1.1.67 (ROU 2015 SOM/J/P4). Cho $n \geq 5$ là một số nguyên dương và $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Chứng minh rằng có ít nhất $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$ số trong các số

$$a_1, \; a_1 + a_2, \; \ldots, \; a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

cho dư khác nhau khi chia cho n.

1.1.68 (ROU 2015 MO/7/P1). Tìm tất cả các số nguyên dương r sao cho tồn tại các số nguyên tố dương p và q thỏa mãn

$$p^2 + pq + q^2 = r^2.$$

1.1.69 (ROU 2015 MO/8/P4). Một số nguyên dương được gọi là *điển hình* nếu tổng các chữ số thập phân của nó là bội số của 2011.

(a) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số điển hình, mỗi số trong đó có ít nhất 2011 bội số cũng là số điển hình.

(b) Có tồn tại số nguyên dương nào sao cho mọi bội số của nó đều là số điển hình không?

1.1.70 (ROU 2015 MO/9/P1). Chứng minh rằng trong các căn bậc hai của 2015 số tự nhiên đầu tiên, không thể chọn ra một cấp số cộng gồm 45 phần tử.

1.1.71 (ROU 2015 MO/10/P2). Xét một số tự nhiên n sao cho tồn tại một số tự nhiên k và k số nguyên tố phân biệt thỏa mãn $n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$.

- Tìm số lượng các hàm $f : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho tích $f(1) \cdot f(2) \cdots f(n)$ chia hết n.
- Nếu $n = 6$, hãy tìm số lượng các hàm $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sao cho tích $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot f(4) \cdot f(5) \cdot f(6)$ chia hết cho 36.

1.1.72 (ROU 2015 TST/D1/P3). Một bộ ba Pythagore là một nghiệm của phương trình $x^2 + y^2 = z^2$ trong các số nguyên dương, thỏa mãn $x < y$. Cho trước một số nguyên không âm n, hãy chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương xuất hiện trong đúng n bộ ba Pythagore phân biệt.

1.1.73 (ROU 2015 TST/D1/P4)**.** Cho k là một số nguyên dương thỏa mãn $k \equiv 1 \pmod 4$ và không phải là một số chính phương. Đặt $a = \frac{1+\sqrt{k}}{2}$. Chứng minh rằng:

$$\left\{\left\lfloor a^2 n\right\rfloor - \lfloor a \lfloor an \rfloor \rfloor : n \in \mathbb{N}_{>0}\right\} = \{1, 2, \ldots, \lfloor a \rfloor\}.$$

1.1.74 (ROU 2015 TST/D2/P1)**.**

Cho a là một số nguyên và n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng tổng sau đây chia hết cho n:

$$\sum_{k=1}^{n} a^{(k,n)},$$

trong đó (x, y) là ước chung lớn nhất của hai số x và y.

1.1.75 (ROU 2015 TST/D3/P3)**.** Nếu k và n là các số nguyên dương, với $k \le n$, ký hiệu $M(n, k)$ là bội chung nhỏ nhất của các số $n, n-1, \ldots, n-k+1$. Gọi $f(n)$ là số nguyên dương lớn nhất $k \le n$ sao cho:

$$M(n, 1) < M(n, 2) < \ldots < M(n, k).$$

Chứng minh rằng:

(a) Với mọi số nguyên dương n, ta có $f(n) < 3\sqrt{n}$.

(b) Với mọi số nguyên dương N, tồn tại hữu hạn số n sao cho $f(n) \le N$.

1.1.76 (ROU 2015 TST/D4/P2)**.** Cho một số nguyên $k \ge 2$, xác định số lượng lớn nhất các ước của hệ số nhị thức $\binom{n}{k}$ nằm trong đoạn $n-k+1, \ldots, n$, khi n chạy qua các số nguyên lớn hơn hoặc bằng k.

1.1.77 (ROU 2015 TST/D5/P3)**.** Định nghĩa một dãy số nguyên bởi $a_0 = 1$, và

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a_k, \quad n \ge 1.$$

Cho m là một số nguyên dương, p là một số nguyên tố, và q, r là các số nguyên không âm. Chứng minh rằng:

$$a_{p^m q + r} \equiv a_{p^{m-1} q + r} \pmod{p^m}.$$

Russia

1.1.78 (RUS 2015 TMO/J/P2)**.** Ta gọi một số là *hài hước* (funny) nếu nó chia hết cho tổng các chữ số của nó cộng thêm 1. (Ví dụ: $1 + 2 + 1 = 4$ và $4 \mid 12$, nên 12 là số hài hước.)

Hỏi dãy số hài hước liên tiếp dài nhất có thể có bao nhiêu số?

1.1.79 (RUS 2015 TMO/J/P4)**.** Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương n sao cho trong biểu diễn thập phân của mỗi số $\sqrt{n}$, $\sqrt[3]{n}$, $\ldots$, $\sqrt[10]{n}$, dãy chữ số 2015 xuất hiện ngay sau dấu phẩy thập phân.

1.1.80 (RUS 2015 TMO/J/P6)**.** Có tồn tại một dãy (a_n) các số tự nhiên sao cho:

- Các hiệu $\{a_{n+1} - a_n\}$ nhận mọi giá trị tự nhiên đúng một lần, và
- Các hiệu $\{a_{n+2} - a_n\}$ nhận mọi giá trị tự nhiên lớn hơn 2015 đúng một lần hay không?

1.1.81 (RUS 2015 TMO/S/P4)**.** Giả sử $n! = ab^2$, trong đó a là số không chứa thừa số chính phương (tức là a là phần không chính phương của $n!$).

Chứng minh rằng với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại n đủ lớn sao cho:

$$2^{(1-\varepsilon)n} < a < 2^{(1+\varepsilon)n}.$$

1.1.82 (RUS 2015 TMO/S/P5)**.** There is some natural number $n > 1$ on the board. Operation is adding to number on the board it maximal non-trivial divisor. Prove, that after some some operations we get number, that is divisible by 3^{2000}.

1.1.83 (RUS 2015 TMO/S/P6)**.** Cho các số nguyên $0 \le b \le c \le d \le a$ và $a > 14$. Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên n không thể được biểu diễn dưới dạng:

$$n = x(ax + b) + y(ay + c) + z(az + d),$$

với x, y, z là các số nguyên.

1.1.84 (RUS 2015 SMO/9/P1)**.** Có tồn tại đa thức bậc hai $f(x)$ với hệ số nguyên sao cho $f(f(\sqrt{2})) = 0$ hay không?

1.1.85 (RUS 2015 SMO/10/P4)**.** Một số nguyên dương n được gọi là *số Olympic* nếu tồn tại một tam thức bậc hai $f(x)$ với hệ số nguyên sao cho $f(f(\sqrt{n})) = 0$.

Xác định, có chứng minh, số Olympic lớn nhất không vượt quá 2015.

1.1.86 (RUS 2015 SMO/10/P6)**.** Một dãy số nguyên được định nghĩa như sau: $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3$ và với $n > 3$, a_n là số nguyên nhỏ nhất chưa xuất hiện trước đó, nguyên tố cùng nhau với a_{n-1} nhưng không nguyên tố cùng nhau với a_{n-2}. Chứng minh rằng mọi số tự nhiên xuất hiện đúng một lần trong dãy này.

1.1.87 (RUS 2015 SMO/11/P2)**.** Cho $a, b > 1$ là các số tự nhiên, và $a^2 + b,\ a + b^2$ đều là các số nguyên tố. Chứng minh rằng:

$$\gcd(ab + 1,\ a + b) = 1.$$

1.1.88 (RUS 2015 MO/9/P3)**.** Cho a, x, y là các số nguyên dương thỏa mãn $a > 100,\ x > 100,\ y > 100$ và

$$y^2 - 1 = a^2(x^2 - 1).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{a}{x}$.

1.1.89 (RUS 2015 MO/10/P4)**.** Ký hiệu $S(k)$ là tổng các chữ số của một số nguyên dương k. Ta gọi một số nguyên dương a là *tốt với bậc n* (hay n-tốt) nếu tồn tại một dãy các số nguyên dương $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sao cho $a_n = a$ và

$$a_{i+1} = a_i - S(a_i), \quad \text{với mọi } i = 0, 1, \ldots, n - 1.$$

Có đúng là với mọi số nguyên dương n, tồn tại một số nguyên dương b sao cho b là n-tốt nhưng không phải là $(n + 1)$-tốt?

1.1.90 (RUS 2015 MO/11/P2)**.** Cho $n > 1$ là một số tự nhiên. Ta viết các phân số $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ sao cho tất cả đều ở dạng tối giản. Gọi tổng các tử số trong những phân số này là $f(n)$.

Tìm tất cả các $n > 1$ sao cho một trong hai số $f(n)$ và $f(2015n)$ là số lẻ, còn số kia là số chẵn.

1.1.91 (RUS 2015 TST/D7/P4)**.** Cho $p \ge 5$ là một số nguyên tố. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương $a < p - 1$ sao cho cả hai số

$$a^{p-1} - 1 \quad \text{và} \quad (a + 1)^{p-1} - 1$$

đều không chia hết cho p^2.

1.1.92 (RUS 2015 TST/D9/P1)**.** Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (a, b) thỏa mãn các điều kiện sau:

- $b - 1$ chia hết cho $a + 1$, và
- $a^2 + a + 2$ chia hết cho b.

1.1.93 (RUS 2015 TST/D10/P2)**.** Cho $p \geqslant 5$ là một số nguyên tố. Chứng minh rằng tập hợp $\{1, 2, \ldots, p - 1\}$ có thể được chia thành hai tập con không rỗng sao cho: tổng tất cả các phần tử trong một tập con và tích tất cả các phần tử trong tập con còn lại cho cùng một số dư modulo p.

1.1.94 (RUS 2015 TST/D10/P3)**.** Tìm tất cả các số nguyên k sao cho tồn tại vô hạn bộ ba số nguyên (a, b, c) thỏa mãn:

$$(a^2 - k)(b^2 - k) = c^2 - k.$$

1.1.95 (RUS 2015 TST/D11/P1)**.** Chứng minh rằng tồn tại hai số tự nhiên a, b sao cho với mọi cặp số tự nhiên m, n nguyên tố cùng nhau, ta có:

$$|a - m| + |b - n| > 1000.$$

Taiwan

1.1.96 (TWN 2015 TST2/Q2/P1)**.** Cho dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi:

$$a_{n+1} = a_n^3 + 103, \quad \text{với } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Chứng minh rằng có nhiều nhất một số hạng a_n là số chính phương.

1.1.97 (TWN 2015 TST3/Q2/P2)**.** Xét một hoán vị của $1, 2, \ldots, n$, được ký hiệu là $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Ký hiệu $f(n)$ là số lượng các hoán vị thỏa mãn các điều kiện sau:

1. $a_1 = 1$
2. $|a_i - a_{i-1}| \leq 2$, với $i = 2, 3, \ldots, n$

Hỏi phần dư của $f(2015)$ khi chia cho 4 là bao nhiêu?

1.1.98 (TWN 2015 TST3/Q3/P1)**.** Với mỗi số nguyên dương n, định nghĩa:

$$a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n + 2^{k-1}}{2^k} \right\rfloor,$$

trong đó $\lfloor x \rfloor$ là phần nguyên của x, tức là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

Tính giá trị của a_{2015}.

1.1.99 (TWN 2015 TST3/M2/P3)**.** Cho $c \geq 1$ là một số nguyên. Xét dãy các số nguyên dương được định nghĩa bởi:

$$a_1 = c, \quad a_{n+1} = a_n^3 - 4c \cdot a_n^2 + 5c^2 \cdot a_n + c \quad \text{với mọi } n \geq 1.$$

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $n \geq 2$, tồn tại một số nguyên tố p chia hết a_n nhưng không chia hết bất kỳ số nào trong các số $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Thailand

1.1.100 (THA 2015 MO/P1)**.** Cho p là một số nguyên tố, và $a_1, a_2, a_3, \ldots$ là một dãy các số nguyên dương thỏa mãn:

$$a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2 + p \quad \text{với mọi số nguyên dương } n.$$

Chứng minh rằng $a_{n+1} \mid (a_n + a_{n+2})$ với mọi số nguyên dương n.

1.1.101 (THA 2015 MO/P5)**.** Cho n là một số nguyên lớn hơn 6. Chứng minh rằng nếu $n + 1$ là một số nguyên tố, thì:

$$\left\lceil \frac{(n-1)!}{n(n+1)} \right\rceil$$

là một số lẻ, trong đó $\lceil x \rceil$ là giá trị nguyên nhỏ nhất không nhỏ hơn x.

1.1.102 (THA 2015 MO/P8). Cho m và n là các số nguyên dương sao cho $m-n$ là số lẻ. Chứng minh rằng biểu thức $(m+3n)(5m+7n)$ không thể là một số chính phương.

1.1.103 (THA 2015 TSTST/Q/P1). Tìm tất cả các số nguyên tố $1 < p < 100$ sao cho phương trình:

$$x^2 - 6y^2 = p$$

có nghiệm nguyên (x, y).

1.1.104 (THA 2015 TSTST/Q/P2). Xác định số nguyên nhỏ nhất $n > 1$ sao cho trung bình bình phương (quadratic mean) của n số nguyên dương đầu tiên là một số nguyên.

Chú thích: Trung bình bình phương của các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ được định nghĩa là:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

1.1.105 (THA 2015 TSTST/E/P1). Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên n sao cho cả ba số $n,\ n+1,\ n+2$ đều là tổng của hai bình phương các số nguyên.

1.1.106 (THA 2015 TSTST/E/P2). Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình:

$$y^2 = 2x^4 + 17.$$

1.1.107 (THA 2015 TSTST/E/P3). Tìm số màu lớn nhất có thể sử dụng để tô màu các số nguyên n từ 49 đến 94 sao cho nếu hai số a, b (không nhất thiết khác nhau) có cùng màu còn số c có màu khác, thì c không chia hết $a + b$.

United Kingdom

1.1.108 (GBR 2015 MO1/P2). Các số nguyên dương p, a, b thỏa mãn phương trình $p^2 + a^2 = b^2$. Chứng minh rằng nếu p là một số nguyên tố lớn hơn 3, thì a là bội số của 12 và $2(p+a+1)$ là một số chính phương.

1.1.109 (GBR 2015 MO1/P4). Cho x là một số thực sao cho $t = x + \frac{1}{x}$ là một số nguyên lớn hơn 2. Chứng minh rằng $t_n = x^n + \frac{1}{x^n}$ là một số nguyên với mọi số nguyên dương n. Xác định tất cả các giá trị của n sao cho $t \mid t_n$.

1.1.110 (GBR 2015 TST/F2/P2). Cho $n > 1$ là một số nguyên đã cho. Định nghĩa dãy số:

$$a_k := \left\lfloor \frac{n^k}{k} \right\rfloor, \quad \text{với mỗi } k \geq 1.$$

Chứng minh rằng có vô hạn số hạng của dãy (a_k) là số lẻ.

(Với một số thực x, ký hiệu $\lfloor x \rfloor$ là phần nguyên của x, tức là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.)

1.1.111 (GBR 2015 TST/N3/P3). Cho $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ là các số nguyên dương đôi một nguyên tố cùng nhau, với a_1 là số nguyên tố và $a_1 \geq n+2$. Xét đoạn thẳng $I = [0, a_1 a_2 \cdots a_n]$ trên trục số thực. Trên đoạn này, đánh dấu tất cả các số nguyên chia hết cho ít nhất một trong các số $a_1, a_2, \dots, a_n$. Các điểm này chia đoạn I thành một số đoạn nhỏ hơn. Chứng minh rằng tổng bình phương độ dài của các đoạn nhỏ này chia hết cho a_1.

United States of America

1.1.112 (USA 2015 MO/P2). Giải phương trình sau trong tập số nguyên:

$$x^2 + xy + y^2 = \left(\frac{x+y}{3} + 1\right)^3.$$

1.1.113 (USA 2015 MO/P5). Cho a, b, c, d, e là các số nguyên dương phân biệt thỏa mãn:

$$a^4 + b^4 = c^4 + d^4 = e^5.$$

Chứng minh rằng $ac + bd$ là một hợp số.

1.1.114 (USA 2015 TSTST/P3). Gọi P là tập hợp tất cả các số nguyên tố, và M là một tập con không rỗng của P. Giả sử rằng với mọi tập con không rỗng $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ của M, tất cả các thừa số nguyên tố của $p_1p_2\cdots p_k + 1$ đều nằm trong M. Chứng minh rằng $M = P$.

1.1.115 (USA 2015 TSTST/P5). Ký hiệu $\varphi(n)$ là số lượng các số nguyên dương nhỏ hơn n và nguyên tố cùng nhau với n. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương m sao cho phương trình $\varphi(n) = m$ có ít nhất 2015 nghiệm n.

1.1.116 (USA 2015 TST/P2). Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại một tập hợp S gồm n số nguyên dương sao cho với mọi cặp phân biệt $a, b \in S$, hiệu $a - b$ chia hết cả a và b, nhưng không chia hết bất kỳ phần tử nào khác của S.

1.2 Các đề thi quốc tế

Asian Pacific Mathematics Olympiad

1.2.1 (APMO 2015/P3). Một dãy số thực $a_0, a_1, \ldots$ được gọi là *tốt* nếu thỏa mãn ba điều kiện sau:

- Giá trị của a_0 là một số nguyên dương.
- Với mọi số nguyên không âm i, ta có:

$$a_{i+1} = 2a_i + 1 \quad \text{hoặc} \quad a_{i+1} = \frac{a_i}{a_i + 2}.$$

- Tồn tại một số nguyên dương k sao cho $a_k = 2014$.

Tìm số nguyên dương nhỏ nhất n sao cho tồn tại một dãy *tốt* $a_0, a_1, \ldots$ với $a_n = 2014$.

1.2.2 (APMO 2015/P5). Xác định tất cả các dãy số $a_0, a_1, a_2, \ldots$ gồm các số nguyên dương với $a_0 \geq 2015$ sao cho với mọi số nguyên $n \geq 1$ ta có:

(i) a_{n+2} chia hết cho a_n;

(ii) $|s_{n+1} - (n+1)a_n| = 1$, trong đó

$$s_{n+1} = a_{n+1} - a_n + a_{n-1} - \cdots + (-1)^{n+1} a_0.$$

Balkan Mathematics Olympiad

1.2.3 (BMO 2015/P4). Chứng minh rằng trong bất kỳ 20 số nguyên dương liên tiếp nào cũng tồn tại một số nguyên d sao cho với mọi số nguyên dương n, bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$n\sqrt{d}\left\{n\sqrt{d}\right\} > \frac{5}{2},$$

trong đó $\{x\}$ ký hiệu phần thập phân (phần lẻ) của số thực x, được định nghĩa là hiệu giữa số x và phần nguyên lớn nhất không vượt quá x.

1.2.4 (BMO 2015 SL/P1). Cho d là một số nguyên dương chẵn.

John viết các số $1^2, 3^2, \ldots, (2n-1)^2$ lên bảng. Sau đó, anh ta chọn ba trong số các số đó, gọi là a_1, a_2, a_3, xóa chúng khỏi bảng và thay vào bằng số:

$$1 + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} |a_i - a_j|.$$

Anh ta tiếp tục quá trình này cho đến khi chỉ còn lại hai số trên bảng.

Chứng minh rằng tổng bình phương của hai số còn lại sẽ không thuộc tập các số $1^2, 3^2, \ldots, (2n-1)^2$.

1.2.5 (BMO 2015 SL/P2). Dãy $(a_n)_{n \geq 0}$ được định nghĩa như sau:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 6,$$

và với mọi $n \geq 0$,

$$a_{n+4} = 2a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n.$$

Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên n sao cho $n^2 \mid a_n$.

1.2.6 (BMO 2015 SL/P3)**.** Cho a là một số nguyên dương. Với mọi số nguyên dương n, định nghĩa:

$$a_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}.$$

Giả sử s, t là hai số nguyên dương khác nhau thỏa mãn tính chất sau: Nếu p là một ước số nguyên tố của $s - t$, thì $p \mid (a - 1)$.

Chứng minh rằng số

$$\frac{a_s - a_t}{s - t}$$

là một số nguyên.

1.2.7 (BMO 2015 SL/P4)**.** Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn tính chất sau:

Nếu a, b là hai ước số nguyên dương nguyên tố cùng nhau của $x^3 + y^3$, thì $a + b - 1$ cũng là một ước của $x^3 + y^3$.

1.2.8 (BMO 2015 SL/P5)**.** Với một số nguyên dương s, ký hiệu $v_2(s)$ là số mũ lớn nhất của 2 chia hết s.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương m, ta có:

$$v_2\left(\prod_{n=1}^{2^m} \binom{2n}{n}\right) = m \cdot 2^{m-1} + 1.$$

1.2.9 (BMO 2015 SL/P7)**.** Một số nguyên dương m được gọi là hoán vị chữ số (anagram) của một số nguyên dương n nếu mỗi chữ số a xuất hiện trong biểu diễn thập phân của m đúng bằng số lần nó xuất hiện trong biểu diễn thập phân của n.

Có thể tìm được bốn số nguyên dương phân biệt sao cho mỗi số trong bốn số đó là hoán vị chữ số của tổng ba số còn lại không?

Baltic Way

1.2.10 (BW 2015/P16)**.** Ký hiệu $P(n)$ là ước số nguyên tố lớn nhất của n. Tìm tất cả các số nguyên $n \geq 2$ sao cho:

$$P(n) + \lfloor \sqrt{n} \rfloor = P(n+1) + \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor.$$

1.2.11 (BW 2015/P17)**.** Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $2^{2015} \mid n^{n-1} - 1$ nhưng $2^{2016} \nmid n^{n-1} - 1$.

1.2.12 (BW 2015/P18)**.** Cho $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ là một đa thức bậc $n \geq 1$ có n nghiệm nguyên (không nhất thiết phân biệt). Giả sử tồn tại các số nguyên tố phân biệt $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ sao cho với mọi $i = 0, 1, \ldots, n-1$, ta có $a_i > 1$ và là một lũy thừa của p_i. Hỏi có những giá trị nào của n là thỏa mãn?

1.2.13 (BW 2015/P19)**.** Ba số nguyên dương phân biệt từng đôi một a, b, c thỏa mãn $\gcd(a, b, c) = 1$, đồng thời:

$$a \mid (b-c)^2, \quad b \mid (a-c)^2, \quad c \mid (a-b)^2.$$

Chứng minh rằng không tồn tại tam giác không suy biến nào có độ dài ba cạnh là a, b, c.

1.2.14 (BW 2015/P20)**.** Với mỗi số nguyên $n \geq 2$, ta định nghĩa A_n là số lượng các số nguyên dương m thỏa mãn tính chất sau:

Khoảng cách từ n đến bội gần nhất của m bằng khoảng cách từ n^3 đến bội gần nhất của m. (Khoảng cách giữa hai số nguyên a và b được định nghĩa là $|a - b|$.)

Tìm tất cả các số nguyên $n \geq 2$ sao cho A_n là số lẻ.

Benelux

1.2.15 (BxMO 2015/P3)**.** Có tồn tại số nguyên tố nào có dạng thập phân là $3811\cdots1$ hay không, tức là bắt đầu bằng các chữ số $3, 8, 1, 1$, theo đúng thứ tự, và sau đó là một hoặc nhiều chữ số 1?

Czech-Polish-Slovak Match

1.2.16 (CPS 2015/P4)**.** Một chiếc máy tính lạ chỉ có hai nút, mỗi nút mang một số nguyên dương gồm đúng hai chữ số. Ban đầu, máy hiển thị số 1. Mỗi khi nhấn một nút có giá trị N, máy sẽ thay số đang hiển thị X bằng $X \cdot N$ hoặc $X + N$. Hai phép toán nhân và cộng sẽ xen kẽ nhau, bắt đầu bằng phép nhân.

(Ví dụ: nếu nút 1 có giá trị 10, nút 2 có giá trị 20, và ta lần lượt nhấn nút 1, nút 2, nút 1, nút 1 thì ta sẽ thu được: $1 \cdot 10 = 10$, $10 + 20 = 30$, $30 \cdot 10 = 300$, và $300 + 10 = 310$).

Hỏi có tồn tại hai giá trị cụ thể cho hai nút (mỗi giá trị là số có hai chữ số) sao cho ta có thể tạo ra vô hạn số khác nhau (bằng cách tiếp tục nhấn nút, không xóa màn hình) sao cho mỗi số thu được đều có tận cùng là:

(a) 2015,

(b) 5813?

European Girls' Mathematical Olympiad

1.2.17 (EGMO 2015/P3)**.** Cho n, m là các số nguyên lớn hơn 1, và $a_1, a_2, \ldots, a_m$ là các số nguyên dương không vượt quá n^m. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên dương $b_1, b_2, \ldots, b_m$ không vượt quá n, sao cho:

$$\gcd(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m) < n,$$

trong đó $\gcd(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ là ước chung lớn nhất của các số $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

European Mathematical Cup

1.2.18 (EMC 2015/J/P3)**.** Ký hiệu $d(n)$ là số lượng ước dương của n. Với số nguyên dương n, ta định nghĩa:

$$f(n) = d(k_1) + d(k_2) + \cdots + d(k_m),$$

trong đó $1 = k_1 < k_2 < \cdots < k_m = n$ là tất cả các ước của số n.

Ta gọi một số nguyên $n > 1$ là *gần hoàn hảo* (almost perfect) nếu $f(n) = n$.

Hãy tìm tất cả các số gần hoàn hảo.

1.2.19 (EMC 2015/S/P1)**.** Cho $A = \{a, b, c\}$ là một tập hợp gồm ba số nguyên dương. Chứng minh rằng ta có thể tìm được một tập con $B \subset A$, với $B = \{x, y\}$, sao cho với mọi số nguyên dương lẻ m, n, ta có:

$$10 \mid x^m y^n - x^n y^m.$$

Middle European Mathematical Olympiad

1.2.20 (MEMO 2015/I/P4)**.** Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (m, n) sao cho tồn tại các số nguyên $a, b > 1$ nguyên tố cùng nhau, thỏa mãn:

$$\frac{a^m + b^m}{a^n + b^n} \in \mathbb{Z}.$$

1.2.21 (MEMO 2015/I/P7)**.** Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) sao cho:

$$a! + b! = a^b + b^a.$$

1.2.22 (MEMO 2015/I/P8)**.** Cho $n \geq 2$ là một số nguyên. Xác định số lượng các số nguyên dương m sao cho $m \leq n$ và $m^2 + 1$ chia hết cho n.

Nordic Mathematical Contest

1.2.23 (NMC 2015/P2). Tìm các số nguyên tố p, q, r sao cho một trong hai số pqr và $p+q+r$ bằng 101 lần số còn lại.

Rioplatense Mathematical Olympiad, Level 3

1.2.24 (ROM 2015 MO/P3). Ta gọi một số nguyên $n \geq 1$ là *bảo thủ* (conservative) nếu ước số nguyên tố nhỏ nhất của biểu thức $(n!)^n + 1$ không vượt quá $n + 2015$.

Hãy xác định xem có vô hạn số bảo thủ hay không.

Romanian Master of Mathematics

1.2.25 (RMM 2015/P1). Có tồn tại một dãy vô hạn các số nguyên dương $a_1, a_2, a_3, \dots$ sao cho hai số a_m và a_n nguyên tố cùng nhau nếu và chỉ nếu $|m - n| = 1$ hay không?

1.2.26 (RMM 2015/P5). Cho $p \geq 5$ là một số nguyên tố. Với một số nguyên dương k, ký hiệu $R(k)$ là phần dư của k khi chia cho p, với $0 \leq R(k) \leq p - 1$.

Xác định tất cả các số nguyên dương $a < p$ sao cho với mọi $m = 1, 2, \dots, p-1$, ta có:

$$m + R(ma) > a.$$

International Mathematical Olympiad

1.2.27 (IMO 2015 SL/P1). Xác định tất cả các số nguyên dương M sao cho dãy $a_0, a_1, a_2, \dots$ được định nghĩa bởi:

$$a_0 = M + \frac{1}{2} \qquad \text{và} \qquad a_{k+1} = a_k \lfloor a_k \rfloor \quad \text{với } k = 0, 1, 2, \dots$$

chứa ít nhất một số nguyên trong dãy.

1.2.28 (IMO 2015 SL/P2). Cho a và b là các số nguyên dương sao cho $a! + b! \mid a!b!$. Chứng minh rằng:

$$3a \geq 2b + 2.$$

1.2.29 (IMO 2015 SL/P3). Cho m và n là các số nguyên dương sao cho $m > n$. Định nghĩa:

$$x_k = \frac{m+k}{n+k} \quad \text{với } k = 1, 2, \dots, n+1.$$

Chứng minh rằng nếu tất cả các số $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ đều là số nguyên, thì $x_1 x_2 \cdots x_{n+1} - 1$ chia hết cho một số nguyên tố lẻ.

1.2.30 (IMO 2015 SL/P4). Giả sử $a_0, a_1, \dots$ và $b_0, b_1, \dots$ là hai dãy số nguyên dương sao cho $a_0, b_0 \geq 2$, và:

$$a_{n+1} = \gcd(a_n, b_n) + 1, \qquad b_{n+1} = \operatorname{lcm}(a_n, b_n) - 1.$$

Chứng minh rằng dãy a_n là tuần hoàn sau cùng, tức là tồn tại các số nguyên $N \geq 0$ và $t > 0$ sao cho:

$$a_{n+t} = a_n \quad \text{với mọi } n \geq N.$$

1.2.31 (IMO 2015/P2). Find all positive integers (a, b, c) such that

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

are all powers of 2.

1.2.32 (IMO 2015/P2)**.** Find all positive integers (a, b, c) such that

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

are all powers of 2.

1.2.33 (IMO 2015 SL/P6)**.** Ký hiệu $\mathbb{Z}_{>0}$ là tập các số nguyên dương. Xét một hàm $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$. Với mọi $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, ta định nghĩa:

$$f^n(m) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{n \text{ lần}}(m)\ldots)).$$

Giả sử hàm f thỏa mãn hai tính chất sau:

(i) Với mọi $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, ta có $\frac{f^n(m)-m}{n} \in \mathbb{Z}_{>0}$;

(ii) Tập $\mathbb{Z}_{>0} \setminus \{f(n) \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ là hữu hạn.

Chứng minh rằng dãy số $f(1) - 1, f(2) - 2, f(3) - 3, \ldots$ là tuần hoàn.

1.2.34 (IMO 2015 SL/P7)**.** Ký hiệu $\mathbb{Z}_{>0}$ là tập các số nguyên dương. Với một số nguyên dương k, ta gọi một hàm $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ là *hàm k-tốt* nếu:

$$\gcd(f(m) + n,\ f(n) + m) \leq k \quad \text{với mọi } m \neq n.$$

Tìm tất cả các giá trị k sao cho tồn tại một hàm k-tốt.

1.2.35 (IMO 2015 SL/P8)**.** Với mỗi số nguyên dương n có phân tích thành thừa số nguyên tố $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, định nghĩa:

$$\mho(n) = \sum_{\substack{i: \\ p_i > 10^{100}}} \alpha_i.$$

Nói cách khác, $\mho(n)$ là tổng số mũ của các thừa số nguyên tố lớn hơn 10^{100} trong phân tích thừa số nguyên tố của n, tính cả bội số.

Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *tăng chặt* (tức là $a > b \implies f(a) > f(b)$) sao cho:

$$\mho(f(a) - f(b)) \leq \mho(a - b) \quad \text{với mọi } a > b \text{ trong } \mathbb{Z}.$$

Phần II

Gợi ý

Chương 2

Năm 2015

2.1 Các đề thi quốc gia

Bulgaria

Canada

(CAN 2015 QRC/P1) Thử phân tích phương trình ban đầu bằng cách nhóm và đặt nhân tử, rồi kiểm tra các điều kiện chia hết để giới hạn giá trị của x và y.

(CAN 2015 QRC/P3) Biểu diễn điều kiện *số bằng trung bình cộng của các hoán vị chữ số* dưới dạng đại số, rồi xét vai trò của từng chữ số trong tổng các hoán vị.

(CAN 2015 MO/P5) Dùng định lý Fermat và bậc modulo p của phần tử trong nhóm để giới hạn số n sao cho $a^n + b^n + c^n \equiv 0 \pmod{p}$.

China

France

(FRA 2015 TST1/P3) Giả sử n là số nguyên tố và sử dụng điều kiện $n(n+2015) = m^2$ để dẫn đến mâu thuẫn. Sau đó thử viết biểu thức dưới dạng hiệu bình phương.

(FRA 2015 TST1/P7) Đưa b về 1 bằng cách nhân với nghịch đảo, rồi dùng bậc modulo của phần tử trong $\mathbb{Z}_p^\times$ để xét các khả năng của a theo mod p, từ đó dẫn đến điều kiện về n.

Germany

Hungary

India

Iran

Japan

Poland

Republic of Korea

Romania

Russia

Taiwan

Thailand

United Kingdom

United States of America

(USA 2015 MO/P2) Hãy quan sát rằng vế phải của phương trình chứa biểu thức $\frac{x+y}{3}$, do đó bạn nên thử đặt $x+y=3t$. Sau đó, biến đổi phương trình để đưa về dạng bình phương hoàn chỉnh và tìm cách biểu diễn dưới dạng tích.

(USA 2015 MO/P5) Hãy giả sử ngược lại rằng $ac+bd$ là một số nguyên tố. Từ giả thiết $a^4+b^4=c^4+d^4$, hãy thử xây dựng một biểu thức đối xứng chứa $ac+bd$ và sử dụng phân tích nhân tử để dẫn đến mâu thuẫn với giả thiết số nguyên tố.

(USA 2015 TSTST/P3) Giả sử tồn tại một số nguyên tố không thuộc tập M. Hãy xét các lớp đồng dư modulo số nguyên tố đó. Nếu có quá ít phần tử trong M thuộc mỗi lớp đồng dư, hãy thử xây dựng một chuỗi số sử dụng các phần tử còn lại trong M, và dùng điều kiện của bài toán để dẫn đến mâu thuẫn.

(USA 2015 TSTST/P5) Hãy thử chọn một số lớn N và xét $\varphi(N)$. Với các số nguyên tố p sao cho $p-1$ có nhiều ước nhỏ, nếu $p \mid n$ và $(p-1) \mid n$, bạn có thể làm cho $\varphi(n)$ bằng một giá trị cố định. Thử kết hợp nhiều tập con của các số nguyên tố dạng đó.

(USA 2015 TSTST/P5) Nhớ rằng $\varphi(n)$ là tích $\prod(p_i-1)p_i^{k_i-1}$ nếu n có phân tích nguyên tố $p_i^{k_i}$. Hãy thử lấy tích của nhiều số nguyên tố nhỏ và thay thế một trong số các p_i bằng p_i-1 rồi nhân với các p_j còn lại. Liệu φ có giữ nguyên không?

(USA 2015 TST/P2) Thay vì chọn các số ngẫu nhiên, hãy thử xây dựng các số theo từng bước, sao cho hiệu giữa hai số bất kỳ là bội số của một giá trị đặc biệt. Sử dụng định lý số dư Trung Hoa để đảm bảo các phần tử trong tập có tính chất đồng dư phù hợp, và hiệu giữa hai số chỉ chia hết cho chính chúng.

2.2 Các đề thi quốc tế

Asian Pacific Mathematics Olympiad

(APMO 2015/P3) Tìm cách biểu diễn $\frac{1}{a_i+1}$ theo công thức đệ quy nhị phân và truy ngược dãy từ $a_k = 2014$.

(APMO 2015/P5) Hãy viết lại điều kiện (ii) dưới dạng biểu thức truy hồi liên quan đến a_n, rồi dùng kết hợp với điều kiện chia hết trong (i) để rút ra công thức chính xác của dãy (a_n).

Balkan Mathematics Olympiad

(BMO 2015/P4) Trong 20 số nguyên liên tiếp luôn tồn tại một số chia hết cho 5 và có dạng $5(4k+3)$. Xét số đó và chứng minh rằng n^2d không thể là một bình phương gần với $a^2, a^2+1, \ldots, a^2+4$.

Baltic Way

(BW 2015/P16) Giả sử hai phần nguyên của căn bậc hai khác nhau, từ đó suy ra $n+1$ là một số chính phương. Sau đó xét hiệu giữa hai ước nguyên tố lớn nhất.

(BW 2015/P17) Viết $n = 2^d u + 1$ với u lẻ. Phân tích $n^{n-1} - 1$ thành các thừa số và dùng định lý về bậc chia hết của 2 trong lũy thừa.

(BW 2015/P18) Các hệ số là các lũy thừa của các số nguyên tố khác nhau cho nên các nghiệm đều âm. Phân tích bằng định lý Viète và tính chia hết giữa các hệ số.

(BW 2015/P19) Xét đồng thời ba điều kiện chia hết trong giả thiết. Định nghĩa một biểu thức đối xứng M mà mỗi số trong bộ ba chia hết cho nó. Sau đó giả sử tồn tại tam giác với độ dài ba cạnh đó, và dùng bất đẳng thức trong tam giác để đưa ra mâu thuẫn.

(BW 2015/P20) Với mỗi m, điều kiện khoảng cách bằng nhau tương đương với $m \mid n^3 \pm n$. Sau đó sử dụng số lượng ước nguyên dương và tính chẵn/lẻ của chúng.

Benelux

(BxMO 2015/P3) Xét ba trường hợp theo modulo 3 của số chữ số n. Trong mỗi trường hợp, phân tích tổng chữ số, chia hết, hoặc biểu thức đại số để suy ra tính chia hết.

Czech-Polish-Slovak Match

European Girls' Mathematical Olympiad

(EGMO 2015/P3) Dùng nguyên lý Dirichlet để dẫn đến mâu thuẫn nếu giả sử không tồn tại bộ b_i phù hợp. Thử xét các lựa chọn $b_i \in \{1, 2\}$.

European Mathematical Cup

(EMC 2015/J/P3) Xét tính nhân của hàm f, tìm giới hạn chặt với hàm $f(p^a)$, và sử dụng loại trừ với các ước nguyên tố.

(EMC 2015/S/P1) Phân tích biểu thức $x^m y^n - x^n y^m$, kiểm tra tính chia hết cho 2 và 5 bằng cách xét chẵn/lẻ và các phần dư modulo 5.

Middle European Mathematical Olympiad

(MEMO 2015/I/P4) Thử chia m cho n, đặt $m = kn + r$. Với $a = b$, xét biểu thức $\frac{a^m+b^m}{a^n+b^n}$, tách thành $b^k + t$. Suy luận chia hết và giả sử ngược lại để tìm mâu thuẫn với giả thiết về $\frac{m}{n}$.

(MEMO 2015/I/P7) Hãy thử kiểm tra trực tiếp các giá trị nhỏ của a và b, đặc biệt khi $a = 1$ hoặc $b = 1$. Sau đó giả sử $a, b \geq 2$ và chọn một ước nguyên tố của a để so sánh số mũ của nó trong phân tích thừa số nguyên tố của hai vế của phương trình.

(MEMO 2015/I/P8) Hãy bắt đầu với các giá trị n nhỏ như số nguyên tố $p \equiv 1 \pmod 4$, rồi xét p^2, p^3, v.v. để tìm quy luật. Dùng bổ đề về số nghiệm của phương trình $x^2 \equiv -1 \pmod{p^k}$ và thử mở rộng nghiệm từ modulo p^k lên p^{k+1}.

Nordic Mathematical Contest

(NMC 2015/P2) Giả sử r là số lớn nhất trong ba số nguyên tố p, q, r. So sánh $p + q + r$ và pqr, rồi thử thay một trong các số bằng 101. Sau đó tìm cách biến đổi phương trình thành tích hai biểu thức.

Rioplatense Mathematical Olympiad, Level 3

Romanian Master of Mathematics

(RMM 2015/P1) Hãy thử xây dựng dãy (a_n) sao cho mỗi số a_n là tích của một vài số nguyên tố phân biệt. Thiết kế các tập hợp chứa chỉ số nguyên tố để đảm bảo a_m và a_n có ước chung nếu và chỉ nếu $|m - n| \neq 1$.

(RMM 2015/P5) Hãy thử với $a = p - 1$, rồi xét các giá trị a dưới dạng $\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor$. Viết $m = xq + y$ và khai triển ma, sau đó phân tích phần dư $R(ma)$ để tìm giới hạn dưới của $m + R(ma)$.

International Mathematical Olympiad

(IMO 2015 SL/P1) Nhân đôi các phần tử trong dãy để loại mẫu số, rồi xét điều kiện để dãy không chứa số nguyên. Phân tích chia hết theo 2 sẽ giúp chỉ ra mâu thuẫn.

(IMO 2015 SL/P2) Xét biểu thức $\frac{b!}{a!}$ và áp dụng giả thiết chia hết để đưa ra các điều kiện về a và b. Sử dụng ước nguyên tố để đạt đến mâu thuẫn.

(IMO 2015 SL/P3) Xét các hiệu $x_k - 1$ và phân tích chúng dưới dạng $\frac{m-n}{n+k}$. Sau đó kiểm tra bội số lớn nhất của 2 xuất hiện trong từng số hạng để loại trừ khả năng P là lũy thừa của 2.

(IMO 2015 SL/P4) Theo dõi tổng $a_n + b_n$ và phân tích các bước khi $a_n \mid b_n$ và khi không chia hết. Sau đó xét giá trị nhỏ nhất w_n sao cho $w_n \nmid s_n$.

(IMO 2015/P2) Áp dụng điều kiện tích trừ đi một số bằng lũy thừa của 2. Bắt đầu xét các trường hợp: hai số bằng nhau, ba số phân biệt, các hoán vị chẵn lẻ khác nhau.

(IMO 2015/P2) Áp dụng điều kiện tích trừ đi một số bằng lũy thừa của 2. Bắt đầu xét các trường hợp: hai số bằng nhau, ba số phân biệt, các hoán vị chẵn lẻ khác nhau.

(IMO 2015 SL/P6) Chứng minh f là đơn ánh và mọi số đều sinh ra từ hữu hạn phần tử khởi tạo. Dùng lập luận chia hết để chứng minh các hàng là cấp số cộng, từ đó suy ra dãy $f(n) - n$ là tuần hoàn.

(IMO 2015 SL/P7) Giả sử tồn tại hàm 1-tốt và dẫn đến mâu thuẫn. Sau đó, thử xây dựng một hàm 2-tốt bằng định nghĩa đệ quy, kiểm tra đồng thời tất cả các ước số nguyên tố có thể phát sinh.

(IMO 2015 SL/P8) Sử dụng định nghĩa $\mho(n)$ và phân biệt thừa số lớn/nhỏ. Áp dụng lập luận chia hết, định lý phần dư Trung Hoa, và lập luận đồng dư để kiểm tra tuyến tính trên tập vô hạn.

Phần III

Lời giải

Chương 3

Năm 2015

3.1 Các đề thi quốc gia

Bulgaria

Canada

3.1.1 (CAN 2015 QRC/P1)**.** Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $7x^2y^2 + 4x^2 = 77y^2 + 1260$.

Lời giải. [1]Nhận thấy rằng tất cả các hệ số đều chia hết cho 7, ngoại trừ số 4, do đó x phải chia hết cho 7.

Ta có thể biến đổi và phân tích phương trình thành:

$$(x^2 - 11)(7y^2 + 4) = 1216.$$

Nhận thấy rằng nếu $y = 0$ thì $x^2 = 315$, không phải là số chính phương, nên không có nghiệm. Do đó $y^2 \geq 1$. Ta viết lại phương trình:

$$x^2 = \frac{1216}{7y^2 + 4} + 11 \leq \frac{1216}{11} + 11 < 122.$$

Vì x chia hết cho 7 nên các giá trị khả dĩ là $x = 0, \pm 7$. Khi $x = \pm 7$ thì $y = \pm 2$, còn khi $x = 0$ thì không có nghiệm.

Vậy phương trình có đúng 4 nghiệm nguyên là $(\pm 7, \pm 2)$**.** □

> **Nhận xét.** Đánh giá [**0M**]

[1] Lời giải chính thức.

3.1.2 (CAN 2015 QRC/P3)**.** Cho N là một số có ba chữ số phân biệt và khác 0. Ta gọi N là một số *tầm thường* nếu nó có tính chất sau: khi viết ra tất cả 6 hoán vị có ba chữ số từ các chữ số của N, trung bình cộng của chúng bằng chính N. Ví dụ: $N = 481$ là số *tầm thường* vì trung bình cộng của các số $\{418, 481, 148, 184, 814, 841\}$ bằng 481. Hãy xác định số *tầm thường* lớn nhất.

Lời giải. [2]Giả sử abc là một số mediocre. 6 hoán vị của nó là {abc, acb, bac, bca, cab, cba}. Tổng của các số này là $222(a+b+c)$, và trung bình cộng là $37(a+b+c)$. Vì abc là số mediocre, ta có $100a+10b+c = 37(a+b+c)$.

Ta biến đổi phương trình này thành $63a = 27b + 36c$. Nhận thấy rằng $63 = 27 + 36$ nên a phải nằm giữa b và c. Do đó, $a \neq 9$.

Nếu $b = a + 1$, ta có $36a = 27 + 36c$, phương trình này không có nghiệm nguyên. Nếu $c = a + 1$, ta có $27a = 27b + 36$, cũng không có nghiệm nguyên. Vì a nằm giữa b và c, nếu $a = 8$ thì b hoặc c phải bằng 9, điều này không thể xảy ra. Do đó, $a \neq 8$.

Nếu $a = 7$ thì hoặc $b = 9$ hoặc $c = 9$. Điều này dẫn đến $441 = 243 + 36c$ hoặc $441 = 27b + 324$. Cả hai phương trình đều không có nghiệm nguyên, nên $a \neq 7$.

Nếu $a = 6$ thì ta có $378 = 27b + 36c$, suy ra $42 = 3b + 4c$. Từ đây ta có $b = \frac{42-4c}{3}$.

Để b nguyên và là chữ số, ta thử $c = 3, 6, 9$, tương ứng thu được $b = 10, 6, 2$. Loại trường hợp đầu vì 10 không phải chữ số, loại trường hợp thứ hai vì sẽ có chữ số lặp. Trường hợp còn lại là $b = 2, c = 9$.

Vậy số mediocre lớn nhất là $\boxed{629}$. □

Nhận xét. Đánh giá [**0M**]

[2]Lời giải chính thức.

3.1.3 (CAN 2015 MO/P5)**.** Cho p là một số nguyên tố sao cho $\frac{p-1}{2}$ cũng là một số nguyên tố, và cho a, b, c là các số nguyên không chia hết cho p. Chứng minh rằng có nhiều nhất $1+\sqrt{2p}$ số nguyên dương n thỏa mãn $n < p$ và p chia hết $a^n + b^n + c^n$.

Lời giải. [3]Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Giả sử $b \equiv \pm a \pmod p$ và $c \equiv \pm b \pmod p$. Khi đó, với mọi n, ta có:

$$a^n + b^n + c^n \equiv \pm a^n \text{ hoặc } \pm 3a^n \pmod p.$$

Vì $p \neq 3$ (do $\frac{p-1}{2}$ phải là số nguyên tố), và $a \not\equiv 0 \pmod p$, nên $a^n + b^n + c^n \not\equiv 0 \pmod p$. Trường hợp này hiển nhiên do số lượng n thoả mãn là 0 ($< 1+\sqrt{2p}$).

Trường hợp 2: Giả sử $b \not\equiv \pm a \pmod p \implies ba^{-1} \not\equiv \pm 1 \pmod p$.

Đặt $q = \frac{p-1}{2}$. Gọi d là bậc modulo p của ba^{-1}. Theo định lý Fermat, d chia hết $p-1 = 2q$. Do $ba^{-1} \not\equiv \pm 1$, nên d không chia hết 2. Vậy d là q hoặc $2q$.

Gọi S là tập các số nguyên dương $n < p$ sao cho $a^n + b^n + c^n \equiv 0 \pmod p$. Với mỗi t, ký hiệu s_t là số cặp $(i, j) \in S^2$ sao cho $i - j \equiv t \pmod{p-1}$.

Bổ đề

Nếu t là số nguyên dương nhỏ hơn $2q$ và $t \neq q$, thì $s_t \leq 2$.

Chứng minh. Xét $i, j \in S$ với $j - i \equiv t \pmod{p-1}$. Khi đó:

$$a^i + b^i + c^i \equiv 0 \pmod p,$$

$$\implies a^i c^t + b^i c^t + c^j \equiv 0,$$

$$\implies a^i(c^t - a^t) \equiv b^i(b^t - c^t) \pmod p.$$

Nếu $c^t \equiv a^t \pmod p$, thì suy ra $c^t \equiv b^t \pmod p$, nên $(ab^{-1})^t \equiv 1 \pmod p$. Nhưng d, bậc modulo p của ab^{-1}, là q hoặc $2q$, trong khi $q \nmid t$, nên mâu thuẫn. Do đó:

$$(ab^{-1})^i \equiv \frac{b^t - c^t}{c^t - a^t} \pmod p.$$

Với t cố định, vế phải là hằng số, nên chỉ có tối đa 2 giá trị i thỏa mãn. Suy ra $s_t \leq 2$. ■

Mỗi phần tử $i \in S$ có ít nhất $|S| - 2$ phần tử khác i mà hiệu không đồng dư $q \mod (p-1)$. Do đó:

$$|S|(|S| - 2) \leq \sum_{t \neq q} s_t \leq 2(p-2),$$

$$\implies (|S| - 1)^2 \leq 2p - 3 \implies |S| < \sqrt{2p} + 1.$$

Vậy số lượng giá trị $n < p$ thoả mãn điều kiện là không quá $\boxed{1+\sqrt{2p}}$. □

Nhận xét. Đánh giá [**30M**]

[3]Lời giải chính thức.

China

France

3.1.4 (FRA 2015 TST1/P3). Cho n là một số nguyên dương sao cho $n(n+2015)$ là một số chính phương.

- Chứng minh rằng n không phải là số nguyên tố.
- Cho một ví dụ về số nguyên n như vậy.

Lời giải. [4]**a)** Giả sử n là số nguyên tố và tồn tại một số nguyên m sao cho $n(n+2015) = m^2$. Khi đó $n \mid m^2$, nên $n \mid m$. Viết $m = nr$, ta có:

$$n(n+2015) = n^2r^2 \implies n + 2015 = nr^2 \implies 2015 = n(r^2 - 1).$$

Suy ra $n \mid 2015$. Vì $2015 = 5 \times 13 \times 31$, nên $n \in \{5, 13, 31\}$.

- Nếu $n = 5$ thì $r^2 - 1 = 403 \implies r^2 = 404$, không là số chính phương.

- Nếu $n = 13 \implies r^2 = \frac{2015}{13} + 1 = 156$, không là số chính phương.

- Nếu $n = 31 \implies r^2 = \frac{2015}{31} + 1 = 66$, cũng không là số chính phương.

Vậy n không thể là số nguyên tố.

b) Ta cần tìm các số nguyên n, m sao cho:

$$(2m)^2 = 4n(n+2015).$$

Nhân hai vế:

$$(2m)^2 = (2n+2015)^2 - 2015^2.$$

Do đó:

$$2015^2 = (2n + 2015 + 2m)(2n + 2015 - 2m).$$

Đặt $a = 2015 \times 5 = 10075$, $b = \frac{2015}{5} = 403$. Khi đó:

$$2n + 2015 + 2m = a, \quad 2n + 2015 - 2m = b.$$

Cộng hai phương trình:

$$4n + 4030 = a + b = 10478 \implies n = \frac{10478 - 4030}{4} = 1612.$$

Trừ hai phương trình:

$$4m = a - b = 9672 \implies m = \frac{9672}{4} = 2418.$$

Vậy $n = 1612$ là một ví dụ thỏa mãn yêu cầu đề bài. □

3.1.5 (FRA 2015 TST1/P7). Cho các số nguyên a, b, c, n với $n \geq 2$. Gọi p là một số nguyên tố chia hết cả hai biểu thức $a^2 + ab + b^2$ và $a^n + b^n + c^n$, nhưng không chia hết $a + b + c$. Chứng minh rằng n và $p - 1$ không nguyên tố cùng nhau.

[4]Lời giải chính thức.

Lời giải. [5]Nếu $p \mid a$ và $p \mid b$ thì $p \mid a^n + b^n + c^n \implies p \mid c^n \implies p \mid c$, mâu thuẫn với giả thiết $p \nmid a + b + c$. Vậy, giả sử $p \nmid b$. Nhân với nghịch đảo của $b \mod p$, ta có thể giả sử $b = 1$, nên:

$$p \mid a^2 + a + 1, \quad p \mid a^n + 1 + c^n, \quad p \nmid a + 1 + c.$$

Vì $a^2 + a + 1$ lẻ nên p cũng lẻ. Hơn nữa, do:

$$a^3 \equiv 1 \pmod p \quad (\text{vì } (a^2 + a + 1)(a - 1) = a^3 - 1),$$

nên bậc modulo của $a \mod p$ là 1 hoặc 3.

Trường hợp 1: $a \equiv 1 \pmod p \implies p = 3$. Khi đó:

$$c^n \equiv -a^n - 1 \equiv -1 - 1 = -2 \equiv 1 \pmod 3 \implies c \equiv \pm 1 \pmod 3.$$

Do $p \nmid a + 1 + c \implies 1 + 1 + c \not\equiv 0 \pmod 3 \implies c \equiv -1 \pmod 3$. Vì $c^n \equiv 1 \pmod 3$ nên n chẵn, tức là $\gcd(n, p - 1) = \gcd(n, 2) \neq 1$.

Trường hợp 2: bậc modulo của $a \mod p$ là 3. Do định lý Fermat, bậc modulo chia hết $p - 1 \implies 3 \mid p - 1$.

Giả sử $\gcd(n, p - 1) = 1$. Khi đó, ánh xạ $x \mapsto x^n$ là một hoán vị trên $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Khi đó:

Nếu $n \equiv 1 \pmod 3$ thì:

$$c^n \equiv -a^n - 1 \equiv -a - 1 \equiv a^2 \pmod p.$$

Vì ánh xạ là hoán vị nên $c \equiv a^2 \equiv -a - 1 \implies a^2 + a + 1 \equiv 0 \pmod p$, mâu thuẫn vì $p \mid a^2 + a + 1$, nên không thể có $c \equiv -a - 1$.

Nếu $n \equiv 2 \pmod 3$ thì:

$$c^n \equiv -a^n - 1 \equiv -a^2 - 1 \equiv a \pmod p \implies c \equiv a \equiv -a - 1,$$

dẫn đến $2a + 1 \equiv 0 \pmod p$, thay vào $a^2 + a + 1$, ta lại có mâu thuẫn.

Vậy $n \equiv 0 \pmod 3 \implies \gcd(n, p - 1)$ không thể là 1. Suy ra:

$$\gcd(n, p - 1) \neq 1.$$

□

Nhận xét. Đánh giá [20M]

[5]Lời giải chính thức.

Germany

Hungary

India

Iran

Japan

Poland

Republic of Korea

Romania

Russia

Taiwan

Thailand

United Kingdom

United States of America

3.1.6 (USA 2015 MO/P2)**.** Giải phương trình sau trong tập số nguyên:

$$x^2 + xy + y^2 = \left(\frac{x+y}{3} + 1\right)^3.$$

Lời giải 1. [6]Ta trước tiên nhận thấy rằng hai vế của phương trình đều phải là số nguyên, nên $\frac{x+y}{3}$ phải là một số nguyên.

Do đó, ta đặt $x + y = 3t$, với $t \in \mathbb{Z}$.

Khi đó:

$$(3t)^2 - xy = (t+1)^3 \implies 9t^2 + x(x - 3t) = t^3 + 3t^2 + 3t + 1$$
$$4x^2 - 12xt + 9t^2 = 4t^3 - 15t^2 + 12t + 4 \implies (2x - 3t)^2 = (t-2)^2(4t+1)$$

Ta thấy $4t + 1$ là bình phương của một số lẻ, nên đặt:

$$4t + 1 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 \implies t = n^2 + n$$

Thay vào biểu thức:

$$(2x - 3n^2 - 3n)^2 = [(n^2 + n - 2)(2n+1)]^2 \implies 2x - 3n^2 - 3n = \pm(2n^3 + 3n^2 - 3n - 2)$$

Suy ra hai trường hợp:

$$x = n^3 + 3n^2 - 1 \quad \text{hoặc} \quad x = -n^3 + 3n + 1$$
$$y = x + y - x = 3t - x = (n^3 + 3n^2 - 1 + (-n^3 + 3n + 1)) = \text{trường hợp đối xứng}$$

Vậy tập nghiệm nguyên là:

$$\left(n^3+3n^2-1,\ -n^3+3n+1\right)\cup\left(-n^3+3n+1,\ n^3+3n^2-1\right),\quad \text{với } n\in\mathbb{Z}.$$

□

Lời giải 2. [7]Ta giải phương trình sau trên tập số nguyên:

$$x^2+xy+y^2=\left(\frac{x+y}{3}+1\right)^3.$$

Ta sử dụng thủ thuật đặt $a=x+y$ và $b=x-y$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$\frac{1}{4}\left((a+b)^2+(a+b)(a-b)+(a-b)^2\right)=\left(\frac{a}{3}+1\right)^3,$$

với $a,b\in\mathbb{Z}$ có cùng tính chẵn lẻ.

Biến đổi phương trình:

$$3a^2+b^2=4\left(\frac{a}{3}+1\right)^3.$$

Phương trình này cho thấy $3\mid a$, do đó đặt $a=3c$. Một cách kỳ diệu, điều này biến phương trình thành:

$$b^2=(c-2)^2(4c+1).$$

Như vậy, nghiệm sẽ thỏa mãn $4c+1=m^2$, với m là số lẻ.

Từ đó ta có:

$$x=\frac{1}{8}\left(3(m^2-1)\pm(m^3-9m)\right),\quad y=\frac{1}{8}\left(3(m^2-1)\mp(m^3-9m)\right).$$

Do điều kiện chia hết theo modulo 8, hai biểu thức trên luôn cho nghiệm nguyên, nên đây là đường cong nghiệm đầy đủ.

Thực tế, đặt $m=2n+1$, ta thu được đường cong đẹp hơn:

$$x=n^3+3n^2-1,\quad y=-n^3+3n+1,$$

cùng với các hoán vị của chúng.

Với $n=0,1,2,3$, ta có các nghiệm đầu tiên là:

$$(-1,1),\quad (3,3),\quad (19,-1),\quad (53,-17),$$

và các hoán vị.

□

Nhận xét. Đánh giá [**15M**]

[6]Lời giải từ AoPS.
[7]Từ lời giải do Evan Chen biên soạn.

3.1.7 (USA 2015 MO/P5)**.** Cho a, b, c, d, e là các số nguyên dương phân biệt thỏa mãn:

$$a^4 + b^4 = c^4 + d^4 = e^5.$$

Chứng minh rằng $ac + bd$ là một hợp số.

Lời giải 1. [8]Xét đẳng thức $a^4 + b^4 = e^5$. Đây là một trường hợp đặc biệt của Giả thuyết Beal, phát biểu rằng phương trình $A^x + B^y = C^z$ không có nghiệm nguyên dương với $\gcd(a, b, c) = 1$ và $x, y, z > 2$.

Trường hợp đặc biệt với bộ mũ $(4, 4, 5)$ đã được chứng minh vào năm 2009 bởi Michael Bennett, Jordan Ellenberg và Nathan Ng. Điều đó có nghĩa là a và b phải có ước chung lớn hơn 1.

Gọi $f = \gcd(a, b) > 1$. Khi đó $a = f \cdot a_1$, $b = f \cdot b_1$ với $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}_{>0}$. Xét biểu thức:

$$ac + bd = fa_1c + fb_1d = f(a_1c + b_1d).$$

Vì c, d là các số dương, nên $a_1c + b_1d > 1$, và vì $f > 1$, nên tích trên lớn hơn 1 và chia hết cho f.

Vậy $ac + bd$ là hợp số. □

Lời giải 2. [9]Ta sử dụng phản chứng.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a > d$.

Vì $a^4 + b^4 = c^4 + d^4$, nên rõ ràng $b < c$.

Ta xây dựng biểu thức:

$$(a^4 + b^4)c^2d^2 - (c^4 + d^4)a^2b^2 = (a^2c^2 - b^2d^2)(a^2d^2 - b^2c^2),$$

(vế phải là phân tích nhân tử của vế trái)

Sử dụng giả thiết $a^4 + b^4 = c^4 + d^4 = e^5$, ta có thể phân tích thành:

$$e^5(cd - ab)(cd + ab) = (ac - bd)(ac + bd)(ad - bc)(ad + bc).$$

Nếu $ac - bd$ hoặc $ad - bc$ bằng 0, thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ hoặc $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$ tương ứng, điều này là không thể vì $a^4 + b^4 = c^4 + d^4$ và các số a, b, c, d, e là phân biệt.

Do đó, vế phải của phương trình trên là khác 0, và vế trái phải chia hết cho $ac + bd$.

Giả sử $ac + bd$ là một số nguyên tố. Khi đó, ta có:

$$ac + bd - (cd + ab) = (a - d)(c - b) > 0,$$

vì $a > d$ và $c > b$.

Điều đó dẫn đến:

$$ac + bd > cd + ab > cd - ab,$$

và do đó, không thể có $cd + ab$ hoặc $cd - ab$ chia hết cho $ac + bd$.

Điều này có nghĩa là e phải chia hết cho $ac + bd$, tức là tồn tại số nguyên k sao cho:

$$e = k(ac + bd).$$

Nhưng rõ ràng điều này là vô lý vì:

$$(k(ac + bd))^5 > a^4 + b^4.$$

Do đó, theo phản chứng, $ac + bd$ không thể là số nguyên tố. Vậy nên nó là một hợp số. □

[8]Dựa trên Giả thuyết Beal.

Lời giải 3. [10]Giả sử ngược lại rằng $p = ac + bd$. Khi đó:

$$ac \equiv -bd \pmod p \implies a^4c^4 \equiv b^4d^4 \pmod p.$$

Sử dụng $a^4 + b^4 = c^4 + d^4 = e^5$, ta thay thế $c^4 = e^5 - d^4$, $b^4 = e^5 - a^4$, được:

$$a^4(e^5 - d^4) \equiv (e^5 - a^4)d^4 \pmod p \implies a^4e^5 \equiv d^4e^5 \pmod p \implies e^5(a^4 - d^4) \equiv 0 \pmod p.$$

Suy ra:

$$p \mid e^5(a-d)(a+d)(a^2+d^2).$$

Khẳng định — $p > e$

Chứng minh. Ta có:

$$e^5 = a^4 + b^4 \le a^5 + b^5 < (ac+bd)^5 = p^5 \implies p > e.$$

■

Từ phép chia ở trên, ta suy ra:

$$p \le \max\{a-d,\ a+d,\ a^2+d^2\} = a^2 + d^2.$$

Tương tự, ta có:

$$p \le b^2 + c^2.$$

Do đó:

$$p = ac + bd \le \min\{a^2+d^2,\ b^2+c^2\}.$$

Trừ hai vế:

$$0 \le \min\{a(a-c) + d(d-b),\ b(b-d) + c(c-a)\}.$$

Nhưng vì $a^4 + b^4 = c^4 + d^4$, nên hiệu $a - c$ và $d - b$ phải cùng dấu. Khi đó tổng $a(a-c) + d(d-b)$ có dấu dương, dẫn đến mâu thuẫn với bất đẳng thức trên.

Vậy giả thiết $p = ac + bd$ là sai, suy ra $ac + bd$ không thể là số nguyên tố, suy ra nó là hợp số. □

Nhận xét. Đánh giá [**25M**]

[9]Lời giải từ AoPS.
[10]Từ lời giải do Evan Chen biên soạn.

3.1.8 (USA 2015 TSTST/P3)**.** Gọi P là tập hợp tất cả các số nguyên tố, và M là một tập con không rỗng của P. Giả sử rằng với mọi tập con không rỗng $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ của M, tất cả các thừa số nguyên tố của $p_1 p_2 \cdots p_k + 1$ đều nằm trong M. Chứng minh rằng $M = P$.

Lời giải. [11]Giả sử ngược lại rằng $M \neq \mathbb{P}$, tức là tồn tại một số nguyên tố $p \notin M$.

Ta nói rằng một số nguyên tố $q \in M$ là *thưa thớt (sparse)* nếu chỉ có hữu hạn nhiều phần tử trong M đồng dư với $q \pmod p$. Rõ ràng, chỉ có hữu hạn số nguyên tố thưa thớt (vì tổng số lớp đồng dư modulo p là hữu hạn).

Gọi C là tích của tất cả các số nguyên tố thưa thớt (chú ý rằng $p \nmid C$).

Ta đặt $a_0 = 1$, và xây dựng dãy như sau: với $k \geq 0$, xét phân tích thừa số nguyên tố của số:

$$Ca_k + 1.$$

Do định nghĩa, mọi thừa số nguyên tố của số này không thể là nguyên tố thưa thớt, suy ra chúng đều là các phần tử "không thưa thớt"thuộc M.

Với mỗi thừa số nguyên tố q trong phân tích này, ta chọn một đại diện nào đó thuộc lớp đồng dư của q mod p và nằm trong M. Bằng cách nhân các đại diện này lại, ta xây dựng một số mới:

$$a_{k+1},$$

sao cho:

(i) $a_{k+1} \equiv Ca_k + 1 \pmod p$,

(ii) a_{k+1} là tích của các số nguyên tố phân biệt trong M.

Khi đó theo quy luật truy hồi:

$$a_k \equiv C^k + C^{k-1} + \cdots + 1 \pmod p.$$

Vì $C \not\equiv 0 \pmod p$, nên tổng trên là cấp số nhân hữu hạn với công sai $C \not\equiv 1 \pmod p$ hoặc $C \equiv 1 \pmod p$. Trong cả hai trường hợp, ta có thể chọn $k = p - 1$ (nếu $C \equiv 1$) hoặc $k = p - 2$ (nếu $C \not\equiv 1$) để đảm bảo:

$$a_k \equiv 0 \pmod p.$$

Tuy nhiên, điều này là mâu thuẫn vì a_k là tích của các số nguyên tố trong M, mà $p \notin M$, nên $p \nmid a_k$.

Mâu thuẫn, suy ra giả thiết sai. Vậy $M = \mathbb{P}$. □

Nhận xét. Đánh giá [**25M**]

[11]Lời giải của **Aiscrim**.

3.1.9 (USA 2015 TSTST/P5)**.** Ký hiệu $\varphi(n)$ là số lượng các số nguyên dương nhỏ hơn n và nguyên tố cùng nhau với n. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương m sao cho phương trình $\varphi(n) = m$ có ít nhất 2015 nghiệm n.

Lời giải 1. [12]Ta xét 11 số nguyên tố sau:

$$S = \{11, 13, 17, 19, 29, 31, 37, 41, 43, 61, 71\}.$$

Tập này có tính chất rằng với mọi $p \in S$, tất cả các thừa số nguyên tố của $p - 1$ đều là số có một chữ số.

Đặt $N = (210)^{\text{tỷ}}$, và xét:

$$M = \varphi(N).$$

Với mỗi tập con $T \subseteq S$, ta có:

$$\varphi\left(N \cdot \prod_{p\in T}(p-1) \cdot \prod_{p\in T} p\right) = M.$$

Vì số lượng tập con là $2^{|S|} = 2^{11} = 2048 > 2015$, ta đã xây dựng được ít nhất 2015 số n khác nhau sao cho $\varphi(n) = M$. Điều phải chứng minh được hoàn tất.

Chú thích. Lời giải này được gợi cảm hứng từ một kết quả sâu sắc rằng chẳng hạn như:

$$\varphi(11 \cdot 1000) = \varphi(10 \cdot 1000).$$

□

Lời giải 2. [13]Gọi $2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_{2015}$ là 2015 số nguyên tố nhỏ nhất.

Ta xây dựng 2015 số:

$$n_1 = (p_1 - 1)p_2 \cdots p_{2015}, \quad n_2 = p_1(p_2 - 1)\cdots p_{2015}, \quad \ldots, \quad n_{2015} = p_1 p_2 \cdots (p_{2015} - 1).$$

Mỗi số n_i ở trên đều có cùng giá trị hàm Euler:

$$\varphi(n_i) = \varphi(p_1 p_2 \cdots p_{2015}) = \prod_{i=1}^{2015}(p_i - 1).$$

Như vậy, $\varphi(n) = m$ có ít nhất 2015 nghiệm, với $m = \prod_{i=1}^{2015}(p_i - 1)$. □

Nhận xét. Đánh giá [**20M**]

[12]Lời giải của Evan Chen.
[13]Lời giải của Yang Liu.

3.1.10 (USA 2015 TST/P2)**.** Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại một tập hợp S gồm n số nguyên dương sao cho với mọi cặp phân biệt $a, b \in S$, hiệu $a - b$ chia hết cả a và b, nhưng không chia hết bất kỳ phần tử nào khác của S.

Lời giải. [14]Ý tưởng là tìm một dãy $d_1, \dots, d_{n-1}$ các "hiệu số" sao cho hai điều kiện sau được thỏa mãn. Gọi:

$$s_i = d_1 + \cdots + d_{i-1}, \quad t_{i,j} = d_i + \cdots + d_{j-1} \quad \text{với } i \le j.$$

(i) Không có hai giá trị nào trong số các $t_{i,j}$ chia hết cho nhau.

(ii) Tồn tại một số nguyên a thỏa hệ đồng dư:

$$a \equiv -s_i \pmod{t_{i,j}} \quad \text{với mọi } i \le j.$$

Khi đó, dãy $a + s_1,\ a + s_2,\ \dots,\ a + s_n$ sẽ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Ví dụ, khi $n = 3$, ta có thể chọn $(d_1, d_2) = (2, 3)$, khi đó:

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 2, \quad s_3 = 5,$$

nên dãy $a + s_i$ là:

$$\overbrace{10 \underbrace{\qquad}_{2} 12 \underbrace{\qquad}_{3} 15}^{5}.$$

Vì các điều kiện cần thỏa mãn là:

$$a \equiv 0 \pmod 2, \quad a \equiv 0 \pmod 5, \quad a \equiv -2 \pmod 3,$$

nên ta chọn được $a = 10$.

Với cách xây dựng này, ta có thể xây dựng dãy d_i bằng quy nạp.

Để chuyển từ n sang $n+1$, giả sử đã có $d_1, \dots, d_{n-1}$. Chọn một số nguyên tố p không chia hết bất kỳ d_i nào. Hơn nữa, chọn M là bội số của $\prod_{i \le j} t_{i,j}$, đồng thời $\gcd(M, p) = 1$.

Khi đó, ta khẳng định rằng dãy $d_1 M,\ d_2 M,\ \dots,\ d_{n-1} M,\ p$ là một dãy hiệu hợp lệ.

Ví dụ, từ ví dụ trước với $M = 300$ và $p = 7$, ta có thể mở rộng thành:

$$\overbrace{a \underbrace{\qquad}_{600} \overbrace{b \underbrace{\qquad}_{900} c \underbrace{\qquad}_{7} d}^{907}}^{1507}.$$

Các số mới như $p,\ p + Mt_{n-1,n},\ p + Mt_{n-2,n},\ \dots$ đều nguyên tố cùng nhau và với tất cả các số còn lại. Do đó, điều kiện (i) vẫn đúng.

Để thấy rằng điều kiện (ii) vẫn đúng, chỉ cần lưu ý rằng ta vẫn có thể tìm nghiệm a thỏa hệ đồng dư cho n phần tử đầu tiên, và phần tử thứ $n+1$ có thể được xây dựng bởi định lý số dư Trung Hoa, vì tất cả các số $p + Mt_{i,n}$ đều nguyên tố cùng nhau. $\square$

Nhận xét. Đánh giá [**25M**]

[14]Lời giải Evan Chen soạn.

3.2 Các đề thi quốc tế

Asian Pacific Mathematics Olympiad

3.2.1 (APMO 2015/P3). Một dãy số thực $a_0, a_1, \ldots$ được gọi là *tốt* nếu thỏa mãn ba điều kiện sau:

- Giá trị của a_0 là một số nguyên dương.
- Với mọi số nguyên không âm i, ta có:

$$a_{i+1} = 2a_i + 1 \quad \text{hoặc} \quad a_{i+1} = \frac{a_i}{a_i + 2}.$$

- Tồn tại một số nguyên dương k sao cho $a_k = 2014$.

Tìm số nguyên dương nhỏ nhất n sao cho tồn tại một dãy *tốt* $a_0, a_1, \ldots$ với $a_n = 2014$.

Lời giải 1. [15]Xét biểu thức:

$$a_{i+1} + 1 = \begin{cases} 2(a_i + 1), & \text{nếu } a_{i+1} = 2a_i + 1, \\ \dfrac{2(a_i + 1)}{a_i + 2}, & \text{nếu } a_{i+1} = \dfrac{a_i}{a_i + 2}. \end{cases} \implies \frac{1}{a_{i+1} + 1} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{a_i + 1}, \\ \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{a_i + 1} + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Vì vậy:

$$\frac{1}{a_k + 1} = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{a_0 + 1} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon_i}{2^{k-i+1}}, \quad \varepsilon_i \in \{0, 1\}.$$

Nhân hai vế với $2^k(a_k + 1)$, đặt $a_k = 2014 \implies a_k + 1 = 2015$, ta được:

$$2^k = \frac{2015}{a_0 + 1} + 2015 \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \cdot 2^{i-1} \right).$$

Vì $\gcd(2, 2015) = 1$, nên $a_0 + 1 = 2015 \implies a_0 = 2014$, và:

$$2^k - 1 = 2015 \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \cdot 2^{i-1} \right).$$

Cần tìm k nhỏ nhất sao cho $2015 \mid 2^k - 1$. Vì $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, ta có:

$$\text{ord}_5(2) = 4, \quad \text{ord}_{13}(2) = 12, \quad \text{ord}_{31}(2) = 30 \implies \text{ord}_{2015}(2) = \text{lcm}(4, 12, 30) = 60.$$

Vậy $k = 60$ là giá trị nhỏ nhất thỏa mãn $a_k = 2014$. □

[15] Lời giải chính thức.

Lời giải 2. Từ $a_k = 2014$, xây dựng dãy ngược lại theo công thức:

$$a_i = \begin{cases} \dfrac{a_{i+1}-1}{2}, & \text{nếu } a_{i+1} > 1, \\ \dfrac{2a_{i+1}}{1-a_{i+1}}, & \text{nếu } a_{i+1} < 1. \end{cases}$$

Dãy ngược (được viết dạng phân số tối giản $\frac{m}{n}$):

$$\begin{array}{cccccccccc}
\frac{2014}{1}, & \frac{2013}{2}, & \frac{2011}{4}, & \frac{2007}{8}, & \frac{1999}{16}, & \frac{1983}{32}, & \frac{1951}{64}, & \frac{1887}{128}, & \frac{1759}{256}, & \frac{1503}{512}, \\
\frac{991}{1024}, & \frac{1982}{33}, & \frac{1949}{66}, & \frac{1883}{132}, & \frac{1751}{264}, & \frac{1487}{528}, & \frac{959}{1056}, & \frac{1918}{97}, & \frac{1821}{194}, & \frac{1627}{388}, \\
\frac{1239}{776}, & \frac{463}{1552}, & \frac{926}{1089}, & \frac{1852}{163}, & \frac{1689}{326}, & \frac{1363}{652}, & \frac{711}{1304}, & \frac{1422}{593}, & \frac{829}{1186}, & \frac{1658}{357}, \\
\frac{1301}{714}, & \frac{587}{1428}, & \frac{1174}{841}, & \frac{333}{1682}, & \frac{666}{1349}, & \frac{1332}{683}, & \frac{649}{1366}, & \frac{1298}{717}, & \frac{581}{1434}, & \frac{1162}{853}, \\
\frac{309}{1706}, & \frac{618}{1397}, & \frac{1236}{779}, & \frac{457}{1558}, & \frac{914}{1101}, & \frac{1828}{187}, & \frac{1641}{374}, & \frac{1267}{748}, & \frac{519}{1496}, & \frac{1038}{977}, \\
\frac{61}{1954}, & \frac{122}{1893}, & \frac{244}{1771}, & \frac{488}{1527}, & \frac{976}{1039}, & \frac{1952}{63}, & \frac{1889}{126}, & \frac{1763}{252}, & \frac{1511}{504}, & \frac{1007}{1008}, \quad \frac{2014}{1}.
\end{array}$$

Có 61 phần tử, nên $k = 60$. □

Lời giải 3. Bắt đầu với $a_k = \frac{2014}{1} = \frac{m_0}{n_0}$, xây dựng ngược dãy phân số:

$$(m_{i+1}, n_{i+1}) = \begin{cases} (m_i - n_i,\ 2n_i), & \text{nếu } m_i > n_i; \\ (2m_i,\ n_i - m_i), & \text{nếu } m_i < n_i. \end{cases}$$

Ta chứng minh được $m_i + n_i = 2015$, $\gcd(m_i, n_i) = 1$ và dãy kết thúc khi $n_k = 1$, tức $a_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$. Dễ thấy:

$$(m_i, n_i) \equiv (-2^i, 2^i) \pmod{2015} \implies 2^k \equiv 1 \pmod{2015}.$$

Do đó $k = 60$. □

Nhận xét. Đánh giá [**25M**]

3.2.2 (APMO 2015/P5)**.** Xác định tất cả các dãy số $a_0, a_1, a_2, \ldots$ gồm các số nguyên dương với $a_0 \geq 2015$ sao cho với mọi số nguyên $n \geq 1$ ta có:

(i) a_{n+2} chia hết cho a_n;

(ii) $|s_{n+1} - (n+1)a_n| = 1$, trong đó

$$s_{n+1} = a_{n+1} - a_n + a_{n-1} - \cdots + (-1)^{n+1}a_0.$$

Lời giải. [16]Giả sử dãy $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ gồm các số nguyên dương thoả mãn các điều kiện đề bài. Ta viết lại điều kiện (ii) thành:

$$s_{n+1} = (n+1)a_n + h_n \text{ với } h_n \in \{-1, 1\}.$$

Khi đó:

$$s_n = na_{n-1} + h_{n-1}, \quad \text{nên } a_{n+1} = s_{n+1} + s_n = (n+1)a_n + na_{n-1} + \delta_n,$$

với $\delta_n \in \{-2, 0, 2\}$. Gọi đây là phương trình (1).

Từ $|s_2 - 2a_1| = 1 \implies a_0 = 3a_1 - a_2 \pm 1 \leq 3a_1 \implies a_1 \geq \frac{a_0}{3} \geq 671$. Thế $n = 2$ vào (1), ta được:

$$a_3 = 3a_2 + 2a_1 + \delta_2.$$

Vì $a_1 \mid a_3$, nên $a_1 \mid 3a_2 + \delta_2 \implies a_2 \geq 223$, và do đó $a_n \geq 223$ với mọi $n \geq 0$.

Bổ đề

Với mọi $n \geq 4$, ta có $a_{n+2} = (n+1)(n+4)a_n$.

Chứng minh. Từ (1), và dùng bất đẳng thức $a_n > na_{n-1} + 3$ cùng $a_n < (n+1)a_{n-1}$, ta được:

$$a_{n+2} = (n+3)(n+1)a_n + (n+2)na_{n-1} + (n+2)\delta_n + \delta_{n+1}.$$

Suy ra:

$$(n^2 + 5n + 3)a_n < a_{n+2} < (n^2 + 5n + 5)a_n.$$

Vì $a_n \mid a_{n+2}$, nên ta kết luận:

$$a_{n+2} = (n+1)(n+4)a_n.$$

■

Bổ đề

Với mọi $n \geq 4$, ta có $a_{n+1} = \frac{(n+1)(n+3)}{n+2}a_n$.

Chứng minh. Dùng công thức truy hồi trong Bổ đề 1 để biểu diễn a_{n+3} theo a_{n+1} và a_n, rồi so sánh hai biểu thức:

$$a_{n+3} = (n+2)(n+4)a_{n+1} = (n+3)(n+1)(n+4)a_n + \delta_{n+2}.$$

Từ đây suy ra $(n+2)(n+4)a_{n+1} - (n+3)(n+1)(n+4)a_n = \delta_{n+2}$, nên $n+4 \mid \delta_{n+2} \implies \delta_{n+2} = 0$, dẫn đến:

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)(n+3)}{n+2}a_n.$$

■

Giả sử tồn tại $n \geq 1$ sao cho

$$a_{n+1} \neq \frac{(n+1)(n+3)}{n+2}a_n.$$

Khi đó, theo Bổ đề 2, tồn tại số nguyên lớn nhất $1 \leq m \leq 3$ mà tại đó công thức trên không đúng. Ta có:

$$a_{m+2} = \frac{(m+2)(m+4)}{m+3}a_{m+1}.$$

Nếu $\delta_{m+1} = 0$ thì:

$$a_{m+1} = \frac{(m+1)(m+3)}{m+2}a_m,$$

mâu thuẫn với cách chọn m. Do đó $\delta_{m+1} \neq 0$.

Vì $m+3 \mid a_{m+1}$, đặt $a_{m+1} = (m+3)k \implies a_{m+2} = (m+2)(m+4)k$. Khi đó:

$$(m+1)a_m + \delta_{m+1} = a_{m+2} - (m+2)a_{m+1} = (m+2)k.$$

Suy ra:

$$a_m \mid (m+2)k - \delta_{m+1} \text{ và } a_m \mid a_{m+2} = (m+2)(m+4)k.$$

Kết hợp hai điều này:

$$a_m \mid (m+4)\delta_{m+1}.$$

Vì $\delta_{m+1} \neq 0$, suy ra $a_m \leq 2m+8 \leq 14$, mâu thuẫn với kết quả trước đó rằng $a_n \geq 223$. Mâu thuẫn này cho thấy:

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)(n+3)}{n+2}a_n \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Thế $n = 1$ ta có $3 \mid a_1$. Đặt $a_1 = 3c \implies a_n = c(n+2)n!$ với mọi $n \geq 1$.

Sử dụng $|s_2 - 2a_1| = 1$ suy ra $a_0 = c \pm 1$. Vậy tồn tại hai họ nghiệm:

- $a_n = c(n+2)n!$, $a_0 = c+1$, với $c \geq 2014$,
- $a_n = c(n+2)n!$, $a_0 = c-1$, với $c \geq 2016$.

□

Nhận xét. Đánh giá [**25M**]

[16] Lời giải chính thức.

Balkan Mathematics Olympiad

3.2.3 (BMO 2015/P4). Chứng minh rằng trong bất kỳ 20 số nguyên dương liên tiếp nào cũng tồn tại một số nguyên d sao cho với mọi số nguyên dương n, bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$n\sqrt{d}\left\{n\sqrt{d}\right\} > \frac{5}{2},$$

trong đó $\{x\}$ ký hiệu phần thập phân (phần lẻ) của số thực x, được định nghĩa là hiệu giữa số x và phần nguyên lớn nhất không vượt quá x.

Lời giải. [17]Trong 20 số nguyên liên tiếp luôn tồn tại một số có dạng $20k + 15 = 5(4k + 3)$. Ta sẽ chứng minh rằng với $d = 5(4k + 3)$, bất đẳng thức

$$n\sqrt{d} \cdot \{n\sqrt{d}\} > \frac{5}{2}$$

luôn đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Lưu ý rằng số có dạng $5(4k + 3)$ vừa chia hết cho 5, vừa có ít nhất một ước nguyên tố dạng $4s + 3$, là điều kiện cần cho lập luận chia hết phía dưới.

Vì $d \equiv -1 \pmod 4$, nên d không phải là một số chính phương. Do đó với mỗi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại $a \in \mathbb{N}$:

$$a < \sqrt{n^2 d} < a + 1 \implies a^2 < n^2 d < (a + 1)^2.$$

Ta sẽ chứng minh rằng $n^2 d \geq a^2 + 5$.

Mỗi số nguyên dương dạng $4s + 3$ đều có một ước nguyên tố cũng thuộc dạng $4s + 3$. Gọi $p \mid (4k + 3)$ là một ước nguyên tố như vậy. Vì $p \equiv 3 \pmod 4$,

Bổ đề

Một số nguyên tố $p \equiv 3 \pmod 4$ không thể là ước của bất kỳ số nào có dạng $a^2 + 1$, với $a \in \mathbb{Z}$.

Chứng minh. Giả sử ngược lại rằng tồn tại $a \in \mathbb{Z}$ sao cho $p \mid a^2 + 1$. Khi đó:

$$a^2 \equiv -1 \pmod p.$$

Nâng hai vế lên lũy thừa $\frac{p-1}{2}$, ta được:

$$(a^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p \implies a^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p.$$

Mặt khác, theo định lý Fermat nhỏ (vì p là số nguyên tố và $p \nmid a$):

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Suy ra:

$$1 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p.$$

Do $p = 4k + 3 \implies \frac{p-1}{2} = 2k + 1$ là số lẻ, nên:

$$(-1)^{2k+1} = -1 \implies 1 \equiv -1 \pmod p \implies 2 \equiv 0 \pmod p.$$

Điều này vô lý vì $p \geq 7$. Vậy giả thiết ban đầu là sai, tức là $p \nmid a^2 + 1$.

Do đó, không tồn tại số nguyên a sao cho $a^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$ nếu $p \equiv 3 \pmod 4$, như cần chứng minh. ■

Từ bổ đề suy ra các số $a^2+1^2=a^2+1$ và $a^2+2^2=a^2+4$ không chia hết cho p, nên $n^2d \neq a^2+1, a^2+4$.
Mặt khác, vì $5 \mid d \implies 5 \mid n^2d$, mà $5 \nmid a^2+2, a^2+3$, nên $n^2d \neq a^2+2, a^2+3$.
Do $n^2d > a^2$ và đã loại trừ các giá trị $a^2+1, \dots, a^2+4$, ta suy ra:

$$n^2d \geq a^2+5.$$

Khi đó:

$$n\sqrt{d} \cdot \{n\sqrt{d}\} = n\sqrt{d} \cdot (\sqrt{n^2d} - a) \geq \sqrt{a^2+5} \cdot (\sqrt{a^2+5} - a).$$

Xét biểu thức phía phải:

$$\sqrt{a^2+5} \cdot (\sqrt{a^2+5} - a) = (a^2+5-a^2) + \frac{(a^2+5-a^2)^2}{4(a^2+5)} = \frac{5}{2} + \frac{25}{4(a^2+5)} > \frac{5}{2}.$$

Vậy bất đẳng thức đã cho luôn đúng với $d = 5(4k+3)$, và lời giải hoàn tất. □

Nhận xét. Đánh giá [**30M**]

[17] Lời giải chính thức.

Baltic Way

3.2.4 (BW 2015/P16)**.** Ký hiệu $P(n)$ là ước số nguyên tố lớn nhất của n. Tìm tất cả các số nguyên $n \geq 2$ sao cho:

$$P(n) + \lfloor \sqrt{n} \rfloor = P(n+1) + \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor.$$

Lời giải. [18]Đáp án: Chỉ có $n = 3$ thỏa mãn.

Dễ thấy $P(n) \neq P(n+1)$, nên để hai vế bằng nhau, cần $\lfloor \sqrt{n} \rfloor \neq \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor$, tức $n+1$ là số chính phương. Khi đó:

$$\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1 = \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor, \quad \Longrightarrow \quad P(n) = P(n+1) + 1.$$

Do cả hai đều là số nguyên tố, ta có:

$$P(n) = 3, \quad P(n+1) = 2 \quad \Longrightarrow \quad n = 3^a, \quad n+1 = 2^b.$$

Khi đó:

$$3^a = 2^b - 1 \implies 2^b = 3^a + 1.$$

Xét modulo 3:

$$2^b \equiv 1 \pmod{3} \implies b \text{ chẵn. Đặt } b = 2c.$$

Khi đó:

$$3^a = (2^c - 1)(2^c + 1).$$

Trong hai thừa số liên tiếp, chỉ một chia hết cho 3, do đó $2^c - 1 = 1 \implies c = 1 \implies b = 2 \implies n+1 = 4 \implies n = 3$.

Vậy nghiệm duy nhất là $\boxed{n = 3}$. □

> **Nhận xét.** Đánh giá [**10M**]

[18]Lời giải chính thức.

3.2.5 (BW 2015/P17)**.** Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $2^{2015} \mid n^{n-1} - 1$ nhưng $2^{2016} \nmid n^{n-1} - 1$.

Lời giải. [19]Ta xét các số nguyên dương n sao cho $2^{2015} \mid n^{n-1} - 1$, nhưng $2^{2016} \nmid n^{n-1} - 1$.

Vì n là số lẻ, nên ta có thể viết $n = 2^d u + 1$, với u là số lẻ. Khi đó:

$$n^{n-1} - 1 = (n^{2^d} - 1)\left(n^{2^d(u-1)} + \cdots + n^{2^d} + 1\right).$$

Ta cần $2^{2015} \| (n^{n-1} - 1) \implies 2^{2015} \| (n^{2^d} - 1)$.

Khi đó:

$$n^{2^d} - 1 = (n-1)(n+1)(n^2+1)(n^4+1)\cdots(n^{2^{d-1}}+1).$$

Tất cả các thừa số bậc chẵn $n^{2^k} + 1$ với $k \geq 0$ đều chia hết cho đúng một lũy thừa của 2, tức là $2 \| n^{2^k} + 1$. Trong khi đó:

$$\nu_2(n-1) = d, \quad \nu_2(n+1) = 1, \quad \text{và có } d-1 \text{ thừa số bậc chẵn.}$$

Tổng lại:

$$\nu_2(n^{2^d} - 1) = d + 1 + (d-1) = 2d.$$

Ta muốn $2d = 2015$, nhưng điều đó không thể vì 2015 lẻ. Do đó ta cần $2d = 2014 \implies d = 1007$.

Với $d = 1007$, ta được:

$$\nu_2(n^{2^d} - 1) = 2014.$$

Ta cũng cần:

$$\nu_2\left(n^{2^d(u-1)} + \cdots + n^{2^d} + 1\right) = 1.$$

Tổng trên có u số hạng, mà tổng là số lẻ, cho nên u lẻ.

Như vậy:

$$n = 2^{1007}u + 1 = 2^{1007}(2^e v) + 1 = 2^{1007+e}v + 1.$$

Với v là số lẻ nguyên dương. Do đó:

$$n = 2^{2014}v - 1.$$

Kết luận: Tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn điều kiện là các số có dạng:

$$\boxed{n = 2^{2014}v - 1}, \quad \text{với } v \text{ là số lẻ.}$$

□

Nhận xét. Đánh giá [**20M**]

[19]Lời giải chính thức.

3.2.6 (BW 2015/P18)**.** Cho $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ là một đa thức bậc $n \geq 1$ có n nghiệm nguyên (không nhất thiết phân biệt). Giả sử tồn tại các số nguyên tố phân biệt $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ sao cho với mọi $i = 0, 1, \ldots, n-1$, ta có $a_i > 1$ và là một lũy thừa của p_i. Hỏi có những giá trị nào của n là thỏa mãn?

Lời giải. [20]Rõ ràng tất cả các nghiệm của đa thức phải âm vì các hệ số đều dương.

Nếu có ít nhất hai nghiệm khác -1, thì cả hai đều phải là lũy thừa của p_0. Khi đó, áp dụng công thức Viète, ta có $p_0 \mid a_1$, điều này mâu thuẫn với $p_0 \neq p_1$. Vì thế nên đa thức có không quá một nghiệm khác -1.

Do đó, ta có thể phân tích f dưới dạng:

$$f(x) = (x + a_0)(x + 1)^{n-1}.$$

Khai triển biểu thức trên ta có:

$$a_2 = \binom{n-1}{1} + a_0\binom{n-1}{2}, \quad \text{và} \quad a_{n-2} = a_0\binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-3}.$$

Nếu $n \geq 5$, thì $2 \neq n-2$, nên hai hệ số trên nguyên tố cùng nhau, do chúng là lũy thừa của hai số nguyên tố khác nhau. Tuy nhiên, phụ thuộc vào tính chẵn lẻ của n, ta có a_2 và a_{n-2} đều chia hết cho $n-1$ hoặc $\frac{n-1}{2}$, dẫn đến mâu thuẫn.

Do đó, chỉ các giá trị $n = 1, 2, 3, 4$ là khả thi. Với mỗi n đó, các đa thức sau thỏa mãn điều kiện:

- $f_1(x) = x + 2$
- $f_2(x) = (x + 2)(x + 1) = x^2 + 3x + 2$
- $f_3(x) = (x + 3)(x + 1)^2 = x^3 + 5x^2 + 7x + 3$
- $f_4(x) = (x + 2)(x + 1)^3 = x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2$

□

Nhận xét. Đánh giá [**25M**]

[20] Lời giải chính thức.

3.2.7 (BW 2015/P19). Ba số nguyên dương phân biệt từng đôi một a, b, c thỏa mãn $\gcd(a, b, c) = 1$, đồng thời:

$$a \mid (b-c)^2, \quad b \mid (a-c)^2, \quad c \mid (a-b)^2.$$

Chứng minh rằng không tồn tại tam giác không suy biến nào có độ dài ba cạnh là a, b, c.

Lời giải. [21]Trước hết, ta nhận thấy rằng ba số a, b, c nguyên dương phân biệt đôi một này phải nguyên tố cùng nhau từng đôi một. Thật vậy, giả sử a và b cùng chia hết cho một số nguyên tố p, thì $p \mid b$, mà theo giả thiết

$$b \mid (a-c)^2 \implies p \mid (a-c)^2 \implies p \mid a-c \implies p \mid c.$$

Vậy p là ước chung của a, b, c, mâu thuẫn với giả thiết $\gcd(a, b, c) = 1$.

Giờ ta xét biểu thức:

$$M = 2ab + 2bc + 2ac - a^2 - b^2 - c^2.$$

Từ điều kiện bài toán, ta thấy rằng $a \mid (b-c)^2 \implies a \mid b^2 - 2bc + c^2$. Tương tự, $b \mid (c-a)^2$, $c \mid (a-b)^2$. Cộng ba biểu thức lại, ta thu được rằng $a \mid M$, $b \mid M$, $c \mid M$ suy ra $abc \mid M$.

Giả sử tồn tại tam giác có ba cạnh là a, b, c, thì theo bất đẳng thức tam giác:

$$a < b + c \implies a^2 < ab + ac.$$

Tương tự:

$$b^2 < bc + ba, \quad c^2 < ca + cb.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên, ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 < ab + bc + ca \implies M > 0.$$

Vì $abc \mid M$, nên $M \geq abc$.

Mặt khác:

$$a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ac \implies M < ab + bc + ac.$$

Giả sử không mất tính tổng quát $a > b > c$, thì:

$$M < 3ab.$$

Kết hợp với $M \geq abc \implies abc < 3ab \implies c < 3 \implies c = 1$ hoặc $c = 2$.

- Nếu $c = 1$, thì $b < a < b + 1 \implies a = b$, mâu thuẫn vì $a \neq b$.
- Nếu $c = 2$, thì $b < a < b + 2 \implies a = b + 1$. Khi đó $c = 2 \nmid 1 = (a-b)^2 = 1$, mâu thuẫn.

Vậy không tồn tại tam giác không suy biến nào có ba cạnh là a, b, c. Điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Đánh giá [**25M**]

[21]Lời giải chính thức.

3.2.8 (BW 2015/P20). Với mỗi số nguyên $n \geq 2$, ta định nghĩa A_n là số lượng các số nguyên dương m thỏa mãn tính chất sau:

Khoảng cách từ n đến bội gần nhất của m bằng khoảng cách từ n^3 đến bội gần nhất của m. (Khoảng cách giữa hai số nguyên a và b được định nghĩa là $|a-b|$.)

Tìm tất cả các số nguyên $n \geq 2$ sao cho A_n là số lẻ.

Lời giải. [22]Với mỗi số nguyên $n \geq 2$, ta định nghĩa A_n là số lượng các số nguyên dương m sao cho khoảng cách từ n đến bội không âm gần nhất của m bằng với khoảng cách từ n^3 đến bội không âm gần nhất của m.

Với một số nguyên m, khoảng cách từ n đến bội gần nhất của m là d, khi đó:

$$m \mid n \pm d \implies n \equiv \pm d \pmod{m}.$$

Nếu khoảng cách từ n đến bội gần nhất của m bằng khoảng cách từ n^3 đến bội gần nhất của m, thì:

$$n \equiv \pm d \pmod{m}, \quad n^3 \equiv \pm d \pmod{m} \implies n \equiv \pm n^3 \pmod{m}.$$

Ngược lại, nếu $n \equiv \pm n^3 \pmod{m}$, thì tồn tại $0 \leq d \leq \frac{m}{2}$ sao cho $n \equiv \pm d \pmod{m}$, và đồng thời $n^3 \equiv \pm d \pmod{m}$, nên khoảng cách từ n đến bội gần nhất của m bằng khoảng cách từ n^3 đến bội gần nhất của m.

Do đó, ta cần đếm số lượng $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ sao cho:

$$n \equiv \pm n^3 \pmod{m} \iff m \mid n^3 \pm n.$$

Vậy:

$$A_n = \tau(n^3 - n) + \tau(n^3 + n) - \tau(\gcd(n^3 - n, n^3 + n)),$$

với $\tau(k)$ là số lượng ước dương của k.

Nhắc lại rằng $\tau(k)$ lẻ khi và chỉ khi k là một số chính phương. Hơn nữa, ta có:

$$\gcd(n, n^2 \pm 1) = 1.$$

Nếu $n^3 \pm n$ là chính phương thì n và $n^2 \pm 1$ đều là chính phương, điều này là không thể vì $n^2 \pm 1$ không là chính phương (vì chỉ có $0, 1$ là các chính phương liên tiếp).

Do đó, $n^3 - n$ và $n^3 + n$ không là chính phương suy ra $\tau(n^3 - n)$, $\tau(n^3 + n)$ đều chẵn.

Vậy A_n lẻ khi và chỉ khi $\gcd(n^3 - n, n^3 + n)$ là chính phương. Ta có:

$$\gcd(n^2-1, n^2+1) = \gcd(n^2-1, 2) = \begin{cases} 1 & \text{n chẵn}, \\ 2 & \text{n lẻ}. \end{cases} \implies \gcd(n^3 - n, n^3 + n) = \begin{cases} n & \text{n chẵn}, \\ 2n & \text{n lẻ}. \end{cases}$$

Với n lẻ, $2n$ không bao giờ là chính phương vì chứa đúng một thừa số 2.

Với n chẵn, A_n là lẻ khi và chỉ khi n là số chính phương.

Kết luận: A_n là số lẻ khi và chỉ khi n là một số chính phương chẵn. $\square$

Nhận xét. Đánh giá [**30M**]

[22] Lời giải chính thức.

Benelux

3.2.9 (BxMO 2015/P3)**.** Có tồn tại số nguyên tố nào có dạng thập phân là $3811\cdots1$ hay không, tức là bắt đầu bằng các chữ số $3, 8, 1, 1$, theo đúng thứ tự, và sau đó là một hoặc nhiều chữ số 1?

Lời giải. [23]Gọi
$$a(n) = 38\underbrace{11\dots11}_{n \text{ chữ số } 1}.$$
Xét ba trường hợp theo phần dư của $n \mod 3$:

Trường hợp 1: $n = 3k+1 \equiv 1 \pmod 3$. Khi đó, tổng chữ số của $a(n)$ là:
$$3+8+n = 11+3k+1 = 3(k+4),$$
chia hết cho 3, suy ra $a(n)$ chia hết cho 3, suy ra $a(n)$ không nguyên tố.

Trường hợp 2: $n = 3k+2 \equiv 2 \pmod 3$. Ta có:
$$a(2) = 3811 = 3700 + 111,$$
chia hết cho 37. Dễ thấy:
$$a(3k+2) = 1000 \cdot a(3k-1) + 111,$$
nên theo quy nạp $a(3k+2)$ chia hết cho 37, suy ra $a(n)$ không nguyên tố.

Trường hợp 3: $n = 3k \equiv 0 \pmod 3$. Ta có:
$$9a(3k) = 342\underbrace{99\dots99}_{n \text{ chữ số } 9} = 7 \cdot 10^k \cdot \frac{10^{3k}-1}{9}.$$
Suy ra:
$$a(3k) = \frac{7 \cdot 10^k \cdot (10^{3k}-1)}{81},$$
chia hết cho một số lớn hơn 9, suy ra $a(n)$ có ước số khác 1 và chính nó, suy ra không nguyên tố.

Kết luận: Trong mọi trường hợp, $a(n)$ không phải số nguyên tố. □

Nhận xét. Đánh giá [10M]

[23]Lời giải chính thức.

Czech-Polish-Slovak Match

European Girls' Mathematical Olympiad

3.2.10 (EGMO 2015/P3)**.** Cho n, m là các số nguyên lớn hơn 1, và $a_1, a_2, \ldots, a_m$ là các số nguyên dương không vượt quá n^m. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên dương $b_1, b_2, \ldots, b_m$ không vượt quá n, sao cho:

$$\gcd(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m) < n,$$

trong đó $\gcd(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ là ước chung lớn nhất của các số $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Lời giải 1. [24]Giả sử không mất tính tổng quát rằng a_1 là nhỏ nhất trong các a_i. Nếu $a_1 \geq n^m - 1$, thì bài toán trở nên đơn giản: hoặc tất cả a_i bằng nhau, hoặc $a_1 = n^m - 1$ và tồn tại $a_j = n^m$.

- Trong trường hợp đầu, ta chọn (ví dụ) $b_1 = 1, b_2 = 2$, các b_i còn lại tùy ý. Khi đó:

$$\gcd(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m) \leq \gcd(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = 1.$$

- Trong trường hợp thứ hai, chọn $b_1 = 1, b_j = 1$, các b_i còn lại tùy ý, ta cũng có:

$$\gcd(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m) \leq \gcd(a_1 + b_1, a_j + b_j) = 1.$$

Do đó, ta chỉ cần xét trường hợp $a_1 \leq n^m - 2$.

Giả sử ngược lại rằng không tồn tại bộ $b_1, \ldots, b_m \in \{1, \ldots, n\}$ sao cho:

$$\gcd(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m) < n.$$

Khi đó, với mọi lựa chọn $b_1, \ldots, b_m$, ta có:

$$\gcd(a_1 + b_1, \ldots, a_m + b_m) \geq n.$$

Đồng thời:

$$\gcd(a_1 + b_1, \ldots, a_m + b_m) \leq a_1 + b_1 \leq n^m + n - 2.$$

Có tối đa $n^m - 1$ giá trị có thể cho ước số chung lớn nhất. Nhưng có n^m bộ giá trị $(b_1, \ldots, b_m)$. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai bộ $(b_1, \ldots, b_m)$ cho cùng một giá trị gcd là $d \geq n$. Tuy nhiên, với mỗi i, chỉ tồn tại duy nhất một $b_i \in \{1, \ldots, n\}$ sao cho $a_i + b_i \equiv 0 \pmod{d}$. Suy ra chỉ có nhiều nhất một bộ $(b_1, \ldots, b_m)$ cho giá trị gcd bằng d, mâu thuẫn. □

Lời giải 2. Tương tự lời giải 1, giả sử $a_1 \leq n^m - 2$. Ta xét:

$$\gcd(a_1 + 1, a_2 + 1, a_3 + 1, \ldots, a_m + 1)$$

và

$$\gcd(a_1 + 1, a_2 + 2, a_3 + 1, \ldots, a_m + 1).$$

Hai giá trị này nguyên tố cùng nhau, nên:

$$a_1 + 1 \geq n^2.$$

Nếu tiếp tục thay các số 1 thành 2 trong các vị trí khác, sau $m - 1$ bước, ta có:

$$a_1 + 1 \geq n^m \implies a_1 \geq n^m - 1,$$

mâu thuẫn với giả thiết ban đầu. □

[24]Lời giải chính thức.

Lời giải 3. Ta sẽ chứng minh một phiên bản mạnh hơn:

> **Khẳng định —** Với $m, n > 1$, nếu tồn tại $a_i \leq n^{2^{m-1}}$, thì tồn tại $b_1, \ldots, b_m \in \{1, 2\}$ sao cho:
>
> $$\gcd(a_1 + b_1, \ldots, a_m + b_m) < n.$$

Chứng minh. Giả sử ngược lại. Khi đó, với mọi bộ $(b_1, \ldots, b_m)$ có $b_1 = 1$, $b_i \in \{1, 2\}$, ta được 2^{m-1} số khác nhau, và mọi cặp trong số đó nguyên tố cùng nhau vì tồn tại $i > 1$ sao cho $a_i + 1$ và $a_i + 2$ lần lượt xuất hiện.

Vậy mọi số này đều chia hết $a_1 + 1$, và mỗi số $\geq n$, với nhiều nhất một số bằng n, suy ra:

$$a_1 + 1 \geq n(n+1)^{2^{m-1}-1} \implies a_1 \geq n^{2^{m-1}},$$

mâu thuẫn với giả thiết. Vậy tồn tại bộ $b_i \in \{1, 2\}$ như yêu cầu. ■

Chú thích: Giới hạn $n^{2^{m-1}}$ có thể cải thiện. □

> **Nhận xét.** Đánh giá [25M]

European Mathematical Cup

3.2.11 (EMC 2015/J/P3)**.** Ký hiệu $d(n)$ là số lượng ước dương của n. Với số nguyên dương n, ta định nghĩa:

$$f(n) = d(k_1) + d(k_2) + \cdots + d(k_m),$$

trong đó $1 = k_1 < k_2 < \cdots < k_m = n$ là tất cả các ước của số n.

Ta gọi một số nguyên $n > 1$ là *gần hoàn hảo* (almost perfect) nếu $f(n) = n$.

Hãy tìm tất cả các số gần hoàn hảo.

Lời giải 1. [25]

Cách định nghĩa khác của hàm $f(n)$ là:

$$f(n) = \sum_{k|n,\, k\geq 1} d(k).$$

Giả sử $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$ là phân tích thành thừa số nguyên tố. Ta biết:

$$d(n) = \prod_{i=1}^{r} (a_i + 1).$$

Ta chứng minh rằng hàm f là hàm nhân tính, nghĩa là

Khẳng định — Nếu $\gcd(n, m) = 1$, thì: $f(nm) = f(n)f(m)$.

Chứng minh. Áp dụng tính nhân của hàm d, ta có:

$$f(nm) = \sum_{k|nm} d(k) = \sum_{k_1|n,\, k_2|m} d(k_1k_2) = \sum_{k_1|n,\, k_2|m} d(k_1)d(k_2) = f(n)f(m).$$

∎

Nếu $r = 1$ thì $n = p^{a_1}$. Khi đó các ước của n là $1, p, p^2, \ldots, p^{a_1}$, nên:

$$f(n) = \sum_{i=0}^{a_1} (i+1) = \frac{(a_1+1)(a_1+2)}{2}.$$

Kết hợp với tính nhân, ta được:

$$f(n) = \prod_{i=1}^{r} \frac{(a_i+1)(a_i+2)}{2}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng với $p \geq 5$, và với $p = 3$ khi $a \geq 3$, thì:

Khẳng định — $f(p^a) = \frac{(a+1)(a+2)}{2} < \frac{2}{3}p^a$.

Chứng minh. Cơ sở: Dễ thấy $3 < \frac{2}{3}p$ với $p \geq 5$, và $6 < \frac{2}{3} \cdot 27$.

Bước quy nạp: nhận thấy:

$$\frac{a+3}{a+1} \leq 2 < p.$$

∎

Tương tự, ta cũng chứng minh được rằng với $p = 2$, thì $f(2^a) < 2^a$ khi $a \geq 4$. Kiểm tra trực tiếp với $p = 2$, $a = 1, 2, 3$, và $p = 3$, $a = 1, 2$, ta có:

$$f(p^a) \leq \frac{3}{2}p^a, \quad f(p^a) \leq p^a \text{ với } p \geq 3 \text{ hoặc } (p = 2, a \geq 4).$$

Nếu $f(n) = n$, thì:

$$\prod_{i=1}^{r} \frac{f(p_i^{a_i})}{p_i^{a_i}} = 1.$$

Từ đó suy ra rằng các ước nguyên tố khả dĩ của n chỉ là 2 và 3.

Nếu $r = 1$, thì nghiệm duy nhất là $n = 3$.

Nếu $r = 2$, với $p_1 = 2, p_2 = 3$, và $1 \leq a_1 \leq 2, 1 \leq a_2 \leq 2$, có 4 trường hợp để kiểm tra, trong đó $n = 18, 36$ thỏa mãn.

Vậy:

$$\boxed{\text{Tất cả các số gần hoàn hảo là } 3,\ 18,\ 36.}$$

□

[25] Lời giải chính thức.

Lời giải 2. [26]Ta đưa ra lời giải khác không sử dụng quá nhiều tính chất của hàm f.

Trước tiên, ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề

Với mọi số nguyên $n > 1$ và số nguyên tố p, ta có:

$$f(pn) \leq 3f(n),$$

và dấu $=$ xảy ra khi và chỉ khi $\gcd(p, n) = 1$.

Chứng minh. Với mọi số nguyên m, tập hợp các ước của pm là hợp của hai tập:

- Tập các ước của m,
- Tập các ước của m nhân với p.

Hai tập này rời nhau khi và chỉ khi $\gcd(p, m) = 1$: nếu p và m nguyên tố cùng nhau, rõ ràng không có ước nào thuộc cả hai tập; nếu không cùng nhau, thì p thuộc cả hai.

Do đó, ta có $d(pm) \leq 2d(m)$, và:

$$f(pn) = \sum_{k|pn} d(k) \leq \sum_{k|n} d(k) + \sum_{k|n} d(pk) \leq f(n) + 2f(n) = 3f(n).$$

Cả hai dấu $=$ xảy ra khi và chỉ khi hai tập là rời nhau, tức $\gcd(p, n) = 1$. ■

Ngoài ra, ta có:

$$f(2^k) = d(1) + d(2) + \cdots + d(2^k) = 1 + 2 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Lưu ý rằng nếu tồn tại số nguyên dương n sao cho $f(n) < n$, thì với mọi $p > 3$, ta có:

$$f(pn) \leq 3f(n) \leq pf(n) < pn.$$

Do đó, nếu $f(n) < n$, thì với mọi số lẻ m, ta có $f(mn) < mn$.

Vì điều này, ta đưa ra định nghĩa:

Định nghĩa. Một số n là *bội đẹp (nice multiple)* của m nếu $m \mid n$ và $\frac{n}{m}$ là số lẻ. Tương tự, ta định nghĩa *ước đẹp (nice divisor)*.

Khẳng định từ trên: nếu với một số n nào đó ta có $f(n) < n$, thì không có bội đẹp nào của n là số gần hoàn hảo.

Chiến lược: ta sẽ kiểm tra các số nhỏ và xét tỉ lệ $f(n)/n$. Khi $f(n) < n$, ta loại mọi bội đẹp của n. Với công thức $f(2^k)$, ta kết luận rằng với k đủ lớn (khi $f(2^k) < 2^k$) thì không còn số gần hoàn hảo nào. Dễ thấy rằng bằng quy nạp ta có $f(2^k) < 2^k$ với $k > 4$.

Do đó, không có số gần hoàn hảo nào có dạng $2^k \cdot m$ với $k > 4$ và m lẻ, vì tất cả những số này có 2^k là ước đẹp.

Vậy ta chỉ cần kiểm tra các số có dạng $2^k \cdot m$ với $k \leq 3$ và m lẻ.

Trường hợp 1: $k = 0$

Với mọi số nguyên tố lẻ p, ta có $f(p) = d(1) + d(p) = 3 \leq p$. Suy ra $n = 3$ là một nghiệm. Không có nghiệm nào khác: nếu một số lẻ có ước nguyên tố khác 3 thì do $f(p) < p$, nó không thể là số gần hoàn hảo;

nếu là lũy thừa của 3 lớn hơn 3 thì $f(9) < 3f(3) = 9$, nên cũng không thỏa. (9 là ước đẹp của mọi lũy thừa lớn hơn của 3.)

Trường hợp 2: $k = 1$

Với mọi số nguyên tố lẻ p, ta có $f(2p) = 3f(2) = 9$. Nếu $p > 5$, thì $2p > f(2p)$, nên mọi số gần hoàn hảo dạng $2 \cdot m$ phải có các ước nguyên tố là 3 và/hoặc 5. Dễ thấy 6 và 10 đều không là số gần hoàn hảo. Vậy ứng viên phải có ước đẹp là $2 \cdot 9,\ 2 \cdot 15,\ 2 \cdot 25$. Với $n = 18$, ta có nghiệm. Hai trường hợp còn lại cho $f(n) < n$.

Nếu muốn tìm nghiệm mới, do chúng không thể là bội đẹp của 30 hay 50, khả năng duy nhất là có ước đẹp $2 \cdot 27$. Nhưng theo trường hợp đẳng thức của bổ đề:

$$f(2 \cdot 27) < 3f(2 \cdot 9) = 2 \cdot 27.$$

Không còn nghiệm nào trong trường hợp này.

Trường hợp 3: $k = 2$

Với mọi số nguyên tố lẻ p, ta có $f(4p) = 3f(4) = 18$. Nếu $p > 5$, thì $4p > f(4p)$, nên mọi số gần hoàn hảo dạng này có các ước nguyên tố là 3 và/hoặc 5. Dễ thấy 12 và 20 không là số gần hoàn hảo. Ứng viên phải có ước đẹp là $4 \cdot 9,\ 4 \cdot 15,\ 4 \cdot 25$. Với $n = 36$, ta có nghiệm. Hai trường hợp còn lại cho $f(n) < n$.

Nếu muốn nghiệm mới, do chúng không thể là bội đẹp của 60 hay 100, khả năng duy nhất là có ước đẹp $4 \cdot 27$. Nhưng:

$$f(4 \cdot 27) < 3f(4 \cdot 9) = 4 \cdot 27.$$

Không có nghiệm nào khác.

Trường hợp 4: $k = 3$

Với mọi số nguyên tố lẻ p, ta có $f(8p) = 3f(8) = 30$. Tương tự các trường hợp trên, chỉ xét các số dạng $8 \cdot 3^l$. Ta có $8 \cdot 3 = 24$ không là số gần hoàn hảo. Tất cả các ứng viên khác có ước đẹp là $8 \cdot 9 = 72$, mà $f(72) = 60 < 72$.

Như vậy:

$$\boxed{3,\ 18,\ 36 \text{ là tất cả các số gần hoàn hảo.}}$$

□

Nhận xét. Đánh giá [20M]

[26] Lời giải chính thức.

3.2.12 (EMC 2015/S/P1). Cho $A = \{a, b, c\}$ là một tập hợp gồm ba số nguyên dương. Chứng minh rằng ta có thể tìm được một tập con $B \subset A$, với $B = \{x, y\}$, sao cho với mọi số nguyên dương lẻ m, n, ta có:

$$10 \mid x^m y^n - x^n y^m.$$

Lời giải. [27]Gọi $A = \{a, b, c\}$ là tập gồm ba số nguyên dương. Ta cần chỉ ra rằng tồn tại tập con $B = \{x, y\} \subset A$ sao cho với mọi số nguyên dương lẻ m, n, ta có:

$$10 \mid x^m y^n - x^n y^m.$$

Gọi $f(x, y) = x^m y^n - x^n y^m$. Nếu $m = n$, thì biểu thức trở thành $x^m y^m - x^m y^m = 0$, hiển nhiên chia hết cho 10. Do đó, ta giả sử $n > m$ mà không mất tính tổng quát. Vì m và n đều lẻ nên $n - m$ chẵn.

Khi đó:

$$f(x, y) = x^m y^m (y^{n-m} - x^{n-m}).$$

Do $n - m$ chẵn, ta viết:

$$y^{n-m} - x^{n-m} = (y^2 - x^2)Q(x, y) = (y - x)(y + x)Q(x, y),$$

trong đó $Q(x, y)$ là đa thức đối xứng:

$$Q(x, y) = y^{n-m-2} + y^{n-m-4}x^2 + \cdots + x^{n-m-2}.$$

Suy ra:

$$f(x, y) = x^m y^m (y - x)(y + x)Q(x, y).$$

Do $f(x, y)$ luôn chia hết cho 2:

- Nếu một trong hai số x, y là chẵn thì biểu thức chia hết cho 2; - Nếu cả hai là lẻ thì $x - y$ và $x + y$ đều chẵn, nên tích cũng chia hết cho 2.

Vậy ta chỉ cần kiểm tra tính chia hết cho 5. Nếu A chứa phần tử chia hết cho 5, chọn phần tử đó và một phần tử bất kỳ để tạo thành B. Khi đó một trong hai số x hoặc y chia hết cho 5, nên $f(x, y)$ chia hết cho 5.

Giả sử không phần tử nào trong A chia hết cho 5. Nếu có hai phần tử cùng đồng dư modulo 5, thì hiệu của chúng chia hết cho 5 suy ra $y - x$ chia hết cho 5 suy ra $f(x, y)$ chia hết cho 5.

Trường hợp còn lại: cả ba phần tử trong A có phần dư khác nhau modulo 5. Các phần dư khác nhau trong $\mathbb{Z}_5$ là $\{1, 2, 3, 4\}$. Xét hai cặp:

- $(1, 4)$: tổng là 5;

- $(2, 3)$: tổng là 5.

Do chỉ có ba phần tử và bốn phần dư khác nhau, theo nguyên lý Dirichlet, một trong hai cặp trên phải nằm trọn trong A. Khi đó $x + y$ chia hết cho 5 suy ra $f(x, y)$ chia hết cho 5.

Kết luận: tồn tại $B = \{x, y\} \subset A$ sao cho với mọi số lẻ dương m, n, $10 \mid x^m y^n - x^n y^m$. □

Nhận xét. Đánh giá [**25M**]

[27]Lời giải chính thức.

Middle European Mathematical Olympiad

3.2.13 (MEMO 2015/I/P4)**.** Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (m,n) sao cho tồn tại các số nguyên $a,b>1$ nguyên tố cùng nhau, thỏa mãn:

$$\frac{a^m+b^m}{a^n+b^n}\in\mathbb{Z}.$$

Lời giải 1. [28]**Đáp án.** Tất cả các cặp $(m,n)=(qn,n)$, trong đó q là số nguyên dương lẻ và n là số nguyên dương tùy ý.

Nếu $\frac{m}{n}=q$ là một số nguyên lẻ, thì:

$$\frac{a^m+b^m}{a^n+b^n}=\frac{a^{qn}+b^{qn}}{a^n+b^n}$$

là một số nguyên, bởi vì tử số chia hết cho mẫu số theo công thức chia đa thức.

Ta sẽ chứng minh rằng các cặp (qn,n), với q là một số nguyên lẻ, là các nghiệm duy nhất.

Giả sử ngược lại, rằng tồn tại các cặp (m,n) là nghiệm cho bài toán nhưng $\frac{m}{n}$ không phải là số nguyên lẻ. Trong các cặp đó, chọn cặp có tổng $m+n$ nhỏ nhất.

Rõ ràng $m>n$. Gọi $m=n+k$, với $k\in\mathbb{Z}_{>0}$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a=b$. Khi đó:

$$\frac{a^m+b^m}{a^n+b^n}=\frac{a^{n+k}+b^{n+k}}{a^n+b^n}=\frac{b^k(a^n+b^n)}{a^n+b^n}+t=b^k+t,\ \text{ với } t\in\mathbb{Z}_{>0}.$$

Do đó tồn tại số nguyên dương t sao cho:

$$\frac{a^m+b^m}{a^n+b^n}=b^k+t.$$

Phương trình tương đương:

$$a^m+b^m=(b^k+t)(a^n+b^n).$$

Vì a và b nguyên tố cùng nhau, nên a^n+b^n và a^n cũng nguyên tố cùng nhau.

Từ đó suy ra t chia hết cho a^n. Gọi $c\in\mathbb{Z}_{>0}$ sao cho $t=ca^n$. Khi đó:

$$a^m+b^m=(b^k+ca^n)(a^n+b^n).$$

Vế phải lớn hơn a^n, nên ta kết luận rằng $k>n$.

Ta viết lại phương trình:

$$a^n(a^{k-n}-c)=b^n(b^{k-n}+c).$$

Gọi $x\in\mathbb{Z}_{>0}$ sao cho:

$$b^{k-n}+c=xa^n+c,\quad a^{k-n}-c=xb^n.$$

Cộng hai phương trình trên:

$$a^{k-n}+b^{k-n}=x(a^n+b^n)\implies\frac{a^{k-n}+b^{k-n}}{a^n+b^n}=x\in\mathbb{Z}.$$

Vì $k-n<m$, và (m,n) là cặp được chọn sao cho tổng $m+n$ là nhỏ nhất (sao cho $\frac{m}{n}$ không phải là số nguyên lẻ), nên ta suy ra rằng $\frac{k-n}{n}$ là một số nguyên lẻ. Gọi $\frac{k-n}{n}=2r+1$, khi đó:

$$k=(2r+2)n\implies m=n+k=(2r+3)n,$$

là bội số lẻ của n, mâu thuẫn với giả thiết rằng $\frac{m}{n}$ không phải là số nguyên lẻ.

Do đó, các nghiệm duy nhất là các cặp $(m,n)=(qn,n)$, với q là số nguyên dương lẻ. $\square$

Lời giải 2. Rõ ràng $m > n$. Viết $m = kn + r$, với $k \geq 1$, $0 \leq r < n$. Khi đó:

$$\frac{a^m + b^m}{a^n + b^n} = a^{(k-1)n+r} + \frac{b^m - a^{(k-1)n+r}b^n}{a^n + b^n}.$$

Từ giả thiết, biểu thức trên là số nguyên, nên:

$$\frac{b^m - a^{(k-1)n+r}b^n}{a^n + b^n} \in \mathbb{Z}.$$

Vì a và b nguyên tố cùng nhau:

$$\frac{b^{m-n} - a^{(k-1)n+r}}{a^n + b^n} = -a^{(k-2)n+r} + \frac{a^{(k-2)n+r}b^n + b^{m-n}}{a^n + b^n}$$

cũng là một số nguyên.

Tiếp tục quy trình ta nhận được: $a^n + b^n$ chia hết $b^r + (-1)^k a^r$.

Vì $|b^r + (-1)^k a^r| < a^n + b^n$, nên điều này chỉ có thể xảy ra khi $b^r + (-1)^k a^r = 0$, tức là $r = 0$ và k lẻ. Vậy các nghiệm duy nhất là $(m, n) = (kn, n)$ với k lẻ. □

Nhận xét. Đánh giá [**25M**]

[28] Lời giải chính thức.

3.2.14 (MEMO 2015/I/P7)**.** Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) sao cho:

$$a! + b! = a^b + b^a.$$

Lời giải. [29]**Đáp án:** Các cặp nghiệm là $(1, 1), (1, 2), (2, 1)$.

Nếu $a = b$, thì phương trình trở thành $a! = a^a$. Vì $a^a > a!$ với mọi $a \geq 2$, nghiệm duy nhất trong trường hợp này là $a = b = 1$.

Nếu $a = 1$, thì phương trình trở thành $1! + b! = 1^b + b^1 \Leftrightarrow 1 + b! = 1 + b \Leftrightarrow b! = b$, điều này chỉ xảy ra khi $b = 1$ hoặc $b = 2$. Vậy $(1, 1), (1, 2)$ là nghiệm.

Tương tự, nếu $b = 1$, thì $a! + 1 = a^1 + 1 \Leftrightarrow a! = a$, điều này xảy ra khi $a = 1$ hoặc $a = 2$. Vậy $(2, 1)$ là nghiệm.

Bây giờ ta chứng minh không có nghiệm nào khác với $a, b \geq 2$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $1 < a < b$.

Vì $a! + b! = a^b + b^a$, nên $a \mid b!$ do đó $a \mid b^a$. Gọi p là một ước nguyên tố của a. Khi đó $p \mid b$ và do $b > a$ nên $p \mid \frac{b!}{a!}$.

Viết lại vế trái:

$$a! + b! = a!\left(\frac{b!}{a!} + 1\right)$$

Do $p \mid \frac{b!}{a!}$, và $\frac{b!}{a!}, \frac{b!}{a!} + 1$ nguyên tố cùng nhau, nên số mũ của p trong phân tích thừa số nguyên tố của vế trái là bằng số mũ của p trong $a!$.

Ta biết rằng số mũ của p trong phân tích thừa số nguyên tố của $a!$ là:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{a}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{p^3} \right\rfloor + \cdots$$

Ta có bất đẳng thức:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{a}{p^k} \right\rfloor < \frac{a}{p} + \frac{a}{p^2} + \cdots = a\left(\frac{1}{p-1}\right) \leq a.$$

Trong khi đó, số mũ của p trong phân tích thừa số nguyên tố của vế phải $a^b + b^a$ là ít nhất a, vì $p \mid a$, $p \mid b$, và $b > a$.

Điều này dẫn đến mâu thuẫn.

Kết luận: Các nghiệm duy nhất là $(a, b) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$. □

Nhận xét. Đánh giá [**15M**]

[29]Lời giải chính thức.

3.2.15 (MEMO 2015/I/P8)**.** Cho $n \geq 2$ là một số nguyên. Xác định số lượng các số nguyên dương m sao cho $m \leq n$ và $m^2 + 1$ chia hết cho n.

Lời giải 1. [30]**Đáp án:** Nếu $n = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, với các p_i là các số nguyên tố lẻ thỏa mãn $p_i \equiv 1 \pmod 4$, thì:

$$D(n) = 2^k.$$

Gọi $D(n)$ là số lượng số nguyên dương $m \leq n$ sao cho $m^2 + 1$ chia hết cho n.

Không tồn tại số m sao cho $m^2 + 1$ chia hết cho 4, do đó nếu 4 chia hết cho n thì $D(n) = 0$. Cũng biết rằng $D(n) = 0$ nếu n chia hết cho một số có dạng $4k + 3$. Ngoài ra, $D(2) = 1$.

Bước 1. Giả sử trước tiên $n = p$ là một số nguyên tố lẻ có dạng $4k + 1$. Ta sẽ chứng minh rằng $D(p) = 2$.

Bổ đề (Bổ đề 1)

Nếu $p = 4k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, và $S = \{x_1, \ldots, x_p\}$ là hệ đại diện đầy đủ modulo p, thì tồn tại đúng hai phần tử $x \in S$ sao cho $x^2 \equiv -1 \pmod p$.

Chứng minh. Trước tiên ta chứng minh rằng phương trình đồng dư $x^2 \equiv -1 \pmod p$ có ít nhất một nghiệm khi $p \equiv 1 \pmod 4$.

Áp dụng định lý Wilson, ta có:

$$\left(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \frac{p-1}{2}\right)^2 \equiv -1 \pmod p,$$

do đó $x = \left(\frac{p-1}{2}\right)!$ là một nghiệm.

Hơn nữa, nếu $x_i \in S$ là nghiệm thì $x_j = p - x_i \in S$ cũng là nghiệm. Nếu $p = 2q + 1$, thì chính xác một trong hai số x_i, x_j nhỏ hơn hoặc bằng q. Ta có thể giả sử $x_i \leq q$.

Nếu phương trình có nghiệm thứ ba $x_k \in S$, ta cũng có thể giả sử $x_k \leq q$. Tuy nhiên, $x_i^2 \equiv x_k^2 \equiv -1 \pmod p$ dẫn đến:

$$p \mid (x_k - x_i)(x_k + x_i),$$

điều này không thể xảy ra vì $x_i, x_k \leq q$ nên tích trên nhỏ hơn p. Mâu thuẫn. Bổ đề được chứng minh. ■

Bước 2. Giả sử $n = p^k$, với $p \equiv 1 \pmod 4$.

Khẳng định — $D(p^k) = 2$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo k.

Cơ sở quy nạp: $k = 1$, đã chứng minh ở trên.

Giả sử $D(p^k) = 2$ với $k \geq 1$. Gọi $i, j < p^k$ là hai số sao cho $i^2 + 1$ và $j^2 + 1$ chia hết cho p^k.

Tất cả các nghiệm của phương trình $x^2 \equiv -1 \pmod{p^{k+1}}$ nhỏ hơn p^{k+1} là:

$$mp^k + i \quad \text{với } m = 0, \ldots, p-1 \quad \text{và} \quad mp^k + j \quad \text{với } m = 0, \ldots, p-1.$$

Ta chứng minh rằng có đúng một trong các số $(mp^k + i)^2 + 1$ $(m = 0, \ldots, p-1)$ chia hết cho p^{k+1}. Giả sử tồn tại hai giá trị m_1, m_2 sao cho:

$$(m_1 p^k + i)^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p^{k+1}}, \quad (m_2 p^k + i)^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p^{k+1}}.$$

Lấy hiệu:

$$(m_1 - m_2)p^k(2i + (m_1 + m_2)p^k) \equiv 0 \pmod{p^{k+1}}.$$

Vế trái không chia hết cho p^{k+1} vì $m_1 - m_2 \not\equiv 0 \pmod p$ và $i \not\equiv 0 \pmod p$, mâu thuẫn.

Như vậy với mỗi trong i, j, có đúng hai giá trị $m_,m_j \in \{0,\dots,p-1\}$ sao cho $(m_ip^k+i)^2+1$ và $(m_jp^k+i)^2+1$ chia hết cho p^{k+1}. Vậy $D(p^{k+1}) = 2$. ∎

Bước 3. Giả sử $n = p^aq^b$ với $p, q \equiv 1 \pmod 4$ là hai số nguyên tố khác nhau. Ta sẽ chứng minh rằng $D(p^aq^b) = 4$.

Theo trên, $D(p^a) = 2$. Gọi $i, j \in [0, p^a)$ là hai số thỏa mãn $i^2 + 1 \equiv j^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p^a}$. Khi đó, các nghiệm modulo p^aq^b là:

$$mp^a + i \quad \text{với } m = 0, \dots, q^b - 1, \quad \text{và} \quad mp^a + j \quad \text{với } m = 0, \dots, q^b - 1.$$

Vì $\{0, 1, \dots, q^b - 1\}$ là hệ đại diện modulo q^b, và $\gcd(p^a, q^b) = 1$, nên các dãy $mp^a + i$ cũng là hệ đại diện modulo q^b. Mỗi dãy chứa đúng hai giá trị sao cho $x^2 \equiv -1 \pmod{q^b}$. Vậy $D(p^aq^b) = 4$.

Dùng quy nạp theo số lượng thừa số nguyên tố lẻ dạng $4k + 1$, ta được:

$$D(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) = 2^k.$$

Bước 4. Cuối cùng, chứng minh rằng:

$$D(p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}) = D(2p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}),$$

với các $p_i \equiv 1 \pmod 4$ nguyên tố phân biệt.

Gọi $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$. Nếu $i_1, i_2, \dots, i_{2^n}$ là các số nguyên dương nhỏ hơn a thoả mãn $x^2 \equiv -1 \pmod a$, thì tất cả các số nguyên dương nhỏ hơn $2a$ thoã mãn phương trình là

$$\delta a + i_j, \; j = 1, 2, 3, \dots, 2^n, \; \text{for } \delta = 0, 1.$$

Dù vậy chỉ một trong hai số $i_j^2 + 1$ và $(a + i_j)^2 + 1$ là chẵn, do đó:

$$D(p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}) = D(2p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}).$$

Tóm lại:

$$D(a) = 2^n, \quad \text{nếu } a = 2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}, \; p_i \equiv 1 \pmod 4.$$

□

[30] Lời giải chính thức.

Lời giải 2. Không có số nào dạng m^2+1 chia hết cho 4, do đó nếu $4 \mid n$, thì $D(n)=0$.

Viết $n = p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, trong đó: $p_0 = 2$, $\alpha_0 \in \{0,1\}$; các p_i với $i \geq 1$ là các số nguyên tố lẻ phân biệt; và $\alpha_i \geq 1$.

Bài toán yêu cầu tìm số lượng lớp đồng dư $m \mod n$ sao cho $m^2 \equiv -1 \pmod{n}$.

Rõ ràng, $m^2 \equiv -1 \pmod{n}$ khi và chỉ khi:

$$m^2 \equiv -1 \pmod{p_i^{\alpha_i}} \quad \text{với mọi } i.$$

Ta sử dụng bổ đề sau:

Bổ đề

Cho p là một số nguyên tố, $\alpha \geq 1$. Khi đó, số lượng lớp đồng dư m modulo p^α sao cho $m^2 \equiv -1 \pmod{p^\alpha}$ là:

$$\begin{cases} 0 & \text{nếu } p \equiv 3 \pmod{4}, \\ 1 & \text{nếu } p = 2 \text{ và } \alpha = 1, \\ 2 & \text{nếu } p \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Chứng minh. Với $p=2$ và $\alpha=1$, $m^2 \equiv -1 \pmod{2} \Leftrightarrow m \equiv 1 \pmod{2}$, nên có đúng 1 nghiệm.

Với $p \equiv 3 \pmod{4}$, từ lý thuyết số học cổ điển, ta biết rằng -1 không phải là số chính phương modulo p, nên phương trình vô nghiệm modulo p, và do đó cũng vô nghiệm modulo p^α.

Với $p \equiv 1 \pmod{4}$, từ định lý về số dư bậc hai, ta biết rằng -1 là số chính phương modulo p. Do đó, tồn tại m sao cho $m^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

Theo định lý nâng Hensel (Hensel's Lemma), nếu một phương trình có nghiệm modulo p và đạo hàm không triệt tiêu modulo p, thì có thể nâng nghiệm đó lên modulo p^α. Trong trường hợp này, $f(x)=x^2+1$, $f'(x)=2x$, và $\gcd(2x,p)=1$ vì p lẻ, suy ra nâng được nghiệm lên modulo p^α.

Giả sử m là một nghiệm của $m^2 \equiv -1 \pmod{p^\alpha}$. Nếu r là một nghiệm khác, thì:

$$r^2 \equiv -1 \equiv m^2 \pmod{p^\alpha} \implies p^\alpha \mid (r-m)(r+m).$$

Do $\gcd(r-m, r+m) \mid 2m$, và $\gcd(2m,p)=1$, ta có:

$$p^\alpha \mid r-m \quad \text{hoặc} \quad r \equiv -m \pmod{p^\alpha}.$$

Do đó, hai nghiệm duy nhất là m và $-m$, và $m \not\equiv -m \pmod{p^\alpha}$ vì p lẻ.

Có đúng 2 nghiệm modulo p^α. Bổ đề được chứng minh. ■

Áp dụng bổ đề, ta thấy rằng α_0 (số mũ của 2) không ảnh hưởng đến kết quả, vì nếu $\alpha_0 \geq 2$ thì vô nghiệm, còn nếu $\alpha_0 = 1$ thì chỉ góp hệ số nhân là 1.

Với mỗi $i = 1, \ldots, k$, do $p_i \equiv 1 \pmod{4}$, ta có đúng 2 nghiệm modulo $p_i^{\alpha_i}$. Theo định lý Trung Hoa (CRT), số nghiệm modulo n là:

$$D(n) = 2^k.$$

□

Nhận xét. Đánh giá [**20M**]

Nordic Mathematical Contest

3.2.16 (NMC 2015/P2)**.** Tìm các số nguyên tố p, q, r sao cho một trong hai số pqr và $p+q+r$ bằng 101 lần số còn lại.

Lời giải. [31]Ta có thể giả sử $r = \max\{p, q, r\}$. Khi đó:

$$p + q + r \leq 3r, \quad pqr \geq 4r.$$

Do đó, tổng ba số luôn nhỏ hơn tích của chúng, suy ra trường hợp có thể xảy ra duy nhất là:

$$pqr = 101(p + q + r).$$

Ta nhận thấy rằng 101 là một số nguyên tố, nên một trong ba số p, q, r phải bằng 101. Giả sử $r = 101$. Khi đó ta có:

$$pqr = 101(p + q + r) \implies pq \cdot 101 = 101(p + q + 101).$$

Chia hai vế cho 101:

$$pq = p + q + 101 \implies pq - p - q = 101 \implies (p-1)(q-1) = 102.$$

Ta phân tích $102 = 1 \cdot 102 = 2 \cdot 51 = 3 \cdot 34 = 6 \cdot 17$, nên các khả năng cho tập $\{p, q\}$ là:

$$\{2, 103\}, \{3, 52\}, \{4, 35\}, \{7, 18\}.$$

Trong các trường hợp này, chỉ có cặp $\{2, 103\}$ là cả hai đều là số nguyên tố.

Vậy nghiệm duy nhất là $\{p, q, r\} = \{2, 101, 103\}$. □

Nhận xét. Đánh giá [**5M**]

[31] Lời giải chính thức.

Rioplatense Mathematical Olympiad, Level 3

Romanian Master of Mathematics

3.2.17 (RMM 2015/P1)**.** Có tồn tại một dãy vô hạn các số nguyên dương $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sao cho hai số a_m và a_n nguyên tố cùng nhau nếu và chỉ nếu $|m-n|=1$ hay không?

Lời giải. [32]Câu trả lời là **có**.

Ý tưởng là xét một dãy các số nguyên tố đôi một khác nhau $p_1, p_2, p_3, \ldots$, và phân hoạch tập các số nguyên dương thành một dãy các tập con hữu hạn khác rỗng I_n, sao cho $I_m \cap I_n = \emptyset$ khi và chỉ khi $|m-n|=1$. Khi đó, ta đặt:

$$a_n = \prod_{i \in I_n} p_i, \quad \text{với } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Một cách cụ thể để xây dựng các tập I_n là như sau:

- Với mọi số nguyên dương n, đưa số $2n$ vào I_k với mọi $k = n, n+3, n+5, n+7, \ldots$
- Đưa số $2n-1$ vào I_k với mọi $k = n, n+2, n+4, n+6, \ldots$

Rõ ràng mỗi tập I_k là hữu hạn, vì nó không chứa các số lớn hơn $2k$.

Ta thấy:

- Mỗi số chẵn $2n$ đảm bảo rằng I_n có phần tử chung với mỗi I_{n+2i},
- Mỗi số lẻ $2n-1$ đảm bảo rằng I_n có phần tử chung với mỗi I_{n+2i+1}, với $i = 1, 2, \ldots$,
- Cuối cùng, không có chỉ số nào xuất hiện trong hai tập liên tiếp.

Do đó, a_m và a_n nguyên tố cùng nhau nếu và chỉ nếu $|m-n|=1$, như yêu cầu. □

Nhận xét. Các tập I_n trong lời giải ở trên có thể được mô tả tường minh như sau:

$$I_n = \{2n-4k-1 \mid k = 0, 1, \ldots, \lfloor \tfrac{n-1}{2} \rfloor\} \cup \{2n-4k-2 \mid k = 1, 2, \ldots, \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor - 1\} \cup \{2n\}$$

Cách xây dựng trên cũng có thể được mô tả theo công thức như sau:

Gọi $p_1, p_1', p_2, p_2', \ldots$ là một dãy các số nguyên tố đôi một khác nhau. Với quy ước chuẩn rằng tích rỗng bằng 1, định nghĩa:

$$P_n = \begin{cases} p_1 p_2' p_3 p_4' \cdots p_{n-4} p_{n-3}' p_{n-2}, & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ p_1' p_2 p_3' p_4 \cdots p_{n-3}' p_{n-2}, & \text{nếu } n \text{ chẵn} \end{cases}$$

và đặt:

$$a_n = P_n \cdot p_n \cdot p_n'.$$

Nhận xét. Đánh giá [**25M**]

[32] Lời giải chính thức.

Lời giải. [33]Các số thỏa mãn yêu cầu là:

$$a = p - 1 \quad \text{và các số } a = \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor \quad \text{với } q = 2, 3, \ldots, p - 1.$$

Nói cách khác, tập nghiệm bao gồm:

$$p - 1, 1, 2, \ldots, \lfloor \sqrt{p} \rfloor,$$

và các giá trị khác nhau của $\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor$ với $q = 2, \ldots, \lfloor \sqrt{p} \rfloor - 1$.

Phần thuận. Trước tiên, ta chứng minh rằng các số này thỏa mãn điều kiện đề bài.

Với $a = p - 1$, ta có:

$$R(m(p-1)) = p - m, \quad \text{do } m(p-1) \equiv -m \pmod{p}.$$

Khi đó:

$$m + R(m(p-1)) = m + (p - m) = p > p - 1 = a.$$

Tiếp theo, xét $a = \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor$ với $q > 1$ và $q < p$. Khi đó $p = aq + r$ với $0 < r < q$. Chọn một số nguyên $m \in (0, p)$, và viết:

$$m = xq + y \quad \text{với } x \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ 1 \leq y \leq q.$$

Khi đó:

$$ma = ay + xaq = ay + x(p - r) = ay - xr + xp.$$

Suy ra:

$$R(ma) = R(ay - xr) \quad \text{vì thêm bội của } p \text{ không thay đổi phần dư.}$$

Vì $ay \leq aq < p$ nên $ay - xr < p$, và:

$$R(ma) \geq ay - xr.$$

Do đó:

$$m + R(ma) \geq (xq + y) + (ay - xr) = x(q - r) + y(a + 1) \geq a + 1,$$

vì $q > r$, $y \geq 1$.

Phần đảo. Giờ giả sử có một số $a \in (0, p - 1)$ thỏa mãn điều kiện đề bài. Với $a = 1$ thì dễ thấy điều kiện đúng. Giả sử $a \geq 2$, viết $p = aq + r$ với $0 < r < a$, tức là $q = \left\lfloor \frac{p}{a} \right\rfloor$.

Khi đó, chọn $m = q + 1 < p$, ta có:

$$ma = aq + a = p + (a - r) \implies R(ma) = a - r.$$

Do đó:

$$m + R(ma) = q + 1 + a - r > a,$$

tức là $r < q + 1$.

Nếu $r = q$ thì $p = q(a + 1)$, điều này là không thể vì $a + 1 < p$. Do đó $r < q$, và:

$$0 \leq \frac{p}{q} - a = \frac{r}{q} < 1 \implies a = \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor.$$

Vậy mọi a thỏa mãn đều là dạng $\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor$ với $q \in (1, p)$. $\square$

[33]Lời giải chính thức.

Nhận xét. Đánh giá [**20M**]

International Mathematical Olympiad

3.2.18 (IMO 2015 SL/P1)**.** Xác định tất cả các số nguyên dương M sao cho dãy $a_0, a_1, a_2, \ldots$ được định nghĩa bởi:

$$a_0 = M + \frac{1}{2} \qquad \text{và} \qquad a_{k+1} = a_k \lfloor a_k \rfloor \quad \text{với } k = 0, 1, 2, \ldots$$

chứa ít nhất một số nguyên trong dãy.

Lời giải 1. [34]Đặt $b_k = 2a_k$. Khi đó:

$$b_{k+1} = 2a_{k+1} = 2a_k \cdot \lfloor a_k \rfloor = b_k \cdot \left\lfloor \frac{b_k}{2} \right\rfloor.$$

Do $b_0 = 2a_0 = 2M + 1$ là số nguyên suy ra $b_k \in \mathbb{Z}$ với mọi $k \geq 0$.

Giả sử dãy a_k không bao giờ nhận giá trị nguyên suy ra b_k là số lẻ với mọi k. Khi đó:

$$b_{k+1} = b_k \cdot \left\lfloor \frac{b_k}{2} \right\rfloor = \frac{b_k(b_k - 1)}{2}. \tag{1}$$

Trừ hai vế của (1) cho 3:

$$b_{k+1} - 3 = \frac{b_k(b_k - 1)}{2} - 3 = \frac{(b_k - 3)(b_k + 2)}{2}. \tag{2}$$

Giả sử $b_0 - 3 > 0$. Khi đó $b_k - 3 > 0$ với mọi k, và $b_k - 3$ luôn là số chẵn.

Gọi c_k là số mũ lớn nhất của 2 chia hết $b_k - 3$. Khi đó, do $b_k + 2$ lẻ, nên từ (2):

$$b_{k+1} - 3 = \frac{(b_k - 3)(b_k + 2)}{2} \implies c_{k+1} = c_k - 1.$$

Dẫn đến dãy c_k giảm dần không chặn dưới trong tập số nguyên dương suy ra mâu thuẫn.

Vậy $b_0 - 3 \leq 0 \implies 2M + 1 \leq 3 \implies M \leq 1$. Ta kiểm tra:

- Với $M = 1 \implies a_0 = \frac{3}{2} \implies a_k = \frac{3}{2}$ hằng suy ra không có số nguyên trong dãy.
- Với $M = 2 \implies a_0 = \frac{5}{2} \implies a_1 = \frac{5}{2} \cdot 2 = 5 \in \mathbb{Z}$.

Vậy nghiệm là tất cả $M \geq 2$. □

Lời giải 2. Ta tiếp tục từ phương trình (1):

$$b_{k+1} = \frac{b_k(b_k - 1)}{2}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng nếu $b_0 = 2M + 1 = 3$, thì $b_k = 3$ với mọi k, tức $M = 1$. Hơn nữa, nếu $b_0 > 3$, thì dãy sẽ có giá trị chẵn tại một thời điểm.

Đặt mệnh đề: với mọi $m \geq 1$, nếu $b_k \equiv 3 \pmod{2^m}$ với mọi k, thì $b_k = 3$.

Cơ sở: Với $m = 1$, ta có b_k là số lẻ suy ra $b_k \equiv 1$ hoặc $3 \pmod 4$, nhưng chỉ 3 cố định.

Bước quy nạp: Giả sử $b_k \equiv 3 \pmod{2^m} \implies b_k = 2^m d_k + 3$. Thế vào:

$$b_{k+1} = \frac{(2^m d_k + 3)(2^m d_k + 2)}{2} \equiv 3 \pmod{2^m}.$$

[34]Lời giải chính thức.

Ta chứng minh được d_k chẵn suy ra $b_k \equiv 3 \pmod{2^{m+1}}$. Bằng quy nạp, $b_k \equiv 3 \pmod{2^m}$ với mọi $m \implies b_k = 3$.

Suy ra: $b_0 = 3 \implies M = 1$ là trường hợp duy nhất không sinh ra số nguyên trong dãy.

Kết luận: Các giá trị M thỏa mãn yêu cầu là:

$$\boxed{M \geq 2}.$$

□

Nhận xét. Đánh giá [20M]

3.2.19 (IMO 2015 SL/P2)**.** Cho a và b là các số nguyên dương sao cho $a! + b! \mid a!b!$. Chứng minh rằng:

$$3a \geq 2b + 2.$$

Lời giải 1. [35]Nếu $a > b$ thì bất đẳng thức $3a \geq 2b + 2$ hiển nhiên. Nếu $a = b$, thì điều này tương đương với $a \geq 2$. Ta dễ dàng kiểm tra rằng $(a, b) = (1, 1)$ không thỏa mãn $a! + b! \mid a!b!$. Vậy ta giả sử $a < b$, đặt $c = b - a$. Khi đó, bất đẳng thức trở thành $a \geq 2c + 2$.

Giả sử ngược lại rằng $a \leq 2c + 1$. Đặt

$$M = \frac{b!}{a!} = (a + 1)(a + 2) \cdots (a + c).$$

Từ điều kiện $a! + b! \mid a!b! \implies 1 + M \mid a!M$, ta suy ra $1 + M \mid a!$. Ta nhận thấy nếu $c \geq a$, thì $1 + M > a!$, mâu thuẫn. Vậy $c < a$.

Vì M là tích của c số liên tiếp, nên $c! \mid M \implies \gcd(1 + M, c!) = 1$, từ đó suy ra:

$$1 + M \mid \frac{a!}{c!} = (c + 1)(c + 2) \cdots a. \tag{1}$$

Nếu $a \leq 2c$, thì vế phải là tích của nhiều nhất c số không vượt quá a, còn M là tích của c số lớn hơn a. Do đó, $1 + M > \frac{a!}{c!}$, mâu thuẫn.

Xét trường hợp còn lại $a = 2c + 1 \implies a + 1 = 2(c + 1) \implies c + 1 \mid M$. Khi đó, từ (1), ta có:

$$1 + M \mid (c + 2)(c + 3) \cdots a.$$

Vế phải là tích của c số không vượt quá a, trong khi M là tích của c số lớn hơn a, suy ra $1+M > (c+2)(c+3) \cdots a$, mâu thuẫn. □

Lời giải 2. Giống như lời giải 1, giả sử $a < b$, đặt $c = b - a$, và giả sử ngược lại $a \leq 2c + 1$. Từ điều kiện $a! + b! \mid a!b!$, ta có:

$$N = 1 + (a + 1)(a + 2) \cdots (a + c) \mid (a + c)!.$$

Điều đó nghĩa là mọi ước nguyên tố của N không lớn hơn $a + c$.

Gọi p là một ước nguyên tố của N. Nếu $p \leq c$ hoặc $p \geq a + 1$, thì $p \mid (a + 1) \cdots (a + c) \implies p \mid N - 1$, mâu thuẫn. Do đó, $c + 1 \leq p \leq a$. Hơn nữa, ta cần $2p > a + c$; nếu không, ta có:

$$a + 1 \leq 2c + 2 \leq 2p \leq a + c \implies p \mid N - 1,$$

mâu thuẫn. Vậy $p \in \left(\frac{a+c}{2}, a\right] \implies p^2 \mid (a + c)!$, vì $2p > a + c$.

Nếu $a \leq c + 2$, thì đoạn $\left(\frac{a+c}{2}, a\right]$ chứa nhiều nhất một số nguyên suy ra nhiều nhất một số nguyên tố, phải là a. Nhưng $p^2 \mid N \implies N = a$ hoặc $N = 1$, đều vô lý vì $N > a$.

Suy ra $a \geq c + 3 \implies \frac{a+c+1}{2} \geq c + 2$. Mọi ước nguyên tố p của N nằm trong đoạn $[c + 2, a]$ và mỗi p chỉ xuất hiện một lần. Vậy:

$$N \mid (c + 2)(c + 3) \cdots a,$$

nhưng tích này là của $a - c - 1 \leq c$ số nhỏ hơn hoặc bằng a, trong khi $N = 1 + (a + 1) \cdots (a + c) > (c + 2) \cdots a$, mâu thuẫn.

Kết luận: luôn có $3a \geq 2b + 2$. Đẳng thức xảy ra khi $(a, b) = (2, 2), (4, 5)$. □

[35]Lời giải chính thức.

Nhận xét. Đánh giá [**20M**]

3.2.20 (IMO 2015 SL/P3)**.** Cho m và n là các số nguyên dương sao cho $m > n$. Định nghĩa:

$$x_k = \frac{m+k}{n+k} \quad \text{với } k = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Chứng minh rằng nếu tất cả các số $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ đều là số nguyên, thì $x_1 x_2 \cdots x_{n+1} - 1$ chia hết cho một số nguyên tố lẻ.

Lời giải. [36]Ta viết $x_k = \frac{m+k}{n+k} = 1 + \frac{m-n}{n+k} = 1 + a_k$, trong đó $a_k > 0$ là một số nguyên với mỗi $k = 1, \ldots, n+1$.

Ta cần chứng minh rằng $x_1 x_2 \cdots x_{n+1} - 1 = \prod_{k=1}^{n+1}(1 + a_k) - 1$ chia hết cho một số nguyên tố lẻ.

Gọi 2^d là lũy thừa lớn nhất của 2 chia hết $m - n$, và $2^c \le 2n + 1$ là lũy thừa lớn nhất của 2 không vượt quá $2n+1$. Khi đó, trong tập $n+1, \ldots, 2n+1$, chỉ có một số chia hết cho 2^c. Gọi $n + \omega = 2^c$, khi đó $a_\omega = \frac{m-n}{2^c}$ là số lẻ, và với $k \neq \omega$ thì a_k chia hết cho 2^{d-c+1}.

Gọi $P = \prod_{k=1}^{n+1}(1 + a_k) - 1$. Khi đó:

$$P = (1 + a_\omega) \prod_{k \neq \omega} (1 + a_k) - 1 \equiv (1 + a_\omega) - 1 = a_\omega \not\equiv 0 \pmod{2^{d-c+1}}.$$

Mặt khác, với $k \neq \omega$, ta có $a_k \equiv 0 \pmod{2^{d-c+1}}$, nên $a_k + 1 \equiv 1$ theo modulo này, suy ra $\prod_{k=1}^{n+1}(1 + a_k) \equiv 1 + a_\omega$, do đó $P \equiv a_\omega$ không đồng dư 0 modulo 2^{d-c+1}, tức P không phải là lũy thừa của 2 và có ước nguyên tố lẻ. □

Nhận xét. Một cách tiếp cận khác là chứng minh rằng biểu thức $P = x_1 x_2 \cdots x_{n+1} - 1$ chia hết cho một số nguyên tố lẻ.

Gọi $L =$ bội chung nhỏ nhất của $n+1, \ldots, 2n+1$, và $m = n + qL$, khi đó:

$$x_k = \frac{m+k}{n+k} = \frac{qL + n + k}{n+k} = q \cdot \frac{L}{n+k} + 1.$$

Tích sẽ là $\prod_{k=1}^{n+1}\left(q \cdot \frac{L}{n+k} + 1\right)$. Các giá trị $\frac{L}{n+k}$ là số chẵn, ngoại trừ khi $n + k = 2^c$, chỉ xảy ra với một chỉ số $k = \omega$, và khi đó $\frac{L}{2^c}$ là số lẻ.

Khi xét modulo $2q$, tích trên đồng dư với $q + 1$, nên:

$$P = x_1 \cdots x_{n+1} - 1 = q(2r + 1),$$

với r là số nguyên không âm và $r \ge 1$. Suy ra P chia hết cho một số nguyên tố lẻ.

Nhận xét. Đánh giá [25M]

[36]Lời giải chính thức.

3.2.21 (IMO 2015 SL/P4). Giả sử $a_0, a_1, \dots$ và $b_0, b_1, \dots$ là hai dãy số nguyên dương sao cho $a_0, b_0 \geq 2$, và:

$$a_{n+1} = \gcd(a_n, b_n) + 1, \qquad b_{n+1} = \operatorname{lcm}(a_n, b_n) - 1.$$

Chứng minh rằng dãy a_n là tuần hoàn sau cùng, tức là tồn tại các số nguyên $N \geq 0$ và $t > 0$ sao cho:

$$a_{n+t} = a_n \quad \text{với mọi } n \geq N.$$

Lời giải 1. [37]Đặt $s_n = a_n + b_n$. Nếu $a_n \mid b_n$, thì $a_{n+1} = a_n + 1$, $b_{n+1} = b_n - 1$, nên $s_{n+1} = s_n$ và a_n tăng lên 1 cho đến khi $a_n \nmid b_n$.

Định nghĩa:

$$W_n = \{m \in \mathbb{Z}_{>0} : m \geq a_n \text{ và } m \nmid s_n\}, \quad w_n = \min W_n.$$

Khẳng định (Khẳng định 1) — Dãy (w_n) không tăng.

Chứng minh. Nếu $a_n \mid b_n$, thì $a_{n+1} = a_n + 1$. Do $a_n \mid s_n$, nên $a_n \notin W_n$, và $s_{n+1} = s_n \implies W_{n+1} = W_n \implies w_{n+1} = w_n$.

Nếu $a_n \nmid b_n$, thì $a_n \nmid s_n \implies a_n \in W_n \implies w_n = a_n$. Ta chứng minh $a_n \in W_{n+1}$, suy ra $w_{n+1} \leq a_n = w_n$.

Cần chứng minh $a_n \geq a_{n+1}$ và $a_n \nmid s_{n+1}$. Điều này đúng vì $\gcd(a_n, b_n) < a_n$ nên $a_{n+1} = \gcd(a_n, b_n) + 1 \leq a_n$. Hơn nữa, $s_{n+1} = \gcd(a_n, b_n) + \operatorname{lcm}(a_n, b_n)$, trong đó hạng thứ hai chia hết cho a_n, nhưng hạng thứ nhất thì không, nên $a_n \nmid s_{n+1}$. ■

Gọi $w = \min w_n$, và chọn N sao cho $w_N = w$. Từ Bổ đề, $w_n = w$ với mọi $n \geq N$.

Gọi $g_n = \gcd(w, s_n)$. Ta thấy, với mọi $n \geq N$, dãy a_n tăng dần từng bước từ $a_n = g_n + 1$ đến w, rồi quay lại $a_{n+t} = g_n + 1$. Ta sẽ chứng minh:

Khẳng định (Khẳng định 2) — Dãy (g_n) là hằng số với $n \geq N$.

Chứng minh. Nếu $a_n \mid b_n$, thì $s_{n+1} = s_n \implies g_{n+1} = g_n$. Nếu $a_n = w$ và $a_n \nmid b_n$, thì:

$$a_{n+1} = \gcd(a_n, b_n) + 1 = g_n + 1, \quad s_{n+1} = \gcd(a_n, b_n) + \operatorname{lcm}(a_n, b_n)$$

$$= g_n + \frac{a_n b_n}{g_n} = g_n + \frac{w(s_n - w)}{g_n}$$

Suy ra:

$$g_{n+1} = \gcd(w, s_{n+1}) = \gcd\left(w, g_n + \frac{w(s_n - w)}{g_n}\right) = \gcd(w, g_n) = g_n.$$

■

Gọi $g = g_N$. Khi đó, với $n \geq N$, dãy a_n lặp lại chu kỳ:

$$g + 1 \to g + 2 \to \cdots \to w \to g + 1.$$

□

[37]Lời giải chính thức.

Lời giải 2. Theo Khẳng định 1, $a_n \le w_n \le w_0$, tức (a_n) bị chặn, nên chỉ nhận giá trị hữu hạn.

Gọi $M = \operatorname{lcm}(a_1, a_2, \ldots)$, và xét dãy $(b_n \mod M)$. Gọi $r_n = b_n \mod M$. Vì $a_n \mid M$, ta có:

$$\gcd(a_n, b_n) = \gcd(a_n, r_n) \implies a_{n+1} = \gcd(a_n, r_n) + 1.$$

Hơn nữa:

$$b_{n+1} = \operatorname{lcm}(a_n, b_n) - 1 = \frac{a_n}{\gcd(a_n, b_n)} b_n - 1 = \frac{a_n}{\gcd(a_n, r_n)} r_n - 1 \mod M.$$

Vậy cặp (a_n, r_n) xác định duy nhất (a_{n+1}, r_{n+1}). Có hữu hạn giá trị nên dãy (a_n) là tuần hoàn sau hữu hạn bước. □

Nhận xét. Ta chứng minh rằng chỉ có 4 cặp (w, g) khả dĩ:

$$(2, 1), (3, 1), (4, 2), (5, 1)$$

dẫn đến các chu kỳ $(2), (2, 3), (3, 4), (2, 3, 4, 5)$.

Sử dụng ký hiệu như Lời giải 1, $L = \operatorname{lcm}(g + 1, \ldots, w - 1) \mid s_n$, và $g \mid w$.

Chọn n sao cho $a_n = w$. Khi đó:

$$s_{n+1} = \gcd(a_n, b_n) + \operatorname{lcm}(a_n, b_n) = g + \frac{w(s_n - w)}{g} = s_n \cdot \frac{w}{g} - \frac{w^2 - g^2}{g}$$

Vì $L \mid s_n$ và s_{n+1}, nên $L \mid \frac{w^2-g^2}{g}$. Nếu $w \ge 6$, thì $g + 1 \le \frac{w}{2} + 1 \le w - 2$, suy ra:

$$(w - 2)(w - 1) \mid L \implies (w - 2)(w - 1) \mid \frac{w^2 - g^2}{g},$$

điều này dẫn đến mâu thuẫn trừ phi $w \le 5$. Với $w \le 5$ và $g \mid w$, chỉ còn 4 cặp thỏa mãn.

Bảng dưới đây minh họa các chu kỳ ứng với từng cặp:

$w = 2, g = 1$	$a_n = 2$	$b_n = 2 \cdot 2^n + 1$
$w = 3, g = 1$	$(a_{2k}, a_{2k+1}) = (2, 3)$	$(b_{2k}, b_{2k+1}) = (6 \cdot 3^k + 2, 6 \cdot 3^k + 1)$
$w = 4, g = 2$	$(a_{2k}, a_{2k+1}) = (3, 4)$	$(b_{2k}, b_{2k+1}) = (12 \cdot 2^k + 3, 12 \cdot 2^k + 2)$
$w = 5, g = 1$	$(a_{4k}, \ldots, a_{4k+3}) = (2, 3, 4, 5)$	$(b_{4k}, \ldots, b_{4k+3}) = (6 \cdot 5^k + 4, \ldots, 6 \cdot 5^k + 1)$

Nhận xét. Đánh giá [**25M**]

3.2.22 (IMO 2015/P2)**.** Find all positive integers (a, b, c) such that

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

are all powers of 2.

Lời giải 1. [38]Dễ thấy rằng mười sáu bộ ba sau thỏa mãn yêu cầu: $(2, 2, 2)$, ba hoán vị của $(2, 2, 3)$, và sáu hoán vị của mỗi bộ $(2, 6, 11)$ và $(3, 5, 7)$.

Giả sử (a, b, c) là bộ ba bất kỳ thỏa mãn điều kiện. Nếu $a = 1$, thì $bc - a$ và $cb - a$ đều là lũy thừa của 2, nên tổng của chúng là 0 suy ra mâu thuẫn suy ra $a, b, c \geq 2$.

Trường hợp 1. Có ít nhất hai số bằng nhau. Giả sử $a = b$, khi đó $a^2 - c$ và $a(c - 1)$ là lũy thừa của 2 suy ra a và $c - 1$ là lũy thừa của 2 suy ra tồn tại α, γ sao cho $a = 2^\alpha$, $c = 2^\gamma + 1$. Khi đó:

$$a^2 - c = 2^{2\alpha} - 2^\gamma - 1 \text{ là lũy thừa của 2} \implies \gamma \leq 1.$$

Do $2^{2\alpha} - 2$ và $2^{2\alpha} - 3$ chỉ là lũy thừa của 2 khi $\alpha = 1$ suy ra chỉ có thể là $(2, 2, 2)$ hoặc $(2, 2, 3)$.

Trường hợp 2. Ba số phân biệt. Giả sử $2 \leq a < b < c$. Khi đó tồn tại số nguyên không âm α, β, γ sao cho:

$$bc - a = 2^\alpha, \quad ac - b = 2^\beta, \quad ab - c = 2^\gamma.$$

Từ điều kiện, dễ thấy $\alpha > \beta > \gamma$.

Trường hợp 2.1. $a = 2$. Giả sử $\gamma > 0 \implies ab - c$ chẵn suy ra c chẵn suy ra b chẵn suy ra $bc \equiv 2 \mod 4$, mâu thuẫn suy ra $\gamma = 0 \implies c = 2b - 1$.

Thế vào $ac - b = 2\beta \implies 3b - 2 = 2^\beta$. Với $b > 2$, chỉ có thể là $\beta = 4 \implies b = 6, c = 11$ suy ra nghiệm $(2, 6, 11)$. Với $\beta \geq 5$, vế phải không chia hết cho 32 suy ra mâu thuẫn với $\alpha > \beta$.

Trường hợp 2.2. $a \geq 3$. Chọn $\vartheta \in \{-1, +1\}$ sao cho $c - \vartheta$ không chia hết cho 4. Khi đó:

$$2^\alpha + \vartheta 2^\beta = (b + a\vartheta)(c - \vartheta).$$

Do $b + a\vartheta$ chia hết cho $2^{\beta-1}$, mà $a, b < 2^{\beta-1}$, điều này chỉ có thể nếu $\vartheta = 1$, và $a + b = 2^{\beta-1}$. Khi đó:

$$ac - b = 2(a + b), \implies c = b + 2.$$

Thế vào $bc - a = (b - 1)(b + 3)$ là lũy thừa của 2 suy ra hai thừa số cách nhau 4 suy ra $b = 5 \implies c = 7 \implies a = 3$. Vậy nghiệm $(3, 5, 7)$. □

Lời giải 2. Giống phần đầu lời giải 1, $a, b, c \geq 2$. Xét theo tính chẵn lẻ của các số.

Trường hợp 1. Cả ba số chẵn. Gọi $2^A, 2^B, 2^C$ là lũy thừa 2 lớn nhất chia a, b, c, giả sử $A \leq B \leq C$.

Khi đó $ac - b = 2^B \leq b$, và $bc - a = 2^A \leq a$. Cộng lại được $(a+b)c \leq 2(a+b) \implies c \leq 2 \implies a = b = c = 2$.

Trường hợp 2. Cả ba số lẻ. Nếu có hai số bằng nhau, ví dụ $a = b \implies ac - b = a(c - 1)$ có ước lẻ suy ra không là lũy thừa 2 suy ra loại.

Giả sử $a < b < c$. Với α, β như trên:

$$bc - a = 2^\alpha, \quad ac - b = 2^\beta \implies 2^\beta \mid b^2 - a^2 = (b + a)(b - a).$$

Một trong hai thừa số chia hết cho $2^{\beta-1}$, từ đó:

$$ac - b \leq 2(a + b) \implies a = 3, \quad c = b + 2.$$

[38]Lời giải chính thức.

Thế vào $bc - a = (b-1)(b+3) \implies b = 5, c = 7 \implies a = 3$ suy ra nghiệm $(3,5,7)$.

Trường hợp 3. Có cả số chẵn và lẻ. Giả sử c lẻ, $a \le b$. Khi đó $ab - c$ lẻ suy ra phải bằng 1 suy ra

$$ab - c = 1. \tag{1}$$

Nếu $a = b \implies c = a^2 - 1$, và $ac - b = a(a^2 - 2)$ là lũy thừa của 2 suy ra $a, a^2 - 2$ là lũy thừa của 2 suy ra $a = 2 \implies (2,2,3)$.

Nếu $a < b$, gọi α, β như trên:

$$bc - a = 2^\alpha, \quad ac - b = 2^\beta. \tag{2}$$

Nếu $\beta = 0 \implies ac - b = 1$ và từ (1) suy ra $b = c = 1$, mâu thuẫn suy ra $\beta > 0 \implies a, b$ chẵn.

Thế $c = ab - 1$ vào (2), ta có:

$$bc - a = ab^2 - (a+b) = 2^\alpha, \quad ac - b = a^2b - (a+b) = 2^\beta.$$

Cộng hai phương trình:

$$2^\alpha + 2^\beta = (ab-2)(a+b).$$

Phía trái là lũy thừa của 2 suy ra $ab - 2$ chẵn nhưng không chia hết 4 suy ra $a + b$ chia hết $2^{\beta-1}$.

Từ hai biểu thức ta được:

$$a = 2^\tau A, \quad b = 2^\tau B, \quad a + b = 2^{3\tau} C \implies \tau = 1, A = 1, B = 3, C = 1.$$

Suy ra $a = 2, b = 6, c = 11$. □

Nhận xét. Xét lại Trường hợp 3 trong Lời giải 2: đặt $d = \gcd(a,b), a = dp, b = dq, \gcd(p,q) = 1$. Khi đó:

$$ab - c = 1 \implies c = d^2pq - 1.$$

Thế vào:

$$bc - a = dpd^2q^2 - (p+q), \quad ac - b = dpd^2p^2q - (p+q).$$

Hiệu hai biểu thức:

$$d^3pq(q-p) \implies \text{phân tích chia hết và rút gọn, được } p = 1, q = d^2 - 1 \implies d = 2.$$

Suy ra $a = 2, b = 6, c = 11$.

3.2.23 (IMO 2015/P2)**.** Find all positive integers (a,b,c) such that

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

are all powers of 2.

Lời giải 1. [39]Dễ thấy rằng mười sáu bộ ba sau thỏa mãn yêu cầu: $(2,2,2)$, ba hoán vị của $(2,2,3)$, và sáu hoán vị của mỗi bộ $(2,6,11)$ và $(3,5,7)$.

Giả sử (a,b,c) là bộ ba bất kỳ thỏa mãn điều kiện. Nếu $a = 1$, thì $bc - a$ và $cb - a$ đều là lũy thừa của 2, nên tổng của chúng là 0 suy ra mâu thuẫn suy ra $a, b, c \ge 2$.

Trường hợp 1. Có ít nhất hai số bằng nhau. Giả sử $a = b$, khi đó $a^2 - c$ và $a(c-1)$ là lũy thừa của 2 suy ra a và $c - 1$ là lũy thừa của 2 suy ra tồn tại α, γ sao cho $a = 2^\alpha$, $c = 2^\gamma + 1$. Khi đó:

$$a^2 - c = 2^{2\alpha} - 2^\gamma - 1 \text{ là lũy thừa của 2} \implies \gamma \le 1.$$

Do $2^{2\alpha}-2$ và $2^{2\alpha}-3$ chỉ là lũy thừa của 2 khi $\alpha=1$ suy ra chỉ có thể là $(2,2,2)$ hoặc $(2,2,3)$.

Trường hợp 2. Ba số phân biệt. Giả sử $2\le a<b<c$. Khi đó tồn tại số nguyên không âm α,β,γ sao cho:

$$bc-a=2^{\alpha},\quad ac-b=2^{\beta},\quad ab-c=2^{\gamma}.$$

Từ điều kiện, dễ thấy $\alpha>\beta>\gamma$.

Trường hợp 2.1. $a=2$. Giả sử $\gamma>0\implies ab-c$ chẵn suy ra c chẵn suy ra b chẵn suy ra $bc\equiv 2\mod 4$, mâu thuẫn suy ra $\gamma=0\implies c=2b-1$.

Thế vào $ac-b=2\beta\implies 3b-2=2^{\beta}$. Với $b>2$, chỉ có thể là $\beta=4\implies b=6,c=11$ suy ra nghiệm $(2,6,11)$. Với $\beta\ge 5$, vế phải không chia hết cho 32 suy ra mâu thuẫn với $\alpha>\beta$.

Trường hợp 2.2. $a\ge 3$. Chọn $\vartheta\in\{-1,+1\}$ sao cho $c-\vartheta$ không chia hết cho 4. Khi đó:

$$2^{\alpha}+\vartheta 2^{\beta}=(b+a\vartheta)(c-\vartheta).$$

Do $b+a\vartheta$ chia hết cho $2^{\beta-1}$, mà $a,b<2^{\beta-1}$, điều này chỉ có thể nếu $\vartheta=1$, và $a+b=2^{\beta-1}$. Khi đó:

$$ac-b=2(a+b),\implies c=b+2.$$

Thế vào $bc-a=(b-1)(b+3)$ là lũy thừa của 2 suy ra hai thừa số cách nhau 4 suy ra $b=5\implies c=7\implies a=3$. Vậy nghiệm $(3,5,7)$. □

Lời giải 2. Giống phần đầu lời giải 1, $a,b,c\ge 2$. Xét theo tính chẵn lẻ của các số.

Trường hợp 1. Cả ba số chẵn. Gọi $2^A,2^B,2^C$ là lũy thừa 2 lớn nhất chia a,b,c, giả sử $A\le B\le C$.

Khi đó $ac-b=2^B\le b$, và $bc-a=2^A\le a$. Cộng lại được $(a+b)c\le 2(a+b)\implies c\le 2\implies a=b=c=2$.

Trường hợp 2. Cả ba số lẻ. Nếu có hai số bằng nhau, ví dụ $a=b\implies ac-b=a(c-1)$ có ước lẻ suy ra không là lũy thừa 2 suy ra loại.

Giả sử $a<b<c$. Với α,β như trên:

$$bc-a=2^{\alpha},\quad ac-b=2^{\beta}\implies 2^{\beta}\mid b^2-a^2=(b+a)(b-a).$$

Một trong hai thừa số chia hết cho $2^{\beta-1}$, từ đó:

$$ac-b\le 2(a+b)\implies a=3,\quad c=b+2.$$

Thế vào $bc-a=(b-1)(b+3)\implies b=5,c=7\implies a=3$ suy ra nghiệm $(3,5,7)$.

Trường hợp 3. Có cả số chẵn và lẻ. Giả sử c lẻ, $a\le b$. Khi đó $ab-c$ lẻ suy ra phải bằng 1 suy ra

$$ab-c=1. \tag{1}$$

Nếu $a=b\implies c=a^2-1$, và $ac-b=a(a^2-2)$ là lũy thừa của 2 suy ra a,a^2-2 là lũy thừa của 2 suy ra $a=2\implies(2,2,3)$.

Nếu $a<b$, gọi α,β như trên:

$$bc-a=2^{\alpha},\quad ac-b=2^{\beta}. \tag{2}$$

Nếu $\beta=0\implies ac-b=1$ và từ (1) suy ra $b=c=1$, mâu thuẫn suy ra $\beta>0\implies a,b$ chẵn.

Thế $c=ab-1$ vào (2), ta có:

$$bc-a=ab^2-(a+b)=2^{\alpha},\quad ac-b=a^2b-(a+b)=2^{\beta}.$$

[39] Lời giải chính thức.

Cộng hai phương trình:

$$2^\alpha + 2^\beta = (ab-2)(a+b).$$

Phía trái là lũy thừa của 2 suy ra $ab-2$ chẵn nhưng không chia hết 4 suy ra $a+b$ chia hết $2^{\beta-1}$.
Từ hai biểu thức ta được:

$$a = 2^\tau A, \quad b = 2^\tau B, \quad a+b = 2^{3^\tau} C \implies \tau = 1, A = 1, B = 3, C = 1.$$

Suy ra $a = 2, b = 6, c = 11$. □

Nhận xét. Xét lại Trường hợp 3 trong Lời giải 2: đặt $d = \gcd(a,b), a = dp, b = dq, \gcd(p,q) = 1$. Khi đó:

$$ab - c = 1 \implies c = d^2pq - 1.$$

Thế vào:

$$bc - a = dpd^2q^2 - (p+q), \quad ac - b = dpd^2p^2q - (p+q).$$

Hiệu hai biểu thức:

$$d^3pq(q-p) \implies \text{phân tích chia hết và rút gọn, được } p = 1, q = d^2 - 1 \implies d = 2.$$

Suy ra $a = 2, b = 6, c = 11$.

Nhận xét. Đánh giá [**25M**]

3.2.24 (IMO 2015 SL/P6)**.** Ký hiệu $\mathbb{Z}_{>0}$ là tập các số nguyên dương. Xét một hàm $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$. Với mọi $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, ta định nghĩa:

$$f^n(m) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{n \text{ lần}}(m)\ldots)).$$

Giả sử hàm f thỏa mãn hai tính chất sau:

(i) Với mọi $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, ta có $\frac{f^n(m)-m}{n} \in \mathbb{Z}_{>0}$;

(ii) Tập $\mathbb{Z}_{>0} \setminus \{f(n) \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ là hữu hạn.

Chứng minh rằng dãy số $f(1) - 1, f(2) - 2, f(3) - 3, \ldots$ là tuần hoàn.

Lời giải. [40]**Bước 1.** Ta bắt đầu bằng việc chứng minh rằng f là đơn ánh. Giả sử tồn tại $m, k \in \mathbb{Z}_{>0}$ sao cho $f(m) = f(k)$. Theo giả thiết (i), với mọi $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, ta có:

$$\frac{f^n(m) - m}{n} \in \mathbb{Z}, \quad \frac{f^n(k) - k}{n} \in \mathbb{Z} \implies \frac{k - m}{n} = \frac{f^n(m) - m}{n} - \frac{f^n(k) - k}{n} \in \mathbb{Z}.$$

Lấy $n = |k - m| + 1$, mẫu số lớn hơn tử số suy ra $\frac{k-m}{n} \notin \mathbb{Z}$, trừ khi $k = m$. Vậy f là đơn ánh.

Theo giả thiết (ii), tồn tại hữu hạn số nguyên dương $a_1, \ldots, a_k$ sao cho:

$$\mathbb{Z}_{>0} = \{a_1, \ldots, a_k\} \cup \{f(n) : n \in \mathbb{Z}_{>0}\}.$$

Ngoài ra, thay $n = 1$ vào giả thiết (i), ta có $f(m) > m$ với mọi $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Ta chứng minh rằng mọi số nguyên dương n đều có dạng $f^j(a_i)$ với một số $j \geq 0$ và $i \in \{1, \ldots, k\}$. Do f đơn ánh, biểu diễn này là duy nhất.

Ta xây dựng bảng sau (gọi là "Bảng"):

$$\begin{array}{cccc} a_1 & f(a_1) & f^2(a_1) & \cdots \\ a_2 & f(a_2) & f^2(a_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_k & f(a_k) & f^2(a_k) & \cdots \end{array}$$

Bước 2. Ta sẽ chứng minh rằng mỗi hàng trong Bảng là một cấp số cộng.

Giả sử ngược lại, chỉ có $t < k$ hàng là cấp số cộng với công sai $T_1, \ldots, T_t$. Đặt $T = \operatorname{lcm}(T_1, \ldots, T_t)$, $A = \max(a_1, \ldots, a_t)$. Xét đoạn $\Delta_n = [n+1, n+T]$, số phần tử từ các hàng đầu tiên thuộc đoạn này không đổi theo $n \geq A$, nên số phần tử từ các hàng còn lại (từ hàng $t+1$ trở đi) trong Δ_n là không đổi.

Nhưng các hàng còn lại có vô hạn phần tử suy ra tồn tại hàng $x > t$ sao cho đoạn $[A+1, A+(d+1)(k-t)T]$ chứa ít nhất $d+1$ phần tử từ hàng thứ x. Điều này dẫn đến:

$$f^d(a_x) \leq A + (d+1)(k-t)T.$$

Do có hữu hạn giá trị x, tồn tại một hàng $x > t$ sao cho:

$$X := \{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : f^d(a_x) \leq A + (d+1)(k-t)T\}$$

là vô hạn. Đặt:

$$\omega_d = \frac{f^d(a_x) - a_x}{d}, \quad \text{với } d \in X.$$

Ta có:

$$\omega_d \leq \frac{A + (d+1)(k-t)T - a_x}{d} \leq A + 2(k-t)T.$$

Do đó, ω_d chỉ có thể nhận hữu hạn giá trị suy ra tồn tại T_x sao cho:

$$f^d(a_x) = a_x + d \cdot T_x$$

xảy ra với vô hạn $d \in X$.

Đặt j tùy ý. Chọn $y \in X$ sao cho $y - j > |f^j(a_x) - (a_x + jT_x)|$. Khi đó:

$$f^y(a_x) - f^j(a_x) = f^{y-j}(f^j(a_x)) - f^j(a_x), \quad \text{và} \quad f^y(a_x) - (a_x + jT_x) = (y-j)T_x.$$

Hiệu của hai số trên chia hết cho $y - j$, nhưng trị tuyệt đối nhỏ hơn $y - j$ suy ra hiệu bằng 0.

Suy ra:

$$f^j(a_x) = a_x + jT_x,$$

tức hàng thứ x là cấp số cộng, mâu thuẫn giả thiết. Vậy tất cả các hàng đều là cấp số cộng.

Bước 3. Gọi T_i là công sai của hàng thứ i, và $T = \text{lcm}(T_1, \dots, T_k)$. Với mọi $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, nếu n nằm trong hàng i, thì:

$$f^j(n) = n + jT_i \implies f(n+T) = f(n) + T.$$

Suy ra:

$$f(n+T) - (n+T) = f(n) - n.$$

Vậy dãy $f(n) - n$ là tuần hoàn suy ra dãy $f(n) - n$ với $n = 1, 2, 3, \dots$ là tuần hoàn. □

Nhận xét. Có một số cách khác để hoàn tất phần thứ hai của lời giải sau khi chỉ số x ứng với một hàng *dày đặc* đã được xác định. Ví dụ, người ta có thể chứng minh rằng tồn tại một số nguyên T_x^* sao cho tập

$$Y^* := \left\{ j \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \;\middle|\; f^{j+1}(a_x) - f^j(a_x) = T_x^* \right\}$$

là vô hạn, và sau đó có thể kết luận bằng một lập luận chia hết tương tự như trước.

Nhận xét. Ta có thể kiểm tra rằng, ngược lại, nếu điền các số nguyên dương vào Bảng bằng cách sử dụng hữu hạn nhiều dãy cấp số cộng sao cho mỗi số nguyên dương xuất hiện đúng một lần, thì sẽ thu được một hàm f thỏa mãn cả hai điều kiện được nêu trong bài toán.

Ví dụ, ta có thể sắp xếp các số nguyên dương như sau:

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \cdots \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 & \cdots \\ 3 & 7 & 11 & 15 & 19 & \cdots \end{array}$$

Điều này tương ứng với hàm:

$$f(n) = \begin{cases} n+2 & \text{nếu } n \text{ chẵn}, \\ n+4 & \text{nếu } n \text{ lẻ}. \end{cases}$$

Như ví dụ này cho thấy, không đúng rằng hàm $f(n) - n$ phải luôn là hằng số. Tuy nhiên, nó vẫn là một dãy tuần hoàn.

Nhận xét. Đánh giá [**35M**]

[40] Lời giải chính thức.

3.2.25 (IMO 2015 SL/P7)**.** Ký hiệu $\mathbb{Z}_{>0}$ là tập các số nguyên dương. Với một số nguyên dương k, ta gọi một hàm $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ là *hàm k-tốt* nếu:

$$\gcd(f(m)+n,\ f(n)+m) \leq k \quad \text{với mọi } m \neq n.$$

Tìm tất cả các giá trị k sao cho tồn tại một hàm k-tốt.

Lời giải 1. [41]Với mỗi hàm $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$, ký hiệu $G_f(m,n) := \gcd(f(m)+n,\ f(n)+m)$. Lưu ý rằng nếu f là k-tốt thì nó cũng là $(k+1)$-tốt. Do đó, ta chỉ cần chứng minh rằng:

- Không tồn tại hàm 1-tốt;
- Tồn tại một hàm 2-tốt.

Không tồn tại hàm 1-tốt. Giả sử tồn tại hàm f sao cho $G_f(m,n) = 1$ với mọi $m \neq n$. Nếu tồn tại hai số chẵn phân biệt m, n sao cho $f(m)$ và $f(n)$ đều chẵn thì:

$$2 \mid f(m)+n, \quad 2 \mid f(n)+m \implies 2 \mid \gcd(f(m)+n,\ f(n)+m),$$

mâu thuẫn với điều kiện.

Lập luận tương tự với hai số lẻ cho thấy điều này cũng dẫn đến mâu thuẫn. Do đó, tồn tại m chẵn và n lẻ sao cho $f(m)$ lẻ và $f(n)$ chẵn, suy ra $f(m)+n$ và $f(n)+m$ đều chẵn, suy ra mâu thuẫn suy ra không tồn tại hàm 1-tốt.

Xây dựng hàm 2-tốt. Định nghĩa hàm $f(n) = 2g(n+1) - n - 1$, với hàm g được xác định đệ quy bởi:

$$g(1) = 1, \quad g(n+1) = \left(2^{g(n)+1}\right)!.$$

Với mọi $m > n$, đặt:

$$A = f(m) + n = 2^{g(m)+1} - m + n - 1, \quad B = f(n) + m = 2^{g(n)+1} - n + m - 1.$$

Ta cần chứng minh rằng $\gcd(A,B) \leq 2$. Trước hết, lưu ý rằng $A + B = 2^{g(m)+1} + 2^{g(n)+1} - 2$ không chia hết cho 4 suy ra $\gcd(A,B) \not\equiv 0 \mod 4$.

Giả sử tồn tại số nguyên tố lẻ $p \mid \gcd(A,B)$. Ta sẽ dẫn đến mâu thuẫn.

Ta chứng minh rằng $2^{g(m-1)+1} \geq B$. Điều này được suy ra từ:

$$g(k+1) > g(k) \implies 2^{g(k+1)+1} \geq 2^{g(k)+1} + 1.$$

Áp dụng nhiều lần, ta có:

$$2^{g(m-1)+1} \geq 2^{g(n)+1} + (m-1) - n = B.$$

Vì $p \mid B$, ta có $p - 1 < B \leq 2^{g(m-1)+1}$, do đó:

$$p - 1 \mid (2^{g(m-1)+1})! = g(m) \implies 2^{g(m)} \equiv 1 \mod p.$$

Khi đó $A + B \equiv 2^{g(n)+1} \mod p$, nhưng $A + B \equiv 0 \mod p$ suy ra $p = 2$, mâu thuẫn vì p lẻ.

Vậy $\gcd(f(m)+n,\ f(n)+m) \leq 2$. Hàm f là 2-tốt. □

[41] Lời giải chính thức.

Lời giải 2. Một cách xây dựng khác của hàm 2-tốt.

Gọi $\mathcal{P}$ là tập gồm 4 và tất cả các số nguyên tố lẻ. Với mỗi $p \in \mathcal{P}$, ta nói rằng số $a \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ là *hữu dụng theo p* (gọi tắt là p-hữu dụng) nếu $a \not\equiv -a \mod p$. Với $p = 4$, cần thêm điều kiện $a \not\equiv 2 \mod 4$.

Ta sẽ xây dựng hàm f theo từng bước. Tại bước thứ m, ta sẽ xác định giá trị $f(m)$, và nếu $m + 2 \in \mathcal{P}$, ta cũng chọn một số p-hữu dụng $a_p \mod p$.

Sau bước thứ m, các điều kiện sau phải được thỏa mãn:

(i) Các giá trị $f(n)$ đã được xác định với mọi $n \leq m$; và các số a_p đã được chọn với mọi $p \leq m + 2$.

(ii) Với mọi $n \leq m$ và $p \leq m + 2$, ta có $f(n) + n \not\equiv a_p \mod p$.

(iii) Với mọi $n_1 < n_2 \leq m$, ta có $\gcd(f(n_1) + n_2,\ f(n_2) + n_1) \leq 2$.

Nếu các điều kiện này được thỏa mãn tại mỗi bước, thì hàm f cuối cùng là 2-tốt.

Bước 1. Đặt $f(1) = 1$, $a_3 = 1$. Rõ ràng các điều kiện (i)-(iii) đều thỏa mãn.

Bước $m \geq 2$. Cần xác định $f(m)$, và nếu $m + 2 \in \mathcal{P}$, ta chọn a_{m+2}.

Đặt:

$$X_m = \{p \in \mathcal{P} : p \mid f(n) + m \text{ với một số } n < m\}.$$

Với mỗi $p \in X_m$:

- Nếu $p \leq m + 1$: đặt $f(m) \equiv -a_p - m \mod p$.
- Nếu $p \geq m + 2$: đặt $f(m) \equiv 0 \mod p$.

Sau đó chọn $f(m)$ thỏa mãn tất cả các điều kiện trên bằng định lý số dư Trung Hoa.

Nếu $m + 2 \in \mathcal{P}$, ta chọn a_{m+2} sao cho:

$$a_{m+2} \not\equiv 0, 2, f(n) + n \mod (m+2) \text{ với mọi } n \leq m.$$

Vì số dư cần tránh chỉ có $m + 1 < m + 2$ giá trị suy ra luôn chọn được.

Kiểm tra điều kiện (ii). Chỉ cần xét $p = m + 2$ hoặc $n = m$.

- Nếu $p = m + 2$: do ta chọn a_{m+2} tránh tất cả $f(n) + n$, điều kiện (ii) thỏa mãn.

- Nếu $n = m$ và $p \leq m + 1$: ta có $f(m) + m \equiv -a_p \equiv a_p \mod p$, sử dụng tính p-hữu dụng của a_p.

Kiểm tra điều kiện (iii). Giả sử tồn tại $n < m$ sao cho $p \mid \gcd(f(n) + m,\ f(m) + n)$. Khi đó $p \in X_m$ và $p \mid f(m) + n$.

- Nếu $p \geq m + 2$: khi đó $f(m) \equiv 0 \mod p \implies f(m) + n \equiv n \mod p$, mà $n < m < p$ suy ra $n \not\equiv 0 \mod p$ suy ra mâu thuẫn.

- Nếu $p \leq m + 1$: từ định nghĩa $f(m) + m \equiv -a_p \mod p$ và $f(n) + n \not\equiv a_p \mod p$ theo điều kiện (ii) suy ra tổng không chia hết cho p suy ra mâu thuẫn. □

Nhận xét. Tại mỗi bước, với mỗi $p \in \mathcal{P}$, ta có thể chọn trước a_p với $p \geq m + 2$. Miễn là số lượng các a_p được chọn tại mỗi bước là hữu hạn, thì quá trình xây dựng vẫn hoạt động tốt.

Nhận xét. Một hướng xây dựng khác là: đặt $f(1) = 1$, sau đó với mỗi $m > 1$, định nghĩa:

- $f(m) \equiv f(m - p) \mod p$ với mọi $p \in X_m$, $p < m$;
- $f(m) \equiv 0 \mod p$ với mọi $p \in X_m$, $p \geq m$.

Tuy nhiên, cách này có một lỗ hổng: trong trường hợp $n = m - p$, tính tối tiểu của $\max(m, n)$ không đảm bảo được mâu thuẫn suy ra cần sửa đổi.

Nhận xét. Có nhiều cách khác để xây dựng hàm 2-tốt. Một cách tiếp cận tổng quát là định nghĩa các tập con $B_p^{(i)} \subset \mathbb{Z}_p$ và phần tử an toàn $b_p^{(i)} \in B_p^{(i)}$ sao cho:

$$f(m) + m \equiv b_p^{(i)} \in B_p^{(i)} \text{ khi } m \equiv i \mod p.$$

Với điều kiện rằng:

$$\forall j \in \mathbb{Z}_p,\ \forall c^{(j)} \in B_p^{(j)}, \quad p \nmid \gcd(b_p^{(i)} + (j-i),\ c^{(j)} - (j-i)).$$

Một điều kiện tương đương:

$$-b_p^{(i)} \notin B_p^{(j)}, \text{ với } j \equiv i - b_p^{(i)} \mod p.$$

Cách xây dựng trong Lời giải 2 tương đương với việc chọn $b_p^{(i)} = -a_p$, $B_p^{(i)} = \mathbb{Z}_p \setminus \{a_p\}$ với mọi i.

Một biến thể khác: đặt $B_p^{(0)} = \{0\}$, $b_p^{(0)} = 0$, và với mọi $i \neq 0$, đặt $B_p^{(i)} = \{f(i) + i \mod p\}$, $b_p^{(i)} = i$. Tuy nhiên, cách này có thể vi phạm điều kiện an toàn nếu $f(i) + i$ chia hết cho p nào đó.

Một cách khắc phục: đặt trước $B_p^{(1)} = \{2\}$, $B_p^{(0)} = \{-1\}$, rồi định nghĩa dần các $B_p^{(i)}$ với $i \geq 2$ bằng cách chọn các phần tử phù hợp từ $\{i,\ f(i) + i\}$, sao cho điều kiện tương thích luôn được đảm bảo.

Nhận xét. Đánh giá [**30M**]

3.2.26 (IMO 2015 SL/P8)**.** Với mỗi số nguyên dương n có phân tích thành thừa số nguyên tố $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, định nghĩa:

$$\mho(n) = \sum_{\substack{i: \\ p_i > 10^{100}}} \alpha_i.$$

Nói cách khác, $\mho(n)$ là tổng số mũ của các thừa số nguyên tố lớn hơn 10^{100} trong phân tích thừa số nguyên tố của n, tính cả bội số.

Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *tăng chặt* (tức là $a > b \implies f(a) > f(b)$) sao cho:

$$\mho(f(a) - f(b)) \leq \mho(a - b) \quad \text{với mọi } a > b \text{ trong } \mathbb{Z}.$$

Lời giải. [42]**Đáp án:** Tất cả các hàm dạng $f(x) = ax + b$, trong đó $b \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}_{>0}$, và $\mho(a) = 0$.

Rõ ràng mọi hàm dạng như trên đều thỏa mãn điều kiện. Ta cần chứng minh chiều ngược lại: nếu f thỏa mãn điều kiện (1), thì $f(x) = ax + b$ với $\mho(a) = 0$.

Gọi $g(x) := f(x) - f(0)$. Khi đó g cũng thỏa mãn điều kiện (1), và $g(0) = 0$, nên $f(n) = g(n) + f(0)$. Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương a với $\mho(a) = 0$ sao cho $g(n) = an$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

Bước 1. Với mọi số lớn k (tức k chỉ có thừa số nguyên tố lớn hơn 10^{100}), ta có:

$$k \mid f(a) - f(b) \quad \Leftrightarrow \quad k \mid a - b.$$

Ký hiệu $L(n)$ là thừa số lớn nhất của n (chỉ gồm các thừa số nguyên tố lớn). Khi đó, cần chứng minh:

$$L(f(a) - f(b)) = L(a - b) \quad \text{với mọi } a > b.$$

Chứng minh bằng quy nạp theo k. Cơ sở $k = 1$ là hiển nhiên. Giả sử mệnh đề đúng với mọi $k < k_0$, xét k_0:

> **Khẳng định** — Với mọi x, y sao cho $0 < x - y < k_0$, thì $k_0 \nmid f(x) - f(y)$.

Chứng minh. Giả sử ngược lại: $k_0 \mid f(x) - f(y)$. Gọi $\lambda = L(x - y)$, thì $\lambda < k_0$. Theo giả thiết quy nạp, $\lambda \mid f(x) - f(y)$, do đó:

$$\operatorname{lcm}(k_0, \lambda) \mid f(x) - f(y).$$

Vì $\operatorname{lcm}(k_0, \lambda) \geq k_0 + 1$, nên: $\mho(f(x) - f(y)) \geq \mho(\operatorname{lcm}(k_0, \lambda)) > \mho(\lambda) = \mho(x - y)$, mâu thuẫn với (1). ■

Từ đó suy ra rằng dãy $f(a), f(a+1), \ldots, f(a + k_0 - 1)$ là một hệ đại diện đầy đủ modulo k_0, nên $f(a) \equiv f(a + k_0) \mod k_0$. Vì vậy $f(a) \equiv f(b) \mod k_0$ khi $a \equiv b \mod k_0$.

Nếu $a \not\equiv b \mod k_0$, tồn tại $b_1 \equiv b \mod k_0$ sao cho $|a - b_1| < k_0$. Khi đó $f(b) \equiv f(b_1) \not\equiv f(a) \mod k_0$ suy ra $f(a) \not\equiv f(b) \mod k_0$. Vậy:

$$k_0 \mid f(a) - f(b) \Leftrightarrow k_0 \mid a - b \implies L(f(a) - f(b)) = L(a - b).$$

Bước 2. Ta chứng minh rằng tồn tại số nguyên nhỏ a sao cho $f(n) = an$ với vô hạn số nguyên n. Tức là f tuyến tính trên một tập vô hạn.

> **Khẳng định** — Tồn tại hằng số c sao cho $f(t) < ct$ với mọi $t > 10^{100}$.

Chứng minh. Gọi d là tích của tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn hoặc bằng 10^{100}, chọn α sao cho $2^\alpha > f(N)$. Với mọi p nhỏ, $f(0), \ldots, f(N)$ đều khác nhau modulo p^α. Đặt $P = d^\alpha$, $c = P + f(N)$.

Với mọi $t > N$, có nhiều nhất một $i \leq N$ sao cho $p^\alpha \mid f(t) - f(i)$ với mỗi $p \in S$. Do $|S| < N$, tồn tại $j \leq N$ sao cho với mọi $p \in S$, $p^\alpha \nmid f(t) - f(j)$. Khi đó $S(f(t) - f(j)) < P$.

Từ Bước 1, $L(f(t)-f(j)) = L(t-j) \le t-j$. Nên:

$$f(t) = f(j) + L(f(t)-f(j)) \cdot S(f(t)-f(j)) < f(N) + P \cdot (t-j) \le ct.$$

■

Xét tập T các số nguyên tố lớn. Với mọi $t \in T$, theo Bước 1: $L(f(t)) = L(t) = t$ suy ra $f(t)/t \in \mathbb{Z}$. Do $f(t) < ct$, tỉ số $f(t)/t$ chỉ nhận hữu hạn giá trị suy ra tồn tại tập con vô hạn $T' \subseteq T$ và $a \in \mathbb{Z}_{>0}$ sao cho $f(t) = at$ với mọi $t \in T'$. Khi đó $L(at) = aL(t) \implies L(a) = 1$ suy ra a là số nhỏ.

Bước 3. Ta chứng minh rằng $f(x) = ax$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$. Gọi $R_i = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv i \mod N!\}$.

Khẳng định — Nếu tồn tại r sao cho $f(n) = an$ với vô hạn $n \in R_r$, thì $f(x) = ax$ với mọi $x \in R_{r+1}$.

Chứng minh. Chọn $x \in R_{r+1}$. Chọn $n \in R_r$ sao cho $f(n) = an$ và $|n-x| > |f(x)-ax|$. Khi đó $|n-x|$ là số lớn suy ra $f(x) \equiv f(n) = an \equiv ax \mod n-x$ suy ra $n-x \mid f(x)-ax$ suy ra hiệu bằng 0. ■

Tập T' chứa vô hạn phần tử thuộc một lớp R_i. Lặp lại áp dụng bổ đề suy ra $f(x) = ax$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$. □

Nhận xét. Nếu thay điều kiện (1) bằng $L(f(a)-f(b)) = L(a-b)$, ta có thể bỏ qua Bước 1.

Nhận xét. Bước 2 là bước chính. Có thể chứng minh bằng nhiều cách khác nhau.

Cách 1. Xét $f(di)$ với d là tích các số nguyên tố nhỏ. Khi đó $L(f(di)-f(dj)) = di-dj$, tương tự Bước 1. Với α đủ lớn và $P = d^\alpha$, có thể chọn tập I vô hạn sao cho $f(di) = a \cdot di$ với a nhỏ cố định.

Cách 2. Áp dụng bổ đề sau:

Bổ đề

Tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho:

$$\prod_{i=1}^{3N} L(f(k)-f(i)) \ge cf(k)^{2N} \quad \text{với mọi } k > 3N.$$

Từ đó suy ra:

$$k^{3N} \ge \prod_{i=1}^{3N} L(k-i) = \prod_{i=1}^{3N} L(f(k)-f(i)) \ge cf(k)^{2N},$$

nên $f(k) \le Ck^{3/2}$. Sau đó, chọn $a = f(1)$, và sử dụng đánh giá $|f(n)-an| < \frac{n(n-1)}{2}$. Kết hợp với điều kiện đồng dư để suy ra $f(n) = an$.

Nhận xét. Trong Bước 3, chỉ cần $f(n) = an$ trên một tập vô hạn. Nếu tập này có cấu trúc tốt (như cùng lớp modulo $N!$), có thể suy ra dễ hơn bằng cách dùng định lý phần dư Trung Hoa.

Nhận xét. Đánh giá [35M]

[42] Lời giải chính thức.

Phần IV

Công cụ

Chương 4

Định lý, bổ đề, và hằng đẳng thức

4.1 Các nguyên lý và chiến lược giải toán

Định lý 4.1.1 (Nguyên lý quy nạp toán học)
Giả sử $P(n)$ là một mệnh đề toán học xác định với mọi số nguyên $n \geq n_0$, trong đó n_0 là một số nguyên cố định. Nếu thỏa mãn:

- (Cơ sở quy nạp) $P(n_0)$ đúng;
- (Bước quy nạp) Với mọi $k \geq n_0$, nếu $P(k)$ đúng thì $P(k+1)$ cũng đúng,

thì $P(n)$ đúng với mọi $n \geq n_0$.

Định lý 4.1.2 (Nguyên lý Dirichlet)
Nếu có nhiều hơn n đối tượng được phân vào n ngăn, thì tồn tại ít nhất một ngăn chứa từ hai đối tượng trở lên.

Định lý 4.1.3 (Nguyên lý cực hạn)
Trong một tập hợp hữu hạn các đối tượng, nếu mỗi đối tượng được gán một giá trị theo tiêu chí nhất định, thì tồn tại phần tử đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất (gọi là phần tử cực đại hoặc cực tiểu).

Việc chọn phần tử như vậy (cực đại hoặc cực tiểu) thường giúp đơn giản hóa bài toán hoặc dẫn đến mâu thuẫn khi giả sử ngược.

Định lý 4.1.4 (Nguyên lý bất biến)
Trong một quá trình gồm nhiều bước biến đổi, nếu tồn tại một đại lượng không thay đổi qua mỗi bước (gọi là bất biến), thì có thể dùng bất biến đó để suy ra tính chất hoặc kết thúc của quá trình.

Nguyên lý này đặc biệt hữu ích để chứng minh rằng một trạng thái nào đó là không thể đạt được, hoặc rằng quá trình phải dừng sau hữu hạn bước.

Định lý 4.1.5 (Nguyên lý đổi biến đơn điệu)

Giả sử trong một quá trình, có một đại lượng luôn tăng hoặc luôn giảm qua mỗi bước (gọi là biến đơn điệu, hay monovariant), và đại lượng đó bị chặn, thì quá trình phải kết thúc sau hữu hạn bước.

Nguyên lý này thường dùng để chứng minh một quá trình không thể tiếp diễn vô hạn.

Định lý 4.1.6 (Nguyên lý phản chứng)

Để chứng minh một mệnh đề P là đúng, ta có thể giả sử rằng P sai và từ đó suy ra một mâu thuẫn logic. Khi đó, kết luận rằng P là đúng.

Đây là một trong những phương pháp chứng minh phổ biến và hiệu quả nhất trong toán học.

Định lý 4.1.7 (Chiến lược xét chẵn/lẻ)

Trong các bài toán liên quan đến số nguyên, việc phân tích tính chẵn/lẻ (parity) của các đại lượng có thể giúp phát hiện các mâu thuẫn hoặc bất biến, từ đó giải được bài toán.

Tính chẵn/lẻ là một dạng đặc biệt của bất biến hoặc monovariant.

4.2 Các định lý giải tích

Bổ đề 4.2.1 (Tính phân kỳ của chuỗi điều hoà)
Chuỗi điều hoà $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ tăng mà không bị chặn, tức là:

$$\lim_{n\to\infty} H_n = \infty.$$

Ngoài ra, với mọi $n \geq 1$, ta có đánh giá gần đúng:

$$\log n < H_n < 1 + \log n.$$

4.3 Số nguyên tố và phép chia hết

Định nghĩa 4.3.1 (Số nguyên tố)**.** Một số nguyên $p > 1$ được gọi là **số nguyên tố** nếu p chỉ có đúng hai ước dương là 1 và p (tức là không chia hết cho số nguyên dương nào khác ngoài 1 và chính nó).

Định nghĩa 4.3.2 (Hợp số)**.** Một số nguyên $n > 1$ được gọi là **hợp số** nếu tồn tại một số nguyên dương d sao cho $1 < d < n$ và $d \mid n$ (tức là n có ước khác ngoài 1 và chính nó).

Định lý 4.3.3 (Định lý cơ bản của số học)

Mọi số tự nhiên lớn hơn 1 có thể viết một cách duy nhất (không kể sự sai khác về thứ tự các thừa số) thành tích các thừa số nguyên tố:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

với p_i là các số nguyên tố khác nhau và $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$.

Định lý 4.3.4 (Định lý Euclid)

Có vô số số nguyên tố. Cụ thể, với bất kỳ tập hữu hạn các số nguyên tố $p_1, p_2, \dots, p_k$, tồn tại số nguyên tố p không thuộc tập đó.

Định lý 4.3.5 (Định lý Bertrand)

Với mọi số nguyên $n > 1$, tồn tại số nguyên tố p sao cho:

$$n < p < 2n.$$

Định lý 4.3.6 (Định lý số nguyên tố — dạng yếu)

Hàm đếm số nguyên tố $\pi(n)$ thỏa mãn:

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}, \quad \text{và } \pi(n) < \frac{1.25506n}{\log n}.$$

Định lý 4.3.7 (Tính chất cơ bản của phép chia)

Với các số nguyên x, y, z, ta có:

- $x \mid x$, $1 \mid x$, $x \mid 0$
- Nếu $x \mid y$ và $y \mid z$ thì $x \mid z$
- Nếu $x \mid y$ thì tồn tại $k \in \mathbb{Z}$ sao cho $y = kx$
- Nếu $x \mid y$ thì $x \mid yz$ với mọi z
- Nếu $x \mid y$ và $x \mid z$ thì $x \mid (ay + bz)$ với mọi $a, b \in \mathbb{Z}$
- Nếu $x \mid y$ và $y \mid x$ thì $x = \pm y$

Định lý 4.3.8 (Tính chất gcd và lcm)
Với $a, b \in \mathbb{Z}^+$, ta có:
$$\gcd(a,b) \cdot \operatorname{lcm}(a,b) = ab.$$
Ngoài ra:

- $\gcd(a,b) \mid a$ và $\gcd(a,b) \mid b$
- $\operatorname{lcm}(a,b)$ là bội chung nhỏ nhất

Định lý 4.3.9 (Định lý chia có dư)
Với $a \in \mathbb{Z}$ và $b \in \mathbb{Z}^+$, tồn tại duy nhất $q, r \in \mathbb{Z}$ sao cho:
$$a = bq + r, \quad 0 \le r < b.$$

Định lý 4.3.10 (Thuật toán Euclid)
Thuật toán tìm $\gcd(a,b)$ dựa vào lặp lại định lý chia:
$$\gcd(a,b) = \gcd(b, a \bmod b).$$

Định lý 4.3.11 (Định lý Bézout)
Với $a, b \in \mathbb{Z}$, tồn tại $x, y \in \mathbb{Z}$ sao cho:
$$ax + by = \gcd(a,b).$$

Định lý 4.3.12 (Tính chất số nguyên tố)
Nếu p là số nguyên tố và $p \mid ab$, thì $p \mid a$ hoặc $p \mid b$.

Định lý (Chia hết trong tích khi nguyên tố cùng nhau)
Nếu $a \mid bc$ và $\gcd(a,b) = 1$, thì $a \mid c$.

Bổ đề 4.3.13 (Biểu diễn số có các chữ số 1)
Với mọi số nguyên dương n, ta có:
$$\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ chữ số } 1} = \frac{10^n - 1}{9}.$$

4.4 Số học đồng dư cơ bản

Định nghĩa 4.4.1 (Đồng dư modulo n). Với $a, b, n \in \mathbb{Z}$, ta nói $a \equiv b \pmod{n}$ khi $n \mid (a - b)$.

Định lý 4.4.2 (Tính chất đại số của phép đồng dư)
Với $a \equiv r \pmod{n}$ và $b \equiv s \pmod{n}$, ta có:

- $a + b \equiv r + s \pmod{n}$
- $ab \equiv rs \pmod{n}$
- $ka \equiv kr \pmod{n}$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$

Định lý 4.4.3 (Ước nguyên tố dạng $4k + 3$)
Mỗi số nguyên dương có dạng $4s + 3$ đều có ít nhất một ước nguyên tố cũng có dạng đó, tức là $\equiv -1 \pmod{4}$ (see Định lý Dirichlet về cấp số cộng nguyên tố).

Định lý 4.4.4 (Định lý nhỏ Fermat)
Nếu p là số nguyên tố và $\gcd(a, p) = 1$, thì:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Hệ quả: $a^p \equiv a \pmod{p}$ với mọi $a \in \mathbb{Z}$.

Định lý 4.4.5 (Định lý số dư Trung Hoa)
Cho các số nguyên $n_1, \ldots, n_k$ đôi một nguyên tố cùng nhau và các số nguyên $a_1, \ldots, a_k$, tồn tại duy nhất $x \mod N = n_1 n_2 \cdots n_k$ sao cho:

$$x \equiv a_i \pmod{n_i}, \quad \forall i.$$

Định lý 4.4.6 (Định lý Euler)
Với $\gcd(a, n) = 1$, ta có:

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Định lý 4.4.7 (Định lý Wilson)
Với số nguyên tố p, ta có:

$$(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Định lý 4.4.8 (Hủy nhân trong đồng dư)

Nếu $ad \equiv bd \pmod{n}$, thì:

$$a \equiv b \pmod{\frac{n}{\gcd(d,n)}}.$$

Định lý 4.4.9 (Định lý Dirichlet về cấp số cộng nguyên tố)

Cho hai số nguyên dương a và d sao cho $\gcd(a,d) = 1$. Khi đó, cấp số cộng $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$ chứa vô hạn số nguyên tố.

4.5 Các hàm số học

Định nghĩa 4.5.1 (Hàm số ước số dương)**.** Với $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$, ta có:

$$\tau(n) = (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_k).$$

Hàm này đếm số ước dương của n. Cũng được ký hiệu là $d(n)$.

Định nghĩa 4.5.2 (Hàm tổng ước số)**.** Với $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$, ta có:

$$\sigma(n) = (1 + p_1 + \cdots + p_1^{a_1}) \cdots (1 + p_k + \cdots + p_k^{a_k}).$$

Đây là tổng các ước dương của n.

Định nghĩa 4.5.3 (Hàm phi Euler)**.** Với $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$, ta có:

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Hàm này đếm số nguyên dương nhỏ hơn n và nguyên tố cùng nhau với n.

Định nghĩa 4.5.4 (Hàm Möbius)**.** Với $n \in \mathbb{Z}^+$, định nghĩa:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 1, \\ (-1)^k & \text{nếu } n \text{ là tích của } k \text{ số nguyên tố phân biệt}, \\ 0 & \text{nếu } n \text{ chia hết bình phương của số nguyên tố.} \end{cases}$$

Định lý 4.5.5 (GCD Power Sum Identity)

For any positive integer n and any real or complex number a, we have

$$\sum_{k=1}^{n} a^{\gcd(k,n)} = \sum_{d|n} \phi(d)\, a^{n/d}.$$

Định nghĩa 4.5.6 (Phép nhân Dirichlet)**.** Với hai hàm số số học $f, g\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$, định nghĩa:

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d).$$

Định lý 4.5.7 (Đẳng thức $\tau = 1 * 1$)

Hàm $\tau(n)$ là tích Dirichlet của hai hàm hằng:

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1 = (1 * 1)(n).$$

Định lý 4.5.8 (Đẳng thức $\sigma = \mathrm{id} * 1$)
Hàm tổng ước $\sigma(n)$ là tích Dirichlet của hàm đồng nhất và hàm hằng:

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d = (\mathrm{id} * 1)(n).$$

Định lý 4.5.9 (Tổng $\mu(d)$ trên các ước)
Với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, ta có:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 1, \\ 0 & \text{nếu } n > 1. \end{cases}$$

Định lý 4.5.10 (Nghịch đảo Möbius tổng quát)
Nếu $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$, thì:

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(n/d).$$

Định lý 4.5.11 (Bất đẳng thức cho $\varphi(n)$)
Với $n \geq 3$, ta có:

$$\frac{n}{\log \log n} < \varphi(n) < n.$$

Định lý 4.5.12 (Tổng các giá trị $\varphi(n)$)
Khi $x \to \infty$, ta có:

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n) \sim \frac{3}{\pi^2} x^2.$$

Định lý (Tổng các số nguyên tố cùng nhau với m)
Gọi T là tổng các số nguyên dương nhỏ hơn m và nguyên tố cùng nhau với m, thì ta có:

$$T = \frac{m\varphi(m)}{2}.$$

4.6 Phương trình nghiệm nguyên

Định lý 4.6.1 (Đẳng thức Simon yêu thích)
Với các biểu thức như $xy + ax + by + c$, ta có:

$$xy + ax + by + c = (x + a)(y + b) + (c - ab).$$

Được dùng để đưa phương trình hai biến về dạng tích.

Bổ đề 4.6.2 (Nguyên lý hạ vô hạn (Infinite Descent))
Nếu tồn tại dãy vô hạn các số nguyên dương $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots$ mà mỗi x_i thỏa mãn tính chất P, thì có mâu thuẫn. Do đó, giả thiết ban đầu là sai.

Định lý 4.6.3 (Monovariant $S = |x| + |y| + |z|$)
Nếu một quá trình biến đổi bộ số nguyên luôn làm giảm hoặc giữ nguyên $S = |x| + |y| + |z|$ và $S \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, thì quá trình phải kết thúc sau hữu hạn bước.

Định lý 4.6.4 (Kỹ thuật Vieta Jumping)
Với phương trình đối xứng $P(x, y) = 0$, nếu (a, b) là nghiệm nguyên và $x^2 - (a+b)x + ab = 0$, thì nghiệm còn lại x' cũng là nghiệm. Nếu $x' < a$, ta có thể sử dụng Vieta Jumping để tìm nghiệm nhỏ hơn — dẫn đến mâu thuẫn.

Bổ đề 4.6.5 (Mâu thuẫn đồng dư)
Nếu giả sử $a \equiv b \pmod p$ nhưng rút ra $a \equiv c \not\equiv b \pmod p$, thì mâu thuẫn xảy ra. Kỹ thuật dùng để loại nghiệm.

Định lý 4.6.6 (Định lý Fermat Giáng Sinh)
Phương trình:

$$x^4 + y^4 = z^2$$

không có nghiệm nguyên dương khác 0.

4.7 Phân bố đều và số vô tỉ

Bổ đề 4.7.1 (Phân bố đều của phần thập phân số vô tỉ)

Cho $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Khi đó dãy $\{n\alpha\}$ phân bố đều trên khoảng $(0, 1)$, tức là với mọi $0 \leq a < b \leq 1$, ta có:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} |\{1 \leq n \leq N : \{n\alpha\} \in [a, b)\}| = b - a.$$

Ở đây $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ là phần thập phân của x.

4.8 Căn nguyên thủy và đẳng thức cổ điển

Định nghĩa 4.8.1 (Bậc modulo n)**.** Với $a \in \mathbb{Z}$, $\gcd(a,n) = 1$, bậc của a modulo n, ký hiệu $\text{ord}_n(a)$, là số nguyên dương nhỏ nhất d sao cho:

$$a^d \equiv 1 \pmod n.$$

Định lý 4.8.2 (Tính chia hết của bậc)
Nếu $a^k \equiv 1 \pmod n$, thì $\text{ord}_n(a) \mid k$.

Bổ đề 4.8.3 (Tính chất đồng dư theo bậc)
Nếu $\text{ord}_n(a) = d$, thì:

$$a^i \equiv a^j \pmod n \iff i \equiv j \pmod d.$$

Bổ đề 4.8.4 (Tổng Euler lũy thừa theo modulo)
Với mọi số nguyên tố p và số nguyên $j \geq 1$, và với mọi $x \in \mathbb{Z}$, ta có:

$$\sum_{k=0}^{j} \phi\left(p^k\right) x^{p^{j-k}} \equiv 0 \pmod{p^j}.$$

Định nghĩa 4.8.5 (Căn nguyên thủy)**.** Một số $g \in \mathbb{Z}$ được gọi là căn nguyên thủy modulo n nếu:

$$\text{ord}_n(g) = \varphi(n).$$

Khi đó g sinh ra nhóm $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

Định lý 4.8.6 (Tồn tại căn nguyên thủy)
Căn nguyên thủy tồn tại nếu và chỉ nếu:

$$n = 1,\ 2,\ 4,\ p^k,\ 2p^k \text{ với } p \text{ là số nguyên tố lẻ.}$$

Bổ đề 4.8.7 (Bậc của lũy thừa)
Nếu $\text{ord}_n(a) = d$, thì:

$$\text{ord}_n(a^k) = \frac{d}{\gcd(k,d)}.$$

Định lý 4.8.8 (Đẳng thức Sophie Germain)

Với mọi $a, b \in \mathbb{Z}$, ta có:
$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab).$$

4.9 Chuẩn p-adic và định lý LTE

Định nghĩa 4.9.1 (Chuẩn p-adic)**.** Với p là số nguyên tố và $n \in \mathbb{Z}$, định nghĩa:

$$\nu_p(n) = \begin{cases} \max\{k \in \mathbb{N}_0 : p^k \mid n\} & \text{nếu } n \neq 0, \\ \infty & \text{nếu } n = 0. \end{cases}$$

Định lý 4.9.2 (Tính chất cơ bản của ν_p)

Với $a, b \in \mathbb{Z}$, ta có:

- $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$
- $\nu_p(a^k) = k\nu_p(a)$
- $\nu_p\left(\frac{a}{b}\right) = \nu_p(a) - \nu_p(b)$
- $\nu_p(a + b) \geq \min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}$

Dấu bằng xảy ra nếu $\nu_p(a) \neq \nu_p(b)$.

Định lý 4.9.3 (Định lý LTE cho hiệu — $p \mid x - y$)

Cho $x, y \in \mathbb{Z}$, p là số nguyên tố lẻ, $n \in \mathbb{Z}^+$, nếu $p \mid x - y$ và $p \nmid xy$, thì:

$$\nu_p(x^n - y^n) = \nu_p(x - y) + \nu_p(n).$$

Định lý 4.9.4 (Định lý LTE cho tổng — $p \mid x + y$)

Cho $p > 2$ là số nguyên tố, $x, y \in \mathbb{Z}$, $p \mid x + y$, và $p \nmid xy$. Khi đó với n lẻ:

$$\nu_p(x^n + y^n) = \nu_p(x + y) + \nu_p(n).$$

Định lý 4.9.5 (Định lý LTE cho $\nu_2(x^n - 1)$)

Với $x \in \mathbb{Z}$ lẻ và $n \in \mathbb{Z}^+$, ta có:

$$\nu_2(x^n - 1) = \nu_2(x - 1) + \nu_2(x + 1) + \nu_2(n) - 1.$$

Định lý 4.9.6 (Định lý Zsigmondy)

Nếu $a > b > 0$, $\gcd(a, b) = 1$, và $n > 1$, thì tồn tại ước nguyên tố của $a^n - b^n$ không chia $a^k - b^k$ với $k < n$, trừ các ngoại lệ:

$$(a, b, n) = (2, 1, 6), \text{ hoặc } a + b \text{ là lũy thừa của 2 và } n = 2.$$

4.10 Đa thức

Định lý 4.10.1 (Định lý nghiệm hữu tỉ)
Nếu $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ có nghiệm hữu tỉ $\frac{r}{s}$ với $\gcd(r, s) = 1$, thì:

$$r \mid a_0, \quad s \mid a_n.$$

Định lý 4.10.2 (Định lý chia đa thức)
Với $F(x), G(x) \in \mathbb{Z}[x]$, tồn tại duy nhất $Q(x), R(x) \in \mathbb{Z}[x]$ sao cho:

$$F(x) = G(x)Q(x) + R(x), \quad \deg R < \deg G.$$

Định lý 4.10.3 (Nội suy Lagrange)
Cho $n+1$ điểm phân biệt $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, tồn tại một đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, bậc không vượt quá n, sao cho $P(x_i) = y_i$ với mọi i. Cụ thể:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \ne i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Bổ đề 4.10.4 (Đồng dư đa thức theo hiệu)
Nếu $a \equiv b \pmod{a-b}$, thì với mọi đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, ta có:

$$P(a) \equiv P(b) \pmod{a-b}.$$

Định lý 4.10.5 (Định lý cơ bản của đại số — dạng thực)
Mọi đa thức hệ số thực bậc ít nhất 1 có thể phân tích thành tích của các đa thức bậc nhất hoặc bậc hai không khả quy trong $\mathbb{R}[x]$.

Định lý 4.10.6 (Định lý Lucas)
Cho số nguyên tố p và $m, n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$, viết:

$$m = m_0 + m_1 p + \cdots + m_k p^k, \quad n = n_0 + n_1 p + \cdots + n_k p^k,$$

thì:

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^{k} \binom{m_i}{n_i} \pmod{p}.$$

Định lý 4.10.7 (Đẳng thức Vandermonde)

Với $m, n, r \in \mathbb{Z}^+$, ta có:

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$$

4.11 Số dư bậc hai và ký hiệu Legendre

Định nghĩa 4.11.1 (Ký hiệu Legendre)**.** Với số nguyên tố lẻ p và $a \in \mathbb{Z}$, định nghĩa:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } p \mid a, \\ 1 & \text{nếu } a \not\equiv 0 \pmod p \text{ và } \exists x \in \mathbb{Z} : x^2 \equiv a \pmod p, \\ -1 & \text{nếu } a \text{ không là bình phương chính phương modulo } p. \end{cases}$$

Định lý 4.11.2 (Tính chất của ký hiệu Legendre)
Với $a, b \in \mathbb{Z}$ và số nguyên tố lẻ p, ta có:

- $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$
- $\left(\frac{a^2}{p}\right) = 1$ nếu $p \nmid a$
- $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$
- $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$

Định lý 4.11.3 (Tổng cấp số nhân modulo p)
Cho số nguyên tố p, và $a \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ sao cho $a^k \equiv 1 \pmod p$, ta có:

$$\sum_{i=0}^{k-1} a^i \equiv 0 \pmod p.$$

Đây là tổng của một cấp số nhân bậc k với công bội $a \not\equiv 1 \pmod p$ trong $\mathbb{F}_p$.

Định lý 4.11.4 (Tồn tại căn bậc hai của -1)
Với số nguyên tố lẻ p, ta có:

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } p \equiv 1 \pmod 4, \\ -1 & \text{nếu } p \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Do đó, -1 là số chính phương modulo p khi và chỉ khi $p \equiv 1 \pmod 4$.

Định lý 4.11.5 (Định luật tương hỗ bậc hai)
Với hai số nguyên tố lẻ phân biệt p, q, ta có:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

Hệ quả (Tổng Legendre bằng 0)

Với số nguyên tố lẻ p, ta có:

$$\sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a}{p}\right) = 0.$$

Định lý 4.11.6 (Ước lượng số dư bậc hai nhỏ nhất)

Với số nguyên tố $p > 3$, tồn tại số nguyên $r \in \{2, 3, \ldots, \lfloor\sqrt{p}\rfloor + 1\}$ sao cho r không là số dư bậc hai modulo p. Do đó:

$$r < \sqrt{p} + 1.$$

4.12 Căn nguyên thủy và bậc lũy thừa (phần nâng cao)

Bổ đề 4.12.1 (Tồn tại phần tử bậc d)
Nếu $d \mid p-1$, thì tồn tại $a \in \mathbb{Z}$ sao cho:

$$\mathrm{ord}_p(a) = d.$$

Có chính xác $\varphi(d)$ phần tử như vậy trong $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.

Định lý 4.12.2 (Tập các phần tử bậc d)
Nếu $d \mid p-1$, thì tập các phần tử bậc d trong $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ có đúng $\varphi(d)$ phần tử. Hợp của các tập này (khi $d \mid p-1$) chính là toàn bộ nhóm $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.

Định lý 4.12.3 (Các nghiệm của $x^d \equiv 1 \pmod p$)
Với $d \mid p-1$, phương trình $x^d \equiv 1 \pmod p$ có đúng d nghiệm phân biệt modulo p, tạo thành một nhóm con cyclic của $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.

Bổ đề 4.12.4 (Tính chia hết qua bậc)
Nếu $a^k \equiv 1 \pmod p$, thì $\mathrm{ord}_p(a) \mid k$.

Định lý 4.12.5 (Cấu trúc nhóm nhân modulo p)
Với số nguyên tố p, nhóm $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ là cyclic cấp $p-1$, tức là tồn tại $g \in \mathbb{Z}$ sao cho:

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times = \{g^1, g^2, \ldots, g^{p-1}\}.$$

Bổ đề 4.12.6 (Rút gọn đồng dư theo mũ)
Nếu $a^k \equiv b^k \pmod p$ và $\gcd(k, p-1) = 1$, thì:

$$a \equiv b \pmod p.$$

4.13 Bậc lũy thừa theo hợp số

Định nghĩa 4.13.1 (Hàm Carmichael)**.** Hàm Carmichael $\lambda(n)$ là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho:

$$a^{\lambda(n)} \equiv 1 \pmod{n} \quad \text{với mọi } a \in \mathbb{Z} \text{ sao cho } \gcd(a,n) = 1.$$

Nếu $n = \operatorname{lcm}(m_1, \ldots, m_k)$, thì:

$$\lambda(n) = \operatorname{lcm}(\lambda(m_1), \ldots, \lambda(m_k)).$$

Với số nguyên tố p, ta có:

$$\lambda(p^e) = \begin{cases} \varphi(p^e) & \text{nếu } p \text{ lẻ, hoặc } p = 2, e \leq 2, \\ \frac{1}{2}\varphi(p^e) & \text{nếu } p = 2, e \geq 3. \end{cases}$$

Định lý 4.13.2 (Bậc modulo hợp số)
Với $a \in \mathbb{Z}$, $\gcd(a,n) = 1$, ta có:

$$\operatorname{ord}_n(a) \mid \lambda(n), \quad \text{và } a^{\operatorname{ord}_n(a)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Bổ đề 4.13.3 (Bậc modulo tích các lũy thừa số nguyên tố)
Nếu $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$, và $\gcd(a,n) = 1$, thì:

$$\operatorname{ord}_n(a) = \operatorname{lcm}\big(\operatorname{ord}_{p_1^{e_1}}(a),\ \operatorname{ord}_{p_2^{e_2}}(a),\ \ldots,\ \operatorname{ord}_{p_k^{e_k}}(a)\big).$$

4.14 Thủ thuật, kỹ thuật và công cụ hiếm gặp

Định lý 4.14.1 (Trung bình số ước)
Gọi $d(k)$ là số ước dương của k. Khi đó:

$$\log n - 1 \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d(k) \leq \log n + 1.$$

Tức là trung bình số ước thỏa $\Theta(\log n)$.

Định lý 4.14.2 (Tổng tất cả các ước từ 1 đến n)
Ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(i) = \sum_{i=1}^{n} i \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor.$$

Đây là tổng các ước dương của tất cả các số từ 1 đến n.

Định lý 4.14.3 (Ma trận ước số $D_{i,j}$)
Xét bảng D cấp $n \times n$ với phần tử:

$$D_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } j \mid i, \\ 0 & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Tổng theo hàng thứ i là $\tau(i)$, tổng theo cột thứ j là $\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor$.

Định lý 4.14.4 (Tổng nghịch đảo ước số)
Với mọi $n \geq 1$, ta có:

$$\sum_{d \mid n} \frac{1}{d} \leq \log n + 1.$$

Định lý 4.14.5 (Giả thuyết Beal)
Nếu $A^x + B^y = C^z$ với $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{Z}_{>0}$, $x, y, z > 2$, thì $\gcd(A, B, C) > 1$.

Chương 5

Tiêu chuẩn Xếp hạng MOHS

Thang độ khó MOHS

Trong tài liệu này, Evan Chen cung cấp xếp hạng độ khó cá nhân cho các bài toán từ một số kỳ thi gần đây. Điều này đòi hỏi phải xác định một tiêu chí đánh giá độ khó một cách cẩn thận. Evan Chen gọi hệ thống này là **thang độ khó MOHS** (phát âm là "moez"); đôi khi anh cũng sử dụng đơn vị "M" (viết tắt của "Mohs").

Thang đo này tiến hành theo bước nhảy 5M, với mức thấp nhất là 0M và mức cao nhất là 60M. Tuy nhiên, trên thực tế, rất ít bài toán được xếp hạng cao hơn 50M, nên có thể coi nó chủ yếu là một thang đo từ 0M đến 50M, với một số bài toán thuộc dạng "vượt mức thông thường".

Bên dưới là bản dịch tiếng Việt từ tài liêu trên.

Xếp hạng dựa theo ý kiến cá nhân của Evan Chen

Mặc dù có rất nhiều điều đã được viết ra ở đây, nhưng cuối cùng, những xếp hạng này vẫn chỉ là ý kiến cá nhân của Evan Chen. Evan Chen không khẳng định rằng các xếp hạng này là khách quan hoặc phản ánh một sự thật tuyệt đối nào đó.

Lưu ý hài hước (Bảo hành xếp hạng). Các xếp hạng được cung cấp "nguyên trạng", không có bất kỳ bảo hành nào, dù rõ ràng hay ngụ ý, bao gồm nhưng không giới hạn ở các bảo hành về khả năng thương mại, sự phù hợp với một mục đích cụ thể, và việc không vi phạm quyền sở hữu trí tuệ. Trong mọi trường hợp, Evan không chịu trách nhiệm đối với bất kỳ khiếu nại, thiệt hại hoặc trách nhiệm pháp lý nào phát sinh từ, liên quan đến, hoặc có liên quan đến những xếp hạng này.

Hướng dẫn sử dụng

Cảnh báo quan trọng: Lạm dụng các xếp hạng này có thể gây hại cho bạn.

Ví dụ, nếu bạn quyết định không nghiêm túc thử sức với một số bài toán chỉ vì chúng được xếp hạng 40M trở lên, bạn có thể tự làm khó mình bằng cách tước đi cơ hội tiếp xúc với những bài toán khó. Nếu bạn không thường xuyên thử sức với các bài toán cấp độ IMO3 một cách nghiêm túc, bạn sẽ không bao giờ đạt đến mức độ có thể thực sự giải được chúng.

Vì lý do này, nghịch lý thay, đôi khi việc không biết bài toán khó đến mức nào lại tốt hơn, để bạn không vô thức có thái độ bỏ cuộc ngay từ đầu.

Các xếp hạng này được thiết kế để làm tài liệu tham khảo. Một cách sử dụng hợp lý là không xem xếp hạng bài toán cho đến khi bạn đã giải xong; điều này mô phỏng tốt nhất điều kiện thi đấu thực tế, khi bạn không biết độ khó của bài toán cho đến khi bạn giải được nó hoặc hết giờ và thấy những ai khác đã giải được. Bạn đã được cảnh báo. Chúc may mắn!

Ý nghĩa của các mức xếp hạng bài toán

Dưới đây là ý nghĩa của từng mức độ xếp hạng bài toán theo thang đo MOHS.

Định nghĩa (0M). Bài toán có mức 0M quá dễ để xuất hiện trong IMO. Thông thường, một học sinh giỏi trong lớp toán nâng cao có thể giải được bài toán này mà không cần đào tạo chuyên sâu về toán olympic.

Định nghĩa (5M). Đây là mức dễ nhất có thể xuất hiện trong IMO nhưng vẫn đáp ứng tiêu chuẩn của kỳ thi. Những bài toán này có thể được giải quyết rất nhanh.

Ví dụ:

- IMO 2019/1 về phương trình $f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$
- IMO 2017/1 về căn bậc hai $\sqrt{a_n}$ hoặc $a_n + 3$

Định nghĩa (10M). Đây là mức độ dành cho các bài toán IMO số 1 hoặc 4 mà hầu hết các thí sinh không gặp khó khăn khi giải. Tuy nhiên, vẫn cần có một số công việc để hoàn thành lời giải.

Ví dụ:

- IMO 2019/4 về $k! = (2^n - 1)\dots$
- IMO 2018/1 về $DE \parallel FG$

Định nghĩa (15M). Đây là mức thấp nhất của các bài toán có thể xuất hiện dưới dạng bài số 2 hoặc 5 của IMO, nhưng thường phù hợp hơn với bài số 1 hoặc 4. Những bài toán này thường có thể được giải quyết dễ dàng bởi các đội tuyển thuộc top 10 thế giới.

Ví dụ:

- IMO 2019/5 về bài toán "Ngân hàng Bath"
- IMO 2018/4 về "Amy/Ben và lưới 20×20"
- IMO 2017/4 về tiếp tuyến KT của Γ

Định nghĩa (20M). Những bài toán ở mức này có thể quá khó để xuất hiện dưới dạng IMO 1/4 nhưng vẫn chưa đạt đến độ khó trung bình của IMO 2/5.

Ví dụ:

- IMO 2018/5 về $a_1, a_2, \dots, a_n$ sao cho $\frac{a_1}{a_2} + \cdots + \frac{a_n}{a_1} \in \mathbb{Z}$

Định nghĩa (25M). Đây là mức độ phù hợp nhất với các bài toán IMO 2/5. Những bài toán này là thử thách thực sự ngay cả với các đội tuyển hàng đầu.

Ví dụ:

- IMO 2019/2 về "P_1, Q_1, P, Q đồng viên"

Định nghĩa (30M). Những bài toán ở mức này khó hơn một chút so với mức trung bình của IMO 2/5, nhưng vẫn chưa đủ khó để được sử dụng làm bài số 3 hoặc 6.

Ví dụ:

- IMO 2018/2 về phương trình $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$

Định nghĩa (35M). Đây là mức độ khó cao nhất dành cho các bài toán IMO 2/5 và cũng là mức độ dễ nhất của các bài toán IMO 3/6.

Ví dụ:

- IMO 2019/6 về "$DI \cap PQ$ trên phân giác góc ngoài $\angle A$"
- IMO 2017/5 về "Ngài Alex và các cầu thủ bóng đá"

Định nghĩa (40M)**.** Những bài toán ở mức này quá khó để xuất hiện ở IMO 2/5. Ngay cả các đội tuyển hàng đầu cũng không thể đạt điểm tuyệt đối với bài toán ở mức này.

Ví dụ:

- IMO 2019/3 về "mạng xã hội và xor tam giác"
- IMO 2017/2 về phương trình $f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy)$
- IMO 2017/3 về "thợ săn và con thỏ"
- IMO 2017/6 về "nội suy đa thức thuần nhất"

Định nghĩa (45M)**.** Bài toán thuộc hạng này thường chỉ có một số ít thí sinh giải được. Đây là mức độ của những bài toán IMO 3/6 khó hơn mức trung bình.

Ví dụ:

- IMO 2018/3 về "tam giác phản Pascal"
- IMO 2018/6 về "$\angle BXA + \angle DXC = 180°$"

Định nghĩa (50M)**.** Đây là mức khó nhất mà một bài toán vẫn có thể xuất hiện trong kỳ thi IMO hoặc bài kiểm tra chọn đội tuyển của các quốc gia hàng đầu.

Định nghĩa (55M)**.** Bài toán ở mức này quá dài dòng hoặc tốn nhiều thời gian để giải quyết trong một kỳ thi có giới hạn thời gian.

Định nghĩa (60M)**.** Bài toán ở mức này không thể giải trong vòng 4,5 giờ bởi học sinh trung học, nhưng vẫn có thể được giải quyết trong điều kiện không giới hạn thời gian. Ví dụ, một kết quả từ một nghiên cứu tổ hợp với chứng minh dài 15 trang có thể rơi vào hạng này.

Lưu ý: Evan Chen sử dụng bội số của 5 để tránh nhầm lẫn giữa số bài toán (ví dụ: bài toán số 6) với mức độ khó (ví dụ: 30M).

Từ điển chú giải

APMO 2015 Asian Pacific Mathematical Olympiad 2015 18, 26, 42, 44

BGR 2015 EGMO TST Bulgaria EGMO TST 2015 6

BGR 2015 MO Bulgaria MO 2015 6

BMO 2015 Balkan Mathematical Olympiad 2015 18, 26, 46

BMO 2015 SL Balkan Mathematical Olympiad Shortlist 2015 18, 19

BW 2015 Baltic Way 2015 19, 26, 48–52

BxMO 2015 Benelux Mathematical Olympiad 2015 20, 26, 53

CAN 2015 MO Canada National Olympiad 2015 6, 24, 32

CAN 2015 QRC Canada Qualifying Repêchage Competition 2015 6, 24, 30, 31

CHN 2015 GMO China National Girl Math Olympiad 2015 7

CHN 2015 MO China National Olympiad 2015 7

CHN 2015 NML China National Math League Olympiad 2015 7

CHN 2015 NMO China National Northern Mathematical Olympiad 2015 6, 7

CHN 2015 SEMO China National South East Mathematical Olympiad 2015 7

CHN 2015 TST China Team Selection Test 2015 7, 8

CHN 2015 WMO China National Western Mathematical Olympiad 2015 7

CPS 2015 Czech-Polish-Slovak Match 2015 20

EGMO 2015 European Girls' Mathematical Olympiad 2015 20, 26, 54

EMC 2015 European Mathematical Cup 2015 20, 26, 27, 56, 60

FRA 2015 RMM France Romania Masters 2015 8

FRA 2015 TST France Team Selection Test 2015 8, 24, 33

GBR 2015 MO Great Britain National Olympiad 2015 16

GBR 2015 TST Great Britain Team Selection Test 2015 16

GER 2015 MO Germany National Olympiad 2015 8

GER 2015 TST Germany Team Selection Test 2015 9

HUN 2015 TST Hungary Team Selection Test 2015 9

IMO 2015 International Mathematical Olympiad 2015 21, 22, 27, 28, 78, 79

IMO 2015 SL International Mathematical Olympiad Shortlist 2015 21, 22, 27, 28, 71, 73, 75, 76, 82, 84, 87

IND 2015 MO India National Olympiad 2015 9

IND 2015 TST India Team Selection Test 2015 9

IRN 2015 MO Iran National Olympiad 2015 10

IRN 2015 TST Iran Team Selection Test 2015 10

JPN 2015 EGMO TST Japan EGMO Team Selection Test 2015 11

JPN 2015 MO Japan National Olympiad 2015 10, 11

KOR 2015 MO Korea National Olympiad 2015 11

KOR 2015 TST Korea Team Selection Test 2015 11

MEMO 2015 Middle European Mathematical Olympiad 2015 20, 27, 61, 63, 64

NMC 2015 Nordic Mathematical Contest 2015 21, 27, 67

POL 2015 MO Polish National Olympiad 2015 11

RMM 2015 Romaniaan Masters of Mathematics 2015 21, 27, 68

ROM 2015 MO Rioplatense Mathematical Olympiad Level 3 2015 21

ROU 2015 JBMO TST Romania Junior Balkan MO Team Selection Test 2015 12

ROU 2015 MO Romania Olympiad 2015 12

ROU 2015 SOM Romania Stars Of Mathematics 2015 12

ROU 2015 TST Romania Team Selection Test 2015 12, 13

RUS 2015 MO All-Russia Olympiad 2015 14

RUS 2015 SMO Russia Saint Petersburg Olympiad 2015 14

RUS 2015 TMO Russia Tuymaada Olympiad 2015 13, 14

RUS 2015 TST Russia Team Selection Test 2015 14, 15

THA 2015 MO Thailand National Olympiad 2015 15, 16

THA 2015 TSTST Thailand TSTST 2015 16

TWN 2015 TST Taiwan Team Selection Test 2015 15

USA 2015 MO USA Juior Mathematical Olympiad 2015 16, 25, 35

USA 2015 MO USA Mathematical Olympiad 2015 17, 25, 37

USA 2015 TST USA Team Selection Test 2015 17, 25, 41

USA 2015 TSTST USA TSTST 2015 17, 25, 39, 40