Các bài toán thi Olympic Quốc Gia và Thế Giới

Ban biên soạn

Tạp chí Pi
Hội toán học Việt Nam

Ngày 19 tháng 3 năm 2025

Mục lục

Mở đầu

Lời nói đầu

Cuốn sách này được biên soạn dành cho giáo viên và học sinh luyện thi Đội tuyển Quốc gia Việt Nam dự thi IMO. Tài liệu tập hợp *các bài toán mới trong vòng 10 năm trở lại đây* từ các kỳ thi quan trọng như IMO Shortlist, các cuộc thi quốc tế uy tín như MEMO, BMO, APMO, EGMO, cũng như các kỳ thi quốc gia của 20 nước hàng đầu thế giới.

Mỗi bài toán được *xếp hạng theo thang độ khó MOHS*, đi kèm với *danh sách các định lý, bổ đề, hằng đẳng thức quan trọng* cần thiết cho lời giải. Các yếu tố này được liên kết trong một hệ thống đồ thị tri thức, giúp người đọc dễ dàng tra cứu và hiểu rõ mối liên hệ giữa các công cụ toán học. Ngoài ra, mỗi bài toán còn được gắn *thẻ thông tin chi tiết* về kỳ thi (năm, vòng), giúp thuận tiện cho việc tìm kiếm và tham khảo.

Để hỗ trợ người học, mỗi bài toán có một *mã định danh duy nhất* (UUID), kèm theo *gợi ý* khi gặp khó khăn. Nếu có nhiều cách giải, tất cả sẽ được trình bày các chuyên đề liên quan đến cách giải để giúp người đọc mở rộng tư duy.

Cấu trúc sách gồm bốn phần chính tương ứng với bốn lĩnh vực quan trọng của toán học thi đấu: Đại số, Tổ hợp, Hình học và Số học. Mỗi phần chia thành các chương theo từng chuyên đề cụ thể với các bài toán liên quan.

Đây là một cuốn sách *mở, luôn được cập nhật và có sẵn trên Internet* để bất kỳ ai cũng có thể truy cập. Người dùng có thể đóng góp bằng cách đề xuất bài toán mới hoặc thay đổi mức độ khó, gợi ý, hoặc thêm lời giải mới cho bài toán bằng cách gửi *một tệp duy nhất theo định dạng LaTeX quy định*. Việc đóng góp tập trung vào nội dung mà không cần lo lắng về định dạng, tổ chức, mã LaTeX hay quy trình xuất bản.

Toàn bộ quá trình này được giám sát bởi các nhân sự được ủy quyền từ Hội Toán Học Việt Nam và Tạp chí Pi, nhằm đảm bảo chất lượng và tính nhất quán của tài liệu.

Chúng tôi hy vọng tài liệu này sẽ trở thành một nguồn tham khảo hữu ích, giúp giáo viên và học sinh tiến xa hơn trong hành trình chinh phục các kỳ thi toán quốc tế.

Ban Biên soạn

Phần I

Lý thuyết chung

Chương 1

Khái niệm và Định nghĩa

Định nghĩa (Quan hệ thứ tự)**.** Một quan hệ thứ tự trên một tập hợp là một quan hệ $\leq$ thỏa mãn ba tính chất:

1. $a \leq a$.
2. Nếu $a \leq b$ và $b \leq a$ thì $a = b$.
3. Nếu $a \leq b$ và $b \leq c$ thì $a \leq c$.

Định nghĩa (Quan hệ thứ tự toàn phần)**.** Một quan hệ thứ tự được gọi là *toàn phần* nếu mọi cặp phần tử đều có thể so sánh được, tức là với mọi a và b, ta luôn có hoặc $a \leq b$ hoặc $b \leq a$.

Định nghĩa (Dãy số)**.** Một **dãy số** là một hàm được xác định cho mọi số nguyên không âm n, với $x_n = f(n)$. Số hạng thứ n, x_n, thường có thể được tính từ các số hạng trước đó theo một công thức xác điịnh bởi một hàm số F:

$$x_n = F(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots)$$

Định nghĩa (Dãy đơn điệu)**.** Một dãy số $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ được gọi là:

1. **tăng đơn điệu** nếu $a_k \leq a_{k+1}$ với mọi $k \geq 1$.
2. **giảm đơn điệu** nếu $a_k \geq a_{k+1}$ với mọi $k \geq 1$.
3. **tăng nghiêm ngặt** nếu $a_k < a_{k+1}$ với mọi $k \geq 1$.
4. **giảm nghiêm ngặt** nếu $a_k > a_{k+1}$ với mọi $k \geq 1$.

Trong bất kỳ trường hợp nào ở trên, dãy số $\{a_n\}$ được gọi là **đơn điệu**.

Định nghĩa (Chuẩn p-adic)**.** Trong số học, chuẩn p-adic (hoặc bậc p-adic) của một số nguyên n là số mũ của lũy thừa lớn nhất của số nguyên tố p mà n chia hết.

$$\nu_p(n) = \begin{cases} \max\{k \in \mathbb{N}_0 : p^k \mid n\} & \text{if } n \neq 0, \\ \infty & \text{if } n = 0, \end{cases}$$

Nói một cách khác, chuẩn p-adic là số mũ của p trong phân tích thừa số nguyên tố của n:

$$n = {p_1}^{\alpha_1} {p_2}^{\alpha_2} \ldots {p_k}^{\alpha_k} \implies \nu_{p_i}(n) = \alpha_i, \ \forall\ i = 1, 2, \ldots, k.$$

trong đó $p_1, p_2, \ldots, p_k$ là các số nguyên tố và $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ là các số nguyên dương.

Chương 2

Định lý và bổ đề

Định lý (Nguyên lý Chuồng Bồ Câu)

Nguyên lý Chuồng Bồ Câu (còn được gọi là nguyên lý hộp Dirichlet, nguyên lý Dirichlet hoặc nguyên lý hộp) phát biểu rằng nếu có nhiều hơn n con bồ câu được đặt vào n chuồng, thì ít nhất một chuồng phải chứa hai con bồ câu trở lên.

Một cách phát biểu khác là: trong một tập hợp gồm n số nguyên bất kỳ, luôn tồn tại hai số có cùng phần dư khi chia cho $n-1$.

Phiên bản mở rộng của nguyên lý Chuồng Bồ Câu phát biểu rằng nếu k đối tượng được đặt vào n hộp, thì ít nhất một hộp phải chứa tối thiểu $\lceil \frac{k}{n} \rceil$ đối tượng. Ở đây, $\lceil \cdot \rceil$ ký hiệu cho hàm trần.

Định lý (Nguyên lý Bất biến)

Xét một tập hợp trạng thái $S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ và một tập hợp các phép chuyển đổi $T \subseteq S \times S$. Một **bất biến** đối với T là một hàm $f: S \mapsto \mathbb{R}$ sao cho nếu $(s_i, s_j) \in T$ thì $f(s_i) = f(s_j)$.

Định lý (Nguyên lý Quy nạp)

Cho a là một số nguyên, và cho $P(n)$ là một mệnh đề (hoặc phát biểu) về n với mọi số nguyên $n \geq a$. **Nguyên lý quy nạp** là một phương pháp chứng minh rằng $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq a$ thông qua hai bước:

1. *Cơ sở quy nạp:* Chứng minh rằng $P(a)$ đúng.
2. *Bước quy nạp:* Giả sử rằng $P(k)$ đúng với một số nguyên $k \geq a$, và sử dụng giả thiết này để chứng minh rằng $P(k+1)$ cũng đúng.

Khi đó, ta có thể kết luận rằng $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq a$.

Định lý (Nguyên lý sắp thứ tự tốt trên tập hữu hạn)

Nguyên lý sắp thứ tự tốt phát biểu rằng mọi tập hợp có thứ tự toàn phần, hữu hạn và khác rỗng đều chứa *một phần tử lớn nhất* và *một phần tử nhỏ nhất*.

Định lý (Nguyên lý sắp thứ tự tốt trên tập hợp số nguyên dương)

Nguyên lý sắp thứ tự tốt phát biểu rằng mọi tập hợp khác rỗng của các số nguyên dương đều chứa *một phần tử nhỏ nhất*.

Định lý (Nguyên lý cực hạn)

Chúng ta sử dụng thuật ngữ *Nguyên lý cực hạn* để chỉ sự tồn tại của một phần tử nhỏ nhất hoặc lớn nhất trong một tập hợp.

Chúng ta thường kết hợp

1. *Nguyên lý cực hạn* với *Chứng minh phản chứng* để chứng minh sự tồn tại hoặc không tồn tại của một đối tượng, hoặc
2. *Nguyên lý cực hạn* với *Nguyên lý Chuồng Bồ Câu* để thiết lập điều kiện tồn tại hoặc để tăng hoặc giảm một đại lượng, ngoài ra
3. *Nguyên lý cực hạn* có thể được kết hợp với *Nguyên lý Quy nạp* để đơn giản hóa một chứng minh.

Định lý 2.0.1 (Bất đẳng thức Chuỗi Xen Kẽ)

Cho một dãy số giảm dần a_n với $a_n > 0$ và giới hạn $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, chuỗi xen kẽ:

$$S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

hội tụ và sai số của tổng vô hạn được ước lượng bởi:

$$\left| S - \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} a_k \right| \le a_{N+1}.$$

Chương 3

Hằng đẳng thức

Phần II

Lý thuyết số

Chương 4

Tính chia hết

4.1 Lý thuyết

Định lý (Định lý cơ bản của số học)

Mọi số tự nhiên lớn hơn 1 có thể viết một cách duy nhất (không kể sự sai khác về thứ tự các thừa số) thành tích các thừa số nguyên tố.

Mọi số tự nhiên n lớn hơn 1, có thể viết duy nhất dưới dạng:

$$n = {p_1}^{\alpha_1} {p_2}^{\alpha_2} \ldots {p_k}^{\alpha_k}$$

trong đó $p_1, p_2, \ldots, p_k$ là các số nguyên tố và $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ là các số nguyên dương.

4.2 Các ví dụ

Ví dụ (CHN 2015 TST1/D1/P2)

[**unrated**] Cho $a_1, a_2, a_3, \ldots$ là các số nguyên dương phân biệt, và $0 < c < \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng: Tồn tại vô hạn số nguyên dương k sao cho

$$[a_k, a_{k+1}] > ck.$$

Lời giải. (Cách 1)[1]Giả sử phản chứng rằng tồn tại một số nguyên dương K sao cho

$$\operatorname{lcm}(a_k, a_{k+1}) \leq ck$$

với mọi số nguyên $k \geq K$.

Khẳng định — Với mọi $k \geq K$, ta có

$$\frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_{k+1}} \geq \frac{3}{ck}.$$

Chứng minh. Do $a_k \neq a_{k+1}$, ta quan sát thấy rằng

$$a_k + a_{k+1} \geq 3\gcd(a_k, a_{k+1})$$

vì $\gcd(a_k, a_{k+1})$ chia hết cho $a_k + a_{k+1}$ và

$$a_k + a_{k+1} > 2\min\{a_k, a_{k+1}\} \geq 2\gcd(a_k, a_{k+1}).$$

Do đó,

$$\frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{a_k + a_{k+1}}{\gcd(a_k, a_{k+1}) \cdot \operatorname{lcm}(a_k, a_{k+1})} \geq \frac{3}{\operatorname{lcm}(a_k, a_{k+1})} \geq \frac{3}{ck}.$$

■

Cộng tổng từ $k = K$ đến $k = N$, với N tùy ý, ta có

$$\sum_{i=K}^{N} \left(\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{i+1}} \right) \geq \frac{3}{c} \left(\frac{1}{K} + \cdots + \frac{1}{N} \right).$$

Do $a_K, \ldots, a_{N+1}$ đều là các số khác nhau, nên trong tổng bên trái, mỗi số hạng $\frac{1}{j}$ xuất hiện nhiều nhất hai lần. Từ đó, ta suy ra:

$$\sum_{i=K}^{N} \left(\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{i+1}} \right) \leq \frac{2}{1} + \cdots + \frac{2}{N}.$$

Kết hợp hai bất đẳng thức trên và biến đổi lại, ta có:

$$\frac{2}{1} + \cdots + \frac{2}{K} \geq \left(\frac{3}{c} - 2 \right) \left(\frac{1}{K} + \cdots + \frac{1}{N} \right).$$

Vì $\frac{3}{c} > 2$, vế trái là một giá trị cố định nhưng vế phải không bị chặn khi $N \to \infty$, dẫn đến mâu thuẫn. □

[1] Lời giải của TheUltimate123.

Ví dụ (CHN 2015 TST1/D2/P2)

[**unrated**] Cho trước một số nguyên dương n. Chứng minh rằng: Với mọi số nguyên dương a, b, c không vượt quá $3n^2 + 4n$, tồn tại các số nguyên x, y, z có giá trị tuyệt đối không vượt quá $2n$ và không đồng thời bằng 0, sao cho

$$ax + by + cz = 0.$$

Lời giải. (Cách 1)[2]Gọi

$$A = \{ax + by + cz \mid x, y, z \in \mathbb{Z} \cap [-n, n]\}.$$

Khi đó,

$$\min A = -3n^3 - 4n^2, \quad \max A = 3n^3 + 4n^2.$$

Do đó, khoảng $[\min A, \max A]$ chứa

$$3n^3 + 4n^2 - (-3n^3 - 4n^2) + 1 = 6n^3 + 8n^2 + 1 < (2n+1)^3 \text{ số nguyên.}$$

Theo Nguyên lý Chuồng Bồ Câu, phải tồn tại hai bộ giá trị khác biệt

$$(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{Z} \cap [-n, n])^3 \text{sao cho } ax + by + cz = ax' + by' + cz'.$$

tức là

$$a(x - x') + b(y - y') + c(z - z') = 0.$$

Vì $x - x', y - y', z - z' \in [-2n, 2n]$ và không đồng thời bằng 0, ta có điều phải chứng minh. $\square$

Ví dụ (IMO 2023/P1)

[**5M**] Xác định tất cả các số nguyên hợp dương n thỏa mãn tính chất sau: nếu các ước số dương của n là $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, thì $d_i \mid (d_{i+1} + d_{i+2})$ với mọi $1 \le i \le k - 2$.

Lời giải. (Cách 1)[3]Theo Định lý cơ bản của số học, dễ thấy rằng $n = p^r$ với $r \ge 2$ thỏa mãn điều kiện vì

$$d_i = p^{i-1}, \text{ với } 1 \le i \le k = r + 1 \text{ và rõ ràng } p^{i-1} \mid (p^i + p^{i+1}).$$

Bây giờ, giả sử tồn tại một số nguyên n thỏa mãn điều kiện đã cho và có ít nhất hai thừa số nguyên tố phân biệt, gọi là p và q, với $p < q$ là hai thừa số nguyên tố nhỏ nhất của n.

Tồn tại số nguyên j sao cho:

$$d_1 = 1, d_2 = p, \ldots, d_j = p^{j-1}, d_{j+1} = p^j, d_{j+2} = q.$$

Ta cũng có:

$$d_{k-j-1} = \frac{n}{q}, \quad d_{k-j} = \frac{n}{p^j}, \quad d_{k-j+1} = \frac{n}{p^{j-1}}, \ldots, d_{k-1} = \frac{n}{p}, \quad d_k = n.$$

Từ điều kiện đề bài:

$$d_{k-j-1} \mid (d_{k-i} + d_{k-j+1}) \implies \frac{n}{q} \mid \left(\frac{n}{p^j} + \frac{n}{p^{j-1}}\right) \quad (1)$$

Suy ra $p^j \mid q(p+1)$ dẫn đến $p \mid q$, mâu thuẫn với $p \neq q$. Vậy n phải là lũy thừa của một số nguyên tố. $\square$

[2] Lời giải của TheUltimate123.

Lời giải. (Cách 2)[3] Vì $d_i d_{k+1-i} = n$, ta có:

$$d_{k-i-1} \mid d_{k-i} + d_{k-i+1} \Longleftrightarrow \frac{n}{d_{i+2}} \mid \left(\frac{n}{d_{i+1}} + \frac{n}{d_i}\right).$$

Nhân hai vế với $d_i d_{i+1} d_{i+2}$ và đơn giản hóa:

$$d_i d_{i+1} \mid d_i d_{i+2} + d_{i+1} d_{i+2} \implies d_i \mid d_{i+1} d_{i+2} \quad (2)$$

Áp dụng điều kiện đề bài, ta có:

$$d_i \mid d_{i+1}(d_{i+1} + d_{i+2}) = d_{i+1}^2 + d_{i+1} d_{i+2}.$$

Kết hợp với (2), suy ra $d_i \mid d_{i+1}^2$ với mọi $1 \le i \le k-2$.

Giả sử rằng $d_2 = p$ là ước số nguyên tố nhỏ nhất của n. Ta chứng minh bằng Nguyên lý Quy nạp:

Khẳng định — $p \mid d_i,\ \forall\ 2 \le i \le k-1$.

Chứng minh. Thật vậy, trường hợp $d_2 = p$ là hiển nhiên. Giả sử $p \mid d_j$ với $2 \le j \le k-2$, khi đó:

$$p \mid d_j \mid {d_{j+1}}^2 \implies p \mid d_{j+1} \text{ (vì } p \text{ nguyên tố).}$$

■

Từ đó suy ra n là lũy thừa của một số nguyên tố vì nếu tồn tại một số nguyên tố $q \ne p$ mà cũng là ước số của n thì $p \mid q$ và đó là điều vô lý. □

Lời giải. (Cách 3)[3]

Khẳng định — $d_i \mid d_{i+1}$ với mọi $1 \le i \le k-1$.

Chứng minh. Ta dùng Nguyên lý Quy nạp để chứng minh.

Bướcc cơ sở: $d_1 = 1$ là hiển nhiên. Giả sử $d_{i-1} \mid d_i$. Từ điều kiện đề bài:

$$d_{i-1} \mid d_i + d_{i+1} \Rightarrow d_{i-1} \mid d_{i+1}.$$

Ta xét:

$$d_{k-i} = \frac{n}{d_{i+1}}, \quad d_{k-i+1} = \frac{n}{d_i}, \quad d_{k-i+2} = \frac{n}{d_{i-1}}.$$

Ta suy ra:

$$\frac{d_{k-i+1} + d_{k-i+2}}{d_{k-i}} = \frac{\frac{n}{d_i} + \frac{n}{d_{i-1}}}{\frac{n}{d_{i+1}}} = \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{d_{i+1}}{d_{i-1}} \in \mathbb{Z}.$$

suy ra $d_i \mid d_{i+1}$, hoàn thành chứng minh. ■

Dựa vào Mệnh đề đã chứng minh, n không thể có hai thừa số nguyên tố khác nhau vì thừa số nhỏ nhất sẽ chia hết thừa số còn lại. Do đó, n phải là lũy thừa của một số nguyên tố, và các lũy thừa của số nguyên tố đều thỏa mãn điều kiện của bài toán. □

[3] Shortlist 2023 with solutions.

4.3 Bài tập

Chương 5

Cơ bản về số học đồng dư

5.1 Lý thuyết

5.2 Các ví dụ

Ví dụ (IMO 2015/N1)
[**unrated**] Xác định tất cả các số nguyên dương M sao cho dãy số $a_0, a_1, a_2, \ldots$ được xác định bởi

$$a_0 = M + \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad a_{k+1} = a_k \lfloor a_k \rfloor \quad \text{với } k = 0, 1, 2, \ldots$$

chứa ít nhất một số nguyên.

Lời giải. [1](Cách 1) Xét $b_k = 2a_k$ với mọi $k \geq 0$. Khi đó,

$$b_{k+1} = 2a_{k+1} = 2a_k \lfloor a_k \rfloor = b_k \lfloor \frac{b_k}{2} \rfloor.$$

Vì b_0 là một số nguyên, suy ra b_k là một số nguyên với mọi $k \geq 0$.

Giả sử rằng dãy $a_0, a_1, a_2, \ldots$ không chứa số nguyên nào. Khi đó, b_k phải là số nguyên lẻ với mọi $k \geq 0$, do đó

$$b_{k+1} = b_k \lfloor b_k/2 \rfloor = \frac{b_k(b_k - 1)}{2}. \tag{1}$$

Chúng ta cung cấp một cách khác để chứng minh rằng $M = 1$ một khi đã đạt đến phương trình (1). Chúng ta khẳng định rằng

Khẳng định — $b_k \equiv 3 \pmod{2^m}$ với mọi $k \geq 0$ và $m \geq 1$.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng Nguyên lý Quy nạp theo m.

Bước cơ sở: $b_k \equiv 3 \pmod 2$ đúng với mọi $k \geq 0$ vì b_k là số lẻ.

Bước quy nạp: Giả sử rằng $b_k \equiv 3 \pmod{2^m}$ với mọi $k \geq 0$. Do đó, tồn tại một số nguyên d_k sao cho

$$b_k = 2^m d_k + 3.$$

Khi đó, ta có

$$3 \equiv b_{k+1} \equiv (2^m d_k + 3)(2^{m-1} d_k + 1) \equiv 3 \cdot 2^{m-1} d_k + 3 \pmod{2^{m+1}},$$

suy ra d_k phải là số chẵn. Điều này dẫn đến $b_k \equiv 3 \pmod{2^{m+1}}$, như yêu cầu. ■

Từ khẳng định trên, ta có $b_k = 3$ với mọi $k \geq 0$, suy ra $M = 1$. □

Ví dụ (IMO 2015/P2)
[**30M**] Hãy tìm tất cả các bộ số nguyên dương (a, b, c) sao cho mỗi số trong các số:

$$ab - c, bc - a, ca - b$$

là lũy thừa của 2.

[1] Shortlist 2015 with solutions.

Lời giải. [2](Cách 1) Các nghiệm của (a, b, c) là $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 3)$, $(2, 6, 11)$, $(3, 5, 7)$ và các hoán vị của chúng.

Trong toàn bộ chứng minh, giả sử rằng $a \leq b \leq c$, do đó ta có

$$ab - c = 2^m, \quad ca - b = 2^n, \quad bc - a = 2^p,$$

với $m \leq n \leq p$. Lưu ý rằng $a > 1$, bởi nếu không thì $b - c = 2^m$, điều này là không thể. Do đó,

$$2^n = ac - b \geq (a-1)c \geq 2,$$

nghĩa là n và p là các số dương.

Quan sát rằng nếu $a = b \geq 3$, ta có $a(c-1) = 2^n$, do đó a và $c-1$ đều là (số chẵn và) lũy thừa của 2. Khi đó c là số lẻ và $a^2 - c = 2^m = 1$. Suy ra $c + 1 = a^2$ cũng là một lũy thừa của 2, điều này dẫn đến $c = 3$. Tuy nhiên, $a = b = c = 3$ không phải là một nghiệm; do đó, trường hợp $a = b \geq 3$ là không khả thi.

Ta xét các trường hợp còn lại như sau.

Trường hợp 1: $a = 2$ Ta có

$$2b - c = 2^m, \quad 2c - b = 2^n, \quad bc - 2 = 2^p.$$

Từ phương trình thứ hai, b là số chẵn. Từ phương trình thứ ba, nếu $p = 1$, thì $b = c = 2$; nếu $p > 1$, thì c là số lẻ, điều này dẫn đến $m = 0$.

Khi đó, ta có

$$3b = 2^n + 2 \quad (\text{nên } n \geq 2), \quad 3c = 2^{n+1} + 1,$$

và

$$(2^{n-1} + 1)(2^{n+1} + 1) = 9(2^{p-1} + 1).$$

Từ đó suy ra

$$1 \equiv 9 \pmod{2^{n-1}} \Rightarrow n \leq 4.$$

Suy ra $n = 2$ hoặc $n = 4$, và (b, c) có thể là $(2, 3)$ hoặc $(6, 11)$. Do đó, các nghiệm của (a, b, c) là $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 3)$ hoặc $(2, 6, 11)$.

Trường hợp 2: $3 \leq a < b \leq c$ Vì $(a-1)c \leq 2^n$, ta có $c \leq 2^{n-1}$. Do đó,

$$b + a < 2c \leq \frac{2^{n+1}}{a-1} \leq 2^n, \; b - a < c \leq 2^{n-1}.$$

Từ đó suy ra $b - a$ không chia hết cho 2^{n-1}, và $b + a$ không chia hết cho 2^{n-1} khi $a \geq 5$.

Cộng và trừ $ac - b = 2^n$ và $bc - a = 2^p$, ta thu được

$$(c-1)(b+a) = 2^p + 2^n, \; (c+1)(b-a) = 2^p - 2^n.$$

Từ phương trình thứ hai, $c + 1$ chia hết cho 4. Do đó, $c - 1$ không chia hết cho 4, điều này dẫn đến $b + a < 2^n$ là một bội của 2^{n-1}. Do đó, $a \leq 4$ và $b + a = 2^{n-1}$.

Trường hợp 2a: Xét $a = 3$ Khi đó ta có

$$3b - c = 2^m, \quad 3c - b = 2^n, \quad b = 2^{n-1} - 3.$$

Suy ra

$$2^{n-1} - 3 = 3 \cdot 2^{m-3} + 2^{n-3} \implies 2^{n-3} = 2^{m-3} + 1.$$

Từ đó, ta suy ra $m = 3$, $n = 4$, $b = 5$ và $c = 7$.

Trường hợp 2b: Xét $a = 4$ Ta có $4c - b = 2^n$ và $b = 2^{n-1} - 4$, từ đó

$$c = 3 \cdot 2^{n-3} - 1.$$

Tuy nhiên, điều kiện $b \leq c$ dẫn đến $2^{n-3} \leq 3$, và $a < b$ dẫn đến $2^{n-3} > 2$. Điều này là không thể, do đó không tồn tại nghiệm với $a = 4$.

Vậy ta thu được $(a, b, c) = (3, 5, 7)$ là nghiệm duy nhất với $3 \leq a < b \leq c$. □

[2] Lời giải chính thức.

5.3 Bài tập

Chương 6

Các hàm số học

6.1 Lý thuyết

Định nghĩa (Hàm số học)**.** $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ là một hàm số học.

Định nghĩa (Phần nguyên)**.** $\lfloor \circ \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ là một hàm thỏa mãn điều kiện $\lfloor x \rfloor = n$, trong đó $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq x < n+1$. $\lfloor x \rfloor$ được gọi là phần nguyên, hàm sàn, hoặc sàn của x.

Định nghĩa (Hàm Trần)**.** $\lceil \circ \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ là một hàm thỏa mãn điều kiện $\lceil x \rceil = n$, trong đó $n \in \mathbb{Z}$, $n-1 \leq x \leq n$. $\lceil x \rceil$ được gọi là hàm trần, hoặc trần của x.

Định nghĩa (Phần thập phân)**.** $\{x\} : \mathbb{R} \to [0,1)$ là một hàm thỏa mãn điều kiện $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. $\{x\}$ được gọi là phần thập phân của x.

Định nghĩa (Hàm cộng tính)**.** Một hàm số học $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ được gọi là **cộng tính** nếu thỏa mãn:

$$f(mn) = f(m) + f(n), \quad \forall m, n \in \mathbb{N},\ (m,n) = 1.$$

Định nghĩa (Hàm nhân tính)**.** Một hàm số học $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ được gọi là **nhân tính** nếu thỏa mãn:

$$f(mn) = f(m)f(n), \quad \forall m, n \in \mathbb{N},\ (m,n) = 1.$$

Định nghĩa (Hàm số ước số dương)**.** Với $n \in \mathbb{Z}^+$, $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, $\tau(n) = (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)$.

Định lý 6.1.1 (Bổ đề Bertrand)
Với mọi số nguyên $n \geq 1$, luôn tồn tại một số nguyên tố p thỏa mãn:

$$n < p < 2n.$$

6.2 Các ví dụ

Ví dụ (CHN 2015 TST3/D2/P3)

[**unrated**] Với mọi số tự nhiên n, định nghĩa:

$$f(n) = \tau(n!) - \tau((n-1)!),$$

trong đó $\tau(a)$ là số ước số dương của a.

Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số n là hợp số sao cho với mọi số tự nhiên $m < n$, ta có:

$$f(m) < f(n).$$

Lời giải. (Cách 1)[1]Cho p là một số nguyên tố lẻ. Theo Bổ đề Bertrand, tồn tại số nguyên tố giữa p và $2p$. Giả sử q là số nguyên tố lớn nhất trong các số nguyên tố giữa p và $2p$. Ta chứng minh khẳng định sau

Khẳng định — $f(2p) > f(q)$.

Chứng minh. Ta có:

$$\begin{aligned} f(2p) &= \tau((2p)!) - \tau((2p-1)!) = \frac{3}{2}\cdot\tau(2(2p-1)!) - \tau((2p-1)!) \\ &= 3\tau\left(\frac{2(2p-1)!}{q}\right) - 2\tau\left(\frac{(2p-1)!}{q}\right) > \tau\left(\frac{(2p-1)!}{q}\right) \geq \tau((q-1)!) = f(q). \end{aligned}$$

■

Gọi n là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $n \leq 2p$ và $f(n)$ đạt giá trị lớn nhất trong dãy $f(1), f(2), \ldots, f(2p)$.

Nếu $n \leq q$, thì $f(n) \leq \tau((q-1)!) = f(q) < f(2p)$, mâu thuẫn. Do đó, $n > q$, và từ định nghĩa của q, ta suy ra n là hợp số và $f(n) > f(m)$ với mọi $m < n$.

Hơn nữa, vì $n \in [p+1, 2p+1]$, ta có vô hạn giá trị n khi p chạy qua tất cả các số nguyên tố lẻ. □

Ví dụ (IMO 2015/N1)

[**unrated**] Xác định tất cả các số nguyên dương M sao cho dãy số $a_0, a_1, a_2, \ldots$ được xác định bởi

$$a_0 = M + \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad a_{k+1} = a_k\lfloor a_k \rfloor \quad \text{với } k = 0, 1, 2, \ldots$$

chứa ít nhất một số nguyên.

Lời giải. [2](Cách 2) Xét $b_k = 2a_k$ với mọi $k \geq 0$. Khi đó,

$$b_{k+1} = 2a_{k+1} = 2a_k\lfloor a_k \rfloor = b_k\lfloor \frac{b_k}{2} \rfloor.$$

Vì b_0 là một số nguyên, suy ra b_k là một số nguyên với mọi $k \geq 0$.

[1]Lời giải của chirita.andrei.

Giả sử rằng dãy $a_0, a_1, a_2, \ldots$ không chứa số nguyên nào. Khi đó, b_k phải là số nguyên lẻ với mọi $k \geq 0$, do đó

$$b_{k+1} = b_k \lfloor b_k/2 \rfloor = \frac{b_k(b_k - 1)}{2}. \tag{1}$$

Từ đó, ta có

$$b_{k+1} - 3 = \frac{b_k(b_k - 1)}{2} - 3 = \frac{(b_k - 3)(b_k + 2)}{2}, \text{ với mọi } k \geq 0. \tag{2}$$

Giả sử rằng $b_0 - 3 \neq 0$. Khi đó, phương trình (2) cho ta $b_k - 3 \neq 0$ với mọi $k \geq 0$.

Với mỗi $k \geq 0$, định nghĩa c_k là lũy thừa lớn nhất của 2 chia hết cho $b_k - 3$. Vì $b_k - 3$ là số chẵn với mọi $k \geq 0$, số c_k luôn dương.

Lưu ý rằng $b_k + 2$ là một số nguyên lẻ. Do đó, từ phương trình (2), ta có

$$c_{k+1} = c_k - 1.$$

Như vậy, dãy $c_0, c_1, c_2, \ldots$ của các số nguyên dương là một dãy **giảm nghiêm ngặt**, mâu thuẫn với Nguyên lý cực hạn cho tập hợp các số nguyên dương.

Vậy, ta phải có $b_0 - 3 \leq 0$, suy ra $M = 1$.

Với $M = 1$, có thể kiểm tra rằng dãy số là hằng với $a_k = \frac{3}{2}$ với mọi $k \geq 0$. Do đó, đáp án là $M \geq 2$. □

[2]Shortlist 2015 with solutions.

6.3 Bài tập

Chương 7

Phương trình Diophantine

Chương 8

Số học đồng dư nâng cao

Chương 9

Luỹ thừa lớn nhất

9.1 Lý thuyết

Định nghĩa (Chuẩn p-adic)**.** Trong số học, chuẩn p-adic (hoặc bậc p-adic) của một số nguyên n là số mũ của lũy thừa lớn nhất của số nguyên tố p mà n chia hết.

$$\nu_p(n) = \begin{cases} \max\{k \in \mathbb{N}_0 : p^k \mid n\} & \text{if } n \neq 0, \\ \infty & \text{if } n = 0, \end{cases}$$

Nói một cách khác, chuẩn p-adic là số mũ của p trong phân tích thừa số nguyên tố của n:

$$n = {p_1}^{\alpha_1} {p_2}^{\alpha_2} \dots {p_k}^{\alpha_k} \implies \nu_{p_i}(n) = \alpha_i,\ \forall\ i = 1, 2, \dots, k.$$

trong đó $p_1, p_2, \dots, p_k$ là các số nguyên tố và $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ là các số nguyên dương.

Định lý (Định lý Kummer)

Cho p là một số nguyên tố và m, n là hai số nguyên dương. Khi đó, số mũ của p trong ước số nguyên tố của hệ số nhị thức $\binom{m}{n}$ được xác định bởi:

$$v_p\left(\binom{m}{n}\right) = \frac{S_p(m) - S_p(n) - S_p(m-n)}{p-1},$$

trong đó $S_p(x)$ là tổng các chữ số trong biểu diễn cơ số p của x.

9.2 Các ví dụ

Ví dụ (CHN 2015 MO/P4)

[**unrated**] Xác định tất cả các số nguyên k sao cho tồn tại vô hạn số nguyên dương n không thỏa mãn:

$$n + k \mid \binom{2n}{n}.$$

Lời giải. (Cách 1)[1]

Ta xét ba trường hợp sau.

Trường hợp 1: Nếu $k = 0$, ta có thể chọn $n = 2^\alpha$ với mọi số nguyên dương $\alpha \geq 2$. Theo định lý Kummer, ta có

$$v_2\left(\binom{2n}{n}\right) = 1 < \alpha = v_2(2^\alpha) = v_2(n+k).$$

Trường hợp 2: Nếu $k \neq 0, 1$, với mọi số nguyên dương $\alpha \geq 3 + \log_2 |k|$, ta có thể chọn $n = 2^\alpha - k$. Trong hệ cơ số p, n có nhiều nhất α chữ số, với chữ số ít quan trọng nhất bằng 0. Do đó, có nhiều nhất $\alpha - 1$ lần nhớ khi cộng n vào chính nó[2], và do đó theo định lý Kummer, ta có

$$v_2\left(\binom{2n}{n}\right) \leq \alpha - 1 < \alpha = v_2(n+k).$$

Trường hợp 3: Nếu $k = 1$, ta có

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

là một số nguyên, do đó $(n+1) \mid \binom{2n}{n}$ với mọi n.

Vậy, tất cả các số nguyên $k \neq 1$ đều thỏa mãn điều kiện.

(*Lưu ý rằng:* $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ *là một số Catalan.*) □

Ví dụ (CHN 2015 TST3/D1/P3)

[**unrated**] Cho a, b là hai số nguyên sao cho ước chung lớn nhất của chúng có ít nhất hai thừa số nguyên tố. Đặt

$$S = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \equiv a \pmod{b}\}$$

và gọi $y \in S$ là *không thể phân tích* nếu nó không thể được biểu diễn dưới dạng tích của hai hoặc nhiều phần tử của S (không nhất thiết phải khác nhau). Chứng minh rằng tồn tại một số t sao cho mọi phần tử của S có thể được biểu diễn dưới dạng tích của nhiều nhất t phần tử không thể phân tích.

Lời giải. (Cách 1)[3]Gọi $g = \gcd(a, b)$, khi đó ta có:

$$a = ga', \quad b = gb'.$$

Xét hai trường hợp:

[1] Lời giải của yunxiu.
[2] Divisors of the middle binomial coefficient.

Trường hợp 1: $\gcd(b', g) > 1$ Chọn một số nguyên tố p sao cho $p \mid b'$ và $p \mid g$. Khi đó, $p \nmid a'$, suy ra:

$$\nu_p(a) = \nu_p(g) < \nu_p(b).$$

Với mọi $x \in S$, ta có $\nu_p(x) = \nu_p(a)$, tức là mọi x đều có cùng số mũ tại p. Do đó, không thể phân tích thành tích của hai số khác trong S, nên mọi x trong trường hợp này là không thể phân tích. Trường hợp này là hiển nhiên.

Trường hợp 2: $\gcd(b', g) = 1$ Chọn hai số nguyên tố p, q sao cho $p, q \mid g$. Xét một phần tử $x \in S$:

- Nếu x không thể phân tích, ta hoàn thành chứng minh.
- Nếu x có thể phân tích, viết $x = uv$ với $u, v \in S$.

Ta sử dụng phép biến đổi:

$$(u, v) \to \left(p^{\varphi(b')}u, \frac{v}{p^{\varphi(b')}}\right).$$

Lý do phép biến đổi hợp lệ là do:

1. Không thay đổi phần dư modulo b': Vì $p^{\varphi(b')} \equiv 1 \pmod{b'}$.
2. Không thay đổi phần dư modulo b: Vì chỉ làm tăng số mũ của thừa số nguyên tố trong g, không ảnh hưởng đến $\pmod{b}$.

Lặp lại quá trình này đến khi:

$$\nu_p(v) \leq \varphi(b') + \nu_p(g), \quad \nu_q(u) \leq \varphi(b') + \nu_q(g).$$

Vì mọi phép phân tích tiếp theo của u, v yêu cầu mỗi thừa số phải chia hết cho $p^{\nu_p(g)}$ và $q^{\nu_q(g)}$, số thừa số bị chặn bởi:

$$t = \frac{\varphi(b') + \nu_p(g)}{\nu_p(g)} + \frac{\varphi(b') + \nu_q(g)}{\nu_q(g)}.$$

Do t là số hữu hạn, mọi phần tử của S có thể được phân tích thành nhiều nhất t phần tử không thể phân tích, chứng minh được hoàn tất. □

Ví dụ (IMO 2015/P2)

[**30M**] Hãy tìm tất cả các bộ số nguyên dương (a, b, c) sao cho mỗi số trong các số:

$$ab - c, bc - a, ca - b$$

là lũy thừa của 2.

Lời giải. [4](Cách 2) Chúng ta sẽ chứng minh rằng các nghiệm duy nhất là $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 3)$, $(2, 6, 11)$ và $(3, 5, 7)$, cùng với các hoán vị của chúng.

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $a \geq b \geq c > 1$, khi đó

$$ab - c \geq ca - b \geq bc - a.$$

Ta xét các trường hợp sau:

[3] Lời giải của MarkBcc168.

Trường hợp 1: Nếu a là số chẵn, thì

$$ca - b = \gcd(ab - c, ca - b) \le \gcd(ab - c, a(ca - b) + ab - c) = \gcd\left(ab - c, c(a^2 - 1)\right).$$

Vì $a^2 - 1$ là số lẻ, ta suy ra $ca - b \le c$. Điều này dẫn đến $a = b = c = 2$.

Trường hợp 2: Nếu a, b, c đều là số lẻ, thì $a > b > c > 1$. Khi đó, cũng như trên:

$$ca - b \le \gcd(ab - c, c(a^2 - 1)) \le 2^{\nu_2(a^2-1)} \le 2a + 2 \le 3a - b.$$

Do đó, $c = 3$ và $a = b + 2$. Vì $3a - b = ca - b \ge 2(bc - a) = 6b - 2a$, ta suy ra $a = 7$ và $b = 5$.

Trường hợp 3: Nếu a là số lẻ và b, c là số chẵn, thì

$$\begin{aligned} & bc - a = 1 \implies bc^2 - b - c = ca - b, \\ \implies\ & c^3 - b - c = (1 - c^2)(ab - c) + a(\underbrace{bc^2 - b - c}_{=ca-b}) + (ca - b), \\ \implies\ & \gcd(ab - c, ca - b) = \gcd(ab - c, c^3 - b - c,) \\ \implies\ & bc^2 - b - c = ca - b = \gcd(ab - c, ca - b) = \gcd(ab - c, c^3 - b - c). \end{aligned}$$

Khi đó, ta xét hai trường hợp con sau:

Trường hợp 3a: $c^3 - b - c \neq 0$, thì biểu thức trên dẫn đến

$$|c^3 - b - c| \ge bc^2 - b - c,\ b \ge c > 1 \implies b = c \implies a = c^2 - 1.$$

Cuối cùng, $ab - c = c(c^2 - 2)$ là một lũy thừa của 2, dẫn đến $b = c = 2$, nên $a = 3$.

Trường hợp 3b: $c^3 - b - c = 0$, tức là $c^3 = c$. Từ

$$bc - a = 1 \implies a = c^4 - c^2 - 1 \implies ca - b = c^5 - 2c^3 = c^3(c^2 - 2).$$

Vì đây là một lũy thừa của 2, ta suy ra $c = 2$. Khi đó, $a = 11$ và $b = 6$.

Vậy ta đã xét hết tất cả các trường hợp, hoàn tất chứng minh. □

Ví dụ (IMO 2023/P1)

[**5M**] Xác định tất cả các số nguyên hợp dương n thỏa mãn tính chất sau: nếu các ước số dương của n là $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, thì $d_i \mid (d_{i+1} + d_{i+2})$ với mọi $1 \le i \le k - 2$.

Lời giải. (Cách 4)[4] Dễ thấy rằng $n = p^r$ với $r \ge 2$ thỏa mãn điều kiện vì

$$d_i = p^{i-1},\ \text{với } 1 \le i \le k = r + 1 \text{ và rõ ràng } p^{i-1} \mid (p^i + p^{i+1}).$$

Bây giờ, giả sử tồn tại một số nguyên n thỏa mãn điều kiện đã cho và có ít nhất hai thừa số nguyên tố phân biệt, gọi là p và q, với $p < q$ là hai thừa số nguyên tố nhỏ nhất của n.

Tồn tại số nguyên j sao cho:

$$d_1 = 1, d_2 = p, \ldots, d_j = p^{j-1}, d_{j+1} = p^j, d_{j+2} = q.$$

Ta cũng có:

$$d_{k-j-1} = \frac{n}{q}, \quad d_{k-j} = \frac{n}{p^j}, \quad d_{k-j+1} = \frac{n}{p^{j-1}}, \ldots, d_{k-1} = \frac{n}{p}, \quad d_k = n.$$

[4] Lời giải của TelvCohl.

Từ điều kiện đề bài:

$$d_{k-j-1} \mid (d_{k-i} + d_{k-j+1}) \implies \frac{n}{q} \mid \left(\frac{n}{p^j} + \frac{n}{p^{j-1}}\right) \quad (1)$$

Ta sử dụng $v_p(m)$ để biểu diễn Chuẩn p-adic của m. Lưu ý rằng:

$$v_p\left(\frac{n}{q}\right) = v_p(n) \text{ do } \gcd(p, q) = 1.$$

và

$$v_p\left(\frac{n}{p^j}(p+1)\right) = v_p(n) - j \text{ do } \gcd(p, p+1) = 1.$$

Từ (1), suy ra:

$$v_p(n) = v_p\left(\frac{n}{q}\right) \leq v_p\left(\frac{n}{p^j}(p+1)\right) = v_p(n) - j,$$

mâu thuẫn. Vậy n chỉ có một ước số nguyên tố, hoàn thành chứng minh. □

[4] Shortlist 2023 with solutions.

9.3 Bài tập

Chương 10

Đa thức nguyên

Chương 11

Phần dư bậc hai

11.1 Lý thuyết

Định lý (Định lý Fermat về tổng hai số chính phương)

Một số nguyên tố lẻ p có thể được biểu diễn dưới dạng tổng của hai số chính phương nếu và chỉ nếu $p \equiv 1 \pmod 4$, tức là tồn tại các số nguyên x, y sao cho

$$p = x^2 + y^2.$$

11.2 Các ví dụ

Ví dụ (CHN 2015 TST2/D2/P3)
[**unrated**] Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên n sao cho $n^2 + 1$ là số không có ước chính phương.

Lời giải. (Cách 1)[1]Trước hết ta chứng minh khẳng định sau với mọi số nguyên tố p.

Khẳng định — Phương trình $x^2 \equiv -1 \pmod{p^2}$ có không quá 2 nghiệm trong tập $\{0, 1, \dots, p^2 - 1\}$.

Chứng minh. Trường hợp $p = 2$ có thể dễ dàng kiểm tra trực tiếp, nên ta giả sử p là số lẻ.

Giả sử phản chứng rằng tồn tại ít nhất ba số nguyên phân biệt a, b, c sao cho:

$$a^2 + 1 \equiv b^2 + 1 \equiv c^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p^2} \implies a^2 \equiv b^2 \pmod{p^2} \implies p^2 \mid (a - b)(a + b). \quad (1)$$

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: $p \mid a - b$. Khi đó, vì $|a - b| < p^2$, ta có $p^2 \nmid a - b$. Từ (1), suy ra $p \mid a + b$. Xét tổng và hiệu:

$$p \mid (a - b) + (a + b) = 2a, \quad p \mid (a + b) - (a - b) = 2b.$$

Do $p \neq 2$, suy ra $p \mid a$, nhưng điều này mâu thuẫn với giả thiết $p^2 \mid a^2 + 1$.

Trường hợp 2: $p \nmid a - b$. Từ (1), ta suy ra $p^2 \mid a + b$. Tương tự, có thể chứng minh $p^2 \mid a + c$.

Suy ra $p^2 \mid (a + c) - (a + b) = b - c$. Vì $|b - c| < p^2$, ta có $b = c$, mâu thuẫn với giả thiết ban đầu. ■

Gọi $\mathrm{X}(n)$ và $\mathrm{P}_{4,1}(n)$ là hai tập hợp sau:

$$\mathrm{X}(n) = \{x \mid x^2 + 1 \text{ có ước chính phương}\}.$$
$$\mathrm{P}_{4,1}(n) = \{p \mid p \text{ là số nguyên tố, } p \equiv 1 \pmod 4\}.$$

Theo khẳng định trên, $x^2 \equiv -1 \pmod{p^2}$ trong khoảng $[0, n - 1]$ có số nghiệm không vượt quá:

$$2 \cdot \frac{n}{p^2} + 2.$$

Do đó tổng số phần tử trong $\mathrm{X}(n)$:

$$|\mathrm{X}(n)| \le \sum_{p \in \mathrm{P}_{4,1}(n)} \left(2 + \frac{2n}{p^2}\right) \le 2|\mathrm{P}_{4,1}(n)| + 2n \sum_{p \in \mathrm{P}_{4,1}(n)} \frac{1}{p^2}.$$

Số lượng số nguyên tố $p \le n$ thỏa mãn $p \equiv 1 \pmod 4$ được ước lượng bởi:

$$|\mathrm{P}_{4,1}(n)| \le 1 + \frac{n}{4}.$$

Theo Bất đẳng thức Chuỗi Xen Kẽ, ta có:

$$\sum_p \frac{2}{p^2} < \frac{1}{4} \implies 2n \sum_p \frac{1}{p^2} < \frac{n}{6} \implies |\mathrm{X}(n)| \le 2 + \frac{2n}{3}.$$

Từ đó, số phần tử x nhỏ hơn n sao cho $x^2 + 1$ không có ước chính phương ít nhất là:

$$n - |\mathrm{X}(n)| \ge \frac{n}{3} - 2.$$

Vì $\frac{n}{3} - 2$ có thể lớn tùy ý khi n tăng, nên có vô hạn số n sao cho $n^2 + 1$ không có ước chính phương. □

[1] Lời giải của rafayaashary1.

11.3 Bài tập

Chương 12

Chứng minh kiến tạo

Tiêu chuẩn Xếp hạng MOHS

Thang độ khó MOHS

Trong tài liệu này, Evan Chen cung cấp xếp hạng độ khó cá nhân cho các bài toán từ một số kỳ thi gần đây. Điều này đòi hỏi phải xác định một tiêu chí đánh giá độ khó một cách cẩn thận. Evan Chen gọi hệ thống này là **thang độ khó MOHS** (phát âm là "moez"); đôi khi anh cũng sử dụng đơn vị "M" (viết tắt của "Mohs").

Thang đo này tiến hành theo bước nhảy 5M, với mức thấp nhất là 0M và mức cao nhất là 60M. Tuy nhiên, trên thực tế, rất ít bài toán được xếp hạng cao hơn 50M, nên có thể coi nó chủ yếu là một thang đo từ 0M đến 50M, với một số bài toán thuộc dạng "vượt mức thông thường".

Bên dưới là bản dịch tiếng Việt từ tài liêu trên.

Xếp hạng dựa theo ý kiến cá nhân của Evan Chen

Mặc dù có rất nhiều điều đã được viết ra ở đây, nhưng cuối cùng, những xếp hạng này vẫn chỉ là ý kiến cá nhân của Evan Chen. Evan Chen không khẳng định rằng các xếp hạng này là khách quan hoặc phản ánh một sự thật tuyệt đối nào đó.

Lưu ý hài hước (Bảo hành xếp hạng). Các xếp hạng được cung cấp "nguyên trạng", không có bất kỳ bảo hành nào, dù rõ ràng hay ngụ ý, bao gồm nhưng không giới hạn ở các bảo hành về khả năng thương mại, sự phù hợp với một mục đích cụ thể, và việc không vi phạm quyền sở hữu trí tuệ. Trong mọi trường hợp, Evan không chịu trách nhiệm đối với bất kỳ khiếu nại, thiệt hại hoặc trách nhiệm pháp lý nào phát sinh từ, liên quan đến, hoặc có liên quan đến những xếp hạng này.

Hướng dẫn sử dụng

Cảnh báo quan trọng: Lạm dụng các xếp hạng này có thể gây hại cho bạn.

Ví dụ, nếu bạn quyết định không nghiêm túc thử sức với một số bài toán chỉ vì chúng được xếp hạng 40M trở lên, bạn có thể tự làm khó mình bằng cách tước đi cơ hội tiếp xúc với những bài toán khó. Nếu bạn không thường xuyên thử sức với các bài toán cấp độ IMO3 một cách nghiêm túc, bạn sẽ không bao giờ đạt đến mức độ có thể thực sự giải được chúng.

Vì lý do này, nghịch lý thay, đôi khi việc không biết bài toán khó đến mức nào lại tốt hơn, để bạn không vô thức có thái độ bỏ cuộc ngay từ đầu.

Các xếp hạng này được thiết kế để làm tài liệu tham khảo. Một cách sử dụng hợp lý là không xem xếp hạng bài toán cho đến khi bạn đã giải xong; điều này mô phỏng tốt nhất điều kiện thi đấu thực tế, khi bạn không biết độ khó của bài toán cho đến khi bạn giải được nó hoặc hết giờ và thấy những ai khác đã giải được.

Bạn đã được cảnh báo. Chúc may mắn!

Ý nghĩa của các mức xếp hạng bài toán

Dưới đây là ý nghĩa của từng mức độ xếp hạng bài toán theo thang đo MOHS.

Định nghĩa (0M)**.** Bài toán có mức 0M quá dễ để xuất hiện trong IMO. Thông thường, một học sinh giỏi trong lớp toán nâng cao có thể giải được bài toán này mà không cần đào tạo chuyên sâu về toán olympic.

Định nghĩa (5M)**.** Đây là mức dễ nhất có thể xuất hiện trong IMO nhưng vẫn đáp ứng tiêu chuẩn của kỳ thi. Những bài toán này có thể được giải quyết rất nhanh.

Ví dụ:

- IMO 2019/1 về phương trình $f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$
- IMO 2017/1 về căn bậc hai $\sqrt{a_n}$ hoặc $a_n + 3$

Định nghĩa (10M)**.** Đây là mức độ dành cho các bài toán IMO số 1 hoặc 4 mà hầu hết các thí sinh không gặp khó khăn khi giải. Tuy nhiên, vẫn cần có một số công việc để hoàn thành lời giải.

Ví dụ:

- IMO 2019/4 về $k! = (2^n - 1)\dots$
- IMO 2018/1 về $DE \parallel FG$

Định nghĩa (15M)**.** Đây là mức thấp nhất của các bài toán có thể xuất hiện dưới dạng bài số 2 hoặc 5 của IMO, nhưng thường phù hợp hơn với bài số 1 hoặc 4. Những bài toán này thường có thể được giải quyết dễ dàng bởi các đội tuyển thuộc top 10 thế giới.

Ví dụ:

- IMO 2019/5 về bài toán "Ngân hàng Bath"
- IMO 2018/4 về "Amy/Ben và lưới 20×20"
- IMO 2017/4 về tiếp tuyến KT của Γ

Định nghĩa (20M)**.** Những bài toán ở mức này có thể quá khó để xuất hiện dưới dạng IMO 1/4 nhưng vẫn chưa đạt đến độ khó trung bình của IMO 2/5.

Ví dụ:

- IMO 2018/5 về $a_1, a_2, \dots, a_n$ sao cho $\frac{a_1}{a_2} + \cdots + \frac{a_n}{a_1} \in \mathbb{Z}$

Định nghĩa (25M)**.** Đây là mức độ phù hợp nhất với các bài toán IMO 2/5. Những bài toán này là thử thách thực sự ngay cả với các đội tuyển hàng đầu.

Ví dụ:

- IMO 2019/2 về "P_1, Q_1, P, Q đồng viên"

Định nghĩa (30M)**.** Những bài toán ở mức này khó hơn một chút so với mức trung bình của IMO 2/5, nhưng vẫn chưa đủ khó để được sử dụng làm bài số 3 hoặc 6.

Ví dụ:

- IMO 2018/2 về phương trình $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$

Định nghĩa (35M)**.** Đây là mức độ khó cao nhất dành cho các bài toán IMO 2/5 và cũng là mức độ dễ nhất của các bài toán IMO 3/6.

Ví dụ:

- IMO 2019/6 về "$DI \cap PQ$ trên phân giác góc ngoài $\angle A$"
- IMO 2017/5 về "Ngài Alex và các cầu thủ bóng đá"

Định nghĩa (40M)**.** Những bài toán ở mức này quá khó để xuất hiện ở IMO 2/5. Ngay cả các đội tuyển hàng đầu cũng không thể đạt điểm tuyệt đối với bài toán ở mức này.

Ví dụ:

- IMO 2019/3 về "mạng xã hội và xor tam giác"
- IMO 2017/2 về phương trình $f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy)$
- IMO 2017/3 về "thợ săn và con thỏ"
- IMO 2017/6 về "nội suy đa thức thuần nhất"

Định nghĩa (45M)**.** Bài toán thuộc hạng này thường chỉ có một số ít thí sinh giải được. Đây là mức độ của những bài toán IMO 3/6 khó hơn mức trung bình.

Ví dụ:

- IMO 2018/3 về "tam giác phản Pascal"
- IMO 2018/6 về "$\angle BXA + \angle DXC = 180°$"

Định nghĩa (50M)**.** Đây là mức khó nhất mà một bài toán vẫn có thể xuất hiện trong kỳ thi IMO hoặc bài kiểm tra chọn đội tuyển của các quốc gia hàng đầu.

Định nghĩa (55M)**.** Bài toán ở mức này quá dài dòng hoặc tốn nhiều thời gian để giải quyết trong một kỳ thi có giới hạn thời gian.

Định nghĩa (60M)**.** Bài toán ở mức này không thể giải trong vòng 4,5 giờ bởi học sinh trung học, nhưng vẫn có thể được giải quyết trong điều kiện không giới hạn thời gian. Ví dụ, một kết quả từ một nghiên cứu tổ hợp với chứng minh dài 15 trang có thể rơi vào hạng này.

Lưu ý: Evan Chen sử dụng bội số của 5 để tránh nhầm lẫn giữa số bài toán (ví dụ: bài toán số 6) với mức độ khó (ví dụ: 30M).

Từ điển chú giải