Các Bài Toán Luyện Thi IMO

Nghia Doan

Tạp chí Pi
Câu lộc bộ MCC

Ngày 18 tháng 3 năm 2025

Mục lục

Mở đầu

Lời nói đầu

Cuốn sách này được biên soạn dành cho giáo viên và học sinh luyện thi Đội tuyển Quốc gia Việt Nam dự thi IMO. Tài liệu tập hợp *các bài toán mới trong vòng 10 năm trở lại đây* từ các kỳ thi quan trọng như IMO Shortlist, các cuộc thi quốc tế uy tín như MEMO, BMO, APMO, EGMO, cũng như các kỳ thi quốc gia của 20 nước hàng đầu thế giới.

Mỗi bài toán được *xếp hạng theo thang độ khó MOHS*, đi kèm với *danh sách các định lý, bổ đề, hằng đẳng thức quan trọng* cần thiết cho lời giải. Các yếu tố này được liên kết trong một hệ thống đồ thị tri thức, giúp người đọc dễ dàng tra cứu và hiểu rõ mối liên hệ giữa các công cụ toán học. Ngoài ra, mỗi bài toán còn được gắn *thẻ thông tin chi tiết* về kỳ thi (năm, vòng), giúp thuận tiện cho việc tìm kiếm và tham khảo.

Để hỗ trợ người học, mỗi bài toán có một *mã định danh duy nhất* (UUID), kèm theo *gợi ý* khi gặp khó khăn. Nếu có nhiều cách giải, tất cả sẽ được trình bày các chuyên đề liên quan đến cách giải để giúp người đọc mở rộng tư duy.

Cấu trúc sách gồm bốn phần chính tương ứng với bốn lĩnh vực quan trọng của toán học thi đấu: Đại số, Tổ hợp, Hình học và Số học. Mỗi phần chia thành các chương theo từng chuyên đề cụ thể với các bài toán liên quan.

Đây là một cuốn sách *mở, luôn được cập nhật và có sẵn trên Internet* để bất kỳ ai cũng có thể truy cập. Người dùng có thể đóng góp bằng cách đề xuất bài toán mới hoặc thay đổi mức độ khó, gợi ý, hoặc thêm lời giải mới cho bài toán bằng cách gửi *một tệp duy nhất theo định dạng LaTeX quy định*. Việc đóng góp tập trung vào nội dung mà không cần lo lắng về định dạng, tổ chức, mã LaTeX hay quy trình xuất bản.

Toàn bộ quá trình này được giám sát bởi các nhân sự được ủy quyền từ Hội Toán Học Việt Nam và Tạp chí Pi, nhằm đảm bảo chất lượng và tính nhất quán của tài liệu.

Chúng tôi hy vọng tài liệu này sẽ trở thành một nguồn tham khảo hữu ích, giúp giáo viên và học sinh tiến xa hơn trong hành trình chinh phục các kỳ thi toán quốc tế.

Ban Biên soạn

Phần I

Lý thuyết Số

Chương 1

Các Ước Số

Ví dụ (IMO 2023 P1/Columbia/5M)
Xác định tất cả các số nguyên hợp dương n thỏa mãn tính chất sau: nếu các ước số dương của n là $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, thì $d_i \mid (d_{i+1} + d_{i+2})$ với mọi $1 \le i \le k-2$.

Lời giải. [1[1]] Dễ thấy rằng $n = p^r$ với $r \ge 2$ thỏa mãn điều kiện vì

$$d_i = p^{i-1}, \text{ với } 1 \le i \le k = r+1 \text{ và rõ ràng } p^{i-1} \mid (p^i + p^{i+1}).$$

Bây giờ, giả sử tồn tại một số nguyên n thỏa mãn điều kiện đã cho và có ít nhất hai thừa số nguyên tố phân biệt, gọi là p và q, với $p < q$ là hai thừa số nguyên tố nhỏ nhất của n.

Tồn tại số nguyên j sao cho:

$$d_1 = 1, d_2 = p, \ldots, d_j = p^{j-1}, d_{j+1} = p^j, d_{j+2} = q.$$

Ta cũng có:

$$d_{k-j-1} = \frac{n}{q}, \quad d_{k-j} = \frac{n}{p^j}, \quad d_{k-j+1} = \frac{n}{p^{j-1}}, \ldots, d_{k-1} = \frac{n}{p}, \quad d_k = n.$$

Từ điều kiện đề bài:

$$d_{k-j-1} \mid (d_{k-i} + d_{k-j+1}) \implies \frac{n}{q} \mid \left(\frac{n}{p^j} + \frac{n}{p^{j-1}}\right) \quad (1)$$

Suy ra $p^j \mid q(p+1)$ dẫn đến $p \mid q$, mâu thuẫn với $p \ne q$. Vậy n phải là lũy thừa của một số nguyên tố. □

Nhận xét. Công cụ sử dụng: Định lý cơ bản của số học.

Lời giải. [2[1]] Vì $d_i d_{k+1-i} = n$, ta có:

$$d_{k-i-1} \mid d_{k-i} + d_{k-i+1} \iff \frac{n}{d_{i+2}} \mid \left(\frac{n}{d_{i+1}} + \frac{n}{d_i}\right).$$

Nhân hai vế với $d_i d_{i+1} d_{i+2}$ và đơn giản hóa:

$$d_i d_{i+1} \mid d_i d_{i+2} + d_{i+1} d_{i+2} \implies d_i \mid d_{i+1} d_{i+2} \quad (2)$$

Áp dụng điều kiện đề bài, ta có:

$$d_i \mid d_{i+1}(d_{i+1} + d_{i+2}) = d_{i+1}^2 + d_{i+1}d_{i+2}.$$

Kết hợp với (2), suy ra $d_i \mid d_{i+1}^2$ với mọi $1 \le i \le k-2$.

Gọi $d_2 = p$ là ước số nguyên tố nhỏ nhất của n. Ta chứng minh bằng quy nạp: $p \mid d_i$ với mọi $2 \le i \le k-1$. Thật vậy, trường hợp $d_2 = p$ là hiển nhiên. Giả sử $p \mid d_j$ với $2 \le j \le k-2$, khi đó:

$$p \mid d_j \mid {d_{j+1}}^2 \implies p \mid d_{j+1} \text{ (vì } p \text{ nguyên tố).}$$

Từ đó suy ra n là lũy thừa của một số nguyên tố vì nếu tồn tại một số nguyên tố $q \ne p$ mà cũng là ước số của n thì $p \mid q$ và đó là điều vô lý. □

Nhận xét. Công cụ sử dụng: Định lý cơ bản của số học, Quy nạp toán học.

Lời giải. [3[1]]

Khẳng định — $d_i \mid d_{i+1}$ với mọi $1 \le i \le k-1$.

Proof. Dùng quy nạp. Cơ sở quy nạp: $d_1 = 1$ là hiển nhiên. Giả sử $d_{i-1} \mid d_i$. Từ điều kiện đề bài:

$$d_{i-1} \mid d_i + d_{i+1} \Rightarrow d_{i-1} \mid d_{i+1}.$$

Ta xét:

$$d_{k-i} = \frac{n}{d_{i+1}}, \quad d_{k-i+1} = \frac{n}{d_i}, \quad d_{k-i+2} = \frac{n}{d_{i-1}}.$$

Ta suy ra:

$$\frac{d_{k-i+1} + d_{k-i+2}}{d_{k-i}} = \frac{\frac{n}{d_i} + \frac{n}{d_{i-1}}}{\frac{n}{d_{i+1}}} = \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{d_{i+1}}{d_{i-1}} \in \mathbb{Z}.$$

suy ra $d_i \mid d_{i+1}$, hoàn thành chứng minh. ■

Dựa vào Mệnh đề đã chứng minh, n không thể có hai thừa số nguyên tố khác nhau vì thừa số nhỏ nhất sẽ chia hết thừa số còn lại. Do đó, n phải là lũy thừa của một số nguyên tố, và các lũy thừa của số nguyên tố đều thỏa mãn điều kiện của bài toán. □

Nhận xét. Công cụ sử dụng: Định lý cơ bản của số học, Quy nạp toán học.

Lời giải. [4[1]] Tiếp tục từ Lời giải 1, ta sử dụng $v_p(m)$ để biểu diễn chuẩn p-adic của m. Lưu ý rằng:

$$v_p\left(\frac{n}{q}\right) = v_p(n) \text{ do } \gcd(p, q) = 1.$$

và

$$v_p\left(\frac{n}{p^j}(p+1)\right) = v_p(n) - j \text{ do } \gcd(p, p+1) = 1.$$

Từ (1), suy ra:

$$v_p(n) = v_p\left(\frac{n}{q}\right) \le v_p\left(\frac{n}{p^j}(p+1)\right) = v_p(n) - j,$$

mâu thuẫn. Vậy n chỉ có một ước số nguyên tố, hoàn thành chứng minh. □

Nhận xét. Công cụ sử dụng: Định lý cơ bản của số học, Quy nạp toán học, Chuẩn p-adic.

[1] Shortlist 2023 with solutions.

Tiêu chuẩn Xếp hạng MOHS

Thang độ khó MOHS

Trong tài liệu này, Evan Chen cung cấp xếp hạng độ khó cá nhân cho các bài toán từ một số kỳ thi gần đây. Điều này đòi hỏi phải xác định một tiêu chí đánh giá độ khó một cách cẩn thận. Evan Chen gọi hệ thống này là **thang độ khó MOHS** (phát âm là “moez”); đôi khi anh cũng sử dụng đơn vị “M” (viết tắt của “Mohs”).

Thang đo này tiến hành theo bước nhảy 5M, với mức thấp nhất là 0M và mức cao nhất là 60M. Tuy nhiên, trên thực tế, rất ít bài toán được xếp hạng cao hơn 50M, nên có thể coi nó chủ yếu là một thang đo từ 0M đến 50M, với một số bài toán thuộc dạng “vượt mức thông thường”.

Bên dưới là bản dịch tiếng Việt từ tài liêu trên.

Xếp hạng dựa theo ý kiến cá nhân của Evan Chen

Mặc dù có rất nhiều điều đã được viết ra ở đây, nhưng cuối cùng, những xếp hạng này vẫn chỉ là ý kiến cá nhân của Evan Chen. Evan Chen không khẳng định rằng các xếp hạng này là khách quan hoặc phản ánh một sự thật tuyệt đối nào đó.

Lưu ý hài hước (Bảo hành xếp hạng). Các xếp hạng được cung cấp “nguyên trạng”, không có bất kỳ bảo hành nào, dù rõ ràng hay ngụ ý, bao gồm nhưng không giới hạn ở các bảo hành về khả năng thương mại, sự phù hợp với một mục đích cụ thể, và việc không vi phạm quyền sở hữu trí tuệ. Trong mọi trường hợp, Evan không chịu trách nhiệm đối với bất kỳ khiếu nại, thiệt hại hoặc trách nhiệm pháp lý nào phát sinh từ, liên quan đến, hoặc có liên quan đến những xếp hạng này.

Hướng dẫn sử dụng

Cảnh báo quan trọng: Lạm dụng các xếp hạng này có thể gây hại cho bạn.

Ví dụ, nếu bạn quyết định không nghiêm túc thử sức với một số bài toán chỉ vì chúng được xếp hạng 40M trở lên, bạn có thể tự làm khó mình bằng cách tước đi cơ hội tiếp xúc với những bài toán khó. Nếu bạn không thường xuyên thử sức với các bài toán cấp độ IMO3 một cách nghiêm túc, bạn sẽ không bao giờ đạt đến mức độ có thể thực sự giải được chúng.

Vì lý do này, nghịch lý thay, đôi khi việc không biết bài toán khó đến mức nào lại tốt hơn, để bạn không vô thức có thái độ bỏ cuộc ngay từ đầu.

Các xếp hạng này được thiết kế để làm tài liệu tham khảo. Một cách sử dụng hợp lý là không xem xếp hạng bài toán cho đến khi bạn đã giải xong; điều này mô phỏng tốt nhất điều kiện thi đấu thực tế, khi bạn không biết độ khó của bài toán cho đến khi bạn giải được nó hoặc hết giờ và thấy những ai khác đã giải được.

Bạn đã được cảnh báo. Chúc may mắn!

Ý nghĩa của các mức xếp hạng bài toán

Dưới đây là ý nghĩa của từng mức độ xếp hạng bài toán theo thang đo MOHS.

0M

Bài toán có mức 0M quá dễ để xuất hiện trong IMO. Thông thường, một học sinh giỏi trong lớp toán nâng cao có thể giải được bài toán này mà không cần đào tạo chuyên sâu về toán olympic.

5M

Đây là mức dễ nhất có thể xuất hiện trong IMO nhưng vẫn đáp ứng tiêu chuẩn của kỳ thi. Những bài toán này có thể được giải quyết rất nhanh.

Ví dụ:

- IMO 2019/1 về phương trình $f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b))$
- IMO 2017/1 về căn bậc hai $\sqrt{a_n}$ hoặc $a_n + 3$

10M

Đây là mức độ dành cho các bài toán IMO số 1 hoặc 4 mà hầu hết các thí sinh không gặp khó khăn khi giải. Tuy nhiên, vẫn cần có một số công việc để hoàn thành lời giải.

Ví dụ:

- IMO 2019/4 về $k! = (2^n - 1)\dots$
- IMO 2018/1 về $DE \parallel FG$

15M

Đây là mức thấp nhất của các bài toán có thể xuất hiện dưới dạng bài số 2 hoặc 5 của IMO, nhưng thường phù hợp hơn với bài số 1 hoặc 4. Những bài toán này thường có thể được giải quyết dễ dàng bởi các đội tuyển thuộc top 10 thế giới.

Ví dụ:

- IMO 2019/5 về bài toán "Ngân hàng Bath"
- IMO 2018/4 về "Amy/Ben và lưới 20×20"
- IMO 2017/4 về tiếp tuyến KT của Γ

20M

Những bài toán ở mức này có thể quá khó để xuất hiện dưới dạng IMO 1/4 nhưng vẫn chưa đạt đến độ khó trung bình của IMO 2/5.

Ví dụ:

- IMO 2018/5 về $a_1, a_2, \dots, a_n$ sao cho $\frac{a_1}{a_2} + \cdots + \frac{a_n}{a_1} \in \mathbb{Z}$

25M

Đây là mức độ phù hợp nhất với các bài toán IMO 2/5. Những bài toán này là thử thách thực sự ngay cả với các đội tuyển hàng đầu.

Ví dụ:

- IMO 2019/2 về "P_1, Q_1, P, Q đồng viên"

30M

Những bài toán ở mức này khó hơn một chút so với mức trung bình của IMO 2/5, nhưng vẫn chưa đủ khó để được sử dụng làm bài số 3 hoặc 6.

Ví dụ:

- IMO 2018/2 về phương trình $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$

35M

Đây là mức độ khó cao nhất dành cho các bài toán IMO 2/5 và cũng là mức độ dễ nhất của các bài toán IMO 3/6.

Ví dụ:

- IMO 2019/6 về "$DI \cap PQ$ trên phân giác góc ngoài $\angle A$"
- IMO 2017/5 về "Ngài Alex và các cầu thủ bóng đá"

40M

Những bài toán ở mức này quá khó để xuất hiện ở IMO 2/5. Ngay cả các đội tuyển hàng đầu cũng không thể đạt điểm tuyệt đối với bài toán ở mức này.

Ví dụ:

- IMO 2019/3 về "mạng xã hội và xor tam giác"
- IMO 2017/2 về phương trình $f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy)$
- IMO 2017/3 về "thợ săn và con thỏ"
- IMO 2017/6 về "nội suy đa thức thuần nhất"

45M

Bài toán thuộc hạng này thường chỉ có một số ít thí sinh giải được. Đây là mức độ của những bài toán IMO 3/6 khó hơn mức trung bình.

Ví dụ:

- IMO 2018/3 về "tam giác phản Pascal"
- IMO 2018/6 về "$\angle BXA + \angle DXC = 180°$"

50M

Đây là mức khó nhất mà một bài toán vẫn có thể xuất hiện trong kỳ thi IMO hoặc bài kiểm tra chọn đội tuyển của các quốc gia hàng đầu.

55M

Bài toán ở mức này quá dài dòng hoặc tốn nhiều thời gian để giải quyết trong một kỳ thi có giới hạn thời gian.

60M

Bài toán ở mức này không thể giải trong vòng 4,5 giờ bởi học sinh trung học, nhưng vẫn có thể được giải quyết trong điều kiện không giới hạn thời gian. Ví dụ, một kết quả từ một nghiên cứu tổ hợp với chứng minh dài 15 trang có thể rơi vào hạng này.

Lưu ý: Evan Chen sử dụng bội số của 5 để tránh nhầm lẫn giữa số bài toán (ví dụ: bài toán số 6) với mức độ khó (ví dụ: 30M).

Công cụ sử dụng

Định lý (Định lý cơ bản của số học)
Mọi số tự nhiên lớn hơn 1 có thể viết một cách duy nhất (không kể sự sai khác về thứ tự các thừa số) thành tích các thừa số nguyên tố.

Mọi số tự nhiên n lớn hơn 1, có thể viết duy nhất dưới dạng:

$$n = {p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2}\ldots{p_k}^{\alpha_k}$$

trong đó $p_1, p_2, \ldots, p_k$ là các số nguyên tố và $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ là các số nguyên dương.

Định lý (Quy nạp toán học)
Hình thức đơn giản và phổ biến nhất của phương pháp quy nạp toán học suy luận rằng một mệnh đề liên quan đến một số tự nhiên n cũng đúng với tất cả các giá trị của n. Cách chứng minh bao gồm hai bước sau:

Bước cơ sở: chứng minh rằng mệnh đề đúng với số tự nhiên đầu tiên n. Thông thường, $n = 0$ hoặc $n = 1$, hiếm khi có $n = -1$ (mặc dù không phải là một số tự nhiên, phần mở rộng của các số tự nhiên đến -1 vẫn áp dụng được)

Bước quy nạp: chứng minh rằng, nếu mệnh đề được dùng cho một số số tự nhiên n, sau đó cũng đúng với $n + 1$. Giả thiết ở bước quy nạp rằng mệnh đề đúng với các số n được gọi là giả thiết quy nạp. Để thực hiện bước quy nạp, phải giả sử giả thiết quy nạp là đúng và sau đó sử dụng giả thiết này để chứng minh mệnh đề với $n + 1$.

Việc $n = 0$ hay $n = 1$ phụ thuộc vào định nghĩa của số tự nhiên. Nếu 0 được coi là một số tự nhiên, bước cơ sở được đưa ra bởi $n = 0$. Nếu, mặt khác, 1 được xem như là số tự nhiên đầu tiên, bước hợp cơ sở được đưa ra với $n = 1$.

Definition (Chuẩn p-adic)**.** Trong số học, chuẩn p-adic (hoặc bậc p-adic) của một số nguyên n là số mũ của lũy thừa lớn nhất của số nguyên tố p mà n chia hết. Nó được ký hiệu là $\nu_p(n)$. Tương đương, $\nu_p(n)$ là số mũ của p trong phân tích thừa số nguyên tố của n.

$$\nu_p(n) = \begin{cases} \max\{k \in \mathbb{N}_0 : p^k \mid n\} & \text{if } n \neq 0, \\ \infty & \text{if } n = 0, \end{cases}$$

Từ điển chú giải

IMO 2023 International Mathematical Olympiad 2023 5