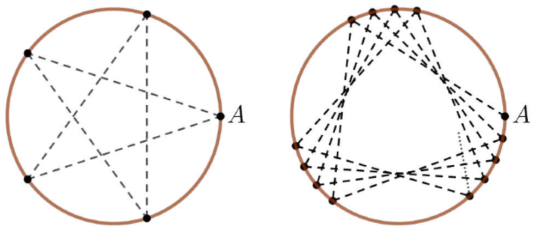
Lucie la Puce

Pham Phuong Linh - Pearce Albert - Nguyen Duc Nghia

Novembre 2023

1 Sujet

En partant du point A, Lucie la puce fait des sauts sur le bord d'un terrain de sport circulaire de circonférence 1 mètre. Ses sauts lui font toujours parcourir la même distance, dans le sens anti-horaire. Voici deux exemples de ses parcours possibles:



2 Comprendre le sujet

2.1 Longueur de l'arc franchi dans un exemple donné

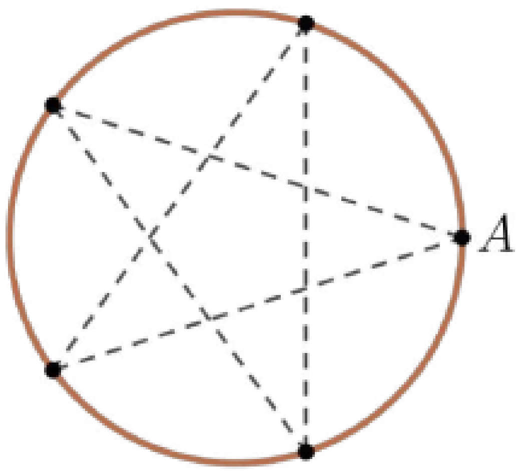


Figure 1: Un arc de longueur $\frac{2}{5}$

Dans ce cas, Lucie effectue 5 sauts avant de revenir a son point de départ, le point A. En effectuant ses 5 sauts, elle fait aussi 2 tours entiers du cercle. Ainsi, chacun de ses sauts a pour longueur $\frac{2}{5}$.

2.2 Modelisation sur GeoGebra

Pour mieux visualiser les sauts de Lucie, on a décidé de modéliser la situation grâce au logiciel GeoGebra.

D'abord, il a fallu trouver le rayon du terrain de sport. On sait que la circonférence vaut 1 mètre, et que la relation reliant le rayon r et la circonférence C s'écrit $C = 2\pi r$. On a alors $r = \frac{1}{2\pi}$.

Ensuite, il faut pouvoir placer le point M, qui représente la position de Lucie après chaque saut. Posons $\frac{p}{q}$ avec $(p, q)\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ la longueur de l'arc franchi par Lucie à chaque saut et $k \in \mathbb{N}^*$ le nombre de sauts.

En effet, une longueur négative n'existe pas et une longueur nulle n'a pas de sens pour ce problème donc $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. De même, le nombre de sauts k n'a que de sens avec $k \in \mathbb{N}^*$

On a $s = r\theta$ avec s la longueur de l'arc (en radians), r le rayon de l'arc et θ l'angle que forme l'arc. Ainsi, $\theta = \frac{p}{q} \times 2k\pi$. On peut alors définir le point M avec le couple de coordonnées polaires $(\frac{1}{2\pi}, \frac{p}{q} \times 2k\pi)$.

Pour pouvoir tracer les segments qui relient les points consécutifs atteints par Lucie, on place aussi le point N, qui représente la position qu'atteindra Lucie après un saut supplémentaire. Autrement dit, c'est la position de Lucie au $(k + 1)$-ième saut. N a alors pour coordonnées $(\frac{1}{2\pi}, \frac{p}{q} \times 2\pi(k + 1))$, soit encore $(\frac{1}{2\pi}, \frac{p}{q} \times 2k\pi + \frac{p}{q} \times 2\pi)$.

Avec cela, il suffit de relier M et N par un segment et afficher la trace de ces trois éléments. Le fichier complet peut se trouver ici : Lucie la Puce

2.3 Parcours de Lucie pour une longueur donnée

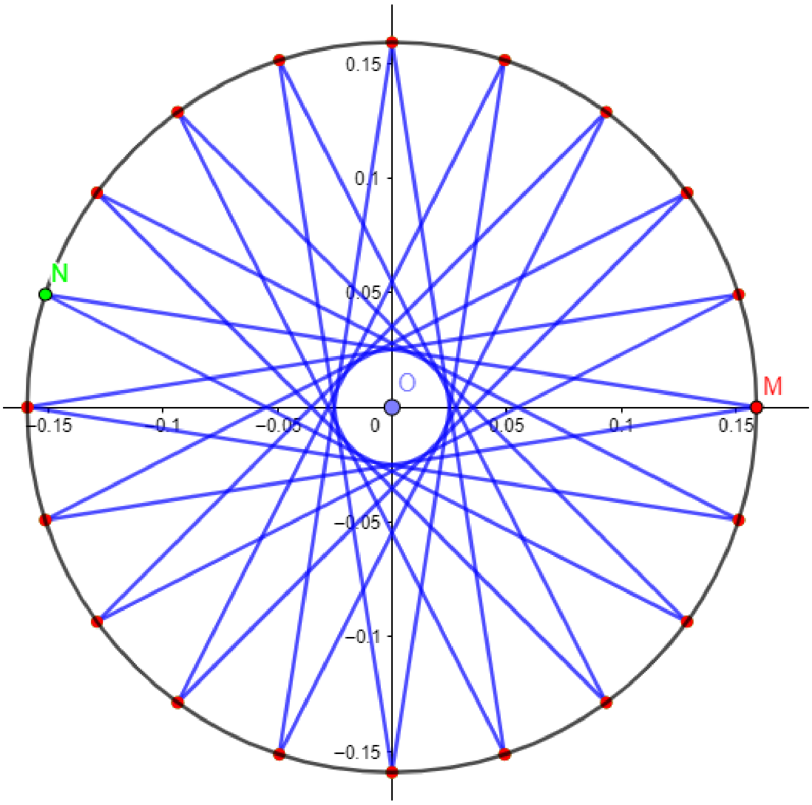


Figure 2: Saut de longueur 0,45

Grâce à la modélisation de GeoGebra, il est possible de tracer les parcours de Lucie pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Dans le cas de la figure 2, il suffit de prendre $p = 9$ et $q = 20$ pour obtenir le parcours quand la longueur vaut 0,45 mètres.

3 Revenir au point de départ

3.1 Rappels

Le cercle a pour circonférence 1. Lucie fait $k \in \mathbb{N}^*$ sauts de longueur $\frac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

Revenir au point A signifie que, apres k tours, Lucie a effectue un nombre $n \in \mathbb{N}^*$ tours complet du cercle.

On a ainsi $k \times \frac{p}{q} = 1 \times n$, soit $\frac{k}{n} = \frac{q}{p}$

Ce qui donne $\exists\ u \in \mathbb{R}^*, \begin{cases} k = u \times q \\ n = u \times p \end{cases}$

Or $k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ donc $u \in \mathbb{Q}^{*+}$ (il suffit de considerer $u = \frac{k}{q}$)

Donc $\exists\ (i;j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, u = \frac{i}{j}$

Ainsi, $\exists\ (i;j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \begin{cases} k = \frac{iq}{j} \\ n = \frac{ip}{j} \end{cases}$

On cherche a minimiser k, donc a minimiser $\frac{iq}{j}$

Cela revient a maximiser j tout en minimisant i.

Le plus petit entier naturel non nul est 1 donc $i = 1$.

$k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ donc j doit diviser q

De meme, j doit diviser p

Pour que j soit maximal, j doit etre alors le plus grand diviseur de p et de q.

Autrement dit, $j = pgcd(p;q)$

On a alors $k = \frac{q}{pgcd(p;q)}$ et $n = \frac{p}{pgcd(p;q)}$.

3.2 Jamais revenir en A

Soit $l \in \mathbb{R}^{*+}$ la longueur d'un saut de Lucie.

D'apres 3.1, pour que Lucie reviennent en A, l doit verifier $k \times l = n$ avec $(k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

On a donc $l = \frac{n}{k}$.

Ainsi, Lucie revient en A si et seulement si $l \in \mathbb{Q}^{*+}$.

4 Autres caractéristiques

4.1 L'ensemble des points atteint par Lucie

Dans tout les cas, Lucie prend $k = \frac{q}{pgcd(p;q)}$ pour revenir au point de départ.

Donc, après $k = \frac{q}{pgcd(p;q)}$ sauts, les points atteints par Lucie se répètent.

Donc Lucie atteint exactement $k = \frac{q}{pgcd(p;q)}$ points distincts sur le terrain de sport.

5 Revenir au point de départ

5.1 Combien de sauts pour revenir en A ?

Pour que Lucie reviennent à son point de départ A, il faut qu'elle effectue un nombre de sauts tel que la longueur totale franchie, soit un multiple de 1 tour complet.

On a alors $k \times \frac{p}{q}$ égal à un multiple de la circonférence du cercle. Soit encore $k \times \frac{p}{q} = n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Cela donne $\frac{k}{n} = \frac{q}{p}$. Ainsi, k est un multiple de q et n est un multiple de p.

Ainsi, Lucie revient en A tout les $u \times q$ sauts, après avoir effectué $u' \times p$ tours complets du cercle, avec $(u,u') \in \mathbb{N}^*$.

Le plus petit nombre de sauts et de tours dans cette situation est alors pour $(u,u') = (1,1)$. Dans ce cas, $k = q$ et $n = p$.

5.2 Plus petit nombre de sauts pour revenir en A

$\forall\ (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $pgcd(p;q)$ divise p et $pgcd(p;q)$ divise q. Ainsi, $\exists\ (m,m') \in \mathbb{N}^2, p = pgcd(p;q) \times m$ et $q = pgcd(p;q) \times m'$.

D'après 3.1, on a $\frac{k}{n} = \frac{q}{p}$. En replaçant p et q par leurs expressions ci-dessus, on obtient $\frac{k}{n} = \frac{m'}{m}$.

Or $m = \frac{p}{pgcd(p;q)}$ et $m' = \frac{q}{pgcd(p;q)}$, donc $\frac{k}{n} = \frac{q}{pgcd(p;q)} \div \frac{p}{pgcd(p;q)}$.

En suivant la meme démarche que dans 3.1, Lucie revient en A tout les $v \times \frac{q}{pgcd(p;q)}$ sauts, après avoir effectué $v' \times \frac{p}{pgcd(p;q)}$ tours complets du cercle, avec $(v,v') \in \mathbb{N}^*$.

Le plus petit nombre de sauts et de tours dans cette situation reste pour $(v,v') = (1,1)$. Dans ce cas, $k = \frac{q}{pgcd(p;q)}$ et $n = \frac{p}{pgcd(p;q)}$.

Pour montrer que ce résultat est le plus petit non seulement pour ce cas précis, mais aussi pour toute situation, supposons d'abord qu'il existe un nombre de sauts w qui permet de revenir au point A qui est strictement inférieur à $\frac{q}{pgcd(p;q)}$.

Supposons alors $\exists\ w \in \mathbb{N}^*, w < \frac{q}{pgcd(p;q)}$.

Donc $w < q \times \frac{1}{pgcd(p;q)}$.

$pgcd(p;q) \in \mathbb{N}^*$ donc $\frac{1}{pgcd(p;q)} \in]0;1]$ et $q \times \frac{1}{pgcd(p;q)} \leq q$

Or w est un multiple de q donc $q \leq w$

Donc $\frac{q}{pgcd(p;q)} \leq w$

Ceci est en contradiction avec la supposition de départ. Sa négation est donc vraie. Le plus petit nombre de sauts pour revenir en A est $k = \frac{q}{pgcd(p;q)}$.

La démonstration pour le nombre de tours minimal $n = \frac{p}{pgcd(p;q)}$ étant identique, elle n'est pas détaillé ici.