Exercise Book MAE 101 (có hướng dẫn)

Discrete Mathematics (FPT University)

Name:..

Class:...

Mathematics for Engineering

Exercise Book

Trần Trọng Huỳnh - 2018

CALCULUS

Chapter 1: Function and Limit

1. Find the domain of each function: tìm miền xác định của mỗi hàm số sau

a. $f\left(x\right)=\dfrac{2}{(x+2)\sqrt{x+1}}$

b. $f\left(x\right)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x\left|x-4\right|}}$

c. $f\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)-\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$

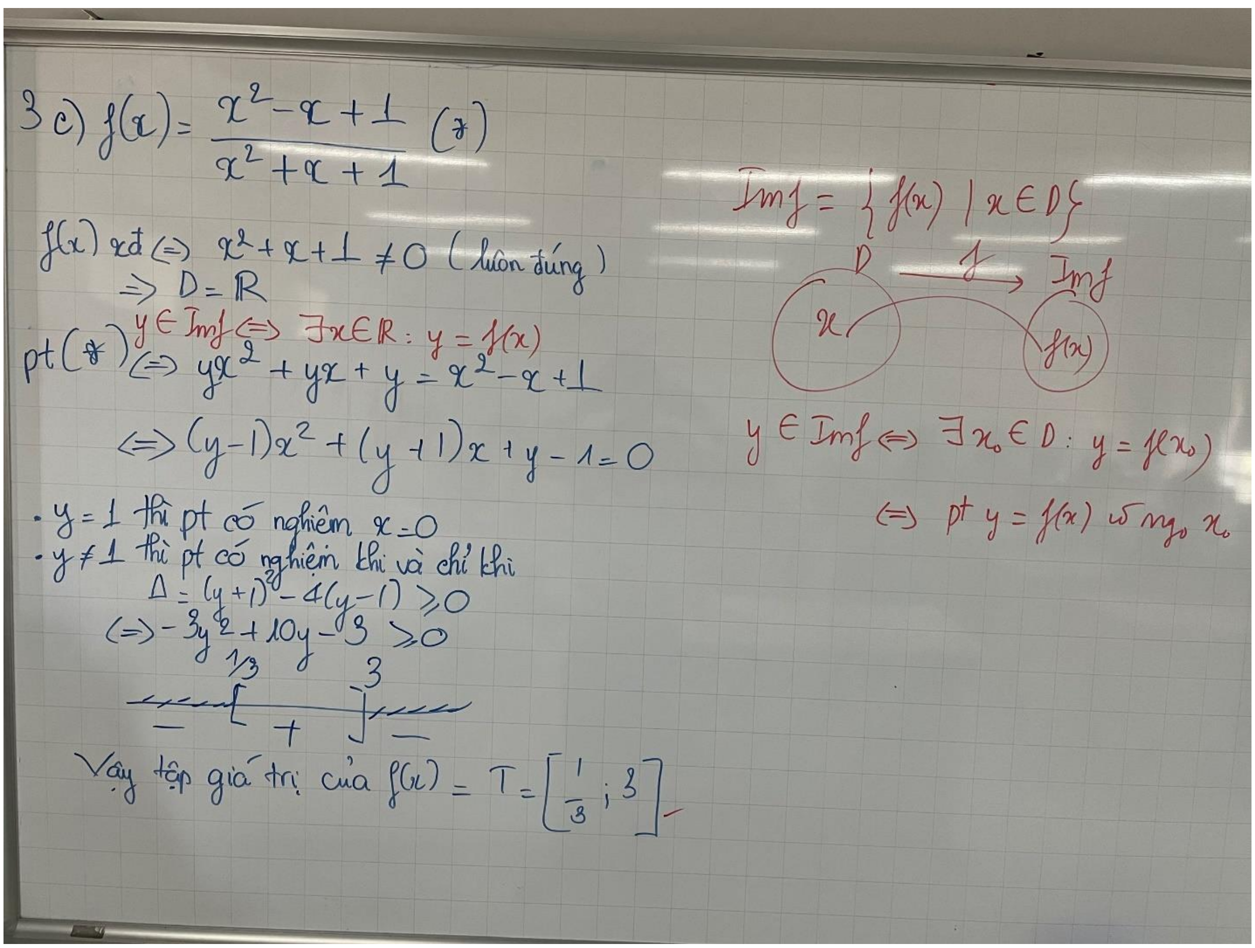
d. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{\lg(x-2)}$

2. Find the range of each function: tìm miền giá trị của mỗi hso sau

a. $f\left(x\right)=\dfrac{3x+5}{2x-1}$

b. $f\left(x\right)=x^2-2x$

c. $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$



3. Determine whether is even, odd, or neither xác định liệu rằng mỗi hàm là chẵn, lẻ hoặc cả 2 đều không

$a)\ f(x) = \dfrac{|x-1|+|x+1|}{x^3}$

$b)\ f(x) = \dfrac{1}{2}\left(a^x + a^{-x}\right)$

$c)\ f(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

$d)\ f(x) = \lg\dfrac{1+x}{1-x}$

$f(x) = \dfrac{|x-1|+|x+1|}{x^3}$

$f(x)$ xđ $\Leftrightarrow x^3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

TXĐ: $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\forall x \in D$, ta có $-x \in D$

$$f(-x) = \frac{|-x-1|+|-x+1|}{(-x)^3} = \frac{|-(x+1)|+|-(x-1)|}{-x^3} = -\frac{|x+1|+|x-1|}{x^3} = -f(x)$$

3/c/ $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

$f(x)$ xđ $\Leftrightarrow x+\sqrt{1+x^2} > 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} > -x \quad (*)$

$+\ x \geq 0 \Rightarrow (*)$ đúng

$+\ x < 0 \Rightarrow -x > 0$

$(*) \Leftrightarrow \left(\sqrt{1+x^2}\right)^2 > (-x)^2$

$\Leftrightarrow 1+x^2 > x^2$ (đúng)

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$f(-x) = \ln\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = \ln\left[\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2}+x}\right] = \ln\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\right] = -\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right) = -f(x)$$

4. Explain how the following graphs are obtained from the graph of $f(x)$ Giải thích các đồ thị dưới đây ntn để thu được đồ thi của f(x)

a. $f(x-4)$ b. $f(x)+3$ c. $f(x-2)-3$ d. $f(x+5)-4$

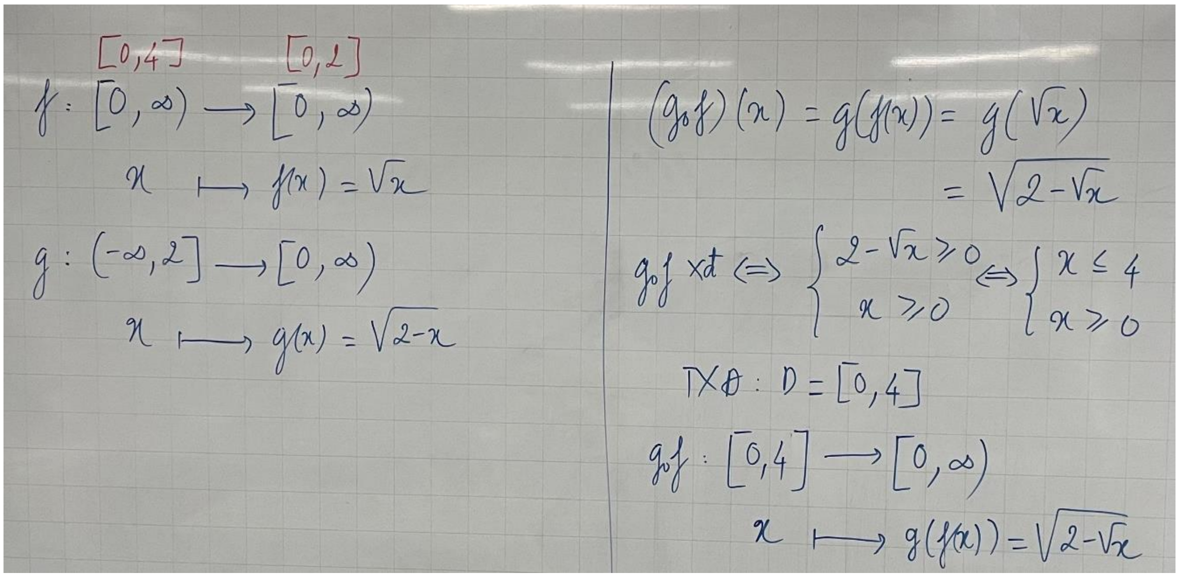
giả sử rằng đồ thị của f(x) được cho trước. Mô tả làm thế nào đồ thị của hàm y có thể thu được từ đồ thị của hàm f

5. Suppose that the graph of $f(x)=\sqrt{x}$ is given. Describe how the graph of the function

$y=\sqrt{x-1}+2=f(x-1)+2$ can be obtained from the graph of f.

6. Let $f(x)=\sqrt{x}$ and $g(x)=\sqrt{2-x}$. Find each function

a. $f_o g$ b. $g_0 f$ c. $g_o g$ d. $f_o f$



7. Let $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x}=x+1+\dfrac{1}{x}$. Find

a. $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ b. $f(2x-1)$

8. Use the table to evaluate each expression sử dụng cái bảng để đánh giá các biểu thức sau

a. f(g(1)) b. g(f(1)) c. f(f(1)) d. g(g(1))

e. $(g_o f)(3)=g(f(3))$ f. $(g_o f)(6)$

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

9. Evaluate the following limits đánh giá các giới hạn dưới đây

a. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x-3}$ b. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^6-1}{x^{10}-1}$ c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x+2x}{\tan 5x-\sin x}$ d. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^2-9}{h}$

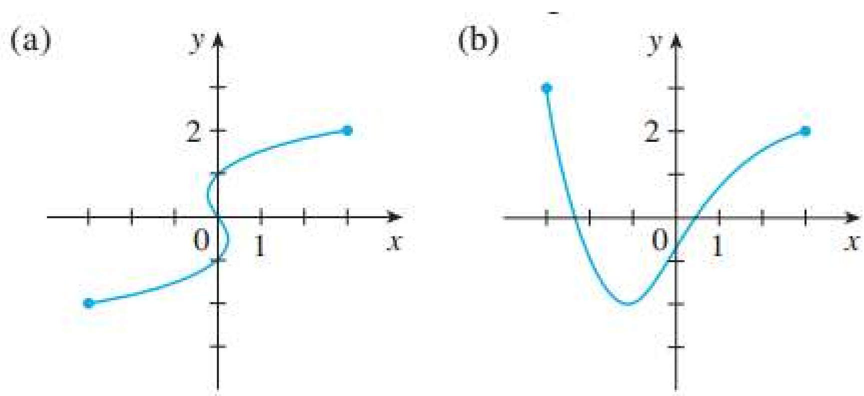
$$\lim_{x\to1}\frac{x^6-1}{x^{10}-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)}{\left(x^5-1\right)\left(x^5+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)\left(x^5+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^2+x+1)(x^3+1)}{(x^4+x^3+x^2+x+1)\left(x^5+1\right)}=\frac{(1+1+1)(1+1)}{(1+1+1+1+1)(1+1)}=\frac{3}{5}$$

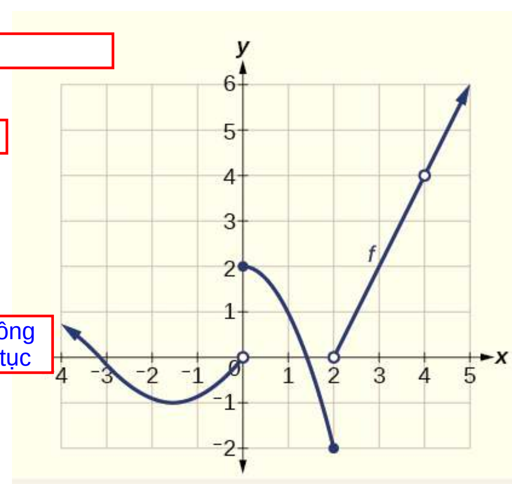
e. $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$ f. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-12}{x^3-3}$ g. $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}\right)$ h. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$

a-h b-g c-f d-e

10. Determine whether each curve is the graph of a function of x. If it is, state the domain and range of the function. Xác định liệu rằng mỗi đường cong có phải là đồ thị của hàm f hay không?. nếu phải thì phát biểu tập xác định và giá trị của hso



11. The graph of f is given. đồ thị của f được cho như sau



a. Find each limit, or explain why it does not exist.
tìm giới hạn, giải thích tại sao không tồn tại

i. $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ and $\lim\limits_{x\to0}f(x)$

ii. $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ and $\lim\limits_{x\to4}f(x)$

b. At what numbers is discontinuous? tại những số nào không thì hàm f không liên tục

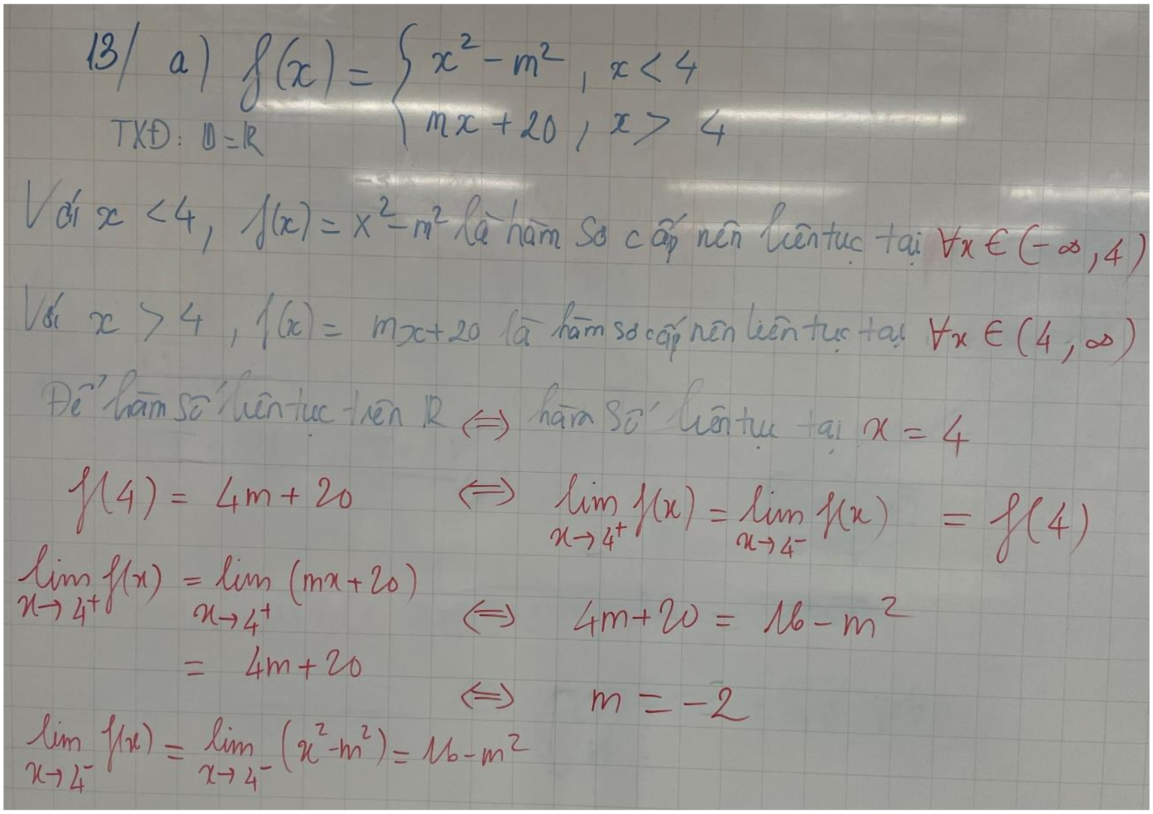
12. Determine where the function $f(x)$ is
xác định cái hso nào liên tục
continuous

a. $f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{x-2}$ b. $f(x)=\dfrac{x-9}{\sqrt{4x^2+4x+1}}$ c. $f(x)=\ln(2x+5)$

13. Find the constant m that makes f continuous on its domain
tìm hằng số m mà làm cho f liên tục trên txđ

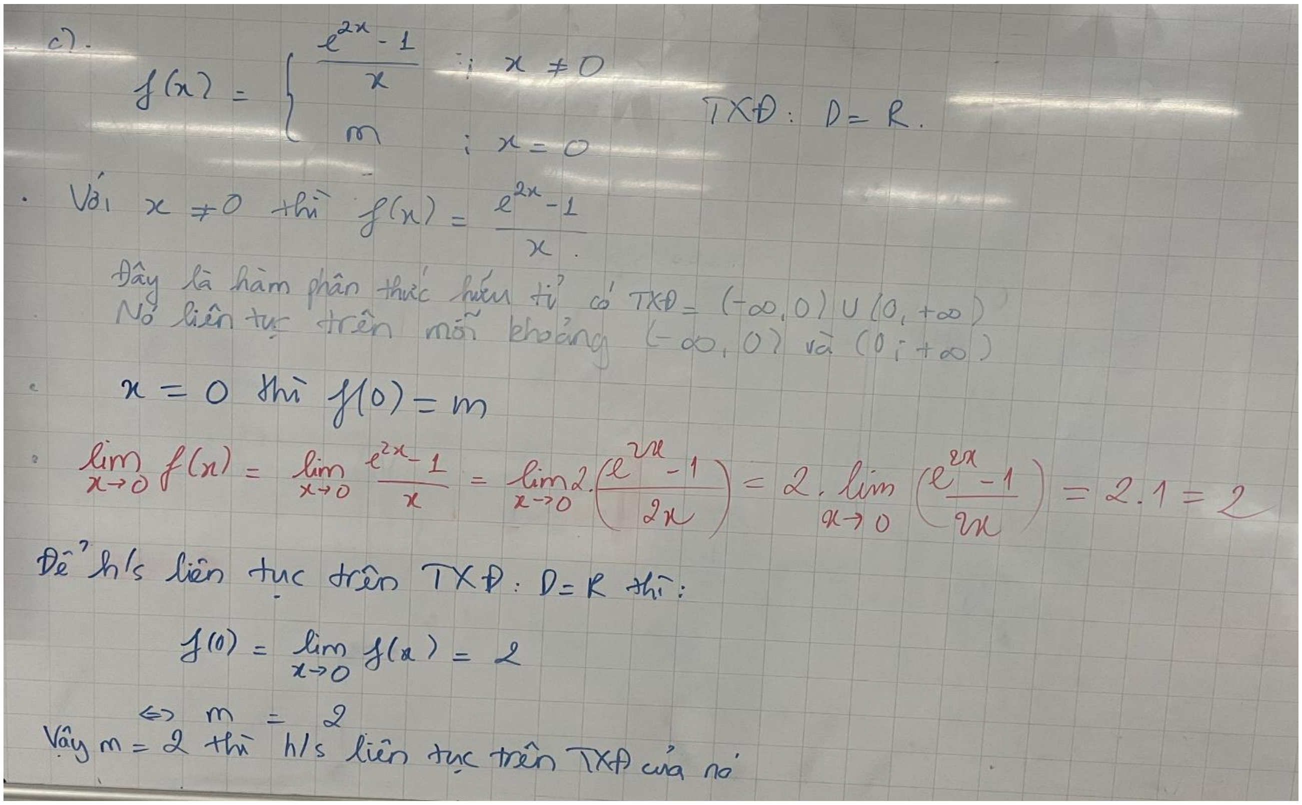
a. $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2-m^2, & x<4 \\ mx+20, & x\ge 4 \end{cases}$

b. $f\left(x\right)=\begin{cases} mx^2+2x, & x<2 \\ x^3-mx, & x\ge 2 \end{cases}$



c. $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{x}, & x\ne 0 \\ m, & x=0 \end{cases}$

d. $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\ne 1 \\ m+1, & x=1 \end{cases}$



c).

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{x} & ; x \neq 0 \\ m & ; x = 0 \end{cases}$$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

- Với $x \neq 0$ thì $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{x}$.

Đây là hàm phân thức hữu tỉ có TXĐ $= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Nó liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty, 0)$ và $(0; +\infty)$

- $x = 0$ thì $f(0) = m$

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 2.\left(\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\right) = 2.\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\right) = 2.1 = 2$

Để h/s liên tục trên TXĐ: $D = \mathbb{R}$ thì:

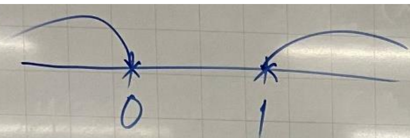
$f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$

$\Leftrightarrow m = 2$

Vậy $m = 2$ thì h/s liên tục trên TXĐ của nó

14. Find the numbers at which the function $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ 2x^2, & 1 \geq x \geq 0 \\ 2-x, & x > 1 \end{cases}$ is discontinuous.

tìm con số mà tại đó hs không liên tục



TXĐ : $D = \mathbb{R}$

* $x < 0$: $f(x) = x + 2$ là hssc nên $f(x)$ ltục trên $(-\infty, 0)$
* $x > 1$: $f(x) = 2 - x$ ——— $(1, \infty)$
* $0 < x < 1$: $f(x) = 2x^2$ ——— $(0, 1)$
* $x = 0$, $f(0) = 0$
* $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (2x^2) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \neq \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x + 2) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 0} f(x) \Rightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$

* $x = 1$, $f(1) = 2.1^2 = 2$
* $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2 - x) = 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \neq \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x^2) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 1} f(x) \Rightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$

Chapter 2: Derivatives

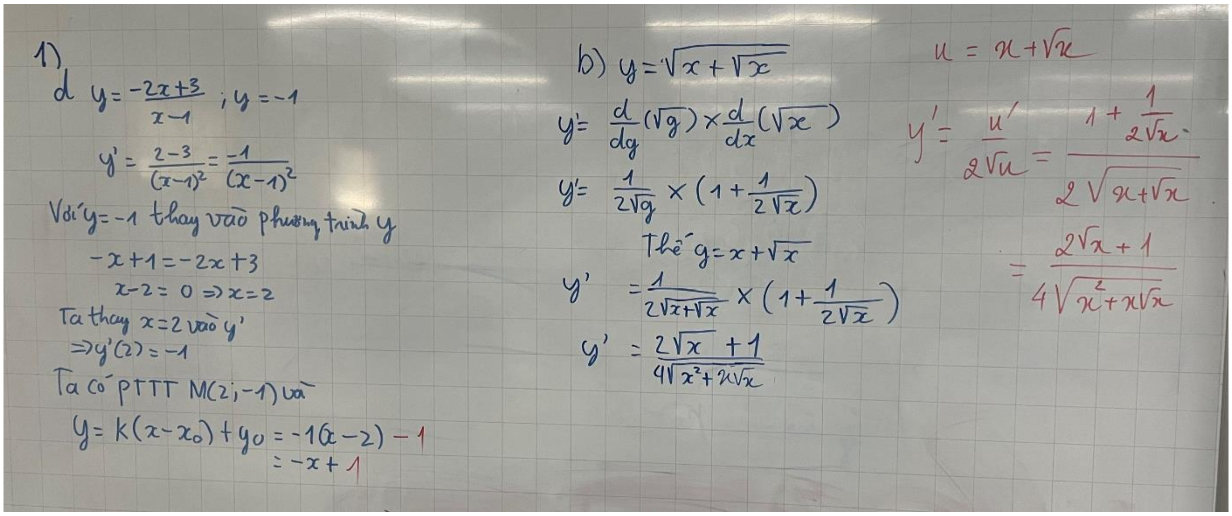
đạo hàm

Tìm 1 phương trình tiếp tuyến với đường con tại điểm cho trước

2. Find an equation of the tangent line to the curve at the given point:

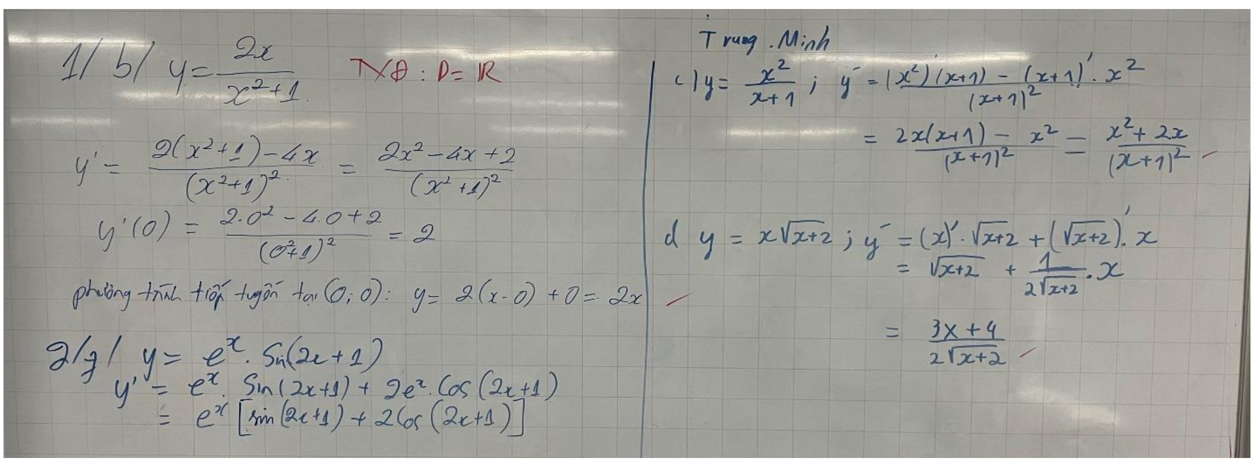
a. $y=\dfrac{x-1}{x-2}, \quad (3,2)$

b. $y=\dfrac{2x}{x^2+1}, \quad (0,0)$



c. $y=3-2x+x^2, \quad x=1$

d. $y=\dfrac{3-2x}{x-1}, \quad y=-1$



3. Find y'

a. $y=x^2-x\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}+2$

b. $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$

c. $y=\dfrac{x^2}{x+1}$

d. $y=x\sqrt{x+2}$

e. $y=\ln\left(x^2+1\right)-\dfrac{1}{x}$

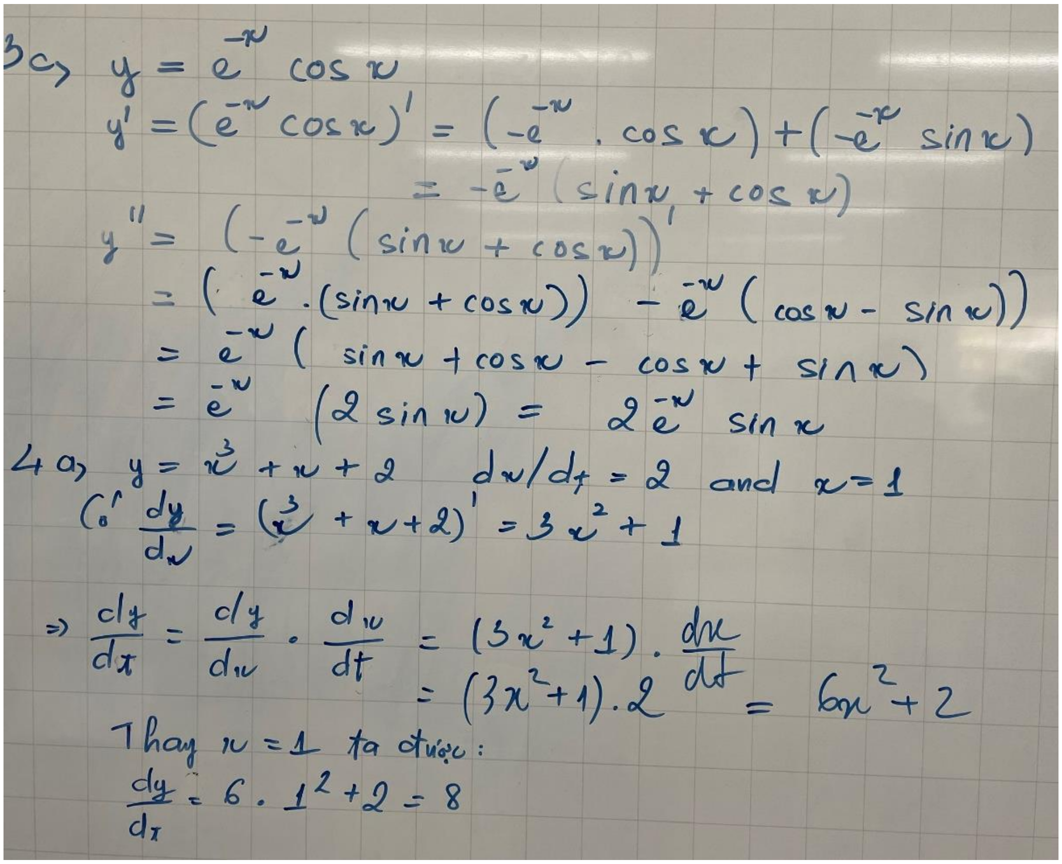
f. $y=e^x\sin\left(2x+1\right)$

4. Find y''

a. $y = xe^{3x-1}$ b. $y = \sqrt[3]{2x+1}$ c. $y = e^{-x}\cos x$

5. Find dy/dt for:

a. $y = x^3 + x + 2, dx/dt = 2$ and $x = 1$ b. $y = \ln x, dx/dt = 1$ and $x = e^2$



3c) $y = e^{-x} \cos x$

$y' = (e^{-x}\cos x)' = (-e^{-x} . \cos x) + (-e^{-x} \sin x)$

$= -e^{-x}(\sin x + \cos x)$

$y'' = (-e^{-x}(\sin x + \cos x))'$

$= (e^{-x}.(\sin x + \cos x)) - e^{-x}(\cos x - \sin x))$

$= e^{-x}(\sin x + \cos x - \cos x + \sin x)$

$= e^{-x}(2\sin x) = 2e^{-x}\sin x$

4a) $y = x^3 + x + 2$ $dx/dt = 2$ and $x = 1$

Có $\frac{dy}{dx} = (x^3 + x + 2)' = 3x^2 + 1$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} . \frac{dx}{dt} = (3x^2+1) . \frac{dx}{dt}$

$= (3x^2+1).2 = 6x^2 + 2$

Thay $x = 1$ ta được:

$\frac{dy}{dt} = 6 . 1^2 + 2 = 8$

c. $y = \tan\sqrt{t}$ and $t = \frac{\pi^2}{16}$ d. $\begin{cases} y = \sin\varphi \\ t = \cos\varphi \end{cases}$ and $\varphi = \frac{\pi}{3}$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{dy}{dt} . \frac{dt}{d\varphi} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dt}{d\varphi}} = \frac{\cos\varphi}{-\sin\varphi} = -\cot\varphi$$

6. Find dy for: $dy = y'(x)dx$

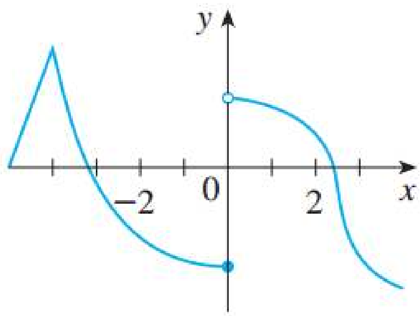
a. $y = \frac{1}{x^2+1}$ b. $y = \sqrt{x+1}, x = 3$ c. $y = \ln(x^2+1)$, $x = 1$ and $dx = 0.1$

$$dy = \left[\ln(x^2+1)\right]' dx = \frac{2x}{x^2+1}dx$$

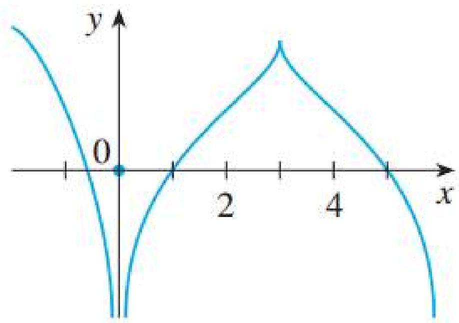
cho đồ thị. Tìm các số mà tại đó không khả vi

7. The graph of is given. State the numbers at which is not differentiable

a.



b.



8. A table of values for f, f', g and g' is given

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

a. If $h(x) = f(g(x))$, find $h'(1)$

b. If $H(x) = g_o f(x)$, find $H'(1)$

$h'(x) = \left[f(g(x))\right]' = f'(g(x)).g'(x)$

$\Rightarrow h'(1) = f'(g(1)).g'(1) = f'(2).g'(1) = 5.6 = 30$

c. If $F(x) = f_o f(x)$, find $F'(2)$

d. If $G(x) = g_o g(x)$, find $G'(3)$

9. If $h(x) = \sqrt{4+3f(x)}$, where $f(1) = 7, f'(1) = 4$, find $h'(1)$.

$$h'(x) = \left(\sqrt{4+3f(x)}\right)' = \frac{3f'(x)}{2\sqrt{4+3f(x)}}$$

10. For the circle $x^2 + y^2 = 25$.

a. Find dy/dx

b. Find an equation of the tangent to the circle at the point (3, 3).

11. Let $(L): x^3 + y^3 = 6xy$

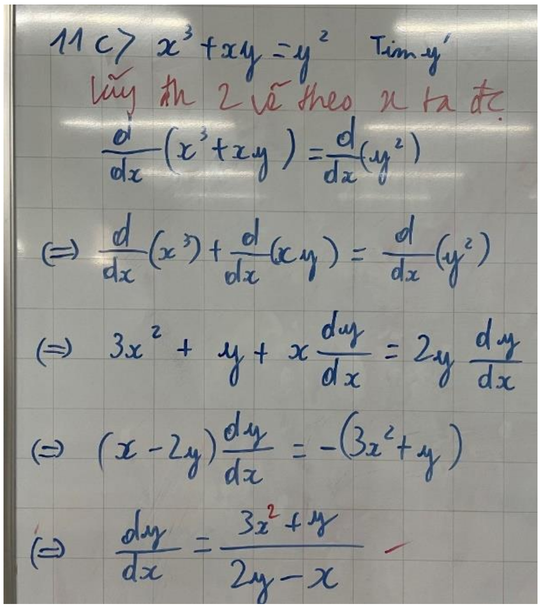
a. Find dy/dx $\quad y' = \dfrac{2y - x^2}{y^2 - 2x} \Rightarrow y'(3) = -1$

b. Find an equation of tangent to the curve (L) at the point (3, 3)

$$y = y'(3)(x-3) + y(3)$$
$$\Rightarrow y = -1(x-3) + 3 = -x + 6$$

12. Find y' by implicit differentiation $\boxed{\text{Tính đạo hàm của hàm ẩn}}$

a. $x^4 + y^4 = 16x + y$ b. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ c. $x^3 + xy = y^2$



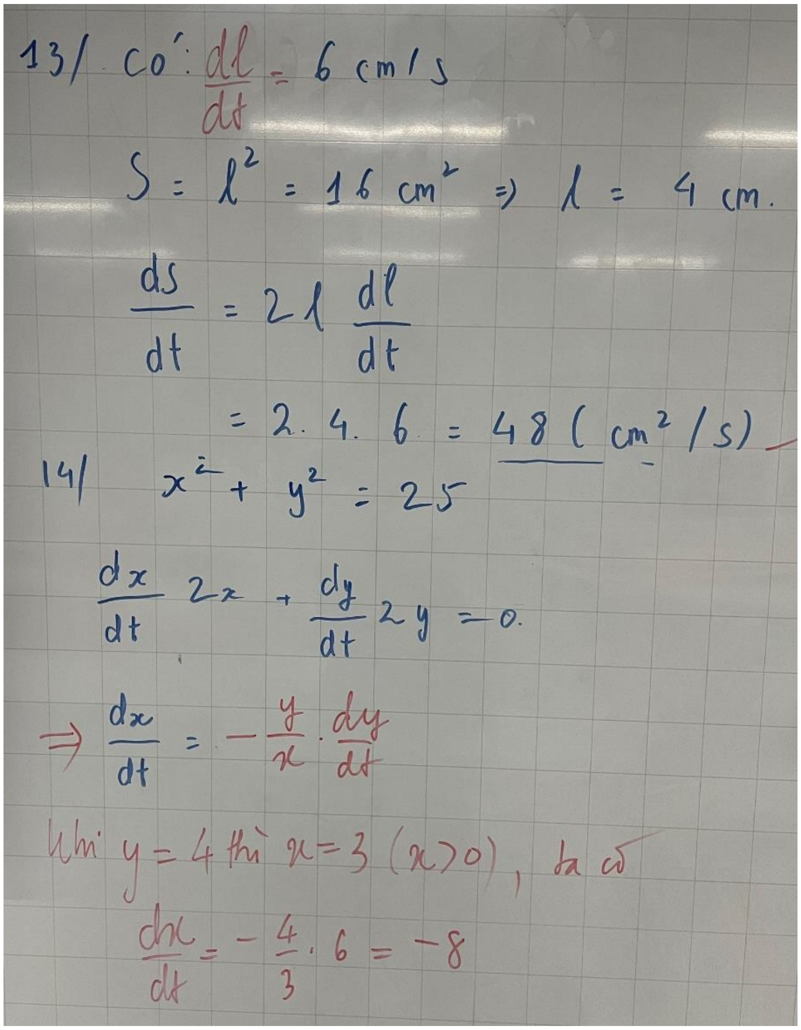
13. Find f' in terms of g'

a. $f(x) = g(\sin 2x)$ b. $f(x) = g\left(e^{1-3x}\right)$

mỗi cạnh của hvuong tăng với tốc độ 6cm/s. Thì tốc độ tăng của diện tích hvuong là gì? khi dt là 16cm2

14. Each side of a square is increasing at a rate of 6 cm/s. At what rate is the area of the square increasing when the area of the square is 16 cm^2 ?

15. If $x^2 + y^2 = 25$ and $dy/dt = 6$, find dx/dt when y = 4 and x > 0.



13/ Có: $\frac{dl}{dt} = 6$ cm/s

$S = l^2 = 16$ cm^2 $\Rightarrow$ $l = 4$ cm.

$\frac{dS}{dt} = 2l\frac{dl}{dt}$

$= 2.4.6 = \underline{48 \text{ (cm}^2/\text{s)}}$

14/ $x^2 + y^2 = 25$

$\frac{dx}{dt}2x + \frac{dy}{dt}2y = 0.$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{y}{x}.\frac{dy}{dt}$

Khi $y = 4$ thì $x = 3$ $(x > 0)$, ta có

$\frac{dx}{dt} = -\frac{4}{3}.6 = -8$

16. If $z^2 = x^2 + y^2 \quad (z > 0)$, $dx/dt = 2, dy/dt = 3$, find dz/dt when $x = 5, y = 12$

lấy đạo hàm 2 vế theo t ta được

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dt}{dt}$$

khi $x = 5, y = 12$ thì $z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \ (z > 0)$

vậy $\frac{dz}{dt} = \frac{x}{z}.\frac{dx}{dt} + \frac{y}{z}.\frac{dt}{dt} = \frac{5}{13}.2 + \frac{12}{13}.3 = \frac{46}{13}$

17. Find the linearization $L(x)$ of the function at a. tìm tuyến tính hóa L(x) của hàm số tại điểm a.

a. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 + x}}, \qquad a = 2$

b. $f(x) = \sqrt[3]{5 - x}, \qquad a = -3$

$$f'(x)=\left[(2+x)^{-\frac{1}{2}}\right]'=-\frac{1}{2}(2+x)^{-3/2}=-\frac{1}{2\sqrt{(2+x)^3}}$$

$$L(x)=f'(2)(x-2)+f(2)=-\frac{1}{2.8}(x-2)+\frac{1}{2}=-\frac{1}{16}x+\frac{5}{8}$$

18. The equation of motion is $s(t)=3\sin t-4\cos t+1$ for a particle, where s is in meters and t is in seconds. Find the acceleration (in m/s^2) after 3 seconds.

$$v(t)=s'(t)=3\cos t+4\sin t$$

$$a(t)=v'(t)=4\cos t-3\sin t$$

Phương trình chuyển động là s.. đối với hạt, trong đó s tính bằng m và t tính bằng giây. Tìm gia tốc sau 3 giây

Ứng dụng của vi phân

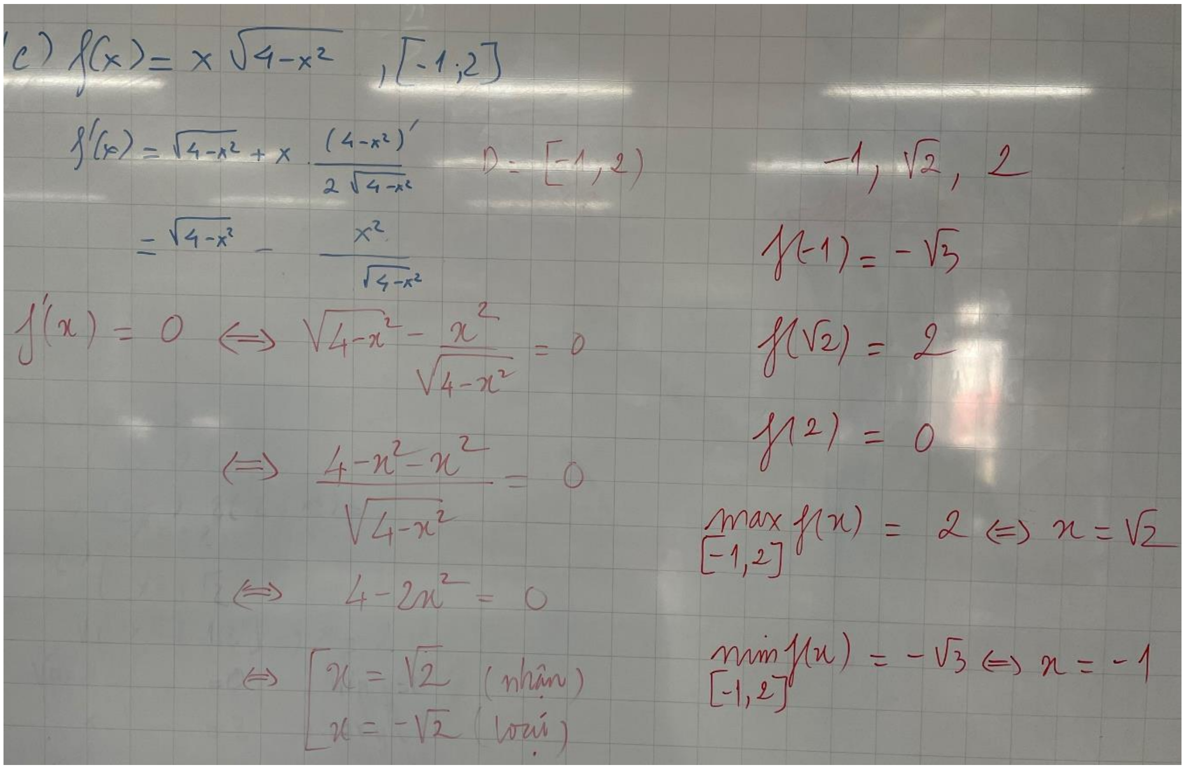
Chapter 3: Applications of Differentiation

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên khoảng

1. Find the absolute maximum and absolute minimum values of the function on the given interval

a. $f(x)=3x^2-12x+5,[0;3]$ b. $f(x)=x^3-3x+5,\quad [0;3]$

c. $f(x)=x\sqrt{4-x^2},\quad [-1;2]$ d. $f(x)=x-\ln x,\quad \left[\frac{1}{2};2\right]$



2. Find the critical numbers of the function

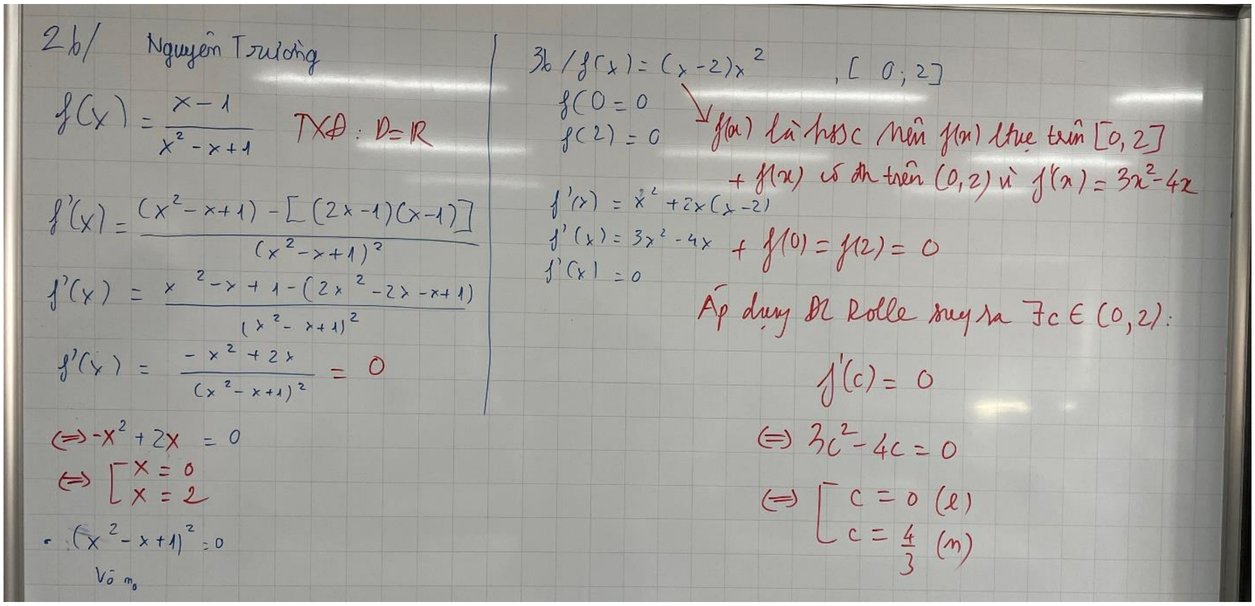
Tìm điểm tới hạn của hàm số

a. $f(x)=5x^2+4x$ b. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$ c. $f(x)=x\ln x$

3. Find all numbers that satisfy the conclusion of the Rolle's Theorem

a. $f(x)=x\sqrt{x+2},\quad [-2;0]$ b. $f(x)=(x-2)x^2,\quad [0;2]$

Tìm tất cả các số thõa kết luận định lí Rolle's

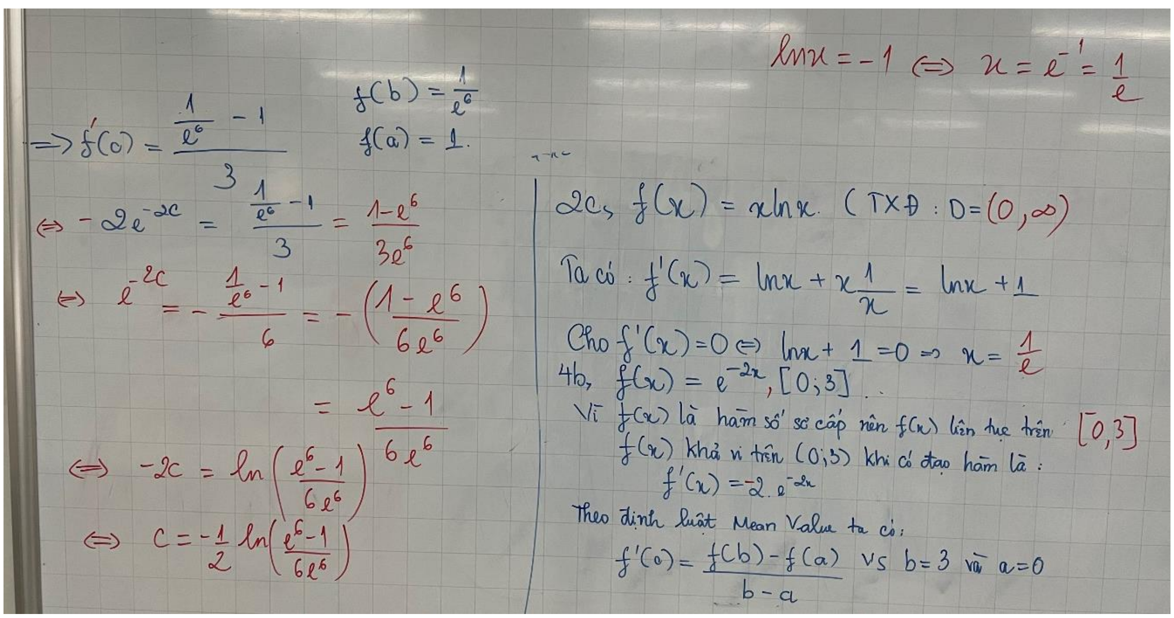


4. Find all numbers that satisfy the conclusion of the Mean Value Theorem

Thõa mản kết luận

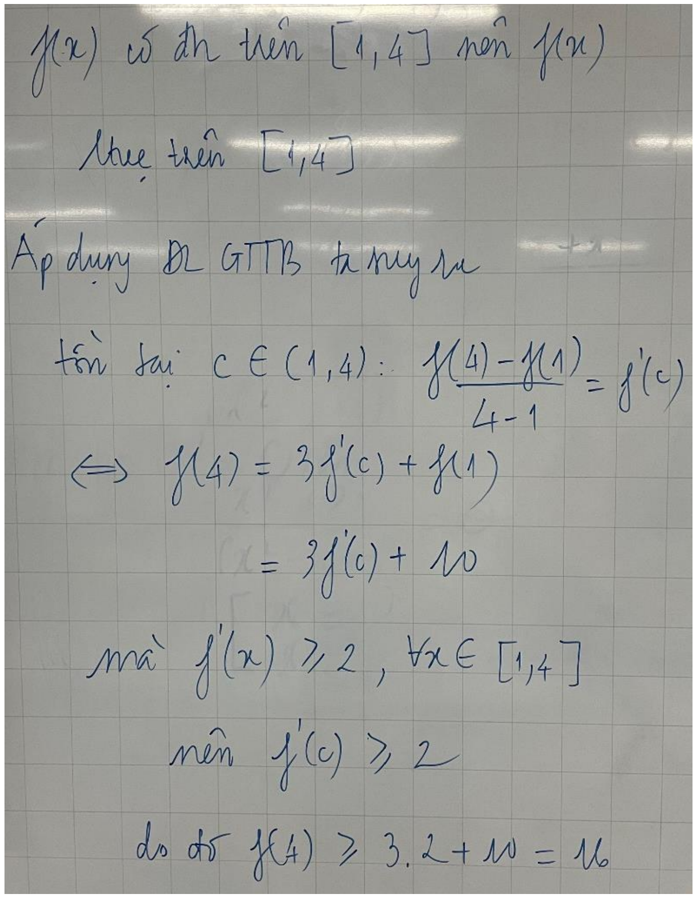
định lí giá trị trung bình

a. $f\left(x\right)=3x^2+2x+5,\ \left[-1;1\right]$ b. $f\left(x\right)=e^{-2x},\ \left[0;3\right]$



5. If $f\left(1\right)=10$ and $f'\left(x\right)\geq 2, \forall x\in\left[1;4\right]$, how small can $f\left(4\right)$ possibly be?

f(4) có thể nhỏ đến mức nào?


f(x) có đh trên [1,4] nên f(x)

ltục trên [1,4]

Áp dụng ĐL GTTB ta suy ra

tồn tại $c \in (1,4)$: $\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1} = f'(c)$

$\Leftrightarrow f(4) = 3f'(c) + f(1)$

$= 3f'(c) + 10$

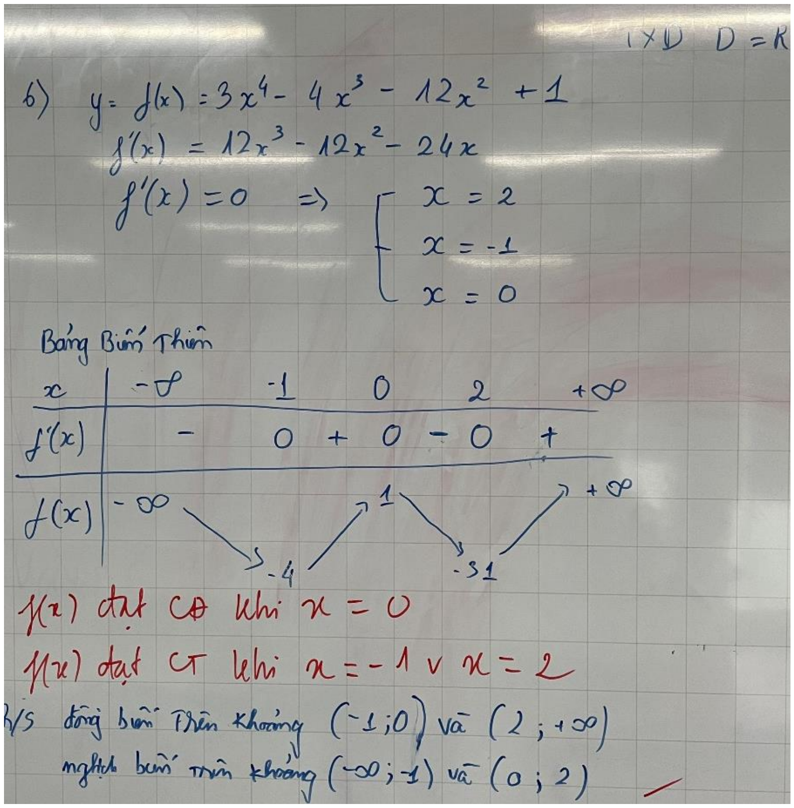
mà $f'(x) \geq 2$, $\forall x \in [1,4]$

nên $f'(c) \geq 2$

do đó $f(4) \geq 3.2 + 10 = 16$

6. Find where the function $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1$ is increasing and where it is decreasing.

Tìm khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số



7. Find the inflection points for the function

điểm uốn

a. $f(x) = x^4 - 4x + 1$ b. $f(x) = x^6$ c. $f(x) = xe^x$

8. Find $f(x)$ for $f'(x) = \sqrt{2x+1}$ and $f(0) = 1$.

$$\int \sqrt{2x+1}dx = \int (2x+1)^{1/2} dx = \frac{1}{2}\frac{(2x+1)^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C$$

9. Find the point on the parabola $y^2 = 2x$ that is closest to the point $(1;4)$

tìm điểm trên parabole .. sao cho gần điểm (1; 4)

$$M\left(\frac{y^2}{2}, y\right) \in (P)$$

$$AM = \sqrt{\left(\frac{y^2}{2} - 1\right)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{\frac{y^4}{4} - 8y + 17}$$

$$AM \to \min \Leftrightarrow AM^2 \to \min \Leftrightarrow \frac{y^4}{4} - 8y + 17 \to \min$$

$$f(y) = \frac{y^4}{4} - 8y + 17$$

$$f'(y) = y^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow y = 2$$

$$f''(y) = 3y^2 \geq 0 \Rightarrow f''(2) = 12 > 0$$

$$\Rightarrow f(y) \to \min \Leftrightarrow y = 2$$

$$\Rightarrow M(2,2)$$

tìm 2 số mà hiệu giữa chúng là 100 và tích là nhỏ nhất

10. Find two numbers whose difference is 100 and whose product is a minimum.

11. Find two positive numbers whose product is 100 and whose sum is a minimum.

tìm 2 số dương mà tích của nó là 100 và tổng là bé nhất

sử dụng phương pháp newton với giá trị gần đúng ban đầu được chỉ định là x1 để tìm x3

12. Use Newton's method with the specified initial approximation x_1 to find x_3

a. $x^3 + 2x - 4 = 0,\ x_1 = 1$

b. $x^5 + 2 = 0,\ x_1 = -1$

c. $\ln\left(x^2+1\right) - 2x - 1 = 0,\ \ x_1 = 1$

d. $\ln\left(4 - x^2\right) = x,\ x_1 = 1$

$$x^3 + 2x - 4 = 0,\ x_1 = 1$$

$$f(x) = x^3 + 2x - 4 \ \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2 \neq 0\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^{\ 3} + 2x_n - 4}{3x_n^{\ 2} + 2} = \frac{2x_n^{\ 3} + 4}{3x_n^{\ 2} + 2}\ (n \geq 1)$$

$$x_2 = \frac{2x_1^{\ 3} + 4}{3x_1^{\ 2} + 2} = \frac{2.1 + 4}{3.1 + 2} = \frac{6}{5} = 1.2$$

$$x_3 = \frac{2x_2^{\ 3} + 4}{3x_2^{\ 2} + 2} = \frac{2.\left(\frac{6}{5}\right)^3 + 4}{3.\left(\frac{6}{5}\right)^2 + 2} = \frac{466}{395} \approx 1.1797$$

14. Find the most general anti-derivative of the function.

Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau

a. $f\left(x\right) = 6x^2 - 2x + 3$

b. $f\left(x\right) = \sqrt[6]{x} + \frac{1}{x^2}$

$$\int f(x)dx = \int\left(\sqrt[6]{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1} - \frac{1}{x} + C = \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{1}{x} + C$$

c. $f\left(x\right) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x}$ d. $f\left(x\right) = 2x\left(x^2 + 1\right)$

15. Find the anti-derivative of that satisfies the given condition

Tìm nguyên hàm mà thỏa mãn điều kiện cho trước

a. $f\left(x\right) = 5x^4 - 2x^5, F\left(0\right) = 4$ b. $f\left(x\right) = 4 - \dfrac{2x}{x^2 + 1}, F\left(0\right) = 1$

$$F(x) = \int\left(4 - \frac{2x}{x^2+1}\right)dx = \int 4dx - \int\frac{2x}{x^2+1}dx = 4x - \int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx = 4x - \ln(x^2+1) + C$$

16. A particle is moving with the given data. Find the position of the particle

Một hạt đang di chuyển với dữ liệu cho trước. Tìm vị trí của các hạt

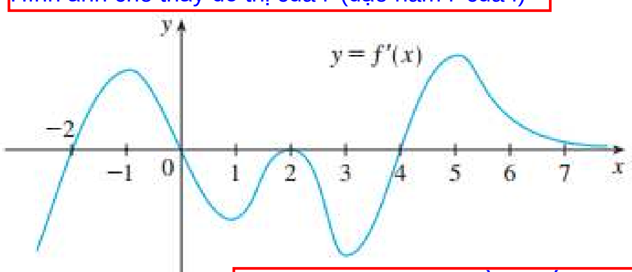
a. $v\left(t\right) = \sin t - \cos t,\ s\left(0\right) = 0$

b. $v\left(t\right) = 10\sin t + 3\cos t,\ s\left(\pi\right) = 0$

c. $v\left(t\right) = 10 + 3t - 3t^2,\ s\left(2\right) = 10$

17. The figure shows the graph of the derivative f' of a function f

Hình ảnh cho thấy đồ thị của f' (đạo hàm f' của f)

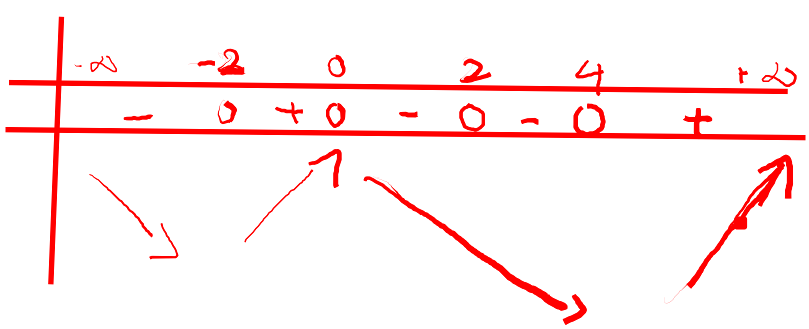


Trên khoảng nào thì f đồng biến hoặc nghịch biến

a. On what intervals is f increasing or decreasing?

b. For what values of x does f have a local maximum or minimum?

Với giá trị nào của x thì f đạt cực đại hoặc cực tiểu



Max y: x = 0

Min y: x = -2, x = 4

Chapter 4 - 6: Integration

Tích phân

1. Estimate the area under the graph of $y = f(x)$ using 6 rectangles and left endpoints

Ước lượng diện tích bên dưới đồ thị bằng cách sử dụng 6 hình chữ nhật của phương pháp left endpoints

a. $f(x) = \dfrac{1}{x} + x$, $x \in [1,4]$

b. $f(x) = x^2 - 2$, $x \in [-1,2]$

$$S = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

$$S = \int_{-1}^{2} |x^2 - 2|\, dx$$

Chia $[-1,2]$ thành 6 đoạn con, mỗi đoạn có độ dài $\Delta x = \dfrac{2-(-1)}{6} = \dfrac{1}{2} = 0,5$ bởi các điểm

$x_0 = -1,\ x_1 = -0.5,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0.5,\ x_4 = 1,\ x_5 = 1.5,\ x_6 = 2$

[-1 , -0.5] ; [-0.5 , 0] ; [0 , 0.5] ; [0.5 , 1] ; [1 , 1.5] ; [1.5 , 2]

1b) Trên mỗi đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,2,3,4,5,6)$ chọn $x_i^* = x_{i-1}$

$$S = \int_{-1}^{2} |x^2 - 2|\, dx \approx \sum_{i=1}^{6} \left|\left(x_i^*\right)^2 - 2\right| \Delta x = \sum_{i=1}^{6} \left|x_{i-1}^2 - 2\right| \Delta x = \Delta x \left(\left|x_0^2 - 2\right| + \left|x_1^2 - 2\right| + \ldots + \left|x_5^2 - 2\right|\right)$$

3b) Trên mỗi đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,2,3,4,5,6)$ chọn $x_i^* = x_i$

$$S = \int_{-1}^{2} |x^2 - 2|\, dx \approx \sum_{i=1}^{6} \left|\left(x_i^*\right)^2 - 2\right| \Delta x = \sum_{i=1}^{6} \left|x_i^2 - 2\right| \Delta x = \Delta x \left(\left|x_1^2 - 2\right| + \left|x_2^2 - 2\right| + \ldots + \left|x_6^2 - 2\right|\right)$$

c. A table of values for f is given

Một bảng có giá trị của f được cho trước

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	5	6	3	2	7	1	2

3. Repeat part (1) using right endpoints

Lập lại part 1 sử dụng pp right endpoints

4. For the function $f(x) = x^3, x \in [-2,2]$. Estimate the area under the graph of using four approximating rectangles and taking the sample points to be

Cho hàm số .. Ước lượng diện tích bên dưới của đồ thị bằng cách sử dụng 4 xấp xĩ hình chữ nhật và cái điểm mẫu

a. Right endpoints

b. Left endpoints

c. Midpoints

$$S = \int_{-2}^{2} |x^3| dx$$

Chia $[-2,2]$ thành 4 đoạn con, mỗi đoạn có độ dài $\Delta x = \frac{2-(-2)}{4} = 1$ bởi các điểm

$x_0 = -2,\ x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2$

[-2,-1] ; [-1,0] ; [0,1] ; [1,2]

a) Trên mỗi đoạn con $[x_{i-1}, x_i]\ (i = 1,2,3,4)$ chọn $x_i^* = x_i$

$$S = \int_{-2}^{2} |x^3| dx \approx \sum_{i=1}^{4} \left|\left(x_i^*\right)^3\right| \Delta x = \sum_{i=1}^{4} |x_i^3| \Delta x = \left(|x_1^3| + |x_2^3| + |x_3^3| + |x_4^3|\right) \Delta x = \ldots$$

b) Trên mỗi đoạn con $[x_{i-1}, x_i]\ (i = 1,2,3,4)$ chọn $x_i^* = x_{i-1}$

$$S = \int_{-2}^{2} |x^3| dx \approx \sum_{i=1}^{4} \left|\left(x_i^*\right)^3\right| \Delta x = \sum_{i=1}^{4} |x_{i-1}^3| \Delta x = \left(|x_0^3| + |x_1^3| + |x_2^3| + |x_3^3|\right) \Delta x = \ldots$$

c) Trên mỗi đoạn con $[x_{i-1}, x_i]\ (i = 1,2,3,4)$ chọn $x_i^* = \overline{x_i} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$

$$S = \int_{-2}^{2} |x^3| dx \approx \sum_{i=1}^{4} \left|\left(x_i^*\right)^3\right| \Delta x = \sum_{i=1}^{4} |\overline{x_i}|^3 \Delta x = \left(|\overline{x_1}|^3 + |\overline{x_2}|^3 + |\overline{x_3}|^3 + |\overline{x_4}|^3\right) \Delta x = \ldots$$

5. Use (a) the Trapezoidal Rule, (b) the Midpoint Rule, and (c) Simpson's Rule to approximate the given integral with the specified value of *n*.

sử dụng (a) phương pháp hình thang, pp midpoints và pp simpson để sấp xĩ các tích phân cho trước với giá trị cụ thể của n.

a. $\int_0^3 \sqrt{x} dx, \quad n = 4$ b. $\int_1^3 \frac{\sin x}{x} dx \quad , n = 6$

6. Let $I = \int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 1}$. Find the approximations L_4, R_4, M_4, T_4 and S_4 for I.

Tìm sấp xĩ

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{x^2+1} \qquad f(x) = \frac{1}{x^2+1} \text{ ltục trên } [0, 2]$$

$$\frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{4},\ \frac{7}{4}$$

$$0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2 \qquad \Delta x = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\left[0, \tfrac{1}{2}\right];\ \left[\tfrac{1}{2}, 1\right];\ \left[1, \tfrac{3}{2}\right];\ \left[\tfrac{3}{2}, 2\right]$$

$$I \approx L_4 = \left[f(0) + f\left(\tfrac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\tfrac{3}{2}\right)\right] \cdot \Delta x \approx$$

$$I \approx R_4 = \left[f\left(\tfrac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\tfrac{3}{2}\right) + f(2)\right] \cdot \Delta x \approx$$

$$I \approx M_4 = \left[f\left(\tfrac{1}{4}\right) + f\left(\tfrac{3}{4}\right) + f\left(\tfrac{5}{4}\right) + f\left(\tfrac{7}{4}\right)\right] \cdot \Delta x \approx$$

$$I \approx T_4 = \frac{\Delta x}{2} \cdot \left[f(0) + 2f\left(\tfrac{1}{2}\right) + 2f(1) + 2f\left(\tfrac{3}{2}\right) + f(2)\right] \approx$$

$$I \approx S_4 = \frac{\Delta x}{3} \cdot \left[f(0) + 4f\left(\tfrac{1}{2}\right) + 2f(1) + 4f\left(\tfrac{3}{2}\right) + f(2)\right] \approx$$

7. Find the derivative of the function $g(x) = \int_0^x \sqrt{t^2+1}\,dt$

Tìm đạo hàm của hàm g(x)

8. Find g'

a. $g(x) = \int_1^{x^4} \frac{1}{\cos t}\,dt$

b. $g(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin u}{u}\,du$

c. $g(x) = \int_{2x}^{x^2+x+2} \frac{e^t}{t}\,dt$

d. $g(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \left(1+v^2\right)^{10}\,dv$

$$g'(x)=\left(\int_{\sin x}^{\cos x}\left(1+v^2\right)^{10}dv\right)'=(\cos x)'.\left(1+\cos^2 x\right)^{10}-(\sin x)'.\left(1+\sin^2 x\right)^{10}$$
$$=-\sin x\left(1+\cos^2 x\right)^{10}-\cos x\left(1+\sin^2 x\right)^{10}$$

9. Find the average value of the function on the given interval

Tìm các giá trị trung bình của các hàm số trên khoảng cho trước dưới đây

a. $f(x)=x^2,\quad [-1,1]$ b. $f(x)=\frac{1}{x},\quad [1,5]$

c. $f(x)=x\sqrt{x},\ [1,4]$ d. $f(x)=x\ln x,\left[1,e^2\right]$

$$f_{ave}=\frac{1}{e^2-1}\int_1^{e^2}x\ln x dx$$

Tính $I=\int_1^{e^2}x\ln x dx$

$$u=\ln x\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$$
$$dv=xdx\Rightarrow v=\frac{x^2}{2}\quad \ldots\ldots$$

Một hạt di chuyển dọc theo 1 đường để tốc độ của nó tại t là phương trình v(t)

10. A particle moves along a line so that its velocity at time t is $v(t) = t^2 - t - 6$ (m/s)

Tìm sự dịch chuyển của hạt trong khoảng thời gian

a. Find the displacement of the particle during the time period $1 \le t \le 4$

Tìm khoảng cách đã đi trong khoảng thời gian này

b. Find the distance traveled during this time period

11. Suppose the acceleration function and initial velocity are $a(t)= t + 3$ (m/s^2), $v(0)=5$ (m/s). Find the velocity at time t and the distance traveled when $0 \le t \le 5$.

Giả sử hàm gia tốc và vận tốc ban đầu là a(t), v(0). Tìm vận tốc tại thời điểm t và khoảng đã đi khi ...

$$v(t)=\int a(t)dt=\int(t+3)dt=\frac{t^2}{2}+3t+C$$
$$v(0)=5\Rightarrow C=5$$
$$\Rightarrow v(t)=\frac{t^2}{2}+3t+5$$
$$d=\int_0^5|v(t)|dt=\int_0^5\left|\frac{t^2}{2}+3t+5\right|dt=\int_0^5\left(\frac{t^2}{2}+3t+5\right)dt \text{ vì } v(t)=\frac{t^2}{2}+3t+5>0,\forall t\in[0,5]$$

Một hạt di chuyển theo 1 đường thẳng với hàm vận tốc v(t)=...được đo bằng m/s. Tìm dịch chuyển và khoảng cách đi qua bởi các hạt trong suốt khoảng thời gian t...

12. A particle moves along a line with velocity function $v(t)=t^2-t$, where is measured in meters per second. Find the displacement and the distance traveled by the particle during the time interval $t\in[0,2]$.

$$s=\int_0^2 v(t)dt=\int_0^2 (t^2-t)dt=...$$

$$d=\int_0^2 |v(t)|dt=\int_0^2 |t^2-t|dt$$

$$v(t)=t^2-t=t(t-1)\Rightarrow\begin{cases}v(t)\geq 0,\forall t\in[1,2]\\ v(t)\leq 0,\forall t\in[0,1]\end{cases}$$

$$d=\int_0^2 |v(t)|dt=\int_0^2 |t^2-t|dt=\int_0^1 |t^2-t|dt+\int_1^2 |t^2-t|dt=\int_0^1 (t-t^2)dt+\int_1^2 (t^2-t)dt=....$$

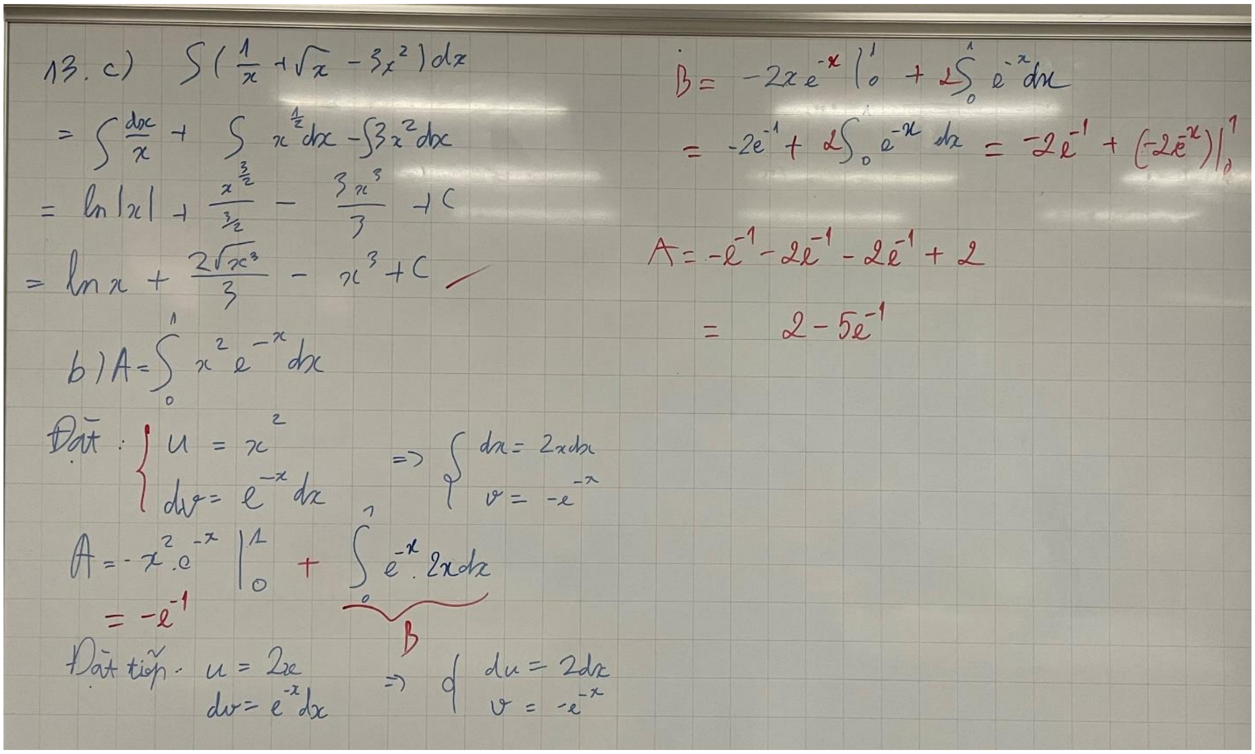
13. Evaluate the integral Tìm giá trị các tích phân sau

a. $\int_0^2 x^2.\sqrt{x^3+1}\,dx$ b. $\int xe^{x^2}dx$ c. $\int\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}-3x^2\right)dx$

d. $\int_0^1 y\left(1+y^2\right)^5 dy$ e. $\int\frac{\ln x}{x}dx$ f. $\int\frac{t}{t^2+1}dt$

14. Evaluate the integral

a. $\int xe^x dx$ b. $\int_0^1 x^2e^{-x}dx$ c. $\int x\sin x dx$



d. $\int \ln x dx$ e. $\int_1^e x \ln x dx$ f. $\int e^{\sqrt{x}} dx$

$I = \int e^{\sqrt{x}} dx$

$t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$

$I = 2\int te^t dt$

15. Suppose $f(x)$ is differentiable, f(1) = 4 and $\int_0^1 f(x) dx = 5$. Find $\int_0^1 xf'(x) dx$

Giả sử f(x) khả vi (tức là có đạo hàm)

16. Suppose $f(x)$ is differentiable, $f(1) = 3$, $f(3) = 1$ and $\int_1^3 xf'(x) dx = 13$. What is the average value of f on the interval [1,3]?

Tìm giá trị trung bình của f trên khoảng đóng [1; 3]

$f_{ave} = \frac{1}{3-1} \int_1^3 f(x) dx$

$$\int_1^3 xf'(x)dx = xf(x)\Big|_1^3 - \int_1^3 f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_1^3 f(x)dx = xf(x)\Big|_1^3 - \int_1^3 xf'(x)dx = 3f(3) - f(1) - 13 = -13$$

$$\Rightarrow f_{ave} = \frac{1}{3-1}\int_1^3 f(x)dx = -\frac{13}{2}$$

17. Let $f(x) = \begin{cases} -x-1, & -3 \le x \le 0 \\ -\sqrt{1-x^2}, & 0 < x \le 1 \end{cases}$. Evaluate $\int_{-3}^{1} f(x)dx$

$$\int_{-3}^{1} f(x)dx = \int_{-3}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{-3}^{0} (-x-1)dx + \int_{0}^{1}\left(-\sqrt{1-x^2}\right)dx$$

$$I = \int_0^1 \left(-\sqrt{1-x^2}\right)dx$$

$$x = \cos t \Rightarrow dx = -\sin t dt$$

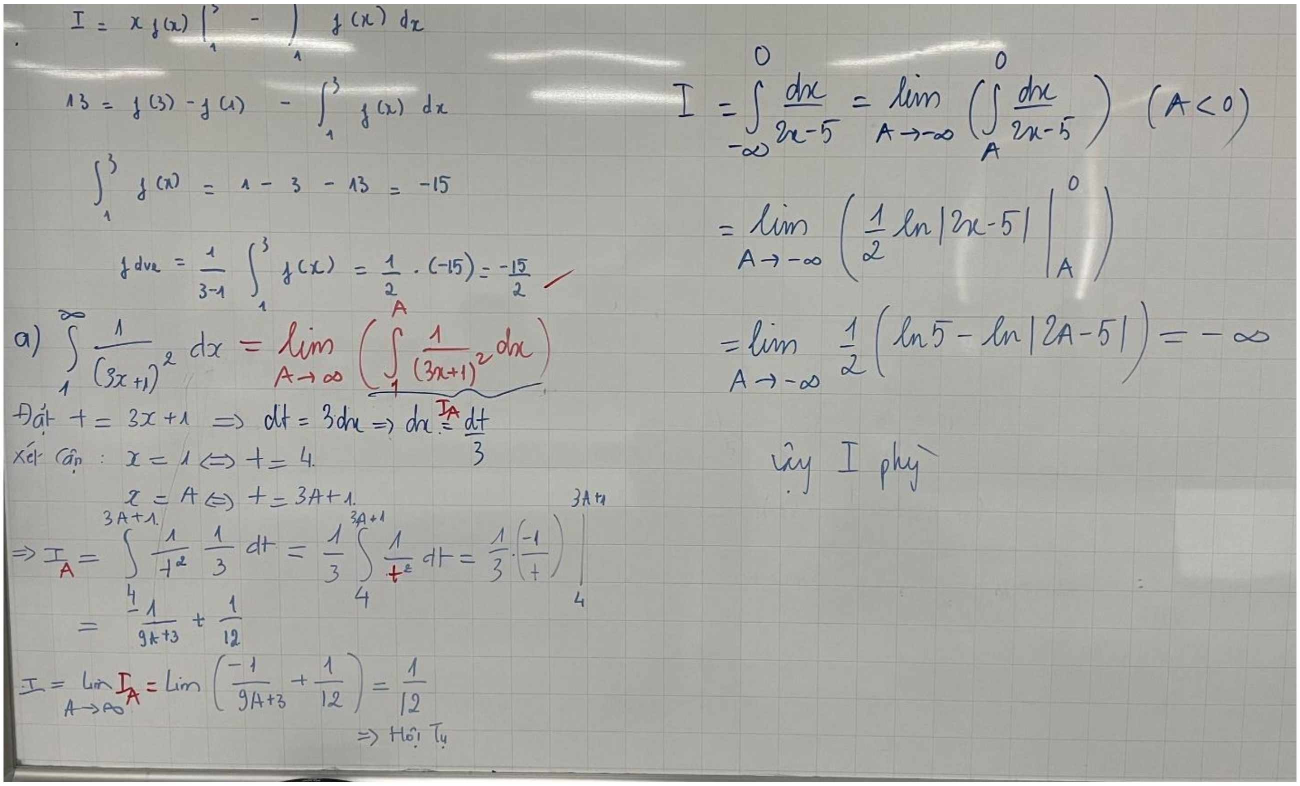
$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\cos^2 t}\sin t dt = \int_0^{\pi/2} \sin t.\sin t dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt = \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ldots$$

18. Find $g'(0)$ for

a. $g(x) = \int_x^{x^2} e^{2x+1}dx$ b. $\int_{2x-1}^{x^3} x\sqrt{x+1}dx$

19. Determine whether each integral is convergent or divergent. Evaluate those that are convergent. xác định liệu rằng với mỗi tích phân sau hội tụ hay phân kì. đánh giá những điều này là hội tụ

a. $\int_1^\infty \frac{dx}{(3x+1)^2}$ b. $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{2x-5}$ c. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$



d. $I = \int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{\left(x^2+2\right)^2} = \lim\limits_{A\to\infty}\left(\int\limits_0^{A} \frac{xdx}{\left(x^2+2\right)^2}\right) \quad (A>0)$

tính $I_A = \int\limits_0^{A} \frac{xdx}{\left(x^2+2\right)^2}$

đặt $t = x^2+2 \Rightarrow dt = 2xdx$

$x = 0 \Rightarrow t = 2$

$x = A \Rightarrow t = A^2+2$

$$I_A = \frac{1}{2}\int\limits_2^{A^2+2} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t}\right)\Bigg|_2^{A^2+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{A^2+2}\right) = \frac{1}{4}-\frac{1}{2(A^2+2)}$$

$$I = \lim_{A\to\infty} I_A = \lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2(A^2+2)}\right) = \frac{1}{4}-0 = \frac{1}{4}$$

e. $\int_{4}^{\infty} e^{-\frac{y}{2}} dy$ f. $\int_{-\infty}^{-1} e^{-2t} dt$ g. $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2} dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-x^2} dx$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2} dx = \lim_{B\to-\infty}\left(\int_{B}^{0} xe^{-x^2} dx\right) = ...$$

$$I_2 = \int_{0}^{\infty} xe^{-x^2} dx = \lim_{A\to\infty}\left(\int_{0}^{A} xe^{-x^2} dx\right) = ...$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2} dx = \lim_{B\to-\infty}\left(\int_{B}^{0} xe^{-x^2} dx\right)$$

$$I_B = \int_{B}^{0} xe^{-x^2} dx$$

$$t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$$

$$I_B = \int_{B^2}^{0} \frac{1}{2} e^{-t} dt = \left(-\frac{1}{2}e^{-t}\right)\Bigg|_{B^2}^{0} = \frac{1}{2}\left(e^{-B^2} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{B^2}} - 1\right)$$

$$I_1 = \lim_{B\to-\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{B^2}} - 1\right) = \frac{1}{2}(0-1) = -\frac{1}{2}$$

i. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{4x-1}$ j. $\int_{3}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x-3}}$ k. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ l. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \lim_{t\to0^-}\left(\int_{-1}^{t} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx\right) = \lim_{t\to0^-}\left(\int_{-1}^{t} x^{-2/3} dx\right) = \lim_{t\to0^-}\left(3x^{1/3}\Big|_{-1}^{t}\right) = \lim_{t\to0^-}\left(3t^{1/3} + 3\right) = 0+3 = 3$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \lim_{t\to0^+}\left(\int_{t}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx\right) = \lim_{t\to0^+}\left(\int_{t}^{1} x^{-2/3} dx\right) = \lim_{t\to0^+}\left(3x^{1/3}\Big|_{t}^{1}\right) = \lim_{t\to0^+}\left(3 - 3t^{1/3}\right) = 3-0 = 3$$

20. Determine whether the integral is convergent or divergent

xác định với mỗi tích phân sau hội tụ hay phân kì

a. $\int_{1}^{\infty} \frac{\cos^2 xdx}{1+x^2}$

$$0 \le f(x) = \frac{\cos^2 x}{1+x^2} \le \frac{1}{1+x^2} \le \frac{1}{x^2} \quad ,\forall x \in [1,\infty)$$

Mà $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ hội tụ nên $\int_1^\infty \frac{\cos^2 xdx}{1+x^2}$ hội tụ

b. $\int_1^\infty \frac{2+e^{-x}}{x}dx$

$$f(x) = \frac{2+e^{-x}}{x} > \frac{1}{x} > 0 \text{ , } \forall x \in [1,\infty)$$

Mà $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ phân kỳ nên $\int_1^\infty \frac{2+e^{-x}}{x}dx$ phân kỳ

c. $\int_1^\infty \frac{dx}{x+e^{2x}}$

$$0 < h(x) = \frac{1}{x+e^{2x}} < \frac{1}{e^{2x}} = e^{-2x} \quad , \forall x \in [1,\infty)$$

$$\int_1^\infty e^{-2x}dx = \lim_{A\to\infty}\left(\int_1^A e^{-2x}dx\right) = \lim_{A\to\infty}\left(\frac{-1}{2}e^{-2x}\Big|_1^A\right) = \lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{2e^{2A}}\right) = \frac{1}{2e^2}$$

Mà $\int_1^\infty e^{-2x}dx$ hội tụ nên $\int_1^\infty \frac{dx}{x+e^{2x}}$ hội tụ

d. $\int_1^\infty \frac{xdx}{\sqrt{1+x^6}}$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^6}} > 0 \text{ , } \forall x \in [1,\infty)$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \text{ , } \forall x \in [1,\infty)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{\sqrt{1+x^6}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^6}+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$$

Mà $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ hội tụ nên $\int_1^\infty \frac{xdx}{\sqrt{1+x^6}}$ hội tụ

$$e.\ I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos xdx}{\sqrt{\sin x}}=\lim_{t\to 0^+}\left(\int_t^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos xdx}{\sqrt{\sin x}}\right)\ (t>0)$$

$$I(t)=\int_t^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos xdx}{\sqrt{\sin x}}$$

$$u=\sin x\Rightarrow du=\cos xdx$$

$$I(t)=\int_{\sin t}^{1}\frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}\Big|_{\sin t}^{1}=2-2\sqrt{\sin t}$$

$$I=\lim_{t\to 0^+}I(t)=\lim_{t\to 0^+}\left(2-2\sqrt{\sin t}\right)=2$$

f. $\int_0^1\frac{2dx}{\sqrt{x^3}}$

Chapter 8: Series

1. Determine whether the sequence converges or diverges. If it converges, find the limit

xác định xem chuỗi tích phân sau hội tụ hay phân kì. Nếu hội tụ hãy tìm giới hạn của chúng

a. $a_n = \dfrac{3+2n^2}{n+n^2}$ b. $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}+3}$ c. $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n}+1}$ d. $a_n = \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$

$$\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$$

$$a_1 = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\cos\frac{\pi}{2^2}$$

$$a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^2}} = 2\cos\frac{\pi}{8} = 2\cos\frac{\pi}{2^3}$$

e. ....

$$a_n = \sqrt{2+\ldots\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 2$$

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n+2}\ ,\ n \ge 1 \end{cases}$$

f. $\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$

g. $\{0.12,\ 0.1212,\ 0.121212,\ \ldots\}$

2. Find the limit of the sequence $\{a_n\}$ Tìm giới hạn của dãy ..

a. $a_1 = \sqrt{5},\ a_{n+1} = \sqrt{5+a_n}$ b. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{3-a_n}$ c. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$

3. Determine whether the sequence is increasing, decreasing or not monotonic

Xác định xem các dãy là đồng biến, nghịch biến hay không đơn điệu

a. $u_n = \dfrac{1}{2n^2-n+1}$ b. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+5}}{n+1}$ c. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3-u_n} \end{cases}$

4. Find the formula for the n^th^ term of the sequence

Tìm công thức số hạng tổng quát n cho các dãy sau

a. $\{1,3,5,7,\ldots\}$ b. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1}+1 \end{cases}$ c. $\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1}+u_n \end{cases}$

5. Suppose that $f(1)=1, f(2)=-2$ and $f(n+2)=-2f(n+1)+3f(n)$.

a. Find $f(5)$

b. Determine the formula for $f(n)$

6. Determine whether the series is convergent or divergent. If it is convergent, find its sum

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ b. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+n-1}{n(n-1)}$ c. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3.2^{n-1}}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$ e. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+3^n}{2^n}$ f. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(0,8^n+0,3^{n-1}\right)$

7. Determine whether the series is convergent or divergent

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^6}+\frac{4}{n\sqrt{n}}\right)$ d. $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n}$

e. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+3}$ f. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4+3^n}{2^n}$ g. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2 2^n}$ h. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2+1}$

8. Determine whether the series is convergent or divergent

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+n+1}$ d. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}$

e. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$ f. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\ln n}{n}$ g. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos \pi n}{\sqrt{n+1}}$ h. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{2n^2+2n+3}\right)^n$

9. Determine whether the series is absolutely convergent, conditionally convergent, or divergent.

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n+1}}{n^3}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-10)^n}{n!}$ d. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+1}$

e. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 4n}{n^2}$ f. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n+1}}$ g. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos \pi n}{\ln n}$ h. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

10. Find the radius of convergence and interval of convergence of the series

a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$ b. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$ c. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ d. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2n+1}$

e. $\sum_{n=0}^{\infty} n!(2x-1)^n$ f. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 3^n}$ g. $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}x^n$ h. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n (x-3)^n}{\sqrt[4]{n}}$

11. Find the first n terms in the Maclaurin series for the given function

a. $f(x) = x\sin x,\ n = 4$ b. $f(x) = x\cos 2x,\ n = 3$

c. $f(x) = \ln(1+x^2),\ n = 4$ d. $f(x) = e^x \sin x,\ n = 3$

12. Approximate f by a Taylor polynomial with degree at the number a

a. $f(x) = \sqrt{x+1},\ n = 1,\ a = 0$ b. $f(x) = \frac{1}{x},\ n = 3,\ a = 1$

c. $f(x) = e^{x^2},\ n = 3,\ a = 0$ d. $f(x) = \cos x,\ n = 4,\ a = \frac{\pi}{3}$

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

LINEAR ALGEBRA

Hệ phương trình tuyến tính

Chapter 1: Systems of Linear Equations

1. Write the augmented matrix for each of the following systems of linear equations and then solve them. Viết ma trận mở rộng cho mỗi hệ phương trình tuyến tính và giải chúng

a. $\begin{cases} -x+y+2z=1 \\ 2x+3y+z=-2 \\ 5x+4y+2z=4 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x+3y+z=10 \\ 2x-3y-3z=22 \\ 4x-2y+3z=-2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+2z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=0 \\ 2x_1+3x_2-2x_3+3x_4=0 \\ x_1+x_2-3x_3+x_4=0 \end{cases}$

Tính toán hạng của mỗi ma trận sau

2. Compute the rank of each of the following matrices.

a. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ b. $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ -5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

$$B=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ -5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1\to d_1+d_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & -4 & 1 \\ -5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3\to d_3+5d_1]{d_2\to d_2-3d_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -11 \\ 0 & 2 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3\to d_3+2d_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow r(B)=2$

c. $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ d. $D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 & -2 \\ 1 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

3. Find all values of k for which the system has nontrivial solutions and determine all solutions in each case. Tìm tất cả các giá trị của k cho mỗi hệ phương trình có nghiệm không tầm thường và xác định tất cả các giải pháp trong mỗi trường hợp

a. $\begin{cases} x-y+2z=0 \\ -x+y-z=0 \\ x+ky+z=0 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x+ky-3z=0 \\ x-6y+5z=0 \end{cases}$

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & k & 1\end{bmatrix}$$

Hệ pt (1) có nghiệm không tầm thường $\Leftrightarrow r(A)<3$

$$\Leftrightarrow \det A=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & k & 1\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow 1+1-2k-2+k-1=0$$

$$\Leftrightarrow k=-1$$

* Có thể sử dụng pp Gauss để giải

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & k & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[d_3\to d_3-d_1]{d_2\to d_2+d_1}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & k+1 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow{d_2\leftrightarrow d_3}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & k+1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=A'$$

* $k+1\neq 0\Leftrightarrow k\neq -1\Rightarrow r(A)=3\Rightarrow$ hpt (1) có nghiệm tầm thường

* $k+1=0\Leftrightarrow k=-1$. Khi đó,

$$A'=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{d_3\to d_3+d_2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Suy ra $r(A)=r(A')=2<3$ hay hpt (1) có nghiệm ko tầm thường

Vậy $k=-1$

hpt (1) $\Leftrightarrow \begin{cases}x-y+2z=0\\ -z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=a\\ y=a\quad (a\in\mathbb{R})\\ z=0\end{cases}$

Nghiệm của hpt (1) là $(a,a,0)$ $(a\in\mathbb{R})$

c. $\begin{cases}x+y+z=0\\ x+y-z=0\\ x+y+kz=0\end{cases}$

d. $\begin{cases}x+y-z=0\\ ky-z=0\\ x+y+kz=0\end{cases}$

Xác định giá trị m sao cho hệ phương trình tuyến tính có chính xác 1 nghiệm

4. Determine the values of m such that the system of linear equations has exactly one solution.

a. $\begin{cases} x-y+2z=m \\ -x+y-z=0 \\ -x+my-z=1-m \end{cases}$ b. $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=m \\ x+y+mz=m^2 \end{cases}$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & m & -1 \end{bmatrix}$$

Hệ pt (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ hpt (1) là hệ Cramer

$\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$\Leftrightarrow -1-1-2m+2+m+1 \neq 0$

$\Leftrightarrow m \neq 1$

* Có thể sử dụng pp Gauss để giải

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & m \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & m & -1 & 1-m \end{array}\right] \xrightarrow[d_3\to d_3+d_1]{d_2\to d_2+d_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & m \\ 0 & 0 & 1 & m \\ 0 & m-1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{d_2\leftrightarrow d_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & m \\ 0 & m-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & m \end{array}\right]$$

Hệ pt (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})=3$

$\Leftrightarrow m-1\neq 0$

$\Leftrightarrow m\neq 1$

Hpt (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z=m \\ (m-1)y+z=1 \\ z=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-m-1 \\ y=-1 \\ z=m \end{cases}$

c. $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+my+2z=m \\ x+2y+z=2 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x+my-mz=m \\ 2x+y-z=2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

Xác định giá trị m sao cho hệ phương trình tuyến tính vô nghiệm

5. Determine the values of m such that the system of linear equations is inconsistent.

a. $\begin{cases} x-y+2z=m \\ -x+y-z=0 \\ x-y+3z=1-m \end{cases}$ b. $\begin{cases} x-2y+2z=m \\ x+my+z=0 \\ 2x+y+mz=2-m \end{cases}$

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&m\\1&m&1&0\\2&1&m&2-m\end{array}\right]\xrightarrow[d_3\to d_3-2d_1]{d_2\to d_2-d_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&m\\0&m+2&-1&-m\\0&5&m-4&2-3m\end{array}\right]\xrightarrow{d_2\leftrightarrow d_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&m\\0&5&m-4&2-3m\\0&m+2&-1&-m\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_3\to d_3-\frac{m+2}{5}d_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&m\\0&5&m-4&-m\\0&0&-\frac{1}{5}(m+1)(m-3)&\frac{1}{5}(3m^2-m-4)\end{array}\right]$$

Hpt (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow r(A)\neq r(\overline{A})$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}r(A)=2\\r(\overline{A})=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)(m-3)=0\\3m^2-m-4\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m=3$$

6. Find *a*, *b* and *c* so that the system $\begin{cases}x+ay+cz=0\\bx+cy-3z=1\\ax+2y+bz=5\end{cases}$ has the solution $(3,-1,2)$

$(3,-1,2)$ là nghiệm của hpt khi và chỉ khi $\begin{cases}3-a+2c=0\\3b-c-6=1\\3a-2+3b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\\c=-1\end{cases}$

Xét ma trận

7. Consider the matrix $A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-4&2&k\\4&-2&6\end{pmatrix}$

nếu A là ma trận mở rộng của hệ pt tuyến tính, xác đinh số phương trình và số biến

a. If A is the augmented matrix of a system of linear equations, determine the number of equations and the number of variables.

b. If A is the augmented matrix of a system of linear equations, find the value(s) of k such that the system is consistent. có nghiệm

8. Find all values of k so that the system of equations has no solution.

a. $\begin{cases}x+y-z=2\\-2y+z=3\\4y-2z=k\end{cases}$

b. $\begin{cases}x+y-z=1\\2x+(k+5)y-2z=4\\x+(k+3)y+(k-1)z=k+3\end{cases}$

9. Find all values of a and b for which the system of equations $\begin{cases} x+y+3z=2 \\ x+2y+5z=1 \\ 2x+2y+az=b \end{cases}$

is inconsistent.

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & a & b \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 2d_1]{d_2 \to d_2 - d_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a-6 & b-4 \end{array}\right]$$

Hpt vô nghiệm $\Leftrightarrow r(A) \neq r(\overline{A})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r(A)=2 \\ r(\overline{A})=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-6=0 \\ b-4\neq 0 \end{cases}$$

tương ứng với ma trận mở rộng cho trước

10. Solve the system of linear equation corresponding to the given augmented matrix

a. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b. $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11. Determine the values of m such that the rank of the matrix is 2

a. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -3 & 6 & 1 & m \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ m & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -3 & 6 & 1 & m \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 \to d_3 + 3d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 12 & 4 & m+12 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \to d_3 + 4d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

$r(B)=2 \Leftrightarrow m=0$

12. Solve the system $\begin{cases} x+2y=12 \\ 3x-y=8 \\ -x+5y=16 \end{cases}$

Chapter 2: Matrix Algebra

1. Let $A=\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1&1\\3&2\end{pmatrix}$ and $C=\begin{pmatrix}1&3&-4\\-1&2&1\end{pmatrix}$. Compute the matrix

a. $2A-B^T$ b. AB c. BA d. AC

e. CC^T f. C^TC g. A^3 h. B^2A^T

2. Suppose that A and B are nxn matrices. Simplify the expression

Rút gọn các biểu thức sau

a. $(A+B)^2-(A-B)^2$

$$(A+B)^2-(A-B)^2=(A+B).(A+B)-(A-B).(A-B)$$
$$=A^2+AB+BA+B^2-(A^2-AB-BA+B^2)$$
$$=A^2+AB+BA+B^2-A^2+AB+BA-B^2$$
$$=2.(AB+BA)$$

b. $A(BC-CD)+A(C-B)D-AB(C-D)$

$$=ABC-ACD+(AC-AB)D-ABC+ABD$$
$$=ABC-ACD+ACD-ABD-ABC+ABD$$
$$=\theta$$

3. Let $A=\begin{pmatrix}3&1&2\\4&8&0\\0&1&2\end{pmatrix}$ and $B=\begin{pmatrix}0&5&2&1\\1&8&0&-6\\1&4&3&7\end{pmatrix}$.

a. Compute AB

b. Compute $f(A)$ if $f(x)=x^2-3x+2=x^2-3x+2x^0$

$$f(A)=A^2-3A+2I_3$$

$$=\begin{pmatrix}3&1&2\\4&8&0\\0&1&2\end{pmatrix}^2-3.\begin{pmatrix}3&1&2\\4&8&0\\0&1&2\end{pmatrix}+2.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

4. Find the inverse of each of the following matrices.

nghịch đảo

a. $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -5 & 7 & -11 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. Given $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Find a matrix X such that

a. $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b. $AX = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c. $XA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \ldots$$

6. Find A when

a. $(3A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ b. $(I+2A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ c. $\left(A^{-1} - 2I\right)^T = -2\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$

$$\left(A^{-1} - 2I_2\right)^T = -2\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ -6 & -22 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^{-1} - 2I_2\right) = \left[\left(A^{-1} - 2I_2\right)^T\right]^T = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -8 & -22 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = 2I_2 + \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -8 & -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -8 & -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -8 & -20 \end{pmatrix}$$

$$A = \left(A^{-1}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -8 & -20 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5/12 & -1/8 \\ -1/6 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Write the system of linear equations in matrix form and then solve them.

a. $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + 2y = -4 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 10 \\ 2x - 3y - 3z = 22 \\ 4x - 2y + 3z = -2 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x + y = a \\ 2x + 3y = 1 - 2a \end{cases} (a \in R)$

8. Find A^{-1} if

a. $A^2 - 6A + 5I = 0$ b. $A^2 + 3A - I = 0$ c. $A^4 = I$

$$A^2 - 6A + 5I = 0$$
$$\Leftrightarrow 5I = 6A - A^2$$
$$\Leftrightarrow I = \frac{6}{5}A - \frac{1}{5}A^2 = A.\left(\frac{6}{5}I - \frac{1}{5}A\right) = \left(\frac{6}{5}I - \frac{1}{5}A\right).A$$
$$\Rightarrow A^{-1} = \left(\frac{6}{5}I - \frac{1}{5}A\right)$$

9. Solve for X

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ b. $ABXC = B^T$ c. $AX^TBC = B$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = ...$$

$$X = (AB)^{-1}.B^T.C^{-1} = B^{-1}.A^{-1}.B^T.C^{-1}$$

(where A, B and C are nxn invertible matrices)

10. Compute $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{101}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 . \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 . \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{101} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Let $T : R^2 \to R^2$ be a linear transformation, and assume that $T(1,2) = (-1,1)$ and

phép biến đổi tuyến tính, và giả sử rằng

$T(0,3) = (-3,3)$

a. Compute $T(11,-5)$ b. Compute $T(1,11)$

c. Find the matrix of T d. Compute $T^{-1}(2,3)$

$$T(x,y)=(ax+by,cx+dy)\Rightarrow A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$T(1,2)=(a+2b,c+2d)=(-1,1)\Rightarrow\begin{cases} a+2b=-1 \\ c+2d=1 \end{cases}$$

$$T(0,3)=(3b,3d)=(-3,3)\Rightarrow\begin{cases} 3b=-3 \\ 3d=3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=-1 \\ d=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=1 \\ c=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

12. Let $T:R^2\to R^2$ be a linear transformation such that the matrix of T is $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Find $T^{-1}(3,-2)$

Vì ma trận của T là $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ nên suy ra $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$. Do đó

$$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=A^{-1}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}==\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{5}x-\frac{2}{5}y \\ \frac{1}{5}x+\frac{1}{5}y \end{pmatrix}$$

Suy ra $T^{-1}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right)=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{13}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

13. The (2;1)-entry of the product $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$c_{21}=0.4+2.2+5.5+1.0=29$$

định thức và đường chéo

Chapter 3: Determinants and Diagonalization

1. Evaluate the determinant

a. $\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ -3 & x \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ -3 & 7 & 2 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ d. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

e. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ f. $\begin{vmatrix} m & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & m & -3 \end{vmatrix}$

2. Find the minors and the cofactors of the matrix Tìm định thức con và hệ số kép của ma trận

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ b. $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & -8 \end{pmatrix}$ c. $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$

3. Find the adjugate and the inverse of the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
Tìm ma trận liên hợp và ma trận nghịch đảo

4. Let $A = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & -1 & * & * \\ 0 & 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Find $|A| = 1.(-1).2.2 = -4$

a. $|2A^{-1}| = 2^4.|A^{-1}| = 16.\frac{1}{|A|} = 16.\frac{-1}{4} = -4$ b. $|AA^T| = |A|.|A^T| = |A|^2$

c. $|\operatorname{adj} A| = |A|^3 = -64$ d. $|-A^3| = (-1)^4.|A^3| = |A|^3$

e. $|(2A)^{-1}| = \frac{1}{|2A|} = \frac{1}{2^4.|A|}$

f. $|A^{-1} - 2\operatorname{adj} A| = |A^{-1} - 2.|A|.A^{-1}| = |A^{-1} + 8A^{-1}| = |9.A^{-1}| = 9^4.|A^{-1}|$

5. Let A and B be square matrices of order 4 such that $|A| = -5$ and $|B| = 3$. Find
bậc

a. $|2AB| = 16|A|.|B|$ b. $|adj(AB)| = |AB|^3 = |A|^3.|B|^3$

c. $\left|5A^{-1}B^{T}\right|$ d. $\left|A^{T}B^{-1}A^{2}\right|$

không khả nghịch

6. Find all values of m,k for which the matrix is not invertible

a. $A=\begin{pmatrix}1&3\\k&2\end{pmatrix}$ b. $B=\begin{pmatrix}m&1&3\\1&3&2\\-1&4&5\end{pmatrix}$ c. $C=\begin{pmatrix}m&2&0\\1&m&1\\2&3&1\end{pmatrix}$

đa thức đặc trưng

7. Find the characteristic polynomial of the matrix

a. $A=\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix}$ b. $B=\begin{pmatrix}1&3\\1&3\end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda)=\left|\lambda I_2-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-5\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-3).(\lambda-2)-5=\lambda^2-5\lambda+1$$

c. $C=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&2&1\\1&2&1\end{pmatrix}$ d. $D=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&2\\-1&1&1\end{pmatrix}$

Tìm giá trị riêng và vecto riêng tương ứng của ma trận

8. Find the eigenvalues and corresponding eigenvectors of the matrix

a. $A=\begin{pmatrix}-3&5\\10&2\end{pmatrix}$ b. $B=\begin{pmatrix}5&4\\2&1\end{pmatrix}$

c. $C=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ d. $D=\begin{pmatrix}-3&2&-1\\0&1&0\\4&1&1\end{pmatrix}$

9. Find the determinant of the matrix $A=\begin{pmatrix}5&1&2&4\\1&0&-1&-3\\1&1&6&1\\1&0&0&-4\end{pmatrix}$

Khai triển định thức theo dòng 4, ta được

$$\left|A\right|=1.A_{41}+0.A_{42}+0.A_{43}+(-4).A_{44}$$

$$=1.(-1)^{4+1}.\begin{vmatrix}1&2&4\\0&-1&-3\\1&6&1\end{vmatrix}+(-4).(-1)^{4+4}.\begin{vmatrix}5&1&2\\1&0&-1\\1&1&6\end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \overset{d_1 \leftrightarrow d_2}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \overset{\substack{d_2 \to d_2 - 5d_1 \\ d_3 \to d_3 - d_1 \\ d_4 \to d_4 - d_1}}{=\!=\!=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & 19 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{d_3 \to d_3 - d_2}{=\!=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{d_3 \leftrightarrow d_4}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{vmatrix} = 1.1.1.(-15) = -15$$

Hệ số kép

10. Find the (1, 2)-cofactor and (3,1) - cofactor of the matrix $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & -7 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -53$$

11. Let $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & x \end{pmatrix}$. For which values of x is A invertible ?

Không gian vecto

Chapter 5: The Vector Space $\mathbb{R}^n$

1. Let $x=(-1,-2,-2), u=(0,1,4), v=(-1,1,2)$ and $w=(3,1,2)$ in R^3.

vô hướng

Find scalars *a*, *b* and *c* such that $x=au+bv+cw$

Xét bt $x=au+bv+cw$

$$\Leftrightarrow (-1,-2,-2)=a.(0,1,4)+b.(-1,1,2)+c.(3,1,2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b+3c=-1 \\ a+b+c=-2 \\ 4a+2b+2c=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-1 \end{cases}$$

$$x=u-2v-w$$

Viết v dưới dạngTổ hợp tuyến tính của u và w nếu có thể với u = ...

2. Write *v* as a linear combination of *u* and *w*, if possible, where $u=(1,2), w=(1,-1)$

a. $v=(0,1)$ b. $v=(2,3)$ c. $v=(1,4)$ d. $(-5,1)$

Xét bt $v=au+bw$

$$\Leftrightarrow (2,3)=a.(1,2)+b.(1,-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ 2a-b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5/3 \\ b=1/3 \end{cases}$$

$$v=\frac{5}{3}u+\frac{1}{3}w$$

Xác định liệu rằng tập S là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính trong không gian vecto tương ứng

3. Determine whether the set S is linearly independent or linearly dependent in corresponding vector spaces.

a. $S=\{(-1,2),(3,1),(2,1)\}$ b. $S=\{(-1,2,3),(1,3,5)\}$

c. $S=\{(1,-2,2),(2,3,5),(3,1,7)\}$ d. $S=\{(-1,2,1),(2,4,0),(3,1,1)\}$

e. $S=\{(1,-2,2,1),(1,2,3,5),(-1,3,1,7)\}$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 11/4 & 7 \end{bmatrix}$$

Với giá trị nào của k thì mỗi tập hợp sau độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính tương ứng với mỗi không gian

4. For which values of *k* is each set linearly independent in corresponding vector spaces.

a. $S=\{(-1,2,1),(k,4,0),(3,1,1)\}$ b. $S=\{(-1,k,1),(1,1,0),(2,-1,1)\}$

c. $S=\{(k,1,1),(1,k,1),(1,1,k)\}$ d. $S=\{(1,2,1,0),(-2,1,1,-1),(-1,3,2,k)\}$

$$A=\begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = k^3-3k+2$$

S đltt $\det A = k^3-3k+2 \neq 0$

cơ sở

5. Find all values of m such that the set S is a basis of R^3

a. $S=\{(1,2,1),(m,1,0),(-2,1,1)\}$ b. $S=\{(-1,m,1),(1,1,0),(m,-1,-1)\}$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 1+m+2-2m = 3-m$$

Vì S có 3 vectơ nên S là một cơ sở của R^3 khi và chỉ khi S đltt trong R^3

$\Leftrightarrow \det A = 3-m \neq 0$

$\Leftrightarrow m \neq 3$

Tìm 1 cơ sở và số chiều của không gian con U

6. Find a basis for and the dimension of the subspace U

a. $U=\{(2s-t,s,s+t)\mid s,t\in R\}$ b. $U=\{(s-t,s,t,s+t)\mid s,t\in R\}$

$U=\{(2s-t,s,s+t)\mid s,t\in R\}$

$\dim U = 2$

$s=0,t=1 \Rightarrow u_1=(-1,0,1)$

$s=1,t=0 \Rightarrow u_2=(2,1,1)$

c. $U=\{(0,t,-t)\mid t\in R\}$ d. $U=\{(x,y,z)\mid x+y+z=0\}$

e. $U=\{(x,y,z)\mid x+y+z=0, x-y=0\}$ f. $U=span\{(1,2,3),(2,3,4),(3,5,7)\}$

U là không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ (*)

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_2 \to d_2 - d_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Hpt }(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ -2y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{z}{2} \\ y=-\dfrac{z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{a}{2} \\ y=-\dfrac{a}{2} \quad (a\in\mathbb{R}) \\ z=a \end{cases}$$

Nghiệm của hpt (*) là $U=\left\{\left(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2},a\right), a\in\mathbb{R}\right\}$

$\Rightarrow \dim U = 1$

chọn $a=2$ ta có 1 cơ sở của U là $u=(-1,-1,2)$

g. $U = span\{(1,2,4),(-1,3,4),(2,3,1)\}$ h. $U = span\{(1,2,1,1),(2,1,-1,0),(3,3,0,1)\}$

$$A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \xrightarrow[d_3\to d_3-3d_1]{d_2\to d_2-2d_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}$$

$$\xrightarrow{d_3\to d_3-d_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}$$

$r(A)=2 \Rightarrow \dim U = 2$

Một cơ sở của U là $\{u_1,u_2\}$

Tìm cơ sở và số chiều của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

7. Find a basis for and the dimension of the solution space of the homogeneous system of linear equations.

a. $\begin{cases} -x+y+z=0 \\ 3x-y=0 \\ 2x-4y-5z=0 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x+2y-4z=0 \\ -3x-6y+12z=0 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 3x+4y+2z+t=0 \end{cases}$

Tìm tất cả các giá trị m sao cho x thuộc không gian con sinh bởi S

8. Find all values of m for which x lies in the subspace spanned by S

a. $x=(-3,2,m)$ and $S=\{(-1,-1,1),(2,-3,-4)\}$

$x=(-3,2,m)\in Span\{(-1,-1,1),(2,-3,-4)\}$

$\Leftrightarrow \exists a,b\in\mathbb{R}:(-3,2,m)=a.(-1,-1,1)+b.(2,-3,-4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-a+2b=-3\\ -a-3b=2 \quad \textit{has solutions}\\ a-4b=m\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=-1\\ m=5\end{cases}$$

b. $x=(4,5,m)$ and $S=\{(1,-1,1),(2,-3,4)\}$

c. $x=(m+1,5,m)$ and $S=\{(1,1,1),(2,3,1),(3,4,2)\}$

d. $x=(3,5,7,m)$ and $S=\{(1,1,1,-1),(1,2,3,1),(2,3,4,0)\}$

9. Find the dimension of the subspace

$U=span\{(-2,\ 0,\ 3),(1,\ 2,\ -1),(-2,\ 8,\ 5),(-1,\ 2,\ 2)\}$

10. Let $A=\begin{pmatrix}1&2&2&-1\\3&6&5&0\\2&2&1&2\end{pmatrix}$. Find $\dim(\operatorname{col}A)$ and $\dim(\operatorname{row}A)$

$colA=Span\{(1,3,2),\ (2,6,2),\ (2,5,1),\ (-1,0,2)\}$

$rowA=Span\{(1,2,2,-1),\ (3,6,5,0),\ (2,2,1,2)\}$

$\dim(colA)=\dim(rowA)=rank(A)$

11. Which of the following are subspaces of R^3 ? Cái nào sau đây là không gian con của R3

$(i)\quad \{(2+a,b-a,b)\mid a,b\in R\}$

$(ii)\quad \{(a+b,a,b)\mid a,b\in R\}$

$(iii)\quad \{(2a+b,0,ab)\mid a,b\in R\}$

12. Let $u=(1,-3,-2),v=(-1,1,0)$ and $w=(1,2,-3)$. Compute $\|u-v+w\|$

13. Let $u,v\in\mathbb{R}^3$ such that $\|u\|=3,\|v\|=4$ and $u\bullet v=-2$. Find

a. $\|u+v\|$ b. $\|2u+3v\|$

$$\|u+v\|^2 = (u+v)\bullet(u+v) = u\bullet u + u\bullet v + v\bullet u + v\bullet v$$
$$= \|u\|^2 + 2.u\bullet v + \|v\|^2 = 9 - 2.2 + 16 = 21$$
$$\Rightarrow \|u+v\| = \sqrt{21}$$

NGUYỄN ĐĂNG QUANG

0908.499.117

quangnd217@gmail.com