Санкт-Петербургский Национальный Исследовательский Университет ИТМО

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа № 2

по дисциплине «**Теория функций комплексного переменного**»

Вариант: **31**

Выполнили студенты:
Фам Данг Чунг Нгиа

Поток: **22.1**

Преподаватель: **Ткачев Денис Сергеевич**

Санкт- Петербург

2024

1. Задание

В варианте **31** возьмите два рисунка **рис. 5** и **рис. 12.**

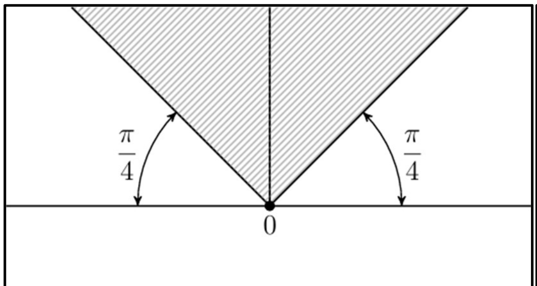


Рисунок 5

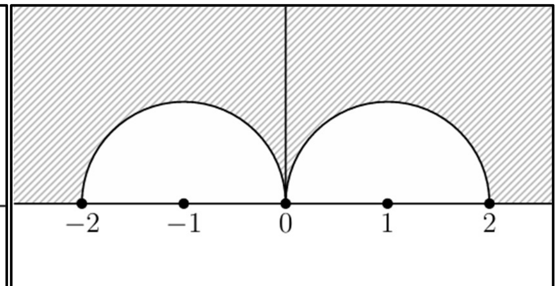


Рисунок 12

a. Аналитически опишите заданные множества.
b. Воспользовавшись композицией классических преобразований, составьте конформное отображение, которое переводит первую область во вторую. *Табличка с преобразовании может быть найдена в конце данного докумнета.*
c. Составьте обратное отображение, переводящее второе множество в первое.
d. На любом удобном вам языке программирования напишите программу, которая нарисует первого множества и все этапы его преобразования во второе. Достаточно наглядным будет взять набор точек множества, передающий его форму (учитите, что может понадобится сделать набор «более плотным» в какой-то части множества)

2. Решение

a. Аналитически описания заданных множеств:

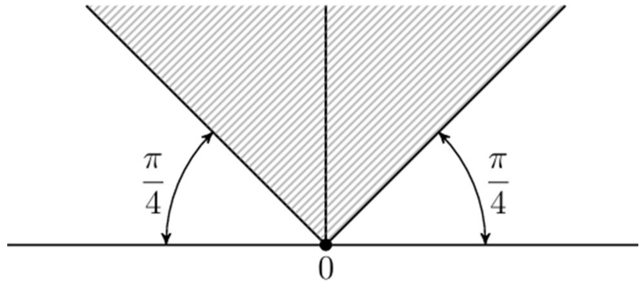


Рисунок 5

Описание: Множество M состоит из комплексных чисел z, которые расположены в верхней части плоскости, образуя угол между прямыми $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ и $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$. Эти числа имеют положительную мнимую часть (Im(z)>0).

Множество M в рисунке 5 можно записать в следующем виде:

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{3\pi}{4} \right\}$$

Через декартовы координаты $z = x + i \cdot y$ можно записать:

$$M = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > |x| \}$$

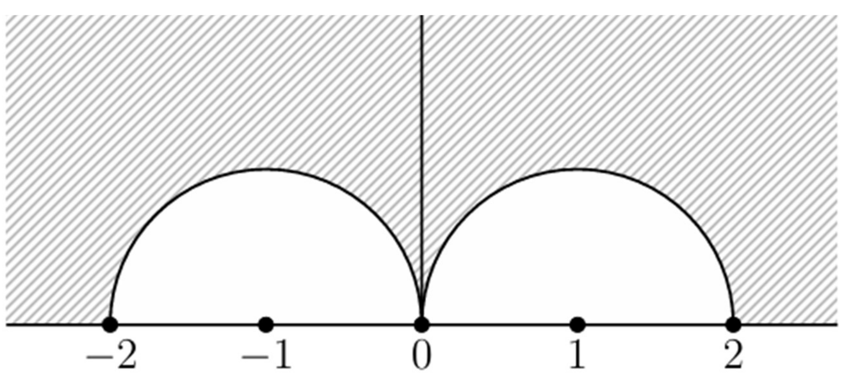


Рисунок 12

Описание: Множество М состоит из комплексных чисел z, которые расположены в верхней части плоскости (Im(z)>0) и находятся вне двух кругов. Эти круги имеют радиус 1 и центры в точках 1 и −1.

Множество М в рисунке 12 можно записать в следующем виде:

$$\mathrm{M} = \{\mathrm{z} \in \mathbb{C} \mid (\mathrm{Im}\, \mathrm{z} > 0) \ \wedge (|\mathrm{z} - 1| \geq 1) \ \wedge (|\mathrm{z} + 1| \geq 1)\}$$

Если записать $\mathrm{z} = \mathrm{x} + \mathrm{i} \cdot \mathrm{y}$, то множество М можно выразить через декартовы координаты:

$$\mathrm{M} = \{ (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 | (\mathrm{y} > 0) \wedge [(\mathrm{x} - 1)^2 + \mathrm{y}^2 > 1] \ \wedge [(\mathrm{x} + 1)^2 + \mathrm{y}^2 > 1]\}$$

b. Конформные отображения между множествами:

Чтобы переводить первую область во вторую, в свою очередь использованы следующие комфортные отображения:

1. № 1: $\mathrm{w} = \mathrm{z} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$
2. № 4: $\mathrm{w} = \mathrm{z}^2$
3. Обратно № 52: $\mathrm{w} = \operatorname{arcosh} \mathrm{z}$
4. Обратно № 54: $\mathrm{w} = 1 + \frac{\mathrm{z} \cdot \mathrm{i}}{\pi}$
5. Обратно № 53: $\mathrm{w} = \frac{2}{1 - \mathrm{z}}$

После процесса преобразования и сокращения формулов, мы получаем финальное комфортное отображение, которое переводит первую область (z) во вторую (w):

$$\boxed{\mathrm{w} = \frac{2\pi \mathrm{i}}{\operatorname{arcosh}(-\mathrm{z}^2 \cdot \mathrm{i})}}$$

Обратное отображение, переводящее второе множество в первое:

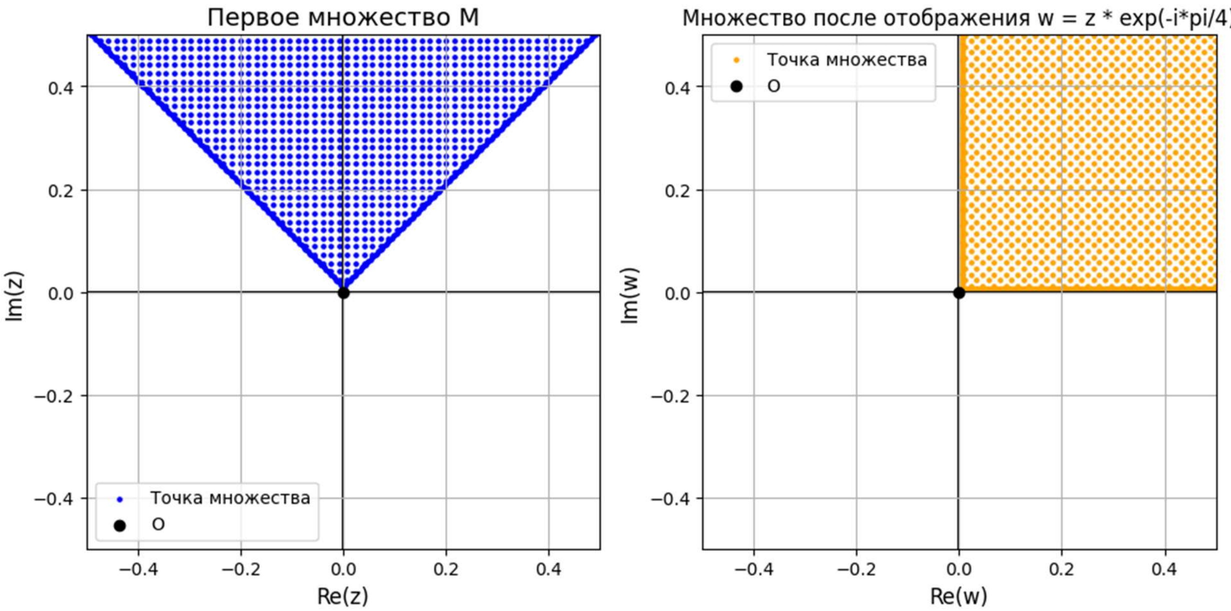
$$\boxed{\mathrm{z}^2 = \mathrm{i} \cdot \cosh\left(\frac{2\pi \mathrm{i}}{\mathrm{w}}\right)}$$

c. Ссылка на код программы, которая нарисует первого множества и все этапы его преобразования во второе:

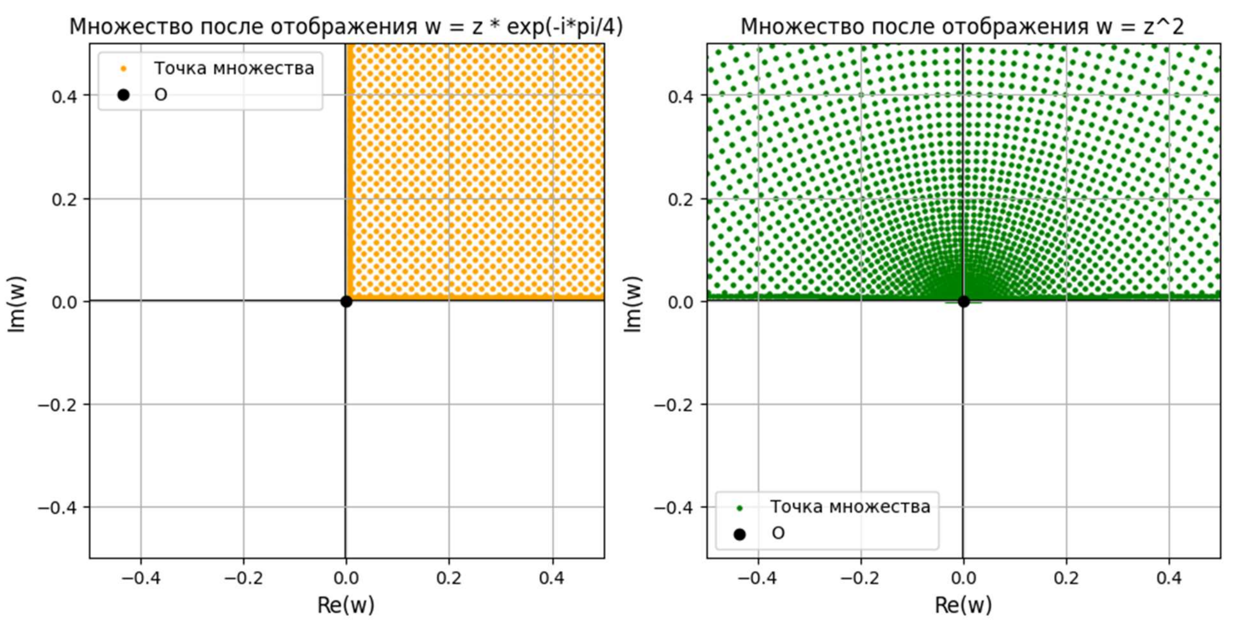
https://colab.research.google.com/drive/1zQPaB0VdufZcwi0UTZQgyY5U4NjggaHg?usp=sharing

d. Набора изображений с каждым действием результатом отображений множеств:

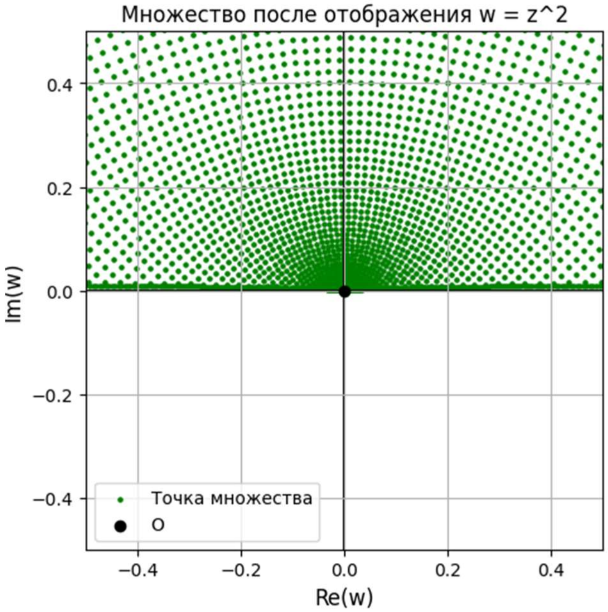
Первое конформное отображение : $w = z \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$

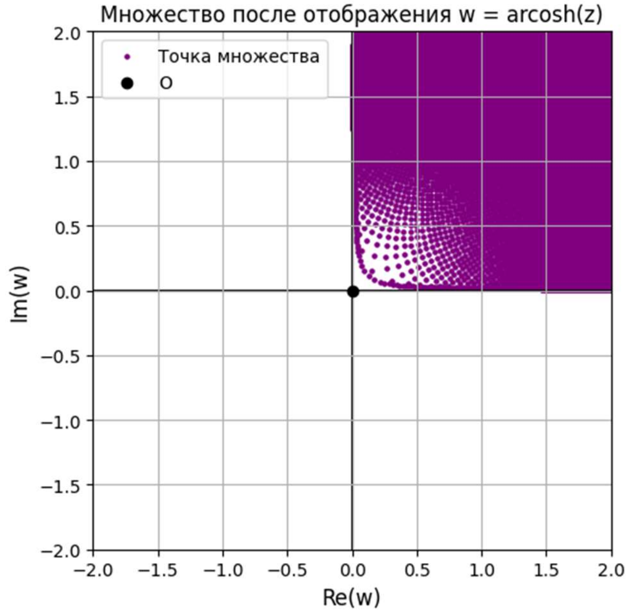


Конформное отображение : $w = z^2$

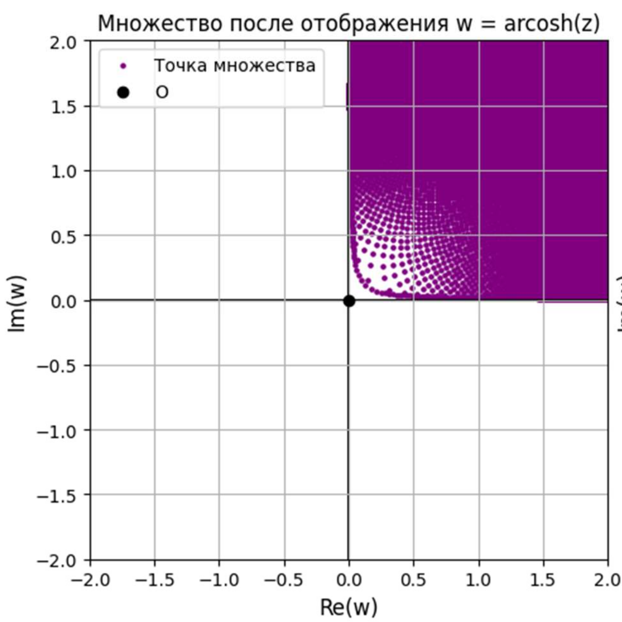


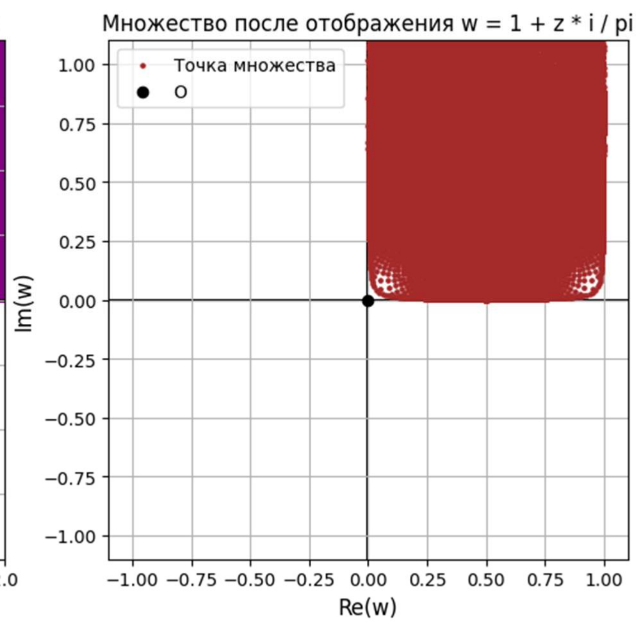
Конформное отображение : $w = \operatorname{arcosh} z$





Конформное отображение : $w = 1 + \frac{z \cdot i}{\pi}$





Конформное отображение : $w = \frac{2}{1-z}$