Фам Данг Чунг Нгиа

№ варианта: $(30 \% 8) + 1 = 6 + 1 = 7$.

Типовик ТФКП 2

I) Задача 1: Изобразить на комплексной плоскости множество

$$D = \{ z : |z| > 3 + \operatorname{Re} z ,\ \frac{\pi}{2} \leq \arg z < \frac{2\pi}{3} \}.$$

Пусть: $z = x + y.i$ $\quad (\operatorname{Re} z = x,\ \operatorname{Im} z = y,\ |z| = \sqrt{x^2+y^2})$

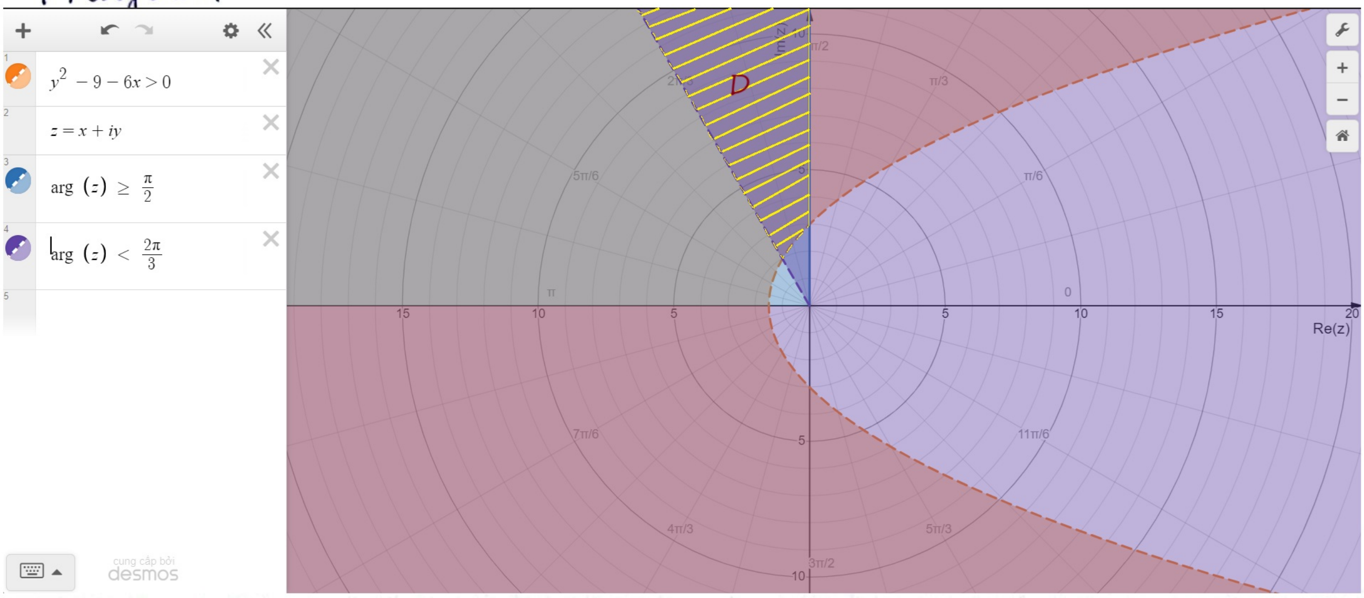
Рассмотрим: $|z| > 3 + \operatorname{Re} z \rightarrow \sqrt{x^2+y^2} > 3 + x$.

$$\rightarrow x^2 + y^2 > (3+x)^2 = 9 + 6x + x^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 > 9 + 6x$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{y^2-9}{6}.$$

Получим:



+ Оранжевая область на графике отображает неравенство: $x < \frac{y^2-9}{6}$.
+ Синяя область на графике отображает неравенство: $\arg z \geq \frac{\pi}{2}$
+ Фиолетовая область на графике отображает неравенство: $\arg z < \frac{2\pi}{3}$.

=> Область множества D - пересечение ~~в~~ этих областей.

II) Задача 2: Найти все значения функции в указанной точке:

Дано: $z = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i} \rightarrow \ln z = (1+i).\ln\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$

Пусть: $z_1 = \frac{1-i}{\sqrt{2}} = |z_1|.e^{i\varphi_1}$; $\begin{cases} |z_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 \\ tg\,\varphi_1 = \frac{-1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = -1 \Rightarrow \varphi_1 = -\frac{\pi}{4} + k.\pi \end{cases}$

$\rightarrow z_1 = e^{i.\left(-\frac{\pi}{4} + k.\pi\right)}$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\rightarrow \ln z = (1+i)\ln e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + k.\pi\right)} = (1+i).i.\left(-\frac{\pi}{4} + k.\pi\right)$

$\Leftrightarrow \ln z = (i-1).\left(-\frac{\pi}{4} + k.\pi\right)$

$\Rightarrow z = e^{\frac{\pi}{4} - k\pi}.e^{i.\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right)} = e^{\frac{\pi}{4} - k\pi}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right)\right]$

$\Rightarrow \boxed{z = e^{\frac{\pi}{4} - k\pi}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right)\right]; k \in \mathbb{Z}}$

III) Задача 3: Найти аналитическую функцию по известной ее действительной или мнимой части:

$$f(x,y) = u(x,y) + i.v(x,y)$$

Дано: $v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$; $f(\pi) = \frac{1}{\pi}$.

Согласно теореме Коши - Римана:

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = (-y).\frac{(-1).2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x}{(x^2+y^2)^2}.\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = x.\frac{1}{x^2+y^2} + C$$

$v(\pi,0) = 0$; $f(\pi,0) = u(\pi,0) + i.v(\pi,0) = \frac{1}{\pi} \rightarrow u(\pi,0) = \frac{1}{\pi}$.

$\rightarrow C = 0$. ; $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

Искомая аналитическая функция: $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + i.\frac{(-y)}{x^2+y^2}$.

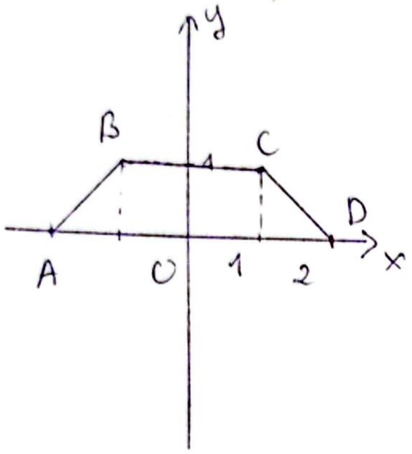
IV) Задача 4:

Дано: $\int\limits_C (\bar{z}-1).dz$, C - ломаная ABCD с вершинами A(-2;0), B(-1;1); C(1;1); D(2;0)

AB: $z=(-2+t)+i.t$, $t\in[0;1]$

BC: $z= t+i$, $t\in[-1;1]$

CD: $z=(t+1)+i.(1-t)$, $t\in[0;1]$.



+) $\int\limits_{AB} (\bar{z}-1).dz = \int_0^1 (-2+t-i.t-1)(1+i)\,dt =$

$= (1+i).\int_0^1 [-3+(1-i)t].dt =$

$= (1+i).\left[-3+\frac{(1-i)}{2}\right] = -2-3i.$

+) $\int\limits_{BC} (\bar{z}-1).dz = \int_{-1}^{1} (t-i-1).dt = \frac{t^2}{2}-(i+1).t\Big|_{-1}^{1} =$

$= -2-2i$

+) $\int\limits_{CD} (\bar{z}-1).dz = \int_0^1 [t+1-i.(1-t)-1].(1-i).dt = \int_0^1 (t+it-i)(1-i).dt =$

$= \int_0^1 (1-i).[-i.dt+(1+i)tdt] = (1-i)\left[-i+\frac{(1+i)}{2}\right] = \frac{1}{2}.(1-i)^2 = -i$

$\Rightarrow \int\limits_C (\bar{z}-1).dz = \int\limits_{AB} (\bar{z}-1).dz + \int\limits_{BC} (\bar{z}-1).dz + \int\limits_{CD} (\bar{z}-1).dz =$

$= -2-3i -2-2i -i = -4-6i.$

V) Задача 5: $f(z) = \operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(\exp z - \exp(-z))$, $z_0 = 1$.

$f'(z) = \frac{1}{2}\cdot(\exp z + \exp(-z)) = \operatorname{csh} z$

$f''(z) = \frac{1}{2}\cdot(\exp z - \exp(-z)) = \operatorname{sh} z$

$f'''(z) = \operatorname{csh} z$

$f''''(z) = \operatorname{sh} z$

$$\Rightarrow f^{(n)}(z) = \begin{cases} \operatorname{csh} z & \text{если } n = 2k+1 \\ \operatorname{sh} z & \text{если } n = 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ряд Тейлора от функции $f(z)$: $z_0 = 1$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)\cdot(z-1)}{n!} = \operatorname{sh}(1) + \operatorname{csh}(1)\cdot(z-1) + \frac{\operatorname{sh}(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{\operatorname{csh}(1)}{3!}(z-1)^3 + \ldots$$

Поскольку $\operatorname{sh}(z)$ ~~[illegible]~~ $= f(z)$ аналитна на всей комплесной плоскости, ряд Тейлора сходится для всех z. Область сходимости $\mathbb{C}$.

VI) Задача 6: $f(z) = (z^2 - 3z + 2)^{-1}$, $2 < |z| < \infty$

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \quad ; \quad \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}.$$

$$2 < |z| < \infty \to 0 < \frac{1}{|z|} < \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow f(z) = -\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n =$$

$$= \left(-\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \ldots\right) =$$

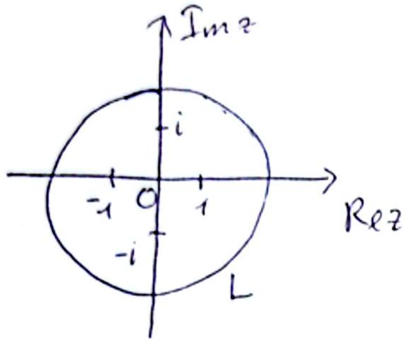
$$= \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{7}{z^7} + \ldots$$

VII) Задача 7

Вычислить интеграл с помощью вычетов:

$$I = \int_L \frac{z^3}{z^4-1} \cdot dz \quad , L = \{ z : |z| = \frac{3}{2} \}.$$

$$I = \int_L \frac{z^3}{(z^4-1)} \cdot dz = \int_L \frac{z^3}{(z^2-1)(z^2+1)} \cdot dz = \int_L \frac{z^3}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)} \cdot dz$$



Честно, $z_0 = 1$, $z_1 = -1$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$ – полюсы функции $f(z) = \frac{z^3}{z^4-1}$.

$$\underset{z_0=1}{\operatorname{res}} f = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \cdot f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{z^3}{(z+1)(z^2+1)} = \frac{1}{4};$$

$$\underset{z_1=-1}{\operatorname{res}} f = \lim_{z \to -1} \frac{z^3}{(z-1)(z^2+1)} = \frac{1}{4};$$

$$\underset{z_2=i}{\operatorname{res}} f = \lim_{z \to i} \frac{z^3}{(z^2-1)(z+i)} = \frac{-i}{(-2) \cdot 2i} = \frac{1}{4};$$

$$\underset{z_3=-i}{\operatorname{res}} f = \lim_{z \to -i} \frac{z^3}{(z^2-1)(z-i)} = \frac{i}{(-2) \cdot (-2i)} = \frac{1}{4}.$$

$$\Rightarrow I = \int_L f(z) \cdot dz = 2\pi i \cdot \sum_i \underset{z_i}{\operatorname{res}} f = 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = 2\pi i.$$

VII) Задача 8: Вычислить несобственный интеграл:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x \cdot \sin(ax)}{x^2+11} \cdot dx = \left| \sin(ax) = \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i} \right| =$$

$(a<0)$

$$= \frac{1}{2i} \cdot \left(\int_0^{\infty} \frac{x \cdot e^{iax}}{x^2+11} \cdot dx - \int_0^{\infty} \frac{x \cdot e^{-iax}}{x^2+11} \cdot dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2i} \left(\int_{C^+} \frac{z \cdot e^{iaz}}{z^2+11} \cdot dz - \int_{C^-} \frac{z \cdot e^{-iaz}}{z^2+11} \cdot dz \right) = \frac{1}{2i} \cdot (I_1 - I_2)$$

$\triangleleft$ $I_1 = \int_{C^+} \frac{z \cdot e^{iaz}}{z^2+11} \cdot dz$; $z_{01} = \sqrt{11} i$.

$$\operatorname{res}_{z_{01}} f_1 = \lim_{z \to \sqrt{11} i} \frac{z \cdot e^{iaz}}{z + \sqrt{11} i} = \frac{e^{-a\sqrt{11}}}{2}.$$

$$I_1 = 2\pi i \operatorname{res}_{z_0} f_1 = \pi i \cdot e^{-a\sqrt{11}}.$$

$\triangleleft$ $I_2 = \int_{C^-} \frac{z \cdot e^{-iaz}}{z^2+11} \cdot dz$, $z_{02} = -\sqrt{11} i$

$$\operatorname{res}_{z_{02}} f_2 = \lim_{z \to -\sqrt{11} i} \frac{z \cdot e^{-iaz}}{z^2+11} = \frac{e^{a\sqrt{11}}}{2}.$$

$$I_2 = -2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z_{02}} f_2 = -\pi i \cdot e^{a\sqrt{11}}.$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2i} \left[\pi i \cdot e^{-a\sqrt{11}} - (-\pi i \cdot e^{a\sqrt{11}}) \right] = \pi \cdot \frac{e^{-a\sqrt{11}} + e^{a\sqrt{11}}}{2} =$$

$$= \pi \cdot \operatorname{ch}(a\sqrt{11}).$$