1) Доказать первое условие множества Мандельброта:

$$\boxed{z_n = \overline{\overline{z_n}} \quad \forall n \in \mathbf{N}}$$

Применим метод математической индукции по n, где n - номер итерации.
При $n = 1$:

$$z_0 = c, \quad \overline{z_0} = \overline{c}$$

$\Rightarrow$ увержение справедливо, поскольку: $\overline{\overline{z_0}} = \overline{\overline{c}} = c = z_0$.
При $n = k$: Положим $\overline{\overline{z_k}} = z_k$.
При $n = k + 1$: Посмотрим $z_{k+1} = z_k^2 + c$

$$\overline{z_{k+1}} = \overline{z_k^2 + c} = \overline{z_k^2} + \overline{c} = (\overline{z_k})^2 + \overline{c};$$

$\overline{\overline{z_{k+1}}} = \overline{(\overline{z_k})^2 + \overline{c}} = \overline{(\overline{z})^2} + \overline{\overline{c}} = (\overline{\overline{z}})^2 + \overline{\overline{c}} = z^2 + c$, то есть $\overline{\overline{z_{k+1}}} = z_{k+1}$.

Таким образом, для каждого натурального числа n утвержедение (свойство 1) справедливо: $z_n = \overline{\overline{z_n}} \quad \forall n \in \mathbf{N}$

2) Доказать второе условие множества Мандельброта:

$$\boxed{\text{Если } |c| > 2, \text{ то } c \notin \text{множеству Мандельброта}}$$

Положим $|c| = 2 + \sigma, \forall \sigma > 0$

- $|z_1| = |z_0^2 + c| = |c|$
- $|z_2| = |z_1^2 + c| = |c^2 + c| = |c|.|c + 1| \geq |c| \to |z_2| \geq |c|$
- $|z_3| = |z_2^2 + c| \geq |z_2^2| - |c| \geq |z_2^2| - |z_2| = |z_2|^2 - |z_2|$
  $\leftrightarrow |z_3| \geq |z_2|.(|z_2| - 1) \geq |z_2|.(|c| - 1)$
  $\leftrightarrow |z_3| \geq |z_2|.(1 + \sigma) > |z_2| \geq c$

По методу математической индукции:

- $|z_4| \geq |z_3|(1 + \sigma) > |c|$
- $|z_5| \geq |z_4|(1 + \sigma) > |c|$

  ...
- $|z_{n+1}| \geq |z_n|(1 + \sigma) > |c|$

$\Rightarrow |z_{n+1}| \geq |z_1|(1 + \sigma)^n \quad \forall n \in \mathbf{N}$
Следовательно: $\lim_{n \to \infty} |z_{n+1}| = \infty$, то есть с не принадлежит множеству Мандельброта при $|c| > 2$.