УДК 513

Секованов Валерий Сергеевич
Костромской государственный университет им. Н.А. Некрасова

О МНОЖЕСТВАХ МАНДЕЛЬБРОТА И ЖЮЛИА ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В данной статье рассматриваются множеств Жюлиа и множества Мандельброта для полиномов комплексной переменной любой степени и исследуются их свойства.

Ключевые слова: *множество Жюлиа, множество Мандельброта, орбита точки, фрактал.*

В настоящее время интенсивно исследуются фрактальные множества на комплексной плоскости. Это связано с их использованием при создании математических моделей в физике, экономике и других науках. Большой интерес для исследователей представляют комплексные фракталы. Полезны комплексные фракталы и для реализации дидактических целей, поскольку математические исследования здесь органически переплетаются с разработкой алгоритмов, реализуемых с помощью современных информационных и коммуникационных технологий, включая параллельное программирование, что дает прекрасную возможность формирования креативности бакалавров, магистров, аспирантов и студентов.

Мы считаем, что данная статья может оказаться полезной в методическом плане, поскольку здесь материал излагается в той последовательности, в которой его можно использовать при чтении спецкурсов «Фрактальная геометрия и теория хаоса» и «Комплексная динамика».

Следует отметить, что множества Жюлиа и множество Мандельброта рассматриваются в известных автору учебных пособиях и монографиях [1–6] в основном для квадратичных отображений, а для многочленов, степень которых больше двух, даются только определения, приводится несколько задач и компьютерных экспериментов.

В настоящей статье мы рассмотрим множества Жюлиа и множества Мандельброта для полиномов $f(\text{z}) = z^p + c, \quad p \geq 2$. Приведем сначала определения данных комплексных фракталов.

Определение 1. Множество Жюлиа для полинома комплексного переменного, $f(\text{z}) = z^p + c$, $p \geq 2$, обозначаемое $J(f_c)$, определяется как $J(f) = \partial\{z : f^{(n)}(z) \to \infty, n \to \infty\}$, где ∂ – граница области притяжения бесконечности, а $f^{(n)}(z) = f(f^{(n-1)}(z)), n = 2, 3, \ldots$.

Определение 2. Множество Мандельброта для функции комплексного переменного $\varphi(\text{z}) = z^p + C$, $p \geq 2$, обозначаемое M_p, определяется как множество *c* комплексных точек $(c \in C)$, орбиты нуля которых ограничены. То есть точка *c* принадлежит множеству Мандельброта M_p, если последовательность $\{\varphi^{(n)}(0)\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена на комплексной плоскости.

Определение 3. Заполняющее множество Жюлиа для полинома комплексного переменного $f(\text{z}) = z^p + c$, $p \geq 2$, обозначаемое $\overline{J(f_c)}$, определяется как множество точек *z* комплексной плоскости, орбиты которых ограничены (заметим, что множеством Жюлиа будет граница заполняющего множества Жюлиа).

Построить множества Жюлиа, так же как и множества Мандельброта, без использования компьютера практически невозможно, поскольку границы этих множеств сильно изрезаны. Однако есть и исключения. Например, при $c = 0$ заполняющим множеством Жюлиа будет круг единичного радиуса с центром в начале координат, а множеством Жюлиа – окружность, граница этого круга. Обоснуем данное утверждение. Пусть $f_0(\text{z}) = z^p$, $p \geq 2$. Тогда $z_n = f_0^{(n)}(z) = z^{p^n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Если $|z| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$, а при $|z| > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$. Если же $|z| = 1$, то $|z_n| = 1$. Таким образом, заполняющим множеством Жюлиа действительно будет круг радиуса единица с центром в начале координат. Отметим, что при *c*, отличном от нуля, множество Жюлиа будет иметь фрактальную структуру.

Справедливы следующие теоремы 1 и 2, обобщающие соответственно теоремы 8.1.1, 8.3.3, доказанные в [2] для квадратичных полиномов комплексной переменной.

Теорема 1. Предположим, что $f(z)=z^p+c$, где $|c|<2$, а $p\ge 2$. Пусть $z\in C$ и $z_n=f_c^{(n)}(z)$ для $n=1, 2, 3, \ldots$ Если существует такое n_0, что $|z_{n_0}|\ge 2$, то имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$. То есть орбита $z_n=\{f_c^{(n)}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ стремится к бесконечности и z не принадлежит множеству Жюлия $\overline{J(f_c)}$.

Доказательство. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что $|z|\ge 2$. Тогда $|f_c(z)|\ge|z^p+c|\ge|z|\left(|z|^{p-1}-\dfrac{|c|}{|z|}\right)$. Рассмотрим функцию вещественной переменной $\varphi(x)=x^{p-1}-\dfrac{|c|}{x}$, $x\in[2;\infty)$. Имеем: $\varphi'(x)=(p-1)x^{p-2}+\dfrac{|c|}{x^2}$. Следовательно, при переменной $x\in[2;\infty)$ функция $\varphi(x)$ возрастает. Пусть $|c|=2-2\delta, \delta>0$. Тогда $|z|^{p-1}-\dfrac{|c|}{|z|}\ge 2^{p-1}-\dfrac{|c|}{2}=2^{p-1}-1+\delta>1+\delta$. Таким образом, $|f_c(z)|\ge|z|(1+\delta)$.

Положив $f_c(z)=y$, имеем $|f_c(z)|=|y|\ge|z|^p-|c|$, $|z|\ge 2$. Поскольку $|z|^p\ge 4, |c|<2$, то $|f_c(z)|=|y|\ge 2$, и мы получим, что $\left|f_c^{(2)}(z)\right|=|f_c(y)|\ge|y|(1+\delta)\ge|z|(1+\delta)^2$. Продолжая аналогичные рассуждения, получим для любого натурального n $\left|f_c^{(n)}(z)\right|\ge|z|(1+\delta)^n$, что и заканчивает доказательство теоремы 1.

Обозначим n-ю итерацию функции $f_c(z)=z^p+c$ при фиксированном p через $f_c^{(n)p}(z)$.

Следствие 1. Предположим, что $f_c^{(n)p}(z)$, $|z|>1, |c|<1$. Тогда существует такое p_0, что для каждого $p>p_0$ орбита точки z стремится к бесконечности.

Доказательство. Так как $|z|>1$, то существует такое натуральное число p_0, что $|z|^{p_0}-|c|>2$. Тогда при каждом $p>p_0$ $\left|f_c^{(1)p}(z)\right|=|z^p+c|\ge|z|^p-|c|>|z|^{p_0}-|c|>2$. Согласно теореме 1 последовательность $\left\{f_c^{(n)p}(z)\right\}_{n=1}^{\infty}$ стремится к бесконечности для каждого $p>p_0$. Поскольку орбита точки z: $\left\{z, f_c^{(1)p}(z), f_c^{(2)p}(z), \ldots, f_c^{(n)p}(z), \ldots\right\}$ отличается от последовательности $\left\{f_c^{(n)p}(z)\right\}_{n=1}^{\infty}$ только одним первым членом, то она также стремится к бесконечности для каждого $p>p_0$.

Теорема 2. Предположим, что $f_c(z)=z^p+c$, где $|c|>2$, $|z|\ge|c|$ и $p\ge 2$. Тогда орбита точки z устремляется к бесконечности и $c\notin M_p$.

Доказательство. Положим $|c|=2+\delta, \quad \delta>0$. Далее имеем

$$
\begin{aligned}
&|f_c(z)|\ge|z^p+c|\ge|z|^p-|c|\ge|z|^p-|z|=|z|\left(|z|^{p-1}-1\right)=\\
&=|z|(|z|-1)\left(|z|^{p-2}+|z|^{p-3}+\ldots+|z|+1\right)>\\
&>|z|(|z|-1)\ge|z|(|c|-1)=|z|(1+\delta).
\end{aligned}
$$

Положим $f_c(z)=y$, где $|c|>2, |z|\ge|c|$ и $|y|\ge|z|(1+\delta)\ge|z|\ge|c|>2$. Тогда имеем: $|y|=|f_c(y)|\ge|y|^p-|c|\ge|c|^p-|c|=|c|\left(|c|^{p-1}-1\right)>|c|$. Таким образом, $\left|f_c^{(2)}(z)\right|=|f_c(f_c(z))|=|f_c(y)|\ge|y|(1+\delta)\ge|z|(1+\delta)^2$. Продолжая аналогичные рассуждения, получим неравенство $\left|f_c^{(n)}(z)\right|\ge|z|(1+\delta)^n$ для каждого натурального n. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f_c^{(n)}(z)=\infty$.

Далее имеем $f_c(0)=c$. Поскольку $|c|\ge|c|>2$, то согласно предыдущему рассуждению орбита точки c стремится к бесконечности. В таком случае к бесконечности будет стремиться и орбита нуля. Согласно определению множества Мандельброта точка c ему не принадлежит. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть $f_c(z)=z^p+c$, $p\ge 2$. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) если $p\ge 2$, $p\in N$, то множество Мандельброта для функции $f_c(z)=z^p+c$ симметрично относительно вещественной оси;

б) если $p\ge 2$ – четное число, то множество

Мандельброта для функции $f_c(z)=z^p+c$ не симметрично относительно мнимой оси;

в) если $p\ge 3$ – нечетное число, то множество Мандельброта для функции $f_c(z)=z^p+c$ симметрично относительно мнимой оси, а значит, центрально симметрично.

Доказательство. а) Мы убедимся, что $f_c^{(n)}(0)=\overline{f_{\bar c}^{(n)}(0)}$ для каждого натурального числа *n*. Применим метод математической индукции по *n*, где *n* – номер итерации. При *n* = 1 имеем $f_c(0)=c$, а $f_{\bar c}(0)=\bar c$ и утверждение справедливо, поскольку $\overline{f_{\bar c}(0)}=\bar{\bar c}=c=f_c(0)$. Пусть теперь наше утверждение справедливо при *n* = *k*. То есть $f_c^{(k)}(0)=\overline{f_{\bar c}^{(k)}(0)}$. Покажем тогда, что $f_c^{(k+1)}(0)=\overline{f_{\bar c}^{(k+1)}(0)}$. Положим $f_c^{(k)}(0)=y=\overline{f_{\bar c}^{(k)}(0)}$. Тогда $f_{\bar c}^{(k)}(0)=\bar y=\overline{f_c^{(k)}(0)}$. Далее имеем:

$$f_c^{(k+1)}(0)=f_c\left(f_c^{(k)}(0)\right)=f_c(y)=y^p+c.$$

$$f_{\bar c}^{(k+1)}(0)=f_{\bar c}\left(f^{(k)}_{\bar c}(0)\right)=f_{\bar c}(\bar y)=\bar y^p+\bar c=$$
$$=\overline{y^p}+\bar c=\overline{y^p+c}.$$

Следовательно, $f_c^{(k+1)}(0)=\overline{f_{\bar c}^{(k+1)}(0)}$.

Таким образом, для каждого натурального числа *n* $f_c^{(n)}(0)=\overline{f_{\bar c}^{(n)}(0)}$. Покажем, что $c\in M_n$, тогда и только тогда, когда сопряженное число $\bar c\in M_n$.

Действительно, $f_c^{(n)}(0)=\overline{f_{\bar c}^{(n)}(0)}$ и $\overline{f_c^{(n)}(0)}=\overline{\overline{f_{\bar c}^{(n)}(0)}}=f_{\bar c}^{(n)}(0)$. Замечаем, что $\left|f_c^{(n)}(0)\right|=\left|\overline{f_{\bar c}^{(n)}(0)}\right|$. Следовательно, последовательности $\left\{f_{\bar c}^{(n)}(0)\right\}_{n=1}^{\infty}$ и $\left\{f_c^{(n)}(0)\right\}_{n=1}^{\infty}$ одновременно сходятся или расходятся и а) доказано.

Докажем теперь б). Пусть $p=2k, k\ge 1$ – четное число. Найдем две точки, симметричные относительно мнимой оси, одна из которых принадлежит M_{2k}, а другая не принадлежит. Заметим, что $-1\in M_{2k}$, поскольку для функции $f_{-1}(z)=z^{2k}-1$ орбита нуля ограничена $\left\{f_{-1}^{(n)}(0)\right\}_{n=1}^{\infty}=\{0,-1,0,-1,\ldots\}$. Однако $1\notin M_{2k}$, ибо для функции $f_1(z)=z^{2k}+1$ орбита нуля $\left\{f_1^{(n)}(0)\right\}_{n=1}^{\infty}=\left\{0,1,2,2^{2k}+1,\left(2^{2k}+1\right)^{2k}+1,\ldots\right\}$ не ограничена.

Докажем в). Пусть $c=c_1+ic_2$ и $p=2k+1$, $k\ge 1$. Введем обозначение $\overleftrightarrow{c}=-c_1+ic_2$. Заметив, что модули комплексных чисел $c=c_1+ic_2$ и $\overleftrightarrow{c}=-c_1+ic_2$ равны, покажем, что $c\in M_{2k+1}$, тогда и только тогда, когда $\overleftrightarrow{c}\in M_{2k+1}$.

Итак, пусть *p* – нечетно. Покажем сначала, что $f_c^{(n)}(0)=\overleftrightarrow{f_{\overleftrightarrow{c}}^{(n)}}(0)$ для каждого натурального числа *n*, где $f(z)=z^p+c$. Применим вновь метод математической индукции по *n*, где *n* – номер итерации. При *n* = 1 имеем $f_c(0)=c$, а $f_{\overleftrightarrow{c}}(0)=\overleftrightarrow{c}$. Следовательно, наше утверждение справедливо. Предположим теперь, что утверждение справедливо при *n* = *k*. То есть $f_c^{(k)}(0)=\overleftrightarrow{f_{\overleftrightarrow{c}}^{(k)}}(0)$. Покажем тогда, что $f_c^{(k+1)}(0)=\overleftrightarrow{f_{\overleftrightarrow{c}}^{(k+1)}}(0)$. Положим $f_c^{(k)}(0)=y=\overleftrightarrow{f_{\overleftrightarrow{c}}^{(k)}}(0)$, где $y=y_1+iy_2$. Тогда $\overleftrightarrow{f_c^{(k)}}(0)=\overleftrightarrow{y}=f_{\overleftrightarrow{c}}^{(k)}(0)$. Далее, используя бином Ньютона и определение *k* + 1 итерации функции $f(z)=z^p+c$, получим равенство (1):

$$\begin{aligned}
&f_c^{(k+1)}(0)=f_c\left(f_c^{(k)}(0)\right)=f_c(y)=y^p+c_1+ic_2=\\
&=(y_1+iy_2)^p+c_1+ic_2=C_p^0y_1^py_2^0i^0+C_p^1y_1^{p-1}y_2^1i^1+\\
&+C_p^2y_1^{p-2}y_2^2i^2+C_p^3y_1^{p-3}y_2^3i^3+\ldots..\\
&\ldots+C_p^{p-3}y_1^3y_2^{p-3}i^{p-3}+C_p^{p-2}y_1^2y_2^{p-2}i^{p-2}+\\
&+C_p^{p-1}y_1^1y_2^{p-1}i^{p-1}+C_p^py_1^0y_2^pi^p+c_1+ic_2.
\end{aligned}\tag{1}$$

Учитывая, что $\overleftrightarrow{c}=-c_1+ic_2$, получим равенство (2):

$$f_{\overset{\leftrightarrow}{c}}^{л+1}(0)=f_{\overset{\leftrightarrow}{c}}\left(f_{\overset{\leftrightarrow}{c}}^{(k)}(0)\right)=f_{\overset{\leftrightarrow}{c}}\left(\overset{\leftrightarrow}{y}\right)=\overset{\leftrightarrow}{y}^{p}+\overset{\leftrightarrow}{c}=$$
$$=(-y_1+iy_2)^p-c_1+ic_2=C_p^0(-y_1)^p\,y_2^0i^0+$$
$$+C_p^1(-y_1)^{p-1}\,y_2^1i^1+C_p^2(-y_1)^{p-2}\,y_2^2i^2+$$
$$+C_p^3(-y_1)^{p-3}\,y_2^3i^3+\ldots\ldots+C_p^{p-3}(-y_1)^3\,y_2^{p-3}i^{p-3}+$$
$$+C_p^{p-2}(-y_1)^2\,y_2^{p-2}i^{p-2}+C_p^{p-1}(-y_1)^1\,y_2^{p-1}i^{p-1}+$$
$$+C_p^{p}(-y_1)^0\,y_2^{p}i^{p}-c_1+ic_2. \qquad (2)$$

Замечаем, что на четных местах в (1) и (2) стоят одночлены, не имеющие в своем составе мнимой единицы i. Занумеруем данные одночлены члены слева направо. Получим выражения (3):

$$a_0=C_p^0y_1^py_2^0i^0,\ b_0=C_p^0(-y_1)^p\,y_2^0i^0;$$
$$a_2=C_p^2y_1^{p-2}y_2^2i^2,\ b_2=C_p^2(-y_1)^{p-2}\,y_2^2i^2;\ldots;$$
$$a_{p-1}=C_p^{p-1}y_1^1y_2^{p-1}i^{p-1},\ b_{p-1}=C_p^{p-1}(-y_1)^1\,y_2^{p-1}i^{p-1};$$
$$a_{p+1}=c_1,\ b_{p+1}=-c_1. \qquad (3)$$

Из соотношений (3) замечаем, что одночлены, стоящие на четных местах, имеют противоположные знаки. Рассуждая аналогично, нетрудно убедиться, что на нечетных местах стоят одинаковые одночлены. Таким образом, если p – нечетно, получим $f_c^{(k+1)}(0)=\overset{\leftrightarrow}{f}{}_{\overset{\leftrightarrow}{c}}^{(k+1)}(0)$. Следовательно, $f_c^{(n)}(0)=\overset{\leftrightarrow}{f}{}_{\overset{\leftrightarrow}{c}}^{(n)}(0)$ для каждого натурального числа n.

Далее $\forall n\in N$ из равенства $f_c^{(n)}(0)=\overset{\leftrightarrow}{f}{}_{\overset{\leftrightarrow}{c}}^{(n)}(0)$ получаем, что $f_{\overset{\leftrightarrow}{c}}^{(n)}(0)=\overset{\leftrightarrow}{f}{}_{c}^{(n)}(0)$. Поскольку $\left|f_c^{(n)}(0)\right|=\left|\overset{\leftrightarrow}{f}{}_{c}^{(n)}(0)\right|$, то последовательности $\left\{f_{\overset{\leftrightarrow}{c}}^{(n)}(0)\right\}_{n=1}^{\infty}$ и $\left\{f_c^{(n)}(0)\right\}_{n=1}^{\infty}$ одновременно сходятся или расходятся.

Таким образом, $c\in M_p$, тогда и только тогда, когда $\overset{\leftrightarrow}{c}\in M_p$, что и доказывает симметричность множества Мандельброта относительно мнимой оси при $p=2k+1, k\geq 1$.

Далее, пусть $c=c_1+ic_2\in M_p$. Согласно пункту а) теоремы 3 $\bar{c}=c_1-ic_2\in M_p$. Поскольку p нечетно, то согласно пункту в) теоремы 3 множество Мандельброта симметрично относительно мнимой оси. Тогда $\overset{\leftrightarrow}{\bar{c}}=-c_1-c_2i=-c\in M_p$. Теорема 3 доказана.

Теоремы 1 и 2 дают возможность глубже исследовать математические свойства множеств Жюлиа и множеств Мандельброта. Данные теоремы также позволяют разрабатывать эффективные алгоритмы для визуализации этих множеств на мониторе компьютера, без которого, как уже отмечалось, строить множества Жюлиа и множества Мандельброта (за редким исключением) невозможно.

Предложение 1. При каждом натуральном $p\geq 2$ множества Мандельброта M_p находятся внутри или на границе круга радиуса 2 с центром в начале координат.

Доказательство. Пусть комплексное число c такое, что $|c|>2$. Тогда в силу теоремы 2 $c\notin M_p$. Покажем, что при некоторых значениях p точка $c\in M_p$ может находиться на границе круга с центром в начале координат и радиусом, равным 2. Действительно, пусть $c=-2$, $p=2$. Тогда для функции $f_{-2}(z)=z^2-2$ орбита нуля $\{0,-2,2,2,2,\ldots\}$ ограничена. Следовательно, $c\in M_2$. Видимо, это единственный случай. То есть не существует таких $p\neq 2$, для которых граничная точка окружности с центром в начале координат и радиусом, равным 2, принадлежит M_p. Предложение 1 доказано.

Предложение 2. Заполняющее множество Жюлиа для функции $f_c(z)=z^p+c$, $p\geq 2$ непусто.

Доказательство. Пусть n – натуральное число. Рассмотрим уравнение $f^{(n)}(z)=z$, левая часть которого является многочленом степени p^n, имеющим ровно p^n корней: $z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots,\ z_{p^n}$. Нетрудно заметить, что для корней уравнения выполняются следующие равенства: $z_2=f(z_1)$, $z_3=f(z_2),\ \ldots,\ z_{p^n}=f(z_{p^n-1}),\ f(z_{p^n})=z_1$. Таким образом, орбита каждой точки $z_i \quad i=\overline{1,p^n}$ ограничена. И, следовательно, каждая из них принадлежит заполняющему множеству Жюлиа. Объединение всех неподвижных точек функции $f^{(n)}(z)$ $n \in N$ конечно или счетно, а следовательно, непусто.

Предложение 3. Если $p \geq 2$ – четное число, то множество Жюлиа для функции $f_c(z)=z^p+c$ центрально симметрично. Пусть z принадлежит заполняющему множеству Жюлиа. Тогда орбита точки z: $\left\{z, z^2+c, \left(z^2+c\right)^2+c, \ldots\right\}$ ограничена. Рассмотрим орбиту точки $-z$: $\left\{-z, (-z)^2+c, \left((-z)^2+c\right)^2+c, \ldots\right\}$. Сравнивая полученные последовательности, замечаем, что они отличаются только первым членом. Следовательно, орбита точки $-z$ ограничена, и она принадлежит заполняющему множеству Жюлиа. Если точка $-z$ принадлежит заполняющему множеству Жюлиа, то, рассуждая аналогично, нетрудно показать, что z также ему принадлежит. Предложение 2 доказано.

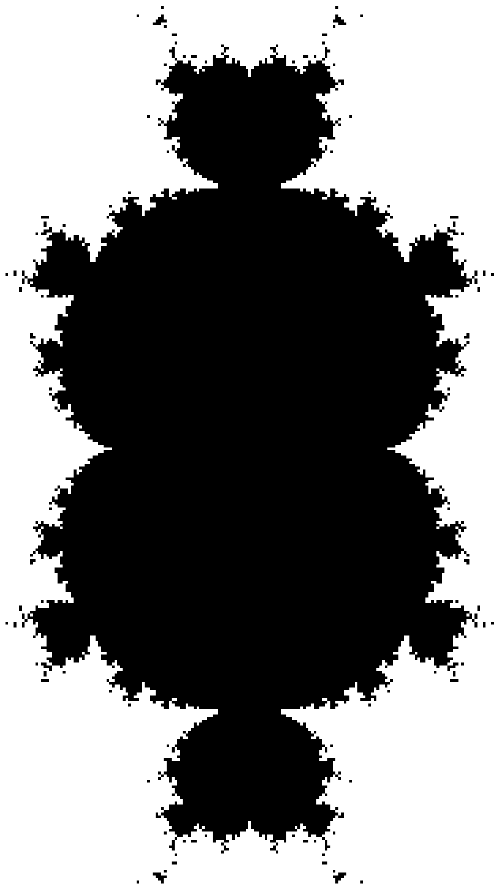

Рис. 1. Множество Мандельброта для функции $f(z) = z^3 + c$

Компьютерные эксперименты показывают, что множество Мандельброта M_p, порожденное многочленом $f_c(z)=z^p+c$, $p \geq 2$, состоит из доминирующей области, состоящей из p – 1 примыкающих областей (для p = 3 см. рис. 1). Покажем, что внутренность этой области соответствует точкам c, для которых сопутствующее множество Жюлиа имеет притягивающую неподвижную точку. Докажем это и построим границу данной области.

Пусть z есть притягивающая неподвижная точка. Тогда выполняются два условия:

1) $f_c(z)=z^p+c=z$; 2) $\left|f_c'(z)\right|=\left|pz^{p-1}\right|<1$.

Из условия 2) следует, что точки границы удовлетворяют соотношению $p|z|^{p-1}=1$. Или же $|z|=\dfrac{1}{\sqrt[p-1]{p}}$. Тогда переменную z можно записать в виде $z=\dfrac{1}{\sqrt[p-1]{p}}e^{it}$ (*), где $t \in [0; 2\pi]$.

Учитывая условия 1), (*) и $z^p=\dfrac{e^{ipt}}{\sqrt[p-1]{p^p}}=\dfrac{e^{ipt}}{p\sqrt[p-1]{p}}$, получим выражение $c=\dfrac{1}{\sqrt[p-1]{p}}e^{it}-\dfrac{1}{p\sqrt[p-1]{p}}e^{pit}=\dfrac{1}{\sqrt[p-1]{p}}\left(e^{it}-\dfrac{e^{pit}}{p}\right)$, где $t \in [0; 2\pi]$, $p \geq 2$, которое является уравнением границы основной области множества M_p.

Положив $c=c_1+ic_2$, получим параметрическое уравнение данной линии:

$$\begin{cases} c_1=\dfrac{1}{\sqrt[p-1]{p}}\left(\cos t-\dfrac{\cos pt}{p}\right) \\ c_2=\dfrac{1}{\sqrt[p-1]{p}}\left(\sin t-\dfrac{\sin pt}{p}\right) \end{cases},$$

где $t \in [0; 2\pi]$, $p \geq 2$.

Найдем площадь S_p основной области множества Мандельброта M_p:

$$S_p = 2\int_{\pi}^{0} \frac{1}{\sqrt[p-1]{p}} \left(\sin t - \frac{\sin pt}{p} \right) \frac{1}{\sqrt[p-1]{p}} (\sin pt - \sin t)\, dt =$$

$$\frac{2}{\sqrt[p-1]{p^2}} \int_0^{\pi} \left(\sin^2 t + \frac{\sin^2 pt}{p} - \frac{(p+1)}{p} \sin pt \sin t \right) dt.$$

Вычисляя последний интеграл, получим:

$$S_p = \frac{1}{\sqrt[p-1]{p^2}} \left(\pi + \frac{\pi}{p} \right).$$

Заметим, что последовательность $\left\{ \frac{1}{\sqrt[p-1]{p}} \right\}_2^{\infty}$ монотонно возрастает и предел ее равен единице. Таким образом, сопутствующее множество Жюлиа с притягивающей неподвижной точкой при достаточно большом *p* будет приближаться к кругу радиуса единица с центром в начале координат.

Это же предположение подтверждает и вычисленная нами площадь $S_p = \frac{1}{\sqrt[p-1]{p^2}} \left(\pi + \frac{\pi}{p} \right)$, поскольку $\lim_{p \to \infty} S_p = \lim_{p \to \infty} \frac{1}{\sqrt[p-1]{p^2}} \left(\pi + \frac{\pi}{p} \right) = \pi$ – есть площадь круга радиуса 1.

Согласно следствию 1 при достаточно больших $p\ (p > p_0)$ и $|c| < 1$ точка *z*, модуль которой больше единицы, не принадлежит заполняющему множеству Жюлиа $\overline{J(f_c)}$.

Заметим также, что

$$\lim_{p \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[p-1]{p}} e^{it} - \frac{1}{p \sqrt[p-1]{p}} e^{pit} \right) = e^{it}$$

для каждого $t \in [0; 2\pi]$.

При *p*=3 получим:

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\cos t - \frac{\cos 3t}{3} \right) \\ c_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sin t - \frac{\sin 3t}{3} \right) \end{cases}, \ t \in [0; 2\pi].$$

А обрамление M_3, у которого в сопутствующем заполняющем множестве Жюлиа будет неподвижная притягивающая точка, заполнит внутренность основной части множества Мандельброта, расположенной на рисунке 1.

Например, для функции $f_c(z) = z^3$ получим одну притягивающую неподвижную точку $z_1 = 0$ и две отталкивающие неподвижные точки $(z_2 = 1, \quad z_3 = -1)$.

Приведем таблицу (табл. 1) нескольких значений функции: $c = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(e^{it} - \frac{e^{pit}}{3} \right)$.

Заметим, что данная линия простирается по вещественной оси от $-\frac{2}{3\sqrt{3}} \approx -0{,}39$ до $\frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}39$.

Следует отметить, что согласно исследованным свойствам множеств Жюлиа и множеств Мандельброта алгоритмы их построения значительно сокращают число вычислительных операций.

Библиографический список

1. *Морозов А. Д.* Введение в теорию фракталов. – М.; Ижевск, 2002.
2. *Кроновер Ричард М.* Фракталы и хаос в динамических системах: пер. с англ. под ред. Т.Э. Крэнкеля. – М.: Постмаркет 2000.
3. *Божокин С. В., Паршин Д. А.* Фракталы и мультифракталы. – М.; Ижевск, 2001.
4. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы: (миниатюры из бесконечного рая). – М.:

Таблица 1

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
c_1	$\frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}39$	0	$-\frac{2}{3\sqrt{3}} \approx -0{,}39$	0
c_2	0	$\frac{4}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}78$	0	$-\frac{4}{3\sqrt{3}} \approx -0{,}78$

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотичная динамика», 2001.
5. *Гринченко В.Т., Мацыпура В.Т., Снарский А.А.* Введение в нелинейную динамику. Хаос и фракталы. Изд. 2-е. – М.: URSS, 2007.
6. *Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х.* Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем: пер. с англ. под ред. А.Н. Шарковского. – М.: Мир, 1993.

УДК 636.2.082:591.421

Сиротина Марина Валерьевна
кандидат биологических наук
Костромской государственный университет им. Н.А. Некрасова
mvsirotina@gmail.com
Баранов Александр Васильевич
доктор биологических наук
Костромской НИИСХ Россельхозакадемии
Knicx@kosnet.ru

ИЗУЧЕНИЕ ДЕРМАТОФЕНОВ КРУПНОГО РОГАТОГО СКОТА

В статье описана история изучения дерматофенов носогубного зеркала крупного рогатого скота в России и за рубежом. Обращается внимание на эпигенетические основы фенетики, отмечен вклад авторов в развитие фенетики крупного рогатого скота.

Ключевые слова*: фенетика, носогубное зеркало, дерматоглифы, эпигенетика.*

Фенетика – это научное направление, сформировавшееся в 70-е годы XX века на стыке генетики, классической зоологии и ботаники. Предметом фенетики является внутривидовая изменчивость, которая доводится до рассмотрения дискретных альтернативных признаков – фенов, а методы фенетики основаны на вычленении различных фенов, количественном и качественном их изучении. По мнению А.Г. Васильева [4; 5], в последние годы всё яснее становится, что фенетика основана на популяционном анализе процессов развития (эпигенеза) и является своеобразным «популяционным окном» в онтогенез и морфогенез. Впервые эта мысль была сформулирована А.В. Яблоковым [20] и развивалась в работах его учеников и последователей.

Успехи молекулярной биологии в последние годы позволяют установить реальное существование эпигенетических механизмов и их роль в регуляции процессов функционирования генома и морфогенеза [5; 8; 19]. По мнению Б.В. Конюхова, «фенотип многоклеточного организма рассматривается сейчас не как мозаика признаков, контролируемых отдельными генами, а как общий продукт взаимодействия многих тысяч генов в онтогенезе». Следовательно, генотип развивающегося организма представляет собой эпигенетическую систему, а фены представляют собой «маркеры» особенностей организации процесса «эпигенеза», то есть могут служить маркерами эпигенетической системы популяции. По мнению А.Г. Васильева [4], фены представляют собой результат дискретного осуществления в ходе развития последовательных или альтернативных шагов онтогенетических программ, лежащих в основе структурогенеза, и позволяют надёжно и устойчиво маркировать эпигенетическую специфику популяций и внутрипопуляционных групп.

У крупного рогатого скота в настоящее время выделено более 40 фенов. Среди них: дерматоглифы носогубного зеркала, вибриссы, форма завитков волос на некоторых частях тела, форма копытец, рогов, ноздрей, ушей, вымени, молочных колодцев, масть, форма и расположение отметин на туловище, конечностях и др., но наиболее перспективным направлением в фенетике крупного рогатого скота является изучение дерматофенов носогубного зеркала.

История изучения дерматоглифических узоров носогубного зеркала началась в 20-е годы XX века, когда вышел ряд работ, посвящённых этой тематике в Австрии, Англии, Германии, Японии, России. Основы фенетики дерматоглифов носогубного зеркала были разработаны на Украине А.Л. Трофименко в 70-е – 90-е годы прошлого века. Так, А.Л. Трофименко были проанализированы частоты дерматотипов у 14 пород крупного рогатого скота, сделаны выводы о породной специфичности распределения частот дер-