Математический анализ

2023

Расчётно-графическая работа № 3

«Производная и исследование функции»

Студенты: Данько Савелий P3112

Фан Нгок Туан P3121

Фам Данг Чунг Нгиа P3121

Номер потока: 13.1

Преподаватель: Правдин Константин

Дата: 13.10.2023

Место: НИУ ИТМО

Задание 1. Дифференциал

Задача: Вычислите приближённо площадь кругового кольца с внутренним радиусом R и шириной ΔR

1) Составьте математическую модель задачи: введите обозначения, выпишите данные, составьте уравнение (систему уравнений), содержащее неизвестное.

Уравнение вычисления площади этого кольца:

$$S = \pi(R + \Delta R)^2 - \pi R^2$$

Обозначения присутствующие в выше уравнении:

- S- площадь этого кольца
- π- число "пи"
- R- внутренный радиус кольца
- ΔR- ширина радиуса кольца

2) Решите задачу аналитически, применяя понятие дифференциала и приближая точное изменение её линейной частью.

Имеем $f(x)$ причем $x \in (0, +\infty)$

$$f(x) = \pi x^2 \quad f(x) \in \mathbb{R}$$

Считаем: $x_0 = R, \quad h = \Delta R \to 0$

$$x_0, \quad x_0 + h \in (0, +\infty)$$

Применяя понятие дифференциала, мы пишем дифференцируемую функцию $f(x)$ в точке x_0, если существует такое число A, что:

$$S = f(x_0 + h) - f(x_0) = A.h + o(h), \quad h \to 0 \quad \text{или} \quad df(x_0) = A.h = A.dx$$

(A- точное изменение линейной частью функции)

$$\Rightarrow A = \frac{d(f(x_0))}{dx} = \frac{d(\pi x^2)}{dx} = (\frac{\pi 2x\,dx}{dx})_{x=x_0} = \pi 2x_0 = 2\pi R$$

Мы получаем:

$$\Rightarrow S = A.h + o(h) \approx A.h = (2\pi R).(\Delta R) = 2\pi R \Delta R$$

3) Сделайте графическую иллюстрацию к решению задачи. Обратите внимание, чтобы график отражал данные физически корректно. Сравните его с аналитическим решением.

Мы строим графики уравнений, как показано ниже:

- красный график - график уравнения $S = \pi(R + \Delta R)^2 - \pi R^2$
- зелёный график - график уравнения $S = 2\pi R \Delta R$.

Когда $\Delta R \to 0$, красный и зелёный графики почти совпадают.

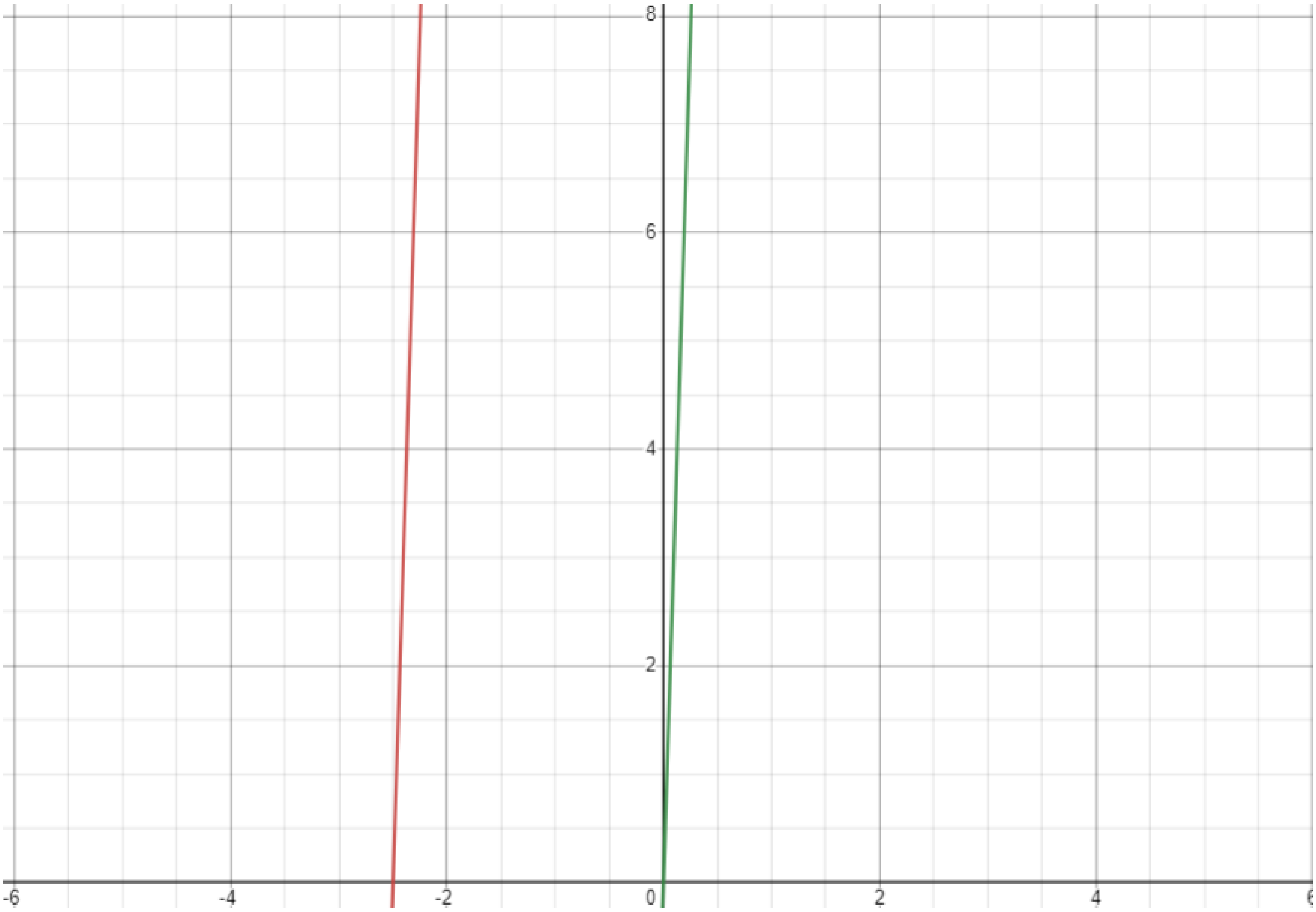


Рис. 1: График уравнений $S = \pi(R + \Delta R)^2 - \pi R^2$ и $S = 2\pi R \Delta R$ когда $\Delta R = 5$.

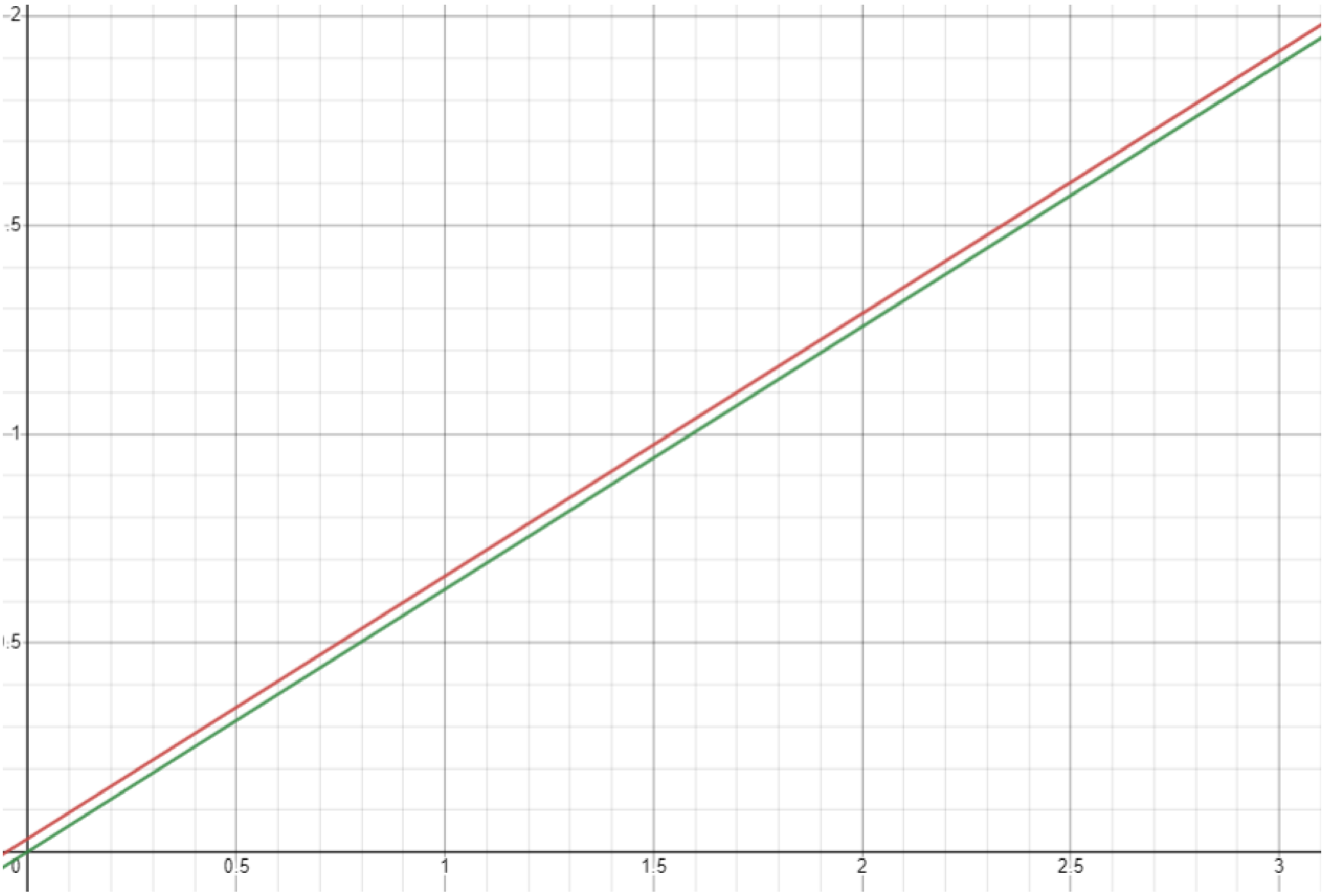


Рис. 2: График уравнений $S = \pi(R + \Delta R)^2 - \pi R^2$ и $S = 2\pi R \Delta R$ когда $\Delta R = 0.1$.

4) Ответ:
$S \approx 2\pi R \Delta R$

Задание 2. Наибольшее и наименьшее значения функции

Задача: Из куска металла, ограниченного линиями $y = x, \quad x = 12, \quad y = 0$ требуется выпилить деталь прямоугольной формы с наибольшей площадью.

1) Составьте математическую модель задачи: введите обозначения, выпишите данные, составьте уравнение (систему уравнений), содержащее неизвестное.

Уравнение вычисления площади этого прямоугольника:

$$S = (12 - x)(y - 0) = (12 - x)x = 12x - x^2$$

Обозначения присутствующие в выше уравнении:

- S- площадь этого прямоугольника
- (x, y)- координаты одной вершины прямоугольника, принадлежащей линии $y = x$, $(x, y > 0)$

2) Решите задачу аналитически, применяя необходимое и достаточное условия экстремума.

У нас есть функция: $f(x) = S = 12x - x^2$, $f(x) \in \mathbb{R}$ и $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, причем $x \in (0, 12)$

Применяем необходимое условие экстремума: Если функция f(x) имеет экстремум в точке x_0, то ее производная равна нулю:

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = [\frac{d(-x^2 + 12x)}{dx}]_{x=x_0} = -2x_0 + 12 = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{12}{2} = 6$$

Применяем достаточное условие экстремума:

$f''(x_0) = -2 < 0$, то в точке x_0 функция f(x) достигает максимум. Это значит мы получаем наибольшую площадь этого прямоугольника когда $x = x_0 = 6$.

$$S_{max} = f(x_0) = (12 - 6) * 6 = 36$$

3) Сделайте графическую иллюстрацию к решению задачи. Учтите на графике, что реальные физические величины имеют естественные ограничения на свои значения. Сверьтесь с аналитическим решением.

Приведенный ниже график представляет прямоугольник ABCD (A - вершина прямоугольника, принадлежащая линии $y = x$). S - площадь прямоугольника ABCD ($0 < x, y < 12$)

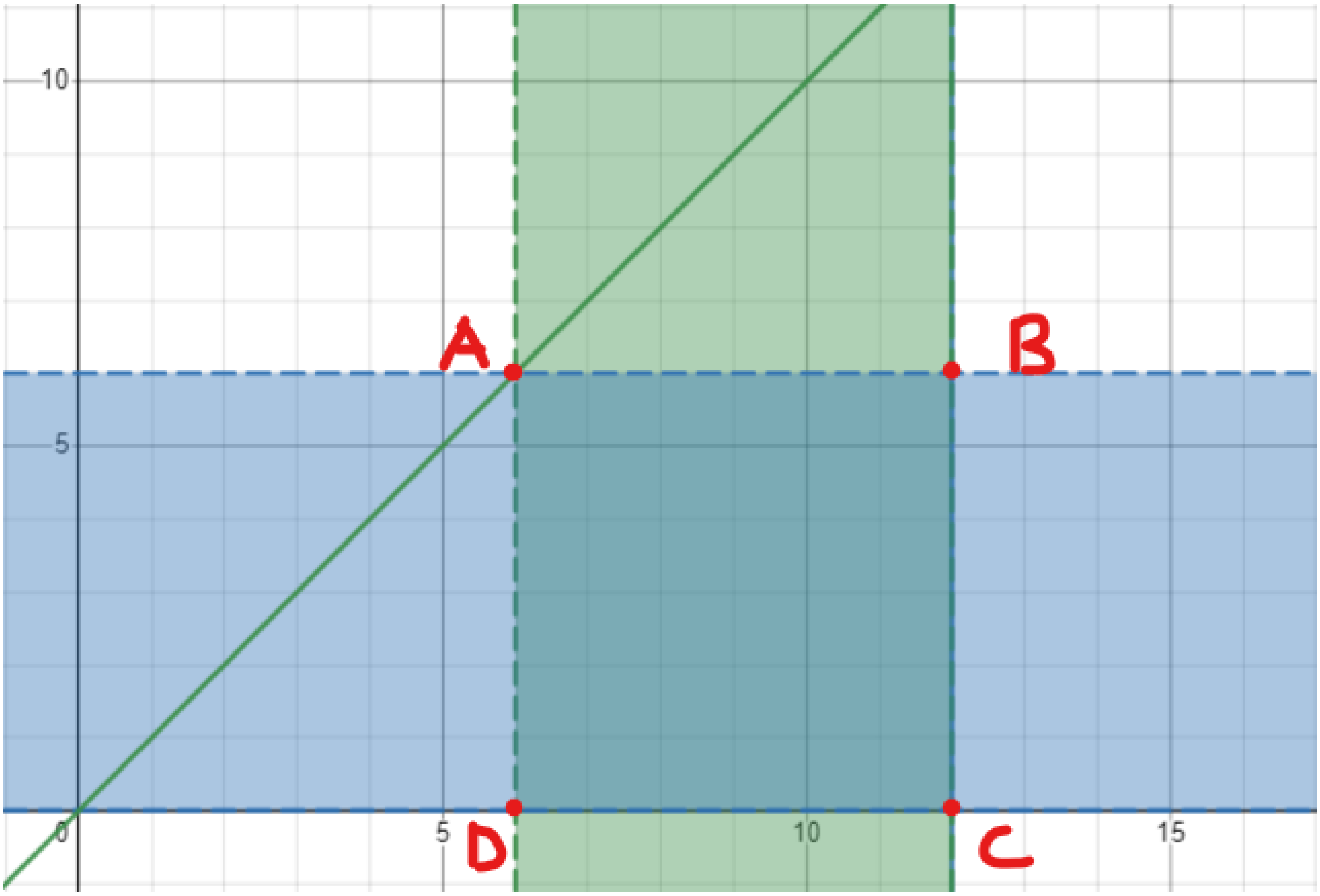


Рис. 3: График график представляет прямоугольник ABCD

График представляет уравнение $S = f(x) = 12x - x^2$. Точка экстремума на графике, в которой уравнение $S = f(x)$достигает максимума, равна (6, 36).

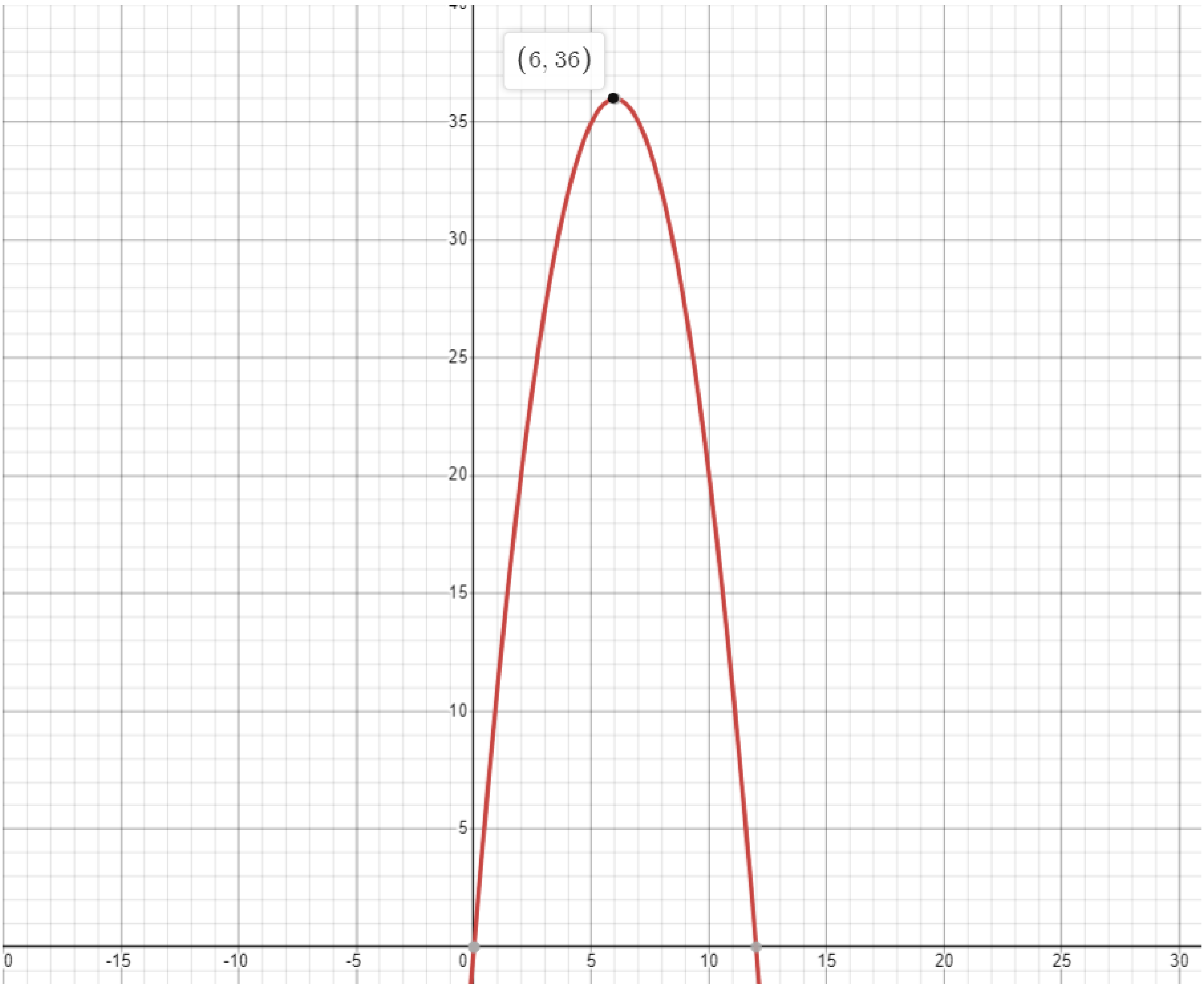


Рис. 4: График представляет уравнение $S = f(x) = 12x - x^2$

Результат расчета по графику совпадает с аналитическим решением.

4) Ответ:

Получился квадрат, S квадрата = 36

Задание 3. Графики функции и производной

По графику функции постройте график её первой производной. Подробно прокомментируйте, почему он так выглядит, ссылаясь на изученные теоремы.

2.

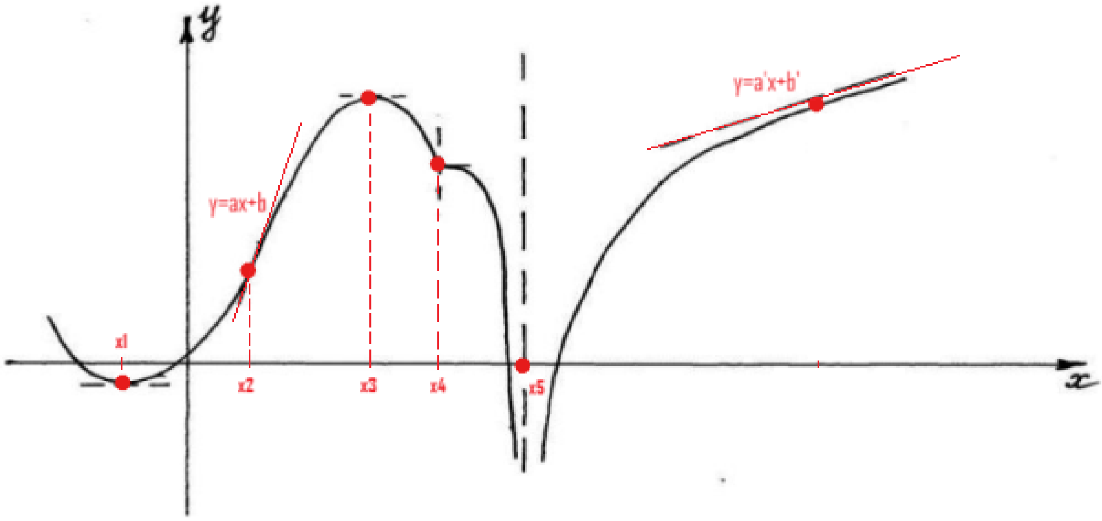


Рис. 5: График функции $f(x)$

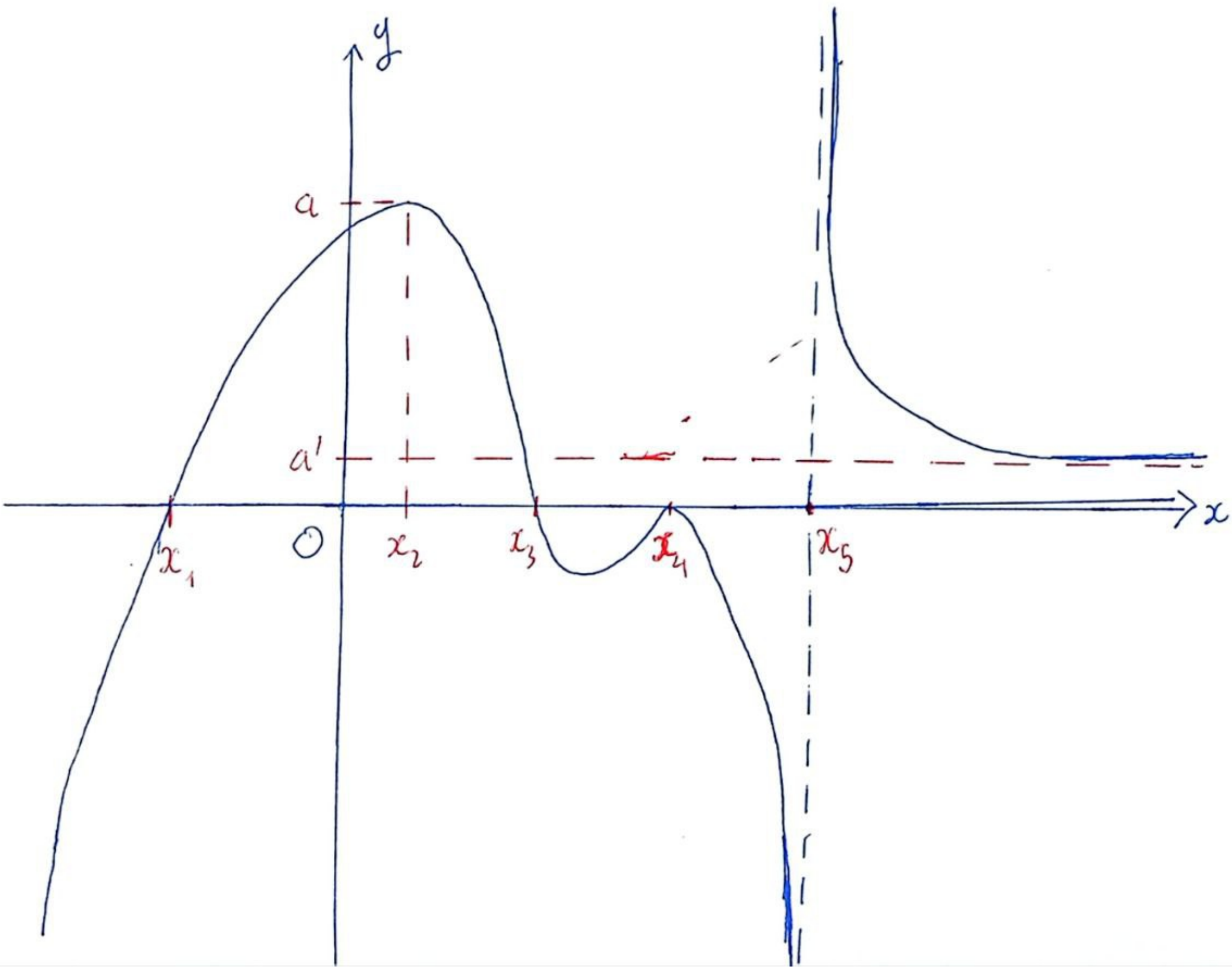


Рис. 6: График первой производной функции $f(x)$

Подробные комментарии:

Согласно теореме о критерии монотонности функции:

- $\forall x \in (-\infty, x_1) \to f'(x) < 0$
- $\forall x \in (x_1, x_3) \to f'(x) > 0$
- $\forall x \in (x_3, x_5) \backslash \{x_4\} \to f'(x) < 0$
- $\forall x \in (x_5, +\infty) \to f'(x) > 0$

Согласно теореме Ферма:

x_1, x_3, x_4 - точки экстремума, то: $f'(x_1) = f'(x_3) = f'(x_4) = 0$

Согласно необходимому условию перегиба:

x_2 - точка перегиба графика, то: $f'(x_2) = a \in \mathbb{R}, \quad f''(x_2) = 0$

Конечно, $x = x_5$ - вертикальная асимптота графика. Это значит:

$$\lim_{x \to x_5 \pm 0} f(x) = \pm\infty$$

Существует наклонная асимптота графика $y = a'x + b'$ $(a', b' \in \mathbb{R}, a' > 0)$, когда $x \to +\infty$

$$a' = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b' = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$$

Согласно правилу Лопиталя:

$$a' = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{x'} = \lim_{x \to +\infty} f'(x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} f'(x) = a' \in \mathbb{R}, a' > 0$$

Задание 4. Исследование функции

а) $f(x) = \frac{4x^3}{(1-2x)^2}$

1. Область определения функции. Так как функция представляет собой дробь, нужно найти нули знаменателя.

$$(1-2x)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Исключаем единственную точку x $= \frac{1}{2}$ из области определения функции и получаем:

$$D(f) = (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$$

2. f(x) не является ни четной, ни нечетной, так как :

$$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$$

Но $f(-x) = \frac{-4x^3}{(1+2x)^2} \neq f(x) = \frac{4x^3}{(1-2x)^2} \Rightarrow f(x)$ не является четной функцией.
$f(-x) = \frac{-4x^3}{(1+2x)^2} \neq -f(x) = \frac{-4x^3}{(1-2x)^2} \Rightarrow f(x)$ не является нечетной функцией.
$f(x)$ не является периодической.

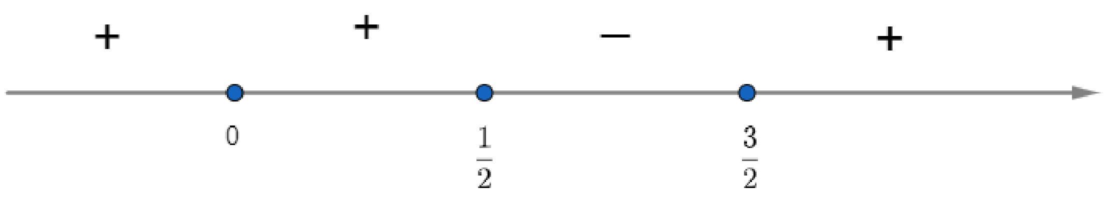
3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^3}{(1-2x)^2} = 0 \Leftrightarrow 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Так как $(1-2x)^2 > 0$, $f(x) > 0$ при x > 0, а $f(x) < 0$ при x < 0

4. Вычислим первую производную :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{12x^2.(1-2x)^2 - 4x^3.2.(1-2x).(-2)}{(1-2x)^4} \\ &= \frac{12x^2.(1-2x)^2 + 16x^3.(1-2x)}{(1-2x)^4} \\ &= \frac{12x^2.(1-2x) + 16x^3}{(1-2x)^3} \\ &= \frac{12x^2 - 8x^3}{(1-2x)^3} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{12x^2 - 8x^3}{(1-2x)^3} = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 8x^3 = 0 \Leftrightarrow x^2(12-8x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \frac{3}{2}$$

Отметим знаки первой производной на числовой прямой :



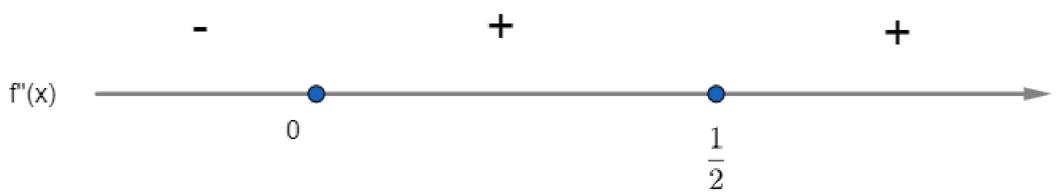
Заметим, что при x $= \frac{1}{2}$ производная не определена, так как x $= \frac{1}{2}$ не входят в ООФ. Таким образом, функция возрастает при $x \in (-\infty; \frac{1}{2})$, строго убывает при $x \in (\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$ и строго возрастает при $x \in (\frac{3}{2}; +\infty)$
$\Rightarrow$ Значение $x = \frac{3}{2}$ является точкой строго локального минимума (гладкий)

5. Вычислим вторую производную:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(24x-24x^2).(1-2x)^3-(12x^2-8x^3).3.(1-2x)^2.(-2)}{(1-2x)^6}\\
&= \frac{(24x-24x^2).(1-2x)+6.(12x^2-8x^3)}{(1-2x)^4}\\
&= \frac{24x-48x^2-24x^2+48x^3+72x^2-48x^3}{(1-2x)^4}\\
&= \frac{24x}{(1-2x)^4}
\end{aligned}
$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{24x}{(1-2x)^4}=0 \Leftrightarrow 24x=0 \Leftrightarrow x=0$$

Отметим знаки второй производной на числовой прямой :



Заметим, что при x $= \frac{1}{2}$ производная не определена, так как x $= \frac{1}{2}$ не входят в ООФ.
Анализ полученной формулы показывает, что $f''(x) > 0$ при $x \in (0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$ и график является выпуклым вниз и $f''(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$ и график является выпуклым вверх, , а точка x $= 0$ является точкой перегиба.

6. Определим асимптоты данного графика:
Так как:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}-0}\frac{4x^3}{(1-2x)^2}=+\infty;\ \lim_{x\to\frac{1}{2}+0}\frac{4x^3}{(1-2x)^2}=+\infty$$

то имеем одну вертикальную асимптоту x $= \frac{1}{2}$

Найдем наклонную асимптоту:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4x^3}{(1-2x)^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{(1-2x)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{4x^2-4x+1}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3}{(1-2x)^2}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3-4x^3+4x^2-x}{4x^2-4x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-x}{4x^2-4x+1}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{4x^3}{(1-2x)^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2}{(1-2x)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2}{4x^2-4x+1}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3}{(1-2x)^2}-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3-4x^3+4x^2-x}{4x^2-4x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-x}{4x^2-4x+1}=1$$

Прямая y = x + 1 является асимптотой графика функции при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$

7. График функции проходит через точки $(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}), (1; 4), (2; \frac{32}{9}), (5; \frac{500}{81}), (-5; \frac{-500}{121})$

8. Построим график функции f(x):

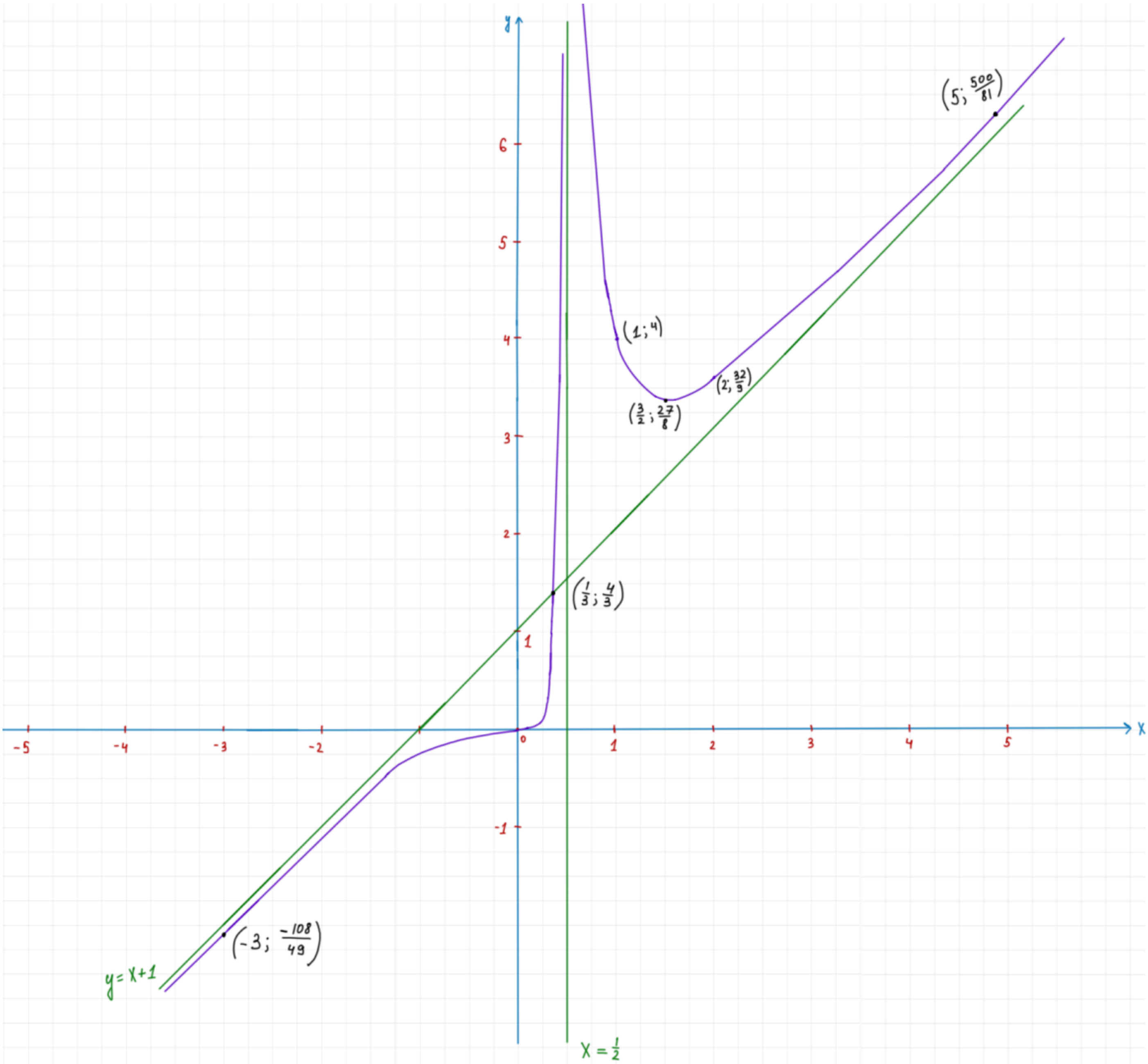


Рис. 7: График функции $f(x) = \frac{4x^3}{(1-2x)^2}$

b) $g(x) = 2x - sin(\frac{x}{2})$

1. Область определения функции.

$$D(g) = \mathbb{R}$$

2. $g(x)$ является нечетной, так как :

$$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$$

и $g(-x) = 2(-x) - sin\frac{-x}{2} = 2(-x) + sin\frac{x}{2} = -(2x - sin(\frac{x}{2})) = -g(x)$
$\Rightarrow g(x)$ не является нечетной функцией.
$g(x)$ не является периодической.
3. $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \sin\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$
При x $> \frac{1}{2}, g(x) > 0$ так как 2x $>$ 1 и $-1 \leq \sin\frac{x}{2} \leq 1$;
При x $< -\frac{1}{2}, g(x) < 0$ так как 2x $<$ -1 и $-1 \leq \sin\frac{x}{2} \leq 1$;
При $x \in (0; \frac{1}{2}], \sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2} < 2x \Rightarrow g(x) > 0$;
При $x \in [-\frac{1}{2}; 0), \sin\frac{x}{2} > \frac{x}{2} > 2x \Rightarrow g(x) < 0$;
$\Rightarrow$ g(x) $>$ 0 при x $>$ 0, а g(x) $<$ 0 при x $<$ 0
4. Вычислим первую производную :

$$g'(x) = 2 - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} > 0 \quad \forall x \in D$$

Таким образом, функция строго возрастает при $x \in \mathbb{R}$ и не имеет точек экстремума
5. Вычислим вторую производную:

$$g''(x) = \frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}$$
$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Анализ полученной формулы показывает, что $g''(x) > 0$ при $x \in (4k\pi; (4k+2)\pi), k \in \mathbb{Z}$ и график является выпуклым вниз и $g''(x) < 0$ при $x \in ((4k+2)\pi; (4k+4)\pi), k \in \mathbb{Z}$ и график является выпуклым вверх, , а точки x $= 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ является точками перегиба.

6. Определим асимптоты данного графика:

Так как область определения функции $D(g) = \mathbb{R}$, вертикальных асимптот нет .

Осуществим поиск наклонной асимптоты :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x - \sin\frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}(2 - \frac{1}{x}.\sin\frac{x}{2}) = \lim_{x\to+\infty} 2 - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}.\sin\frac{x}{2} = 2$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x - \sin\frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to-\infty}(2 - \frac{1}{x}.\sin\frac{x}{2}) = \lim_{x\to-\infty} 2 - \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}.\sin\frac{x}{2} = 2$$
$$\nexists \lim_{x\to+\infty}(2x - \sin\frac{x}{2} - 2x) = \lim_{x\to+\infty} -\sin\frac{x}{2}$$
$$\nexists \lim_{x\to-\infty}(2x - \sin\frac{x}{2} - 2x) = \lim_{x\to-\infty} -\sin\frac{x}{2}$$

$\Rightarrow$ Наклонных асимптот нет.

7. График функции проходит через точки $((2k+1)\pi; 2.(2k+1)\pi - 1), (2k\pi; 4k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$

8. Построим график функции g(x):

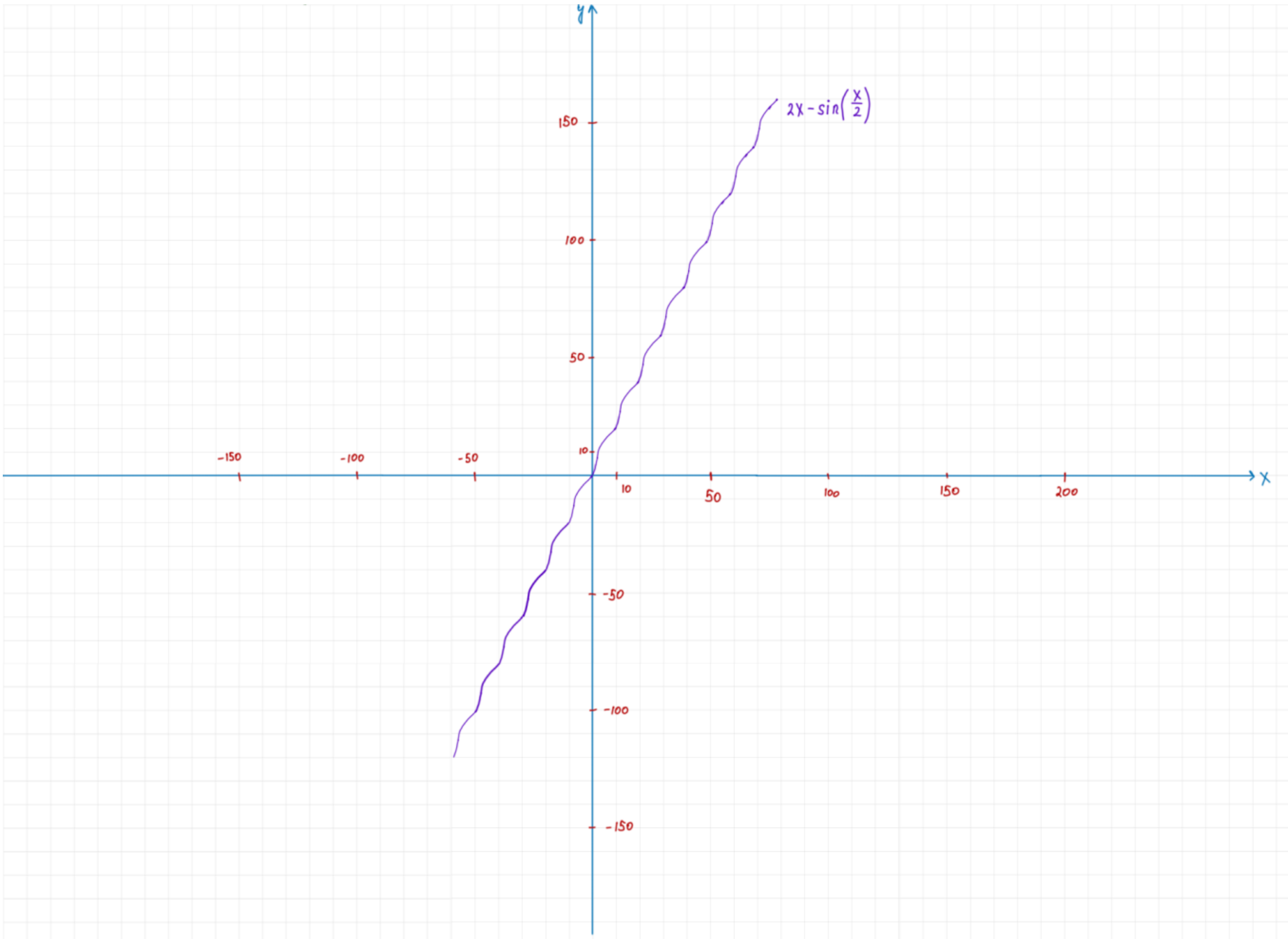


Рис. 8: График функции $g(x) = 2x - sin(\frac{x}{2})$

Оценочный лист

Вклад каждого исполнителя:

Данько Савелий P3112 - $\frac{1}{3}$

Фан Нгок Туан P3121 - $\frac{1}{3}$

Фам Данг Чунг Нгиа P3121 - $\frac{1}{3}$