Математический анализ

2023

Расчётно-графическая работа № 2

«Предел и непрерывность функции»

Студенты:
Данько Савелий P3112
Фан Нгок Туан P3121
Фам Данг Чунг Нгиа P3121

Номер потока: 13.1

Преподаватель: Правдин Константин

Дата: 13.10.2023

Место: НИУ ИТМО

Задание 1: Предел последовательности

а) При помощи частичных пределов:

Рассматриваем последовательность $x_n = \cos(\frac{5\pi}{6} - \frac{n\pi}{2})$

Тогда из неё можно выделить такие подпоследовательности:

$\exists k \in \mathbb{N}$

- При $n = 4k$:

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k} = \lim_{k\to\infty} \cos(\frac{5\pi}{6} - 2k\pi) = \cos(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- При $n = 4k+1$:

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k+1} = \lim_{k\to\infty} \cos(\frac{5\pi}{6} - 2k\pi - \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$

- При $n = 4k+2$:

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k+2} = \lim_{k\to\infty} \cos(\frac{5\pi}{6} - 2k\pi - \pi) = -\cos(\frac{5\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- При $n = 4k+3$:

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k+3} = \lim_{k\to\infty} \cos(\frac{5\pi}{6} - 2k\pi - \frac{\pi}{2} - \pi) = -\sin(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$$

Множество частичных пределов последовательности x_n:

$$E = \{-\tfrac{\sqrt{3}}{2}; -\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}; \tfrac{\sqrt{3}}{2}\}$$

Верхний и нижний пределы последовательности x_n:

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \ \& \ \ \varliminf_{n\to\infty} x_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Так как:

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n \neq \varliminf_{n\to\infty} x_n,$$

то последовательность x_n не имеет предел:

$$\neg\exists \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \neg\exists \lim_{n\to\infty} \cos(\frac{5\pi}{6} - \frac{n\pi}{2})$$

б) При помощи критерия Коши:

Рассматриваем последовательность $x_n = 1 - (\cos n)^2 = \sin^2 n$

Предположим противное, пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2 n = A \in \mathbb{R}$. Так как

$$\begin{aligned}|(1-\cos^2(n+2)) - (1-\cos^2 n)| &= |\sin^2(n+2) - \sin^2 n| \\ &= |(\sin(n+2) - \sin n)(\sin(n+2) + \sin n)| \\ &= |4.\cos(n+1).\sin(1).\sin(n+1)\cos(1)| \\ &= |\sin(2n+2).\sin 2|\end{aligned}$$

и, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2(n+2) = A$, а также так как $\sin 2 \neq 0$, то, переходя к пределу в полученном равенстве получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(2n+2) = 0$. Значит, аналогично,

$$\lim_{n\to\infty} \sin 2n = \lim_{n\to\infty} \sin(2n+4) = 0.$$

Так как

$$|\sin(2n+4) - \sin 2n| = 2|\cos(2n+2)\sin 2|.$$

то, аналогично, $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(2n+2) = 0$, а значит

$$\lim_{n\to\infty} \cos(2n+2) = \lim_{n\to\infty} \sin(2n+2) = 0.$$

Но это невозможно, ведь

$$\sin^2(2n+2) + \cos^2(2n+2) = 1$$

То есть это противоречит предположению. Тогда последовательность x_n не имеет предел:

$$\neg\exists \lim_{n\to\infty} \sin^2 n \Leftrightarrow \neg\exists \lim_{n\to\infty} (1 - (\cos n)^2)$$

Задание 2. Исследование сходимости функции.

Дана функция f(x). Исследуйте её поведение при x $\to \pm\infty$

План:

1) Вычислить функции $A_+ \in \overline{\mathbb{R}}$ при $x \to +\infty$ и $A\_ \in \overline{\mathbb{R}}$ при $x \to -\infty$.

2) Построить график функции в зависимости от x.

3) Проиллюстрируйте сходимость (расходимость) функции на бесконечностях для A_+ и $A\_$:

a. сформулируйте определение конечного предела и бесконечных пределов ($\pm\infty$) функции через ϵ-δ в терминах неравенств;

b. выберите три различных положительных числа $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3$;

c. для каждого такого числа изобразите на графике соответствующую ϵ-окрестность пределов A_+ и $A\_$;

d. для A_+ и $A\_$ по отдельности и каждого выбранного ϵ найдите на графике наибольшую δ-окрестность переменных x, в которой все значения функции f(x) попадают в ϵ-окрестность, или установите, что такой окрестности нет.

$$f(x) = \left(\frac{5-3x}{1-2x}\right)^{0.3x-3}$$

Решение:

1)$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{5-3x}{1-2x}\right)^{0.3x-3} = \frac{3}{2}^{+\infty} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{5-3x}{1-2x}\right)^{0.3x-3} = \frac{3}{2}^{-\infty} = \frac{1}{\frac{3}{2}^{+\infty}} = 0$

2) График функции в зависимости от x.

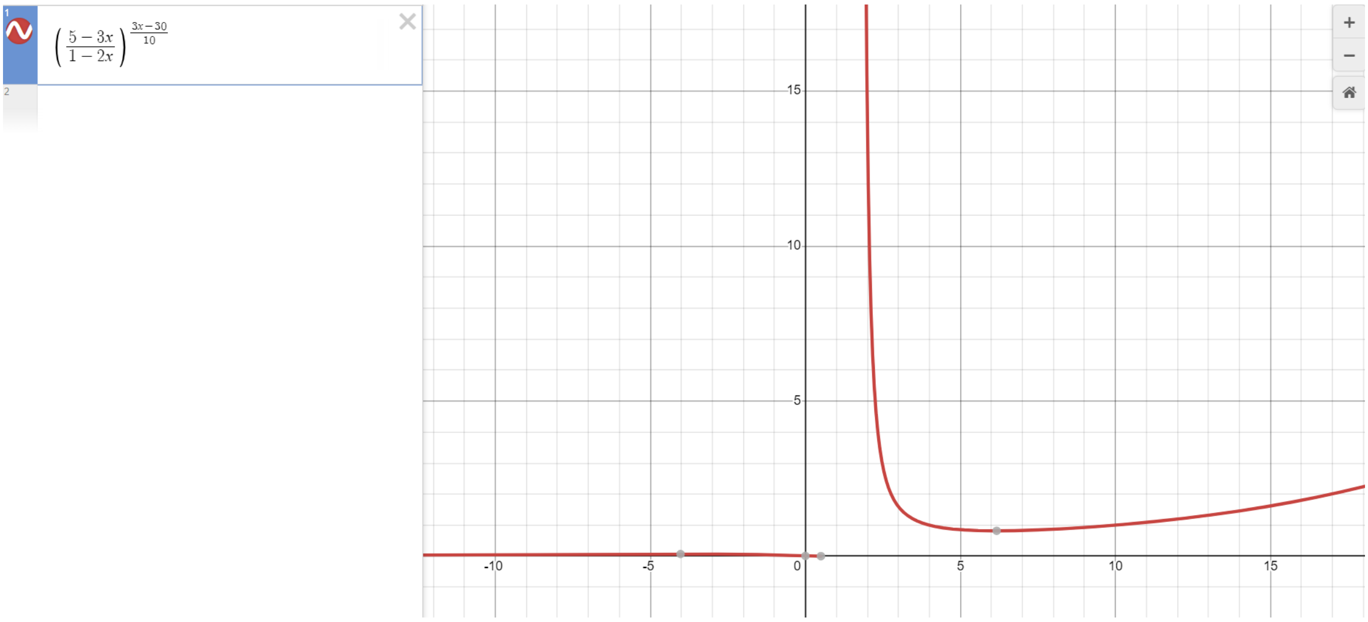


Рис. 1: График в desmos

3) Иллюстрирование сходимости и расходимости функции на бесконечностях.

a. Определение через ε-δ неравенства:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : x > \frac{1}{\delta} \to f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : x < \frac{1}{-\delta} \to |f(x)| < \varepsilon$

b. Пусть $\varepsilon_1 = \frac{1}{10},\ \varepsilon_2 = \frac{1}{100},\ \varepsilon_3 = \frac{1}{1000}$

c. Отображение ε-окрестностей:

Отображение для A_+:

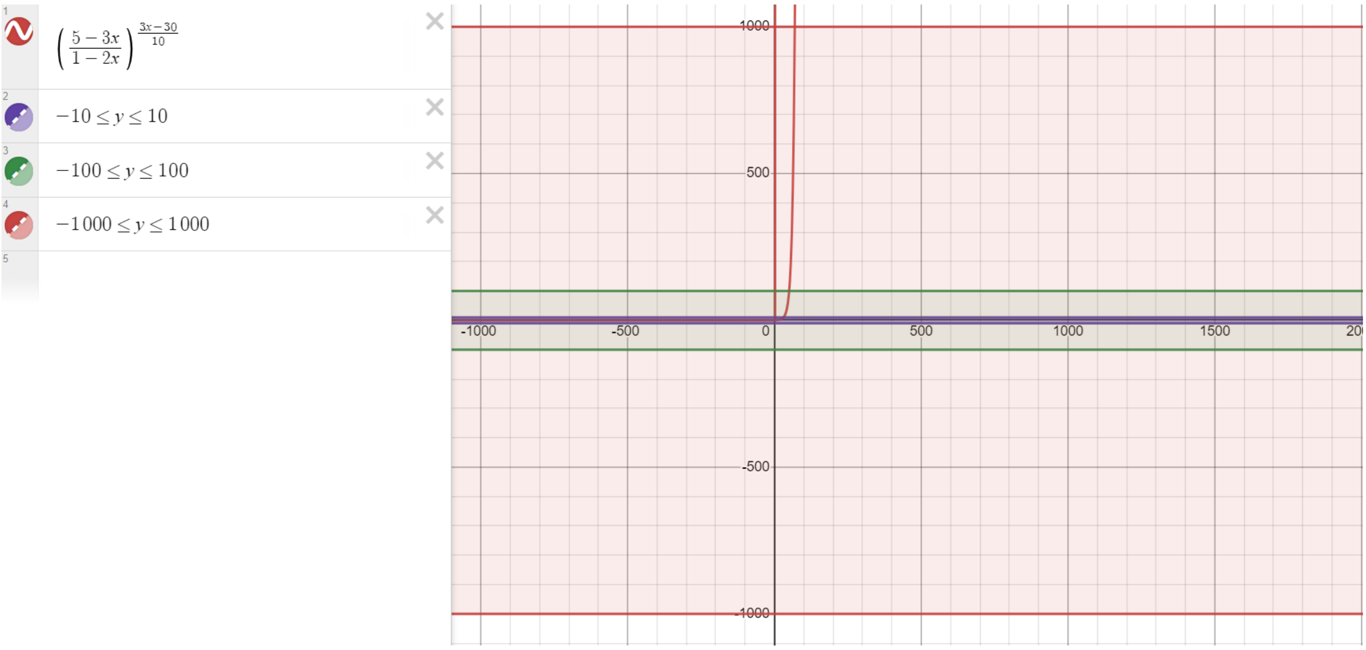


Рис. 2: График в desmos

Отображение для $A\_$:

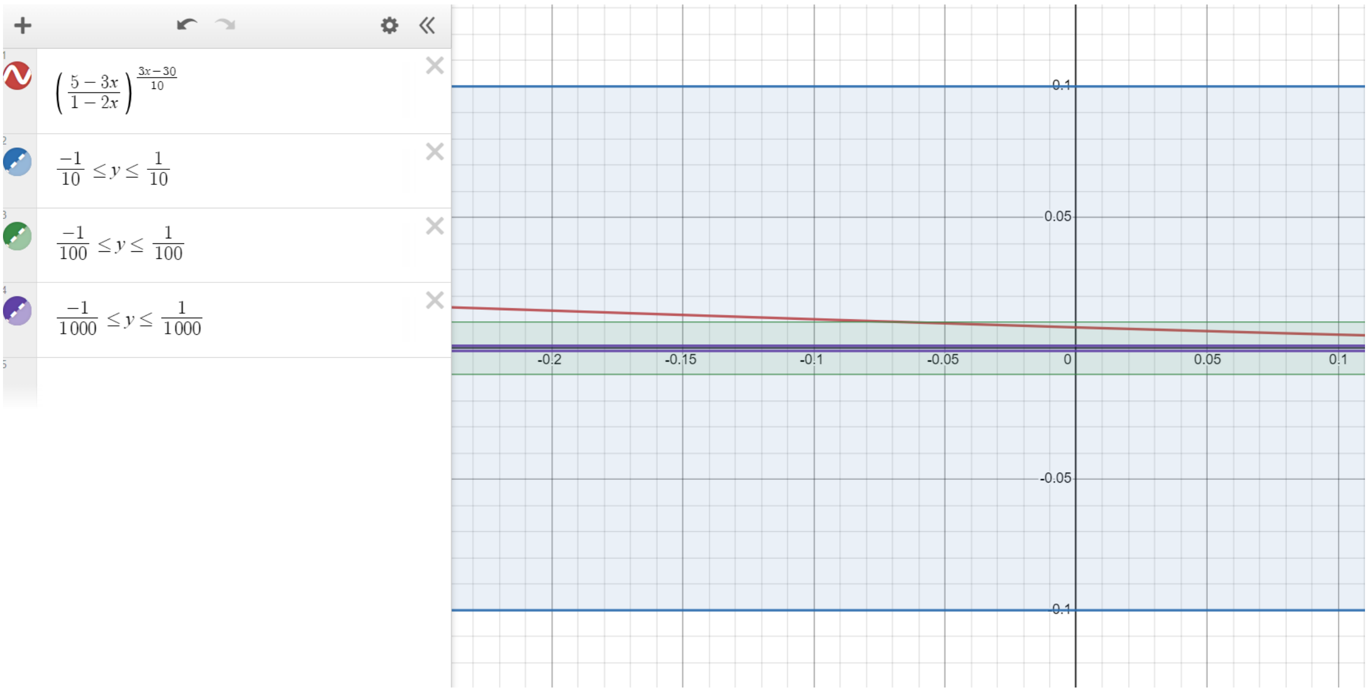


Рис. 3: График в desmos

d. δ-ε окрестность

Положив t = -x:

$$|(\frac{5-3x}{1-2x})^{0.3x-3}| = |(\frac{3t+5}{2t+1})^{-0.3t-3}| = |\frac{1}{(\frac{3t+5}{2t+1})^{0.3t+3}}|$$

Так как:

$\frac{3t+5}{2t+1} = \frac{3}{2} + \frac{\frac{7}{2}}{2t+1} > \frac{3}{2}$ при $t \to +\infty$

$$\Rightarrow (\frac{3t+5}{2t+1})^{0.3t+3} > (\frac{3}{2})^{0.3t+3} \text{ при } t \to +\infty$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(\frac{3t+5}{2t+1})^{0.3t+3}} < \frac{1}{(\frac{3}{2})^{0.3t+3}} \text{ при } t \to +\infty$$

$$\Rightarrow |f(x)| < (\frac{2}{3})^{0.3t+3} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow 0.3t + 3 > \log_{\frac{2}{3}} \varepsilon \Leftrightarrow t > \frac{10}{3}(\log_{\frac{2}{3}} \varepsilon - 3)$$

$$\Rightarrow x < -\frac{10}{3}(\log_{\frac{2}{3}} \varepsilon - 3)$$

Положив $\delta = \frac{1}{\frac{10}{3}(\log_{\frac{2}{3}} \varepsilon - 3)} : \forall x \in E : x < \frac{1}{-\delta} \to |f(x)| < \varepsilon$

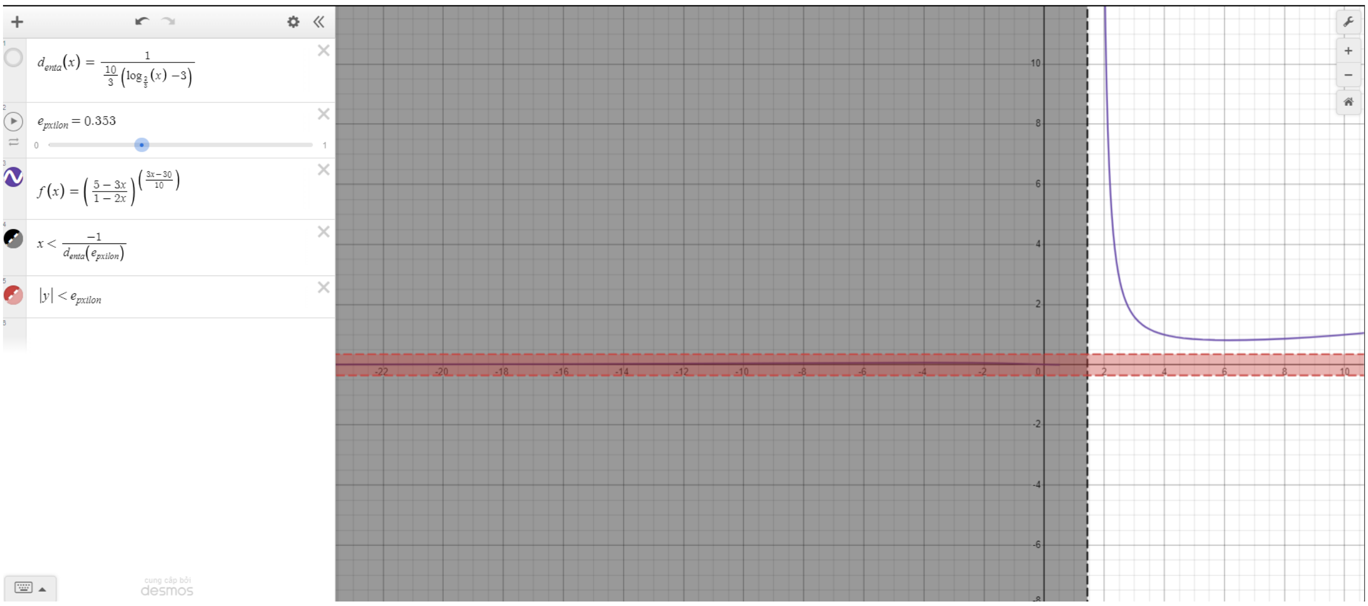


Рис. 4: $\varepsilon = 0.353$

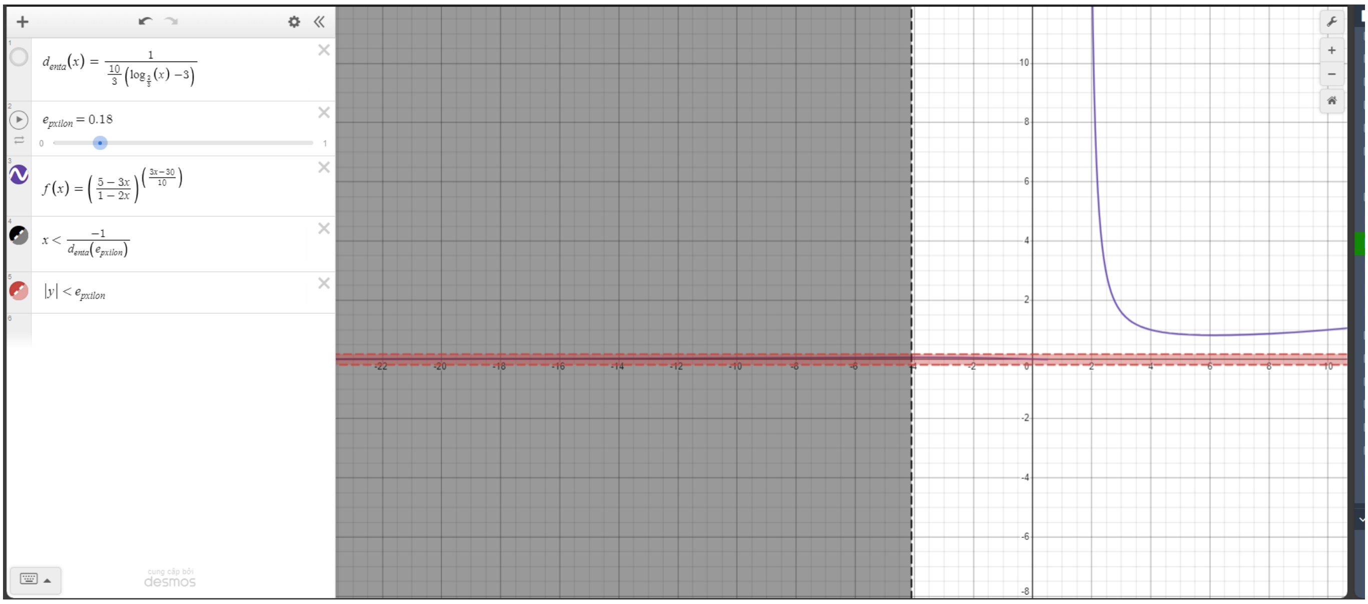


Рис. 5: $\varepsilon = 0.18$

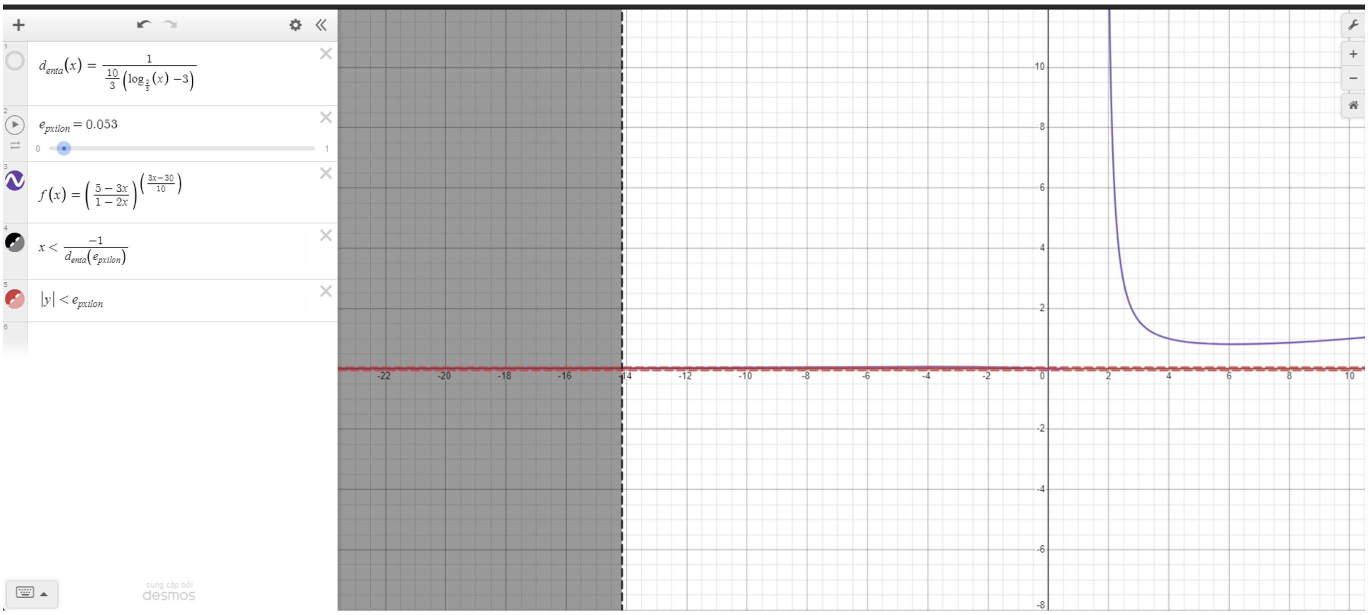


Рис. 6: $\varepsilon = 0.053$

Задание 3: Приближённые вычисления

Докажите эквивалентность функций, затем обоснуйте соответствующее приближённое равенство, и с его помощью вычислите приближённо число:

План:
1) Докажим эквивалентность функций $ln(1-x) \sim -x$.

2) Докажим соответствующее приближённое равенство $ln(1-x) \approx -x$.

3) С помощью приближённого равенства вычислим число $ln(0.98)$.

4) Проиллюстрируем ответ графически (построим графики функций, равных приближённо,отметим точное и приближённое значения).

Решение:

Рассмотрим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1-x)}{-x} = \lim_{x\to 0} ln((1-x)^{\frac{-1}{x}}) = ln(\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{-1}{x}})$$

Положив $t = \frac{-1}{x}$, по определению второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{-1}{x}} = \lim_{|t|\to+\infty}(1+\frac{1}{t})^t = e$$

$$\Rightarrow \quad ln(\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{-1}{x}}) = ln(e) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{ln(1-x)}{-x} = 1$$

По определениям для сравнения функций:

$$ln(1-x) \sim -x$$

$$\Rightarrow ln(1-x) = -x + o(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(ln(1-x) - (-x)) = \lim_{x\to 0}(-x + o(x) - (-x)) = \lim_{x\to 0} o(x) = 0$$

$$\Rightarrow ln(1-x) \approx -x$$

С помощью приближённого равенства вычислим приближённо число:

$$ln(0.98) = ln(1-0.02) \approx -0.02$$

Графики функций $y = \ln(1-x)$ и $y = -x$:

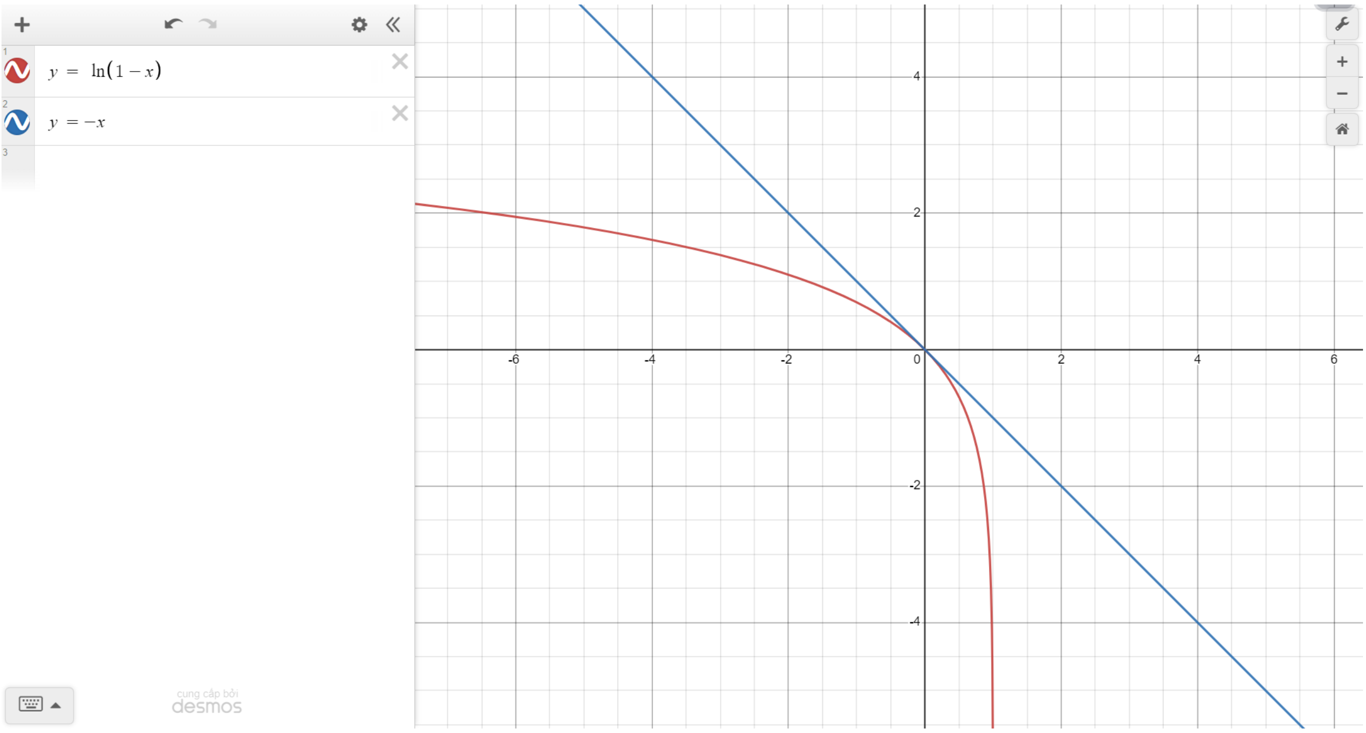


Рис. 7: График в Desmos

Графики функций $y = \ln(1-x)$ и $y = -x$ при $x \to 0$:

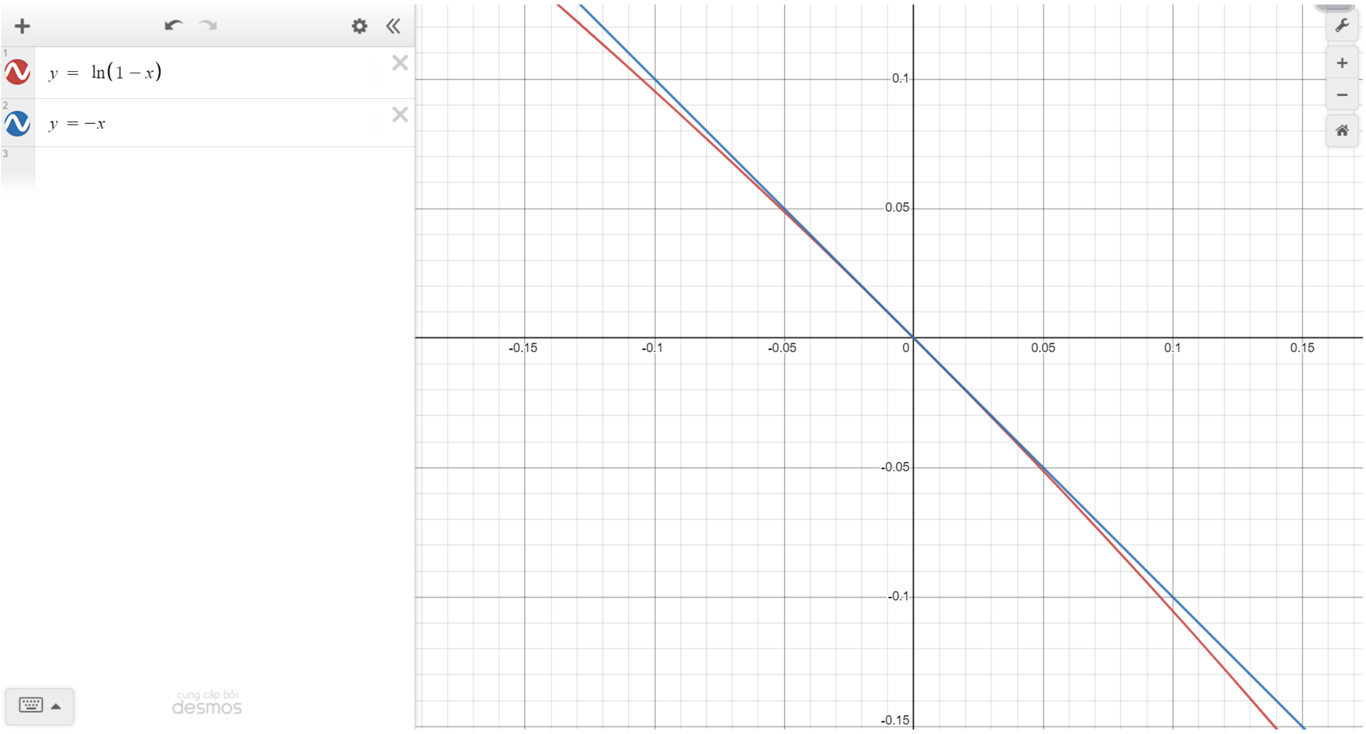


Рис. 8: График в Desmos

Точное и приближённое значения ln(0.98)

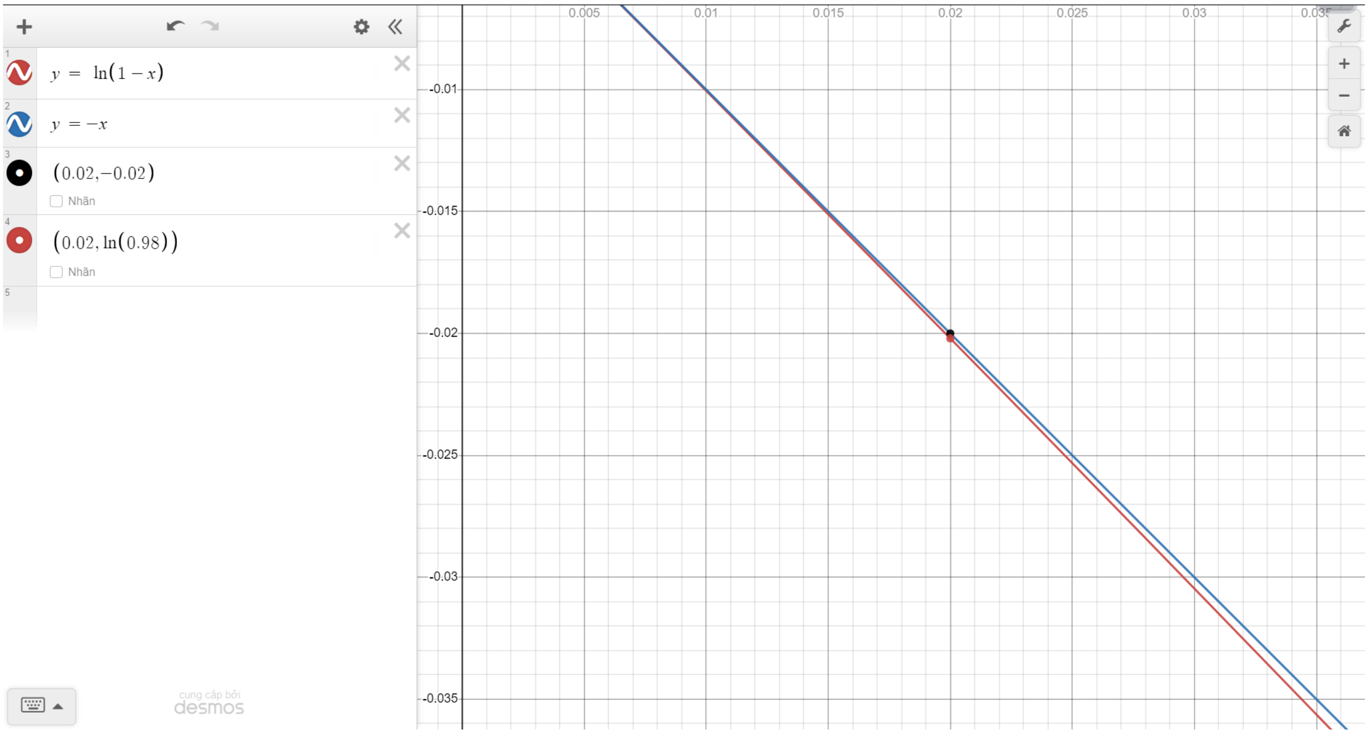


Рис. 9: График в Desmos

Задание 4: Бесконечно малые функции

Найдите значения параметров $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, при которых функции $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1} - \alpha x - \beta, x \to -\infty$$

$$g(x) = (1 - x^\alpha)^{x^\beta}, x \to +0$$

План:

1) Исследуем графически поведение функции при $x \to x_0$ при различных значениях параметров α и β. Продемонстрируем графики в окрестности x_0 для нескольких, на наш взгляд, характерных случаев.

2) Найдём аналитически значения параметров α и β, при которых функции $f(x)$ и g(x) будут являются бесконечно малыми при $x \to x_0$.

3) Продемонстрируем полученные значения параметров на графике.

Решение:

1) $f(x) = \frac{xe^x}{e^x-1} - \alpha x - \beta, x \to -\infty$

Рассмотрим:

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x$$

Положив $t = -x$:

$$\lim_{x \to -\infty} (e^x - 1) = \lim_{t \to +\infty} (\frac{1}{e^t} - 1) = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{t \to +\infty} \frac{-t}{e^t}$$

Так как любая степенная функция растет медленнее, чем любая растущая показательная.

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{-t}{e^t} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{xe^x}{e^x - 1} = \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x)}{\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - 1)} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} (\frac{xe^x}{e^x - 1} - \alpha x - \beta) = \lim_{x \to -\infty} \frac{xe^x}{e^x - 1} + \lim_{x \to -\infty} (-ax) + \lim_{x \to -\infty} -\beta$$

$$= 0 + (\lim_{x \to -\infty} -ax) - \beta$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} (\frac{xe^x}{e^x - 1} - \alpha x - \beta) = (\lim_{x \to -\infty} -ax) - \beta$$

Пусть $\alpha = 2$ и $\beta = 3$:

$$\lim_{x\to-\infty}(\frac{xe^x}{e^x-1} - 2x - 3) = (\lim_{x\to-\infty} -2x) - 3 = +\infty - 3 = +\infty$$

График функции $y = \frac{xe^x}{e^x-1} - 2x - 3$ при $x \to -\infty$:

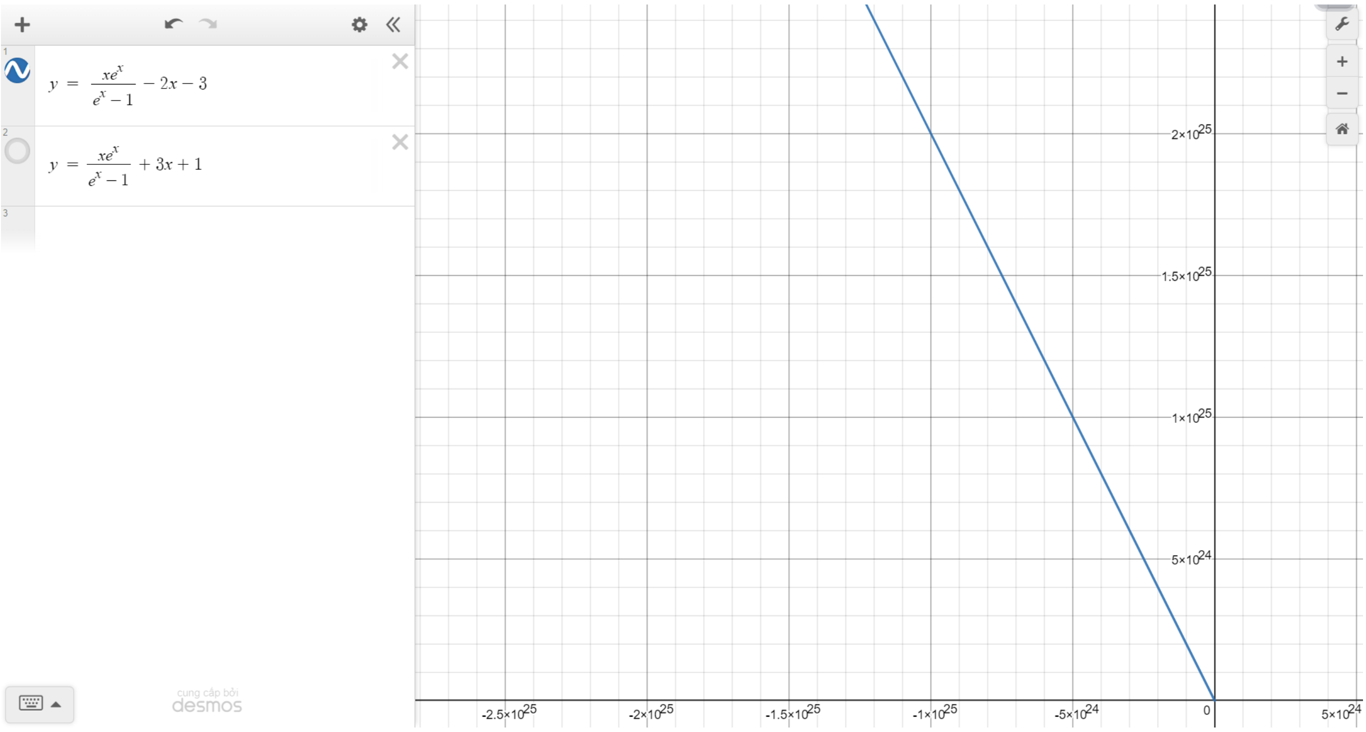


Рис. 10: График в Desmos

Пусть $\alpha = -3$ и $\beta = -1$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{xe^x}{e^x-1} + 3x + 1) = (\lim\limits_{x\to-\infty} 3x) + 1 = -\infty + 1 = -\infty$

График функции $y = \frac{xe^x}{e^x-1} + 3x + 1$ при $x \to -\infty$:

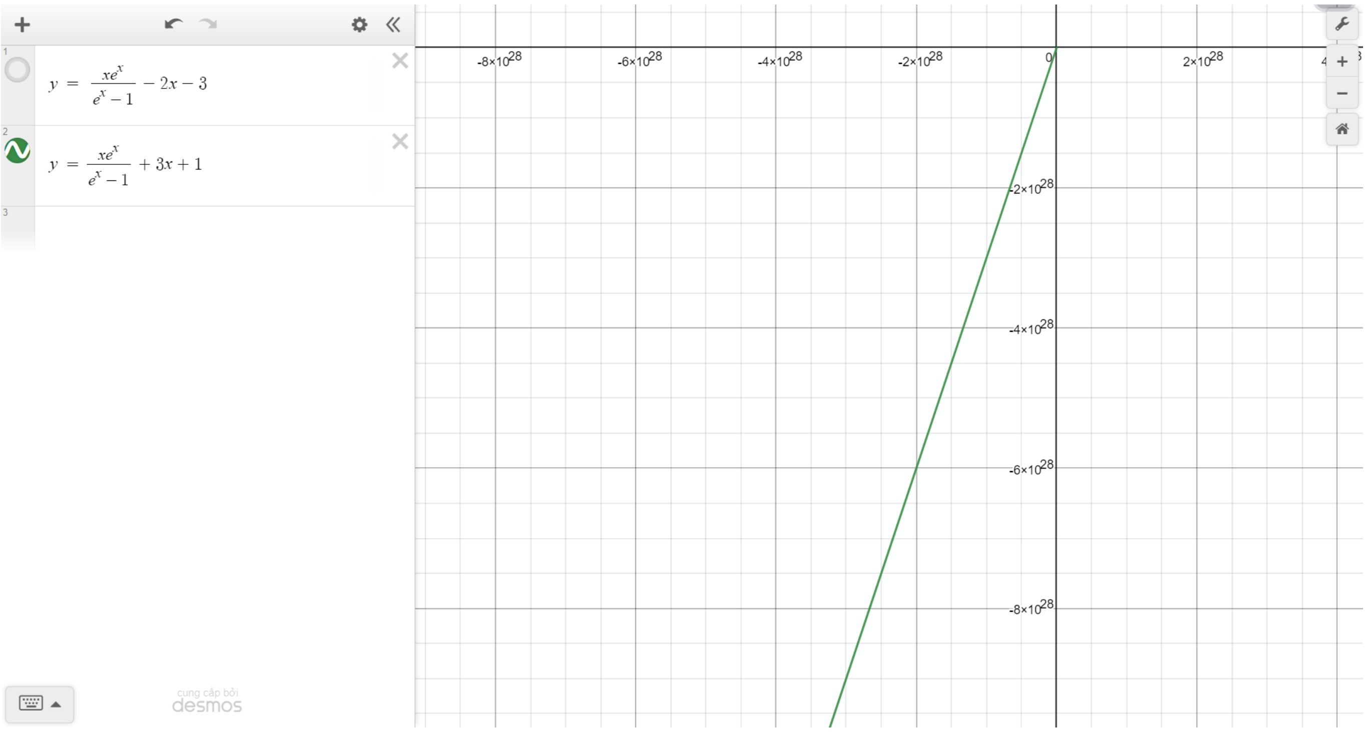


Рис. 11: График в Desmos

Функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x \to -\infty$ тогда и только тогда, когда:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}(\frac{xe^x}{e^x-1} - \alpha x - \beta) = 0$$
$$\Rightarrow (\lim_{x\to-\infty}(-ax)) - \beta = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha & = 0 \\ \beta & = 0 \end{cases}$$

График функции $y = \frac{xe^x}{e^x-1} - \alpha x - \beta$ при $\alpha = 0, \beta = 0, x \to -\infty$:

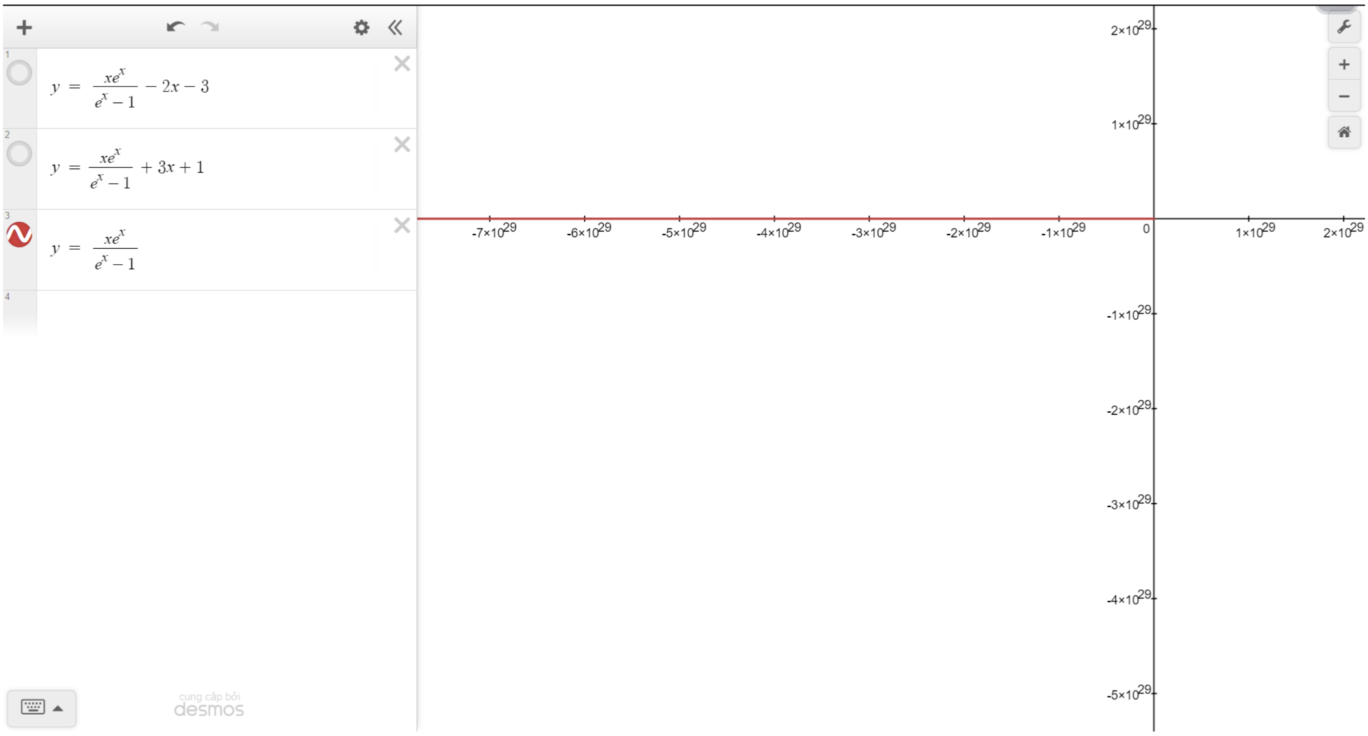


Рис. 12: График в Desmos

Ответ: $\alpha = 0$ и $\beta = 0$

2) $g(x) = (1 - x^{\alpha})^{x^{\beta}}, x \to +0$

Функция $g(x)$ является бесконечно малой при $x \to +0$ тогда и только тогда, когда:

$$\lim_{x \to +0} g(x) = 0$$

Так как $x^{\beta} > 0$ при $x \to +0$, то функция $g(x)$ определена при $1 - x^{\alpha} \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq 0$ при $x \to +0$

При $\alpha = 0$:

$$\lim_{x \to +0} (1 - x^0)^{x^{\beta}} = \lim_{x \to +0} (1 - 1)^{x^{\beta}} = 0$$

При $\alpha > 0$:

Рассмотрим:

$$\lim_{x\to+0}(1-x^{\alpha})^{x^{\beta}} = \lim_{x\to+0}(1-x^{\alpha})^{\frac{-1}{x^{\alpha}}\cdot(-x^{\alpha}.x^{\beta})} = \lim_{x\to+0}(1-x^{\alpha})^{\frac{-1}{x^{\alpha}}\cdot(-x^{\alpha+\beta})} = e^{\lim\limits_{x\to+0}(-x^{\alpha+\beta})}$$

Функция $g(x)$ является бесконечно малой при $x \to +0$ тогда и только тогда, когда:

$$\lim_{x\to+0} g(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+0}(1-x^{\alpha})^{x^{\beta}} = e^{\lim\limits_{x\to+0}(-x^{\alpha+\beta})} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+0}(-x^{\alpha+\beta}) = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+0}(x^{\alpha+\beta}) = +\infty$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta < 0$$

Пусть $\alpha = 0$ и $\beta = 5$:
График функции $y = (1 - x^0)^{x^5}$ при $x \to +0$:

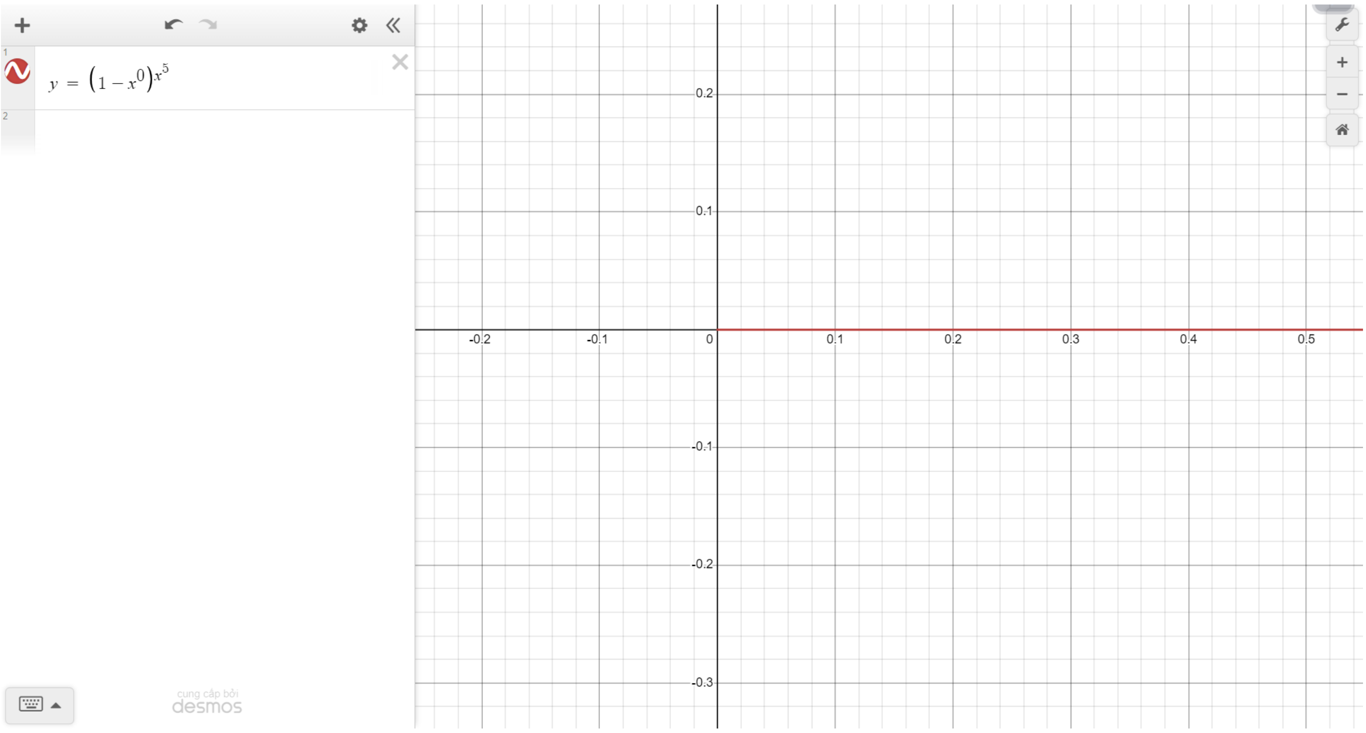


Рис. 13: График в Desmos

Пусть $\alpha = 3$ и $\beta = -6$:
График функции $y = (1 - x^3)^{x^{-6}}$ при $x \to +0$:

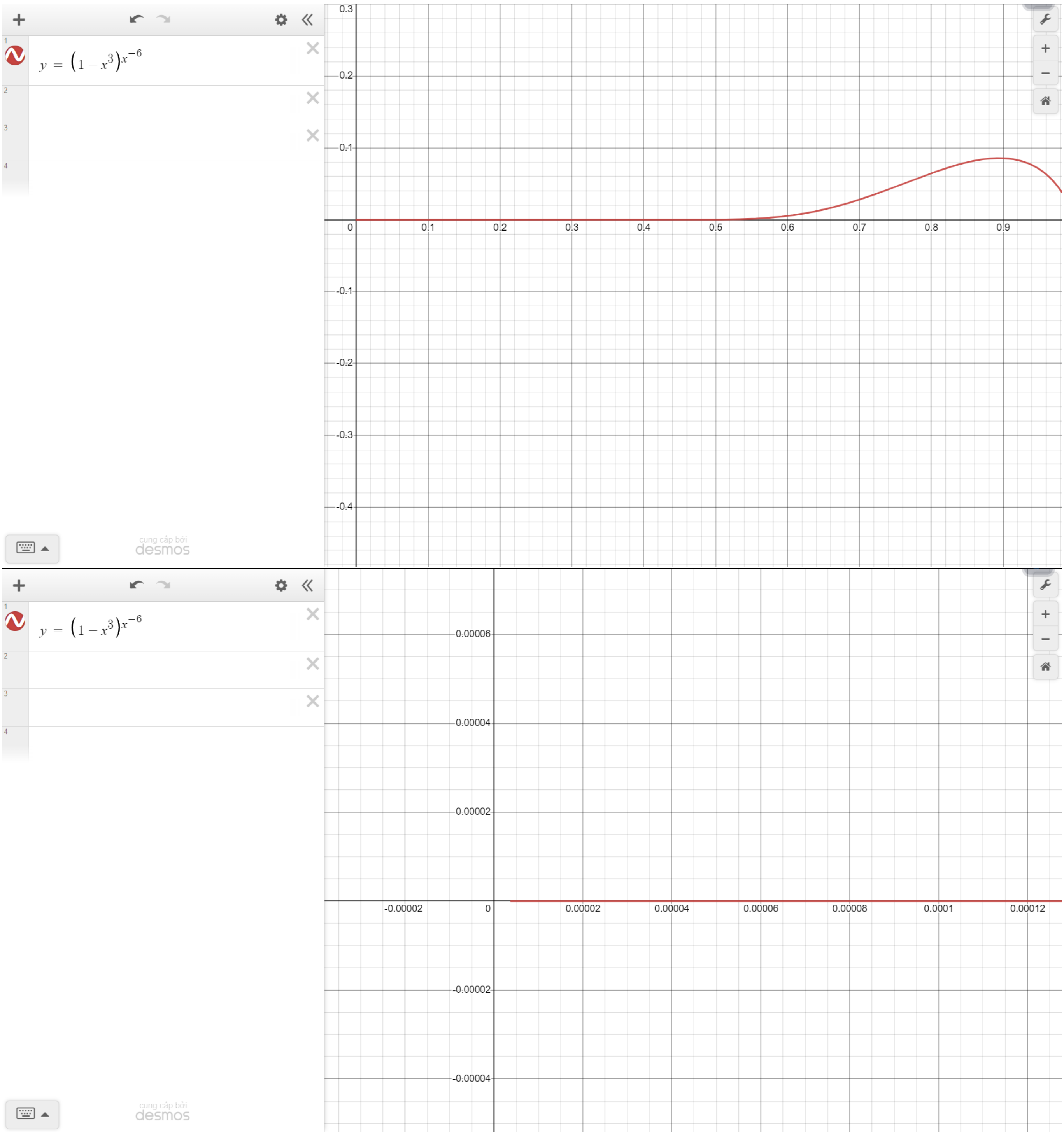
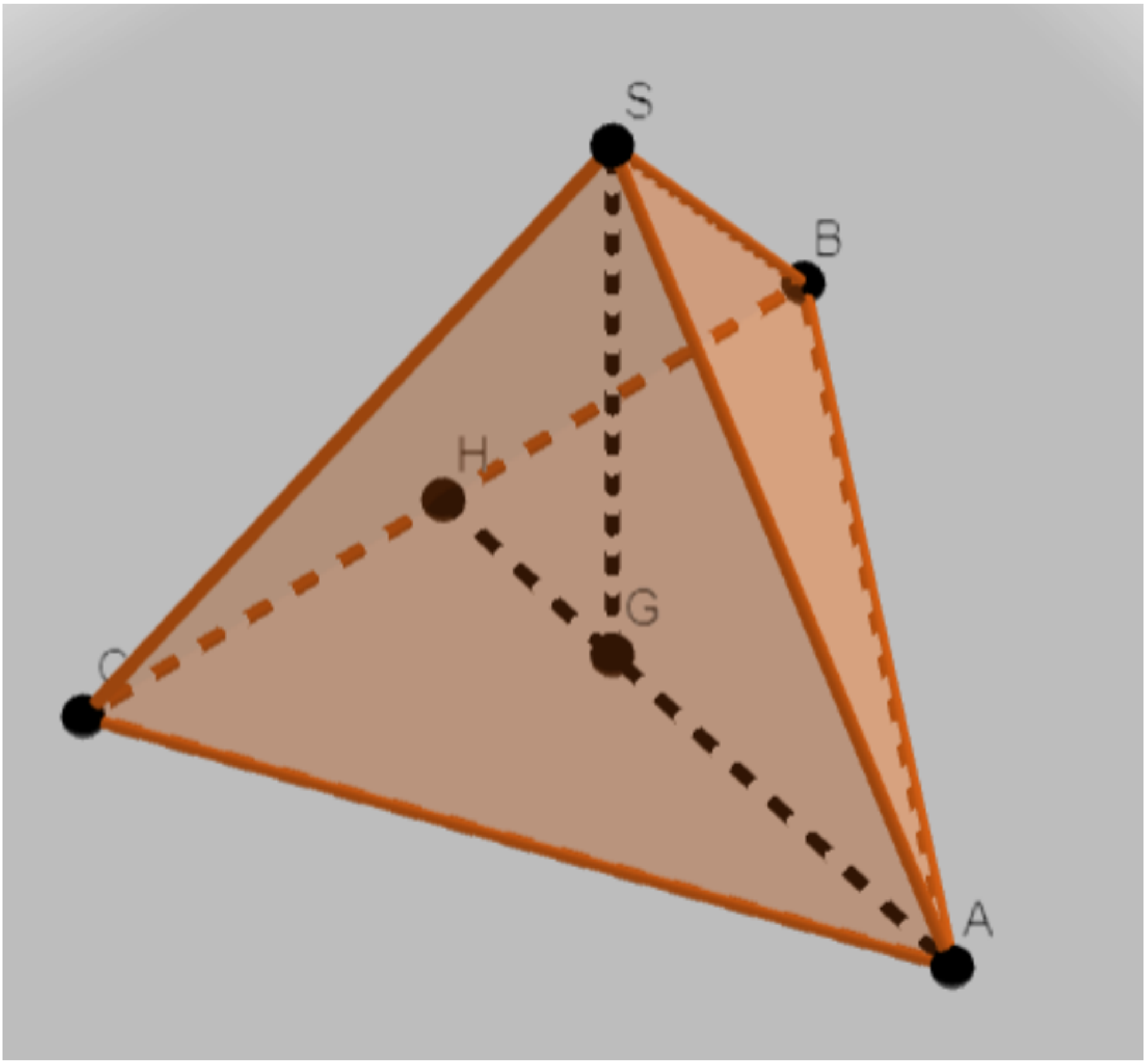


Рис. 14: График в Desmos

Ответ: $\alpha > 0, \beta < 0, \alpha + \beta < 0$ или $\alpha = 0$

Задание 5:

1) Сделайте геометрическую иллюстрацию к задаче.



Правильный тетраэдр SABC имеет вершины S, A, B, C, середину H отрезки AB и центр G тяжести треугольника ABC.

2) Составьте математическую модель: введите обозначения, составьте формулу.

Пусть:

V - Объём тетраэдра

S - Площадь базовой поверхности тетраэдра

h - Высота тетраэдра

a - Длина ребр тетраэдра

Треугольник ABC является равносторонним. Мы можем рассчитать:

$$BH = HC = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$$

$$AG = \frac{2}{3}AH$$

$$AH \perp BC$$

Треугольник ABH перпендикулярен в точке H. Согласно теореме Пифагора к прямоугольному треугольнику ABH:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AH = \sqrt{AB^2 - BH^2}$$

$$\Leftrightarrow AH = \sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AG = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Площадь треугольника ABC: $S = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AH.BC = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Высота SG перпендикулярна базовой плоскости, то есть SG $\perp$ AH.

Треугольник SAG перпендикулярен в точке G. Согласно теореме Пифагора к прямоугольному треугольнику SAG:

$$SA^2 = SG^2 + AG^2 \Rightarrow SG = \sqrt{SA^2 - AG^2}$$

$$\Rightarrow h = SG = \sqrt{a^2 - (\frac{a}{\sqrt{3}})^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Считаем объём тетраэдра S.ABC:

$$V = \frac{1}{3}.h.S = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Мы получаем $V_{(a)} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

3) Решите задачу аналитически.

Пусть:

ΔV- Приращение объема правильного тетраэдра S.ABC

Δa- Приращение длины ребер правильного тетраэдра S.ABC

Объем правильного тетраэдра S.ABC после приращения длины его ребер:

$$V + \Delta V = \frac{\sqrt{2}}{12}.(a + \Delta a)^3 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{12}.[a^3 + 3.a^2.\Delta a + 3.a.(\Delta a)^2 + (\Delta a)^3]$$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{\sqrt{2}}{12}.[3.a^2.\Delta a + 3.a.(\Delta a)^2 + (\Delta a)^3]$$

Рассмотрим по определению для сравнения функций:

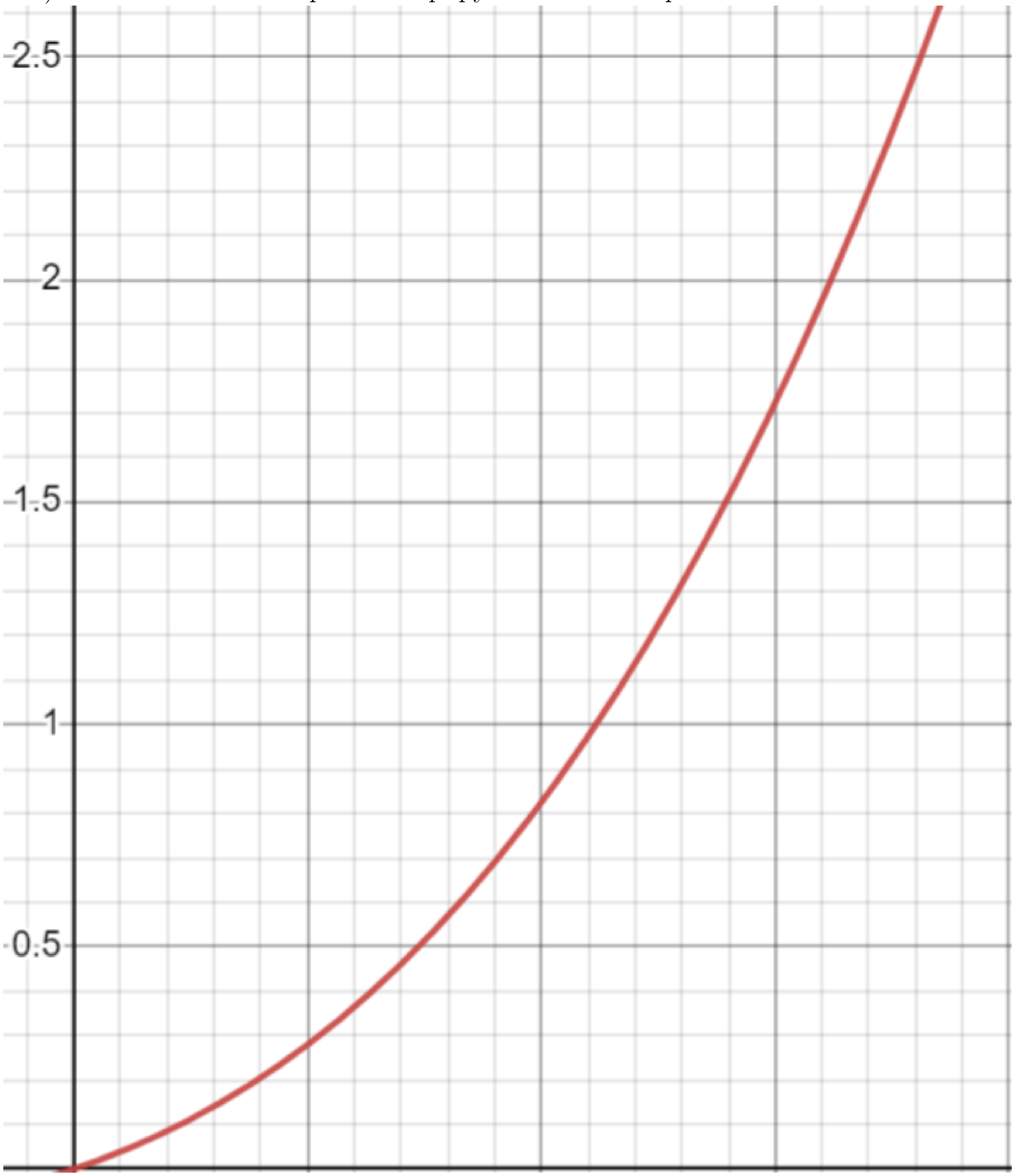
$$\lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta V_{(a)}}{\Delta a} = \lim_{\Delta a \to 0}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{12}.[3.a^2 + 3.a.(\Delta a) + (\Delta a)^2] = \frac{\sqrt{2}}{12}.[3.a^2 + 0 + 0] = \frac{\sqrt{2}}{4}.a^2$$

$$\text{То есть: } \Delta V_{(a)} = \frac{\sqrt{2}}{4}.a^2.\Delta a + o(\Delta a)$$

$$\text{Или: } \Delta V_{(a)} \approx \frac{\sqrt{2}}{4}.a^2.\Delta a \ \text{ при } \Delta a \to 0$$

4) Запишите ответ и проиллюстрируйте его геометрически.



Когда $\Delta a \to 0$, мы увидим, что график $\Delta V = f(\Delta a)$ представляет собой прямую линию с коэффициентом наклона: $\frac{\sqrt{2}}{4}.a^2 = const$

Приращение объема правильного тетраэдра по отношению к бесконечно малому приращению его ребра будет иметь порядок - 1

Оценочный лист

Вклад каждого исполнителя:

Данько Савелий P3112 - $\frac{1}{3}$

Фан Нгок Туан P3121 - $\frac{1}{3}$

Фам Данг Чунг Нгиа P3121 - $\frac{1}{3}$