Математический анализ
2023
Расчётно-графическая работа № 1
«Последовательность и её предел»

Студенты:
Данько Савелий P3112
Фан Нгок Туан P3121
Фам Данг Чунг Нгия P3121
Амири Насрулла P3106

Номер потока: 13.1

Преподаватель: Правдин Константин

Дата: 13.10.2023

Место: НИУ ИТМО

Задание 1. Метод математической индукции.

Пользуясь методом математической индукции, докажите, что при любом n $\in$ N:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24} \quad \text{при} \quad n>1$$

1) В качестве базы индукции возьмём n = 2:

$$\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2+2}>\frac{13}{24}$$

$$\frac{7}{12}>\frac{13}{24}$$

$$\frac{14}{24}>\frac{13}{24}$$

$\Rightarrow$ при n = 2 верно $\Rightarrow$ база индукции верна.

2) Предположим, что утверждение верно для n = k - 1

$$\frac{1}{(k-1)+1}+\frac{1}{(k-1)+2}+...+\frac{1}{2(k-1)}>\frac{13}{24}$$

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+...+\frac{1}{2k-2}>\frac{13}{24}$$

3) Докажем, что верно для n = k

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}$$

Вычтем из неравенства 2) неравенство 3):

$$\left(\frac{1}{(k-1)+1}+\frac{1}{(k-1)+2}+...+\frac{1}{2(k-1)}\right) -\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k}\right)>0$$

$$\frac{1}{k}-\frac{1}{2k}>0$$

$$\frac{1}{2k}>0$$

Верно $\forall$ k $\in$ N $\Rightarrow$ верно $\forall$ n $\in$ N

Задание 2. Исследование предела рекуррентно заданной последовательности.

Вещественная п последовательность задана рекурентно: $x_{n+1} =\sqrt{2 + x_n}$, где $x_1 \in$ R. Исследуйте её предел при n $\mapsto \infty$ в зависимости от значения x_1.

План:

1) Предположите, что предел существует, и найдите его. Доказательство существования предела будет проведено в п. 6).

2) Какими могут быть значения x_1? Укажите множество возможных значений x_1. Докажите ваш ответ аналитически.

3) При каком значении x_1 последовательность является стационарной? Докажите это аналитически.

4) Выделите характерные случаи для значений x_1 (с точки зрения монотонности) и проиллюстрируйте их графиками последовательности.

5) окажите аналитически ограниченность и монотонность последовательности для каждого характерного случая. Сделайте заключение о существовании предела по теореме Вейерштрасса.

Решение:

1) Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = \text{a} \Rightarrow \lim_{n+1\to\infty} x_n = \text{a}$

$\Rightarrow a = \sqrt{2+a} \quad |^2$

$\Rightarrow\ a^2 = 2 + \text{a}\ \Rightarrow\ a^2 - a - 2 = 0$

$\Rightarrow$ a $=$ 2, т.к a $>$ 0 (a $=\sqrt{2+a}$)

2) Так как $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, то $x_1 \in$ [-2; $+\infty$), так как подкоренное выражение ≥ 0

3) При $x_1 = 2$ последовательность является стационарной, так как
$x_n = \sqrt{2+\sqrt{2}} = 2$. Таким образом последовательность зацикливается.

4) Иллюстрация характерных случаев:

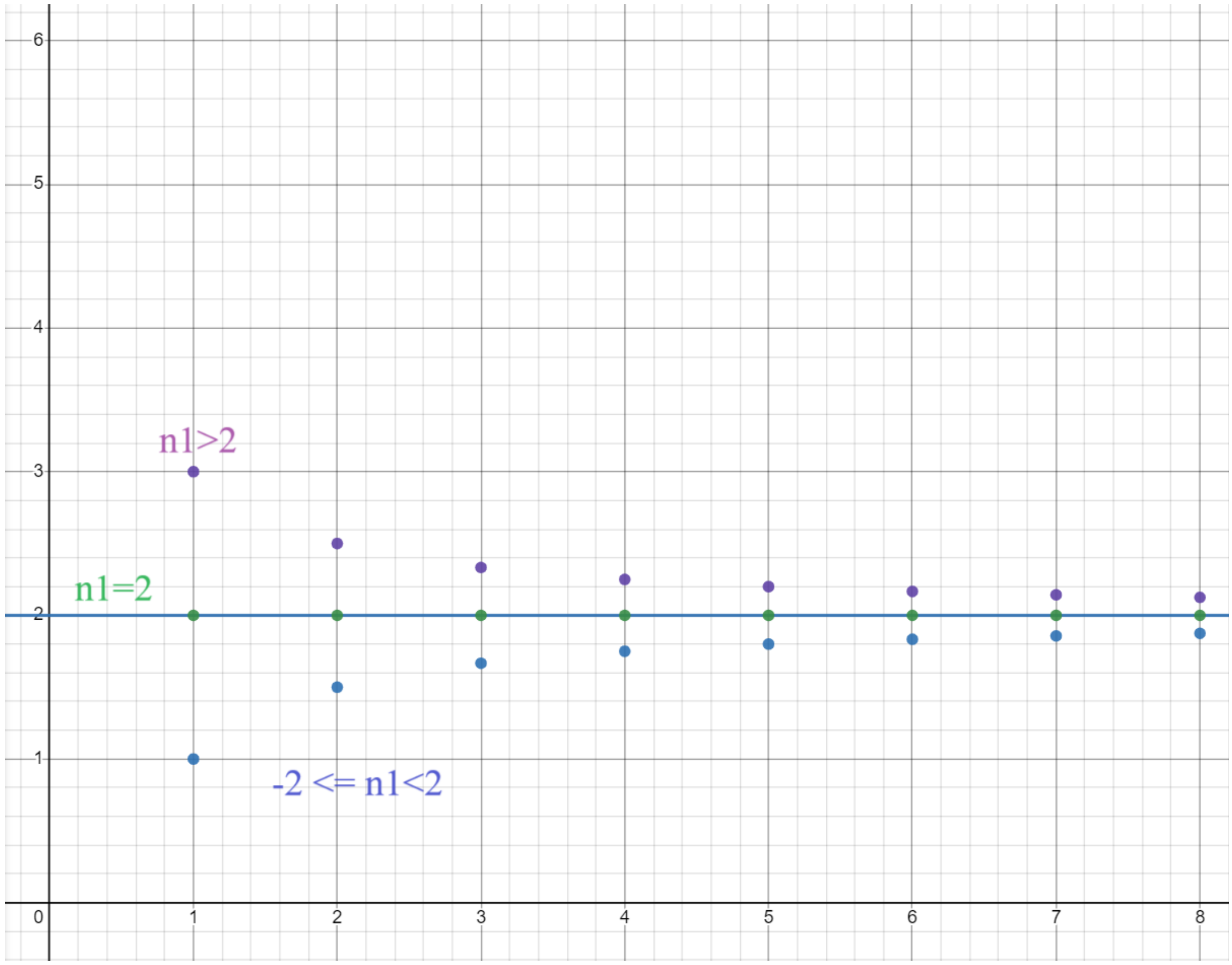

Рис. 1: График в desmos

5) Ограниченность, монотонность и существование предела.

При $x_1 \in$ [-2;2) очевидно, что $x_1 < x_2 < ... < x_n < x_{n+1}$, то есть наша последовательность возрастает.

Докажем, что последовательность ограничена сверху:

$x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}, n \in N, n > 1$

Пусть $x_1 < 2$

$\Rightarrow x_2 = \sqrt{2 + x_1} < \sqrt{2+2} = 2$

$\Rightarrow x_k = \sqrt{2 + x_{k-1}} < \sqrt{2+2} = 2$

$\Rightarrow x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2+2} = 2$

Пусть доказано, что $x_{n-1} < 2$

$\Rightarrow x_n = \sqrt{2 + x_{n+1}} < \sqrt{2+2} = 2$

$\Rightarrow x_n < 2 \Rightarrow$ последовательность ограничена сверху

(По теореме Вейрштрасса.) $\Rightarrow$ она имеет конечный предел $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$

Пусть $x_1 = 2$

$\Rightarrow x_2 = \sqrt{2+2} = 2$

...

$\Rightarrow x_k = \sqrt{2+x_{k-1}} = \sqrt{2+2} = 2$

$\Rightarrow x_{k+1} = \sqrt{2+x_k} = \sqrt{2+2} = 2 \Rightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n = 2$

$\Rightarrow$ последовательность стационарна $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 2$

Пусть $x_1 > 2$, тогда $x_1 > x_2 > x_3 > ... > x_n > x_{n+1}$,

Докажем, что последовательность ограничена снизу:

$x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}, n \in N, n > 1$

Пусть $x_1 > 2$

$\Rightarrow x_2 = \sqrt{2+x_1}$

$\Rightarrow$ ...

$\Rightarrow x_k = \sqrt{2+x_{k-1}} > \sqrt{2+2} = 2$

$\Rightarrow x_{k+1} = \sqrt{2+x_k} > \sqrt{2+2} = 2$

$\Rightarrow x_n = \sqrt{2+x_{n-1}} > \sqrt{2+2} = 2$

$\Rightarrow$ последовательность ограничена снизу$\Rightarrow$ она имеет конечный предел.

(По теореме Вейрштрасса.)

Задание 3. Исследование сходимости.

Дана последовательность a_n. Исследуйте её поведение при n $\to \infty$.

План:

1) Вычислите предел A последовательности при n $\to \infty$.

2) Постройте график общего члена последовательности в зависимости от номера n.

3) Проиллюстрируйте сходимость (расходимость) последовательности:

a) вспомните определение предела последовательности, запишите его через ε, n0 и неравенство;

b) выберите три различных положительных числа $\varepsilon 1 > \varepsilon 2 > \varepsilon 3$;

c) для каждого такого числа изобразите на графике соответствующую ε-окрестность предела A ("ε трубу")

d) для каждого выбранного ε найдите на графике номер $n0 = n0(\varepsilon)$, после которого все члены последовательности попадают в ε-окрестность, или установите, что такого нет.

$$a_n = \frac{4}{1*9} + \frac{4}{9*17} + ... + \frac{4}{(8n-7)(8n+1)}$$

Решение:

1) Предел последовательности A

$a_n = \frac{4}{1*9} + \frac{4}{9*17} + ... + \frac{4}{(8n-7)(8n+1)}$

$a_n = \frac{1}{2}(\frac{8}{1*9} + \frac{8}{9*17} + ... + \frac{8}{(8n-7)(8n+1)})$

$a_n = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{17} + ... + \frac{1}{8n-7} - \frac{1}{8n+1})$

$a_n = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{8n+1})$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(A) = \frac{1}{2}$

2) График общего члена последовательности в зависимости

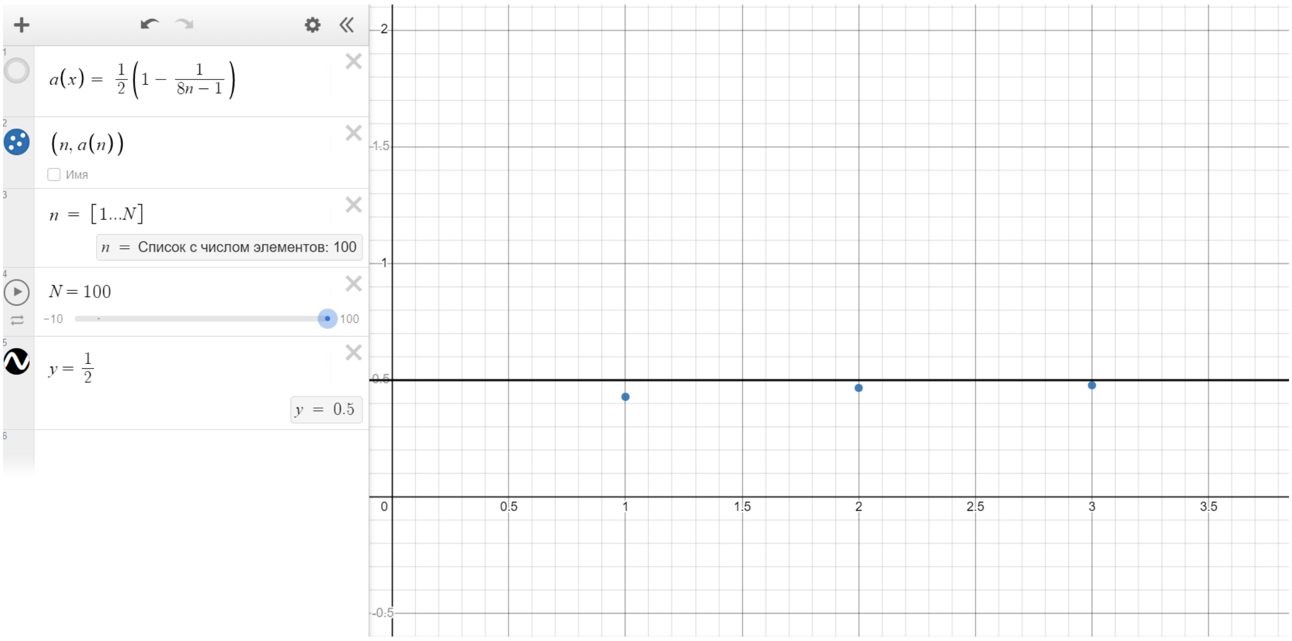

Рис. 2: График в desmos

3) Исследование сходимости

a) Предел последовательности:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \mathrm{N} \ \varepsilon : \forall \ \mathrm{n} \geq \mathrm{N} \ \varepsilon \Rightarrow |X_n - a| < \varepsilon$

b, c, d) ε-окрестность Выберем ε окрестность: $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{1000}$

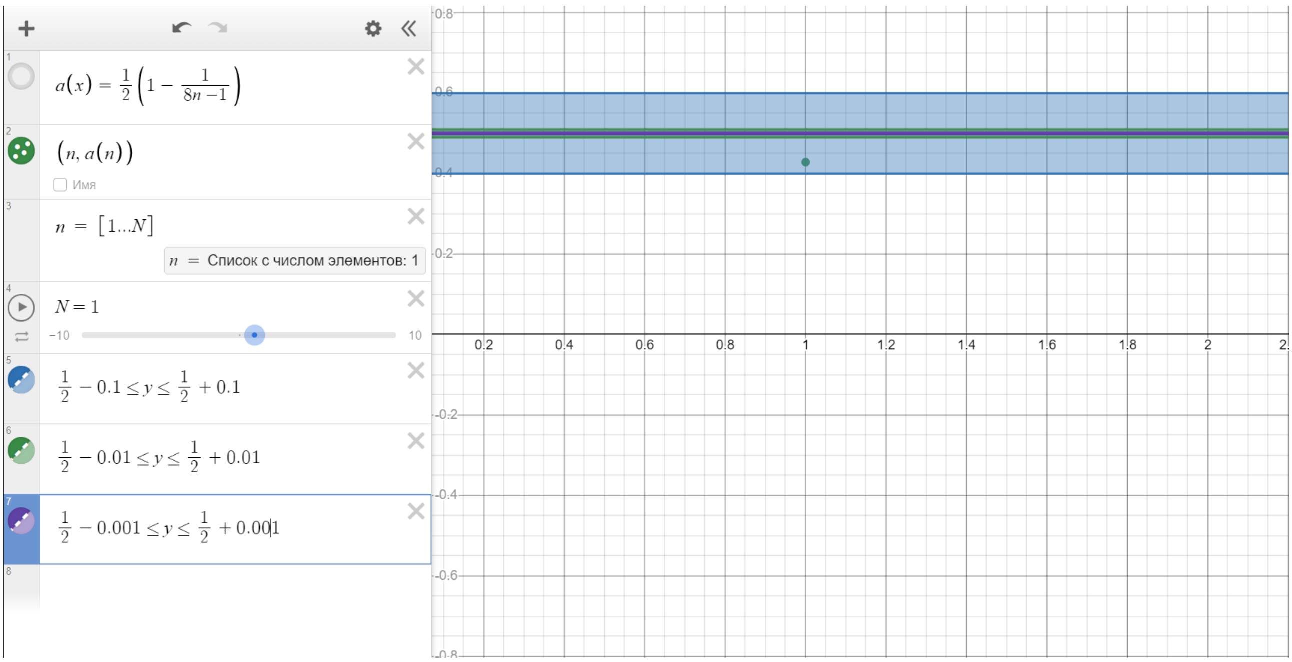

Рис. 3: График в desmos

При ε-окрестности $= \frac{1}{10}$, n0 $= 1$

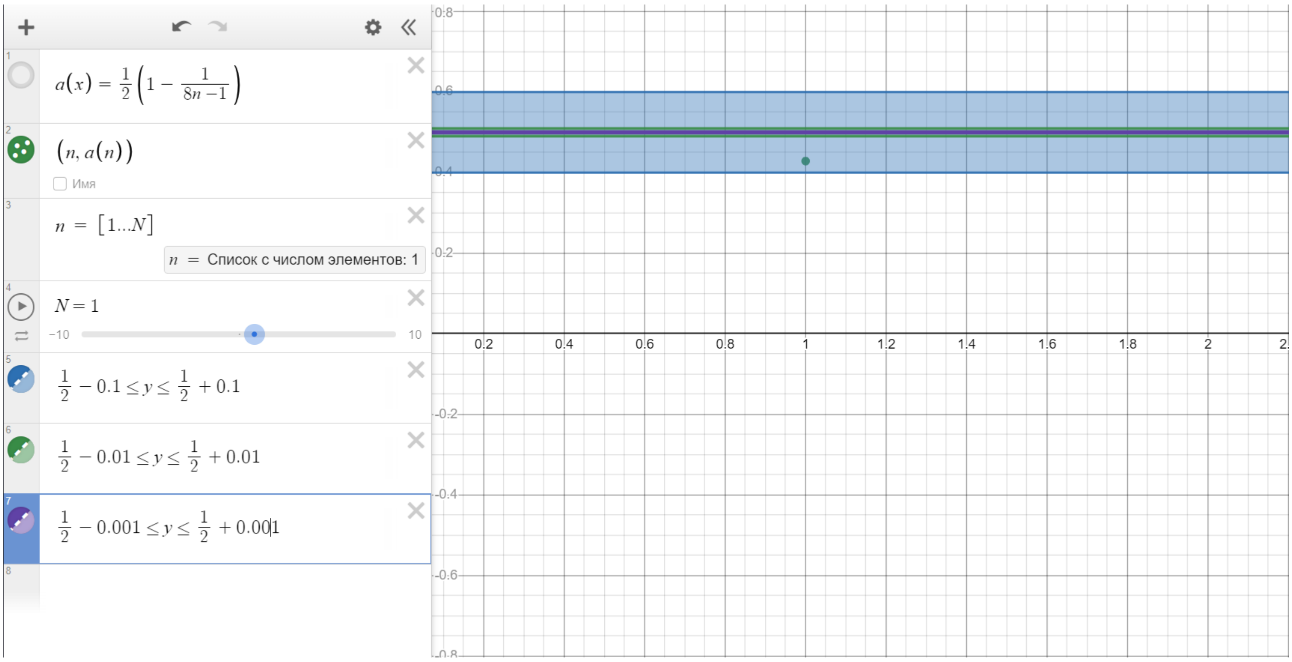

Рис. 4: График в desmos

При ε-окрестности $= \frac{1}{100}$, n0 $= 7$

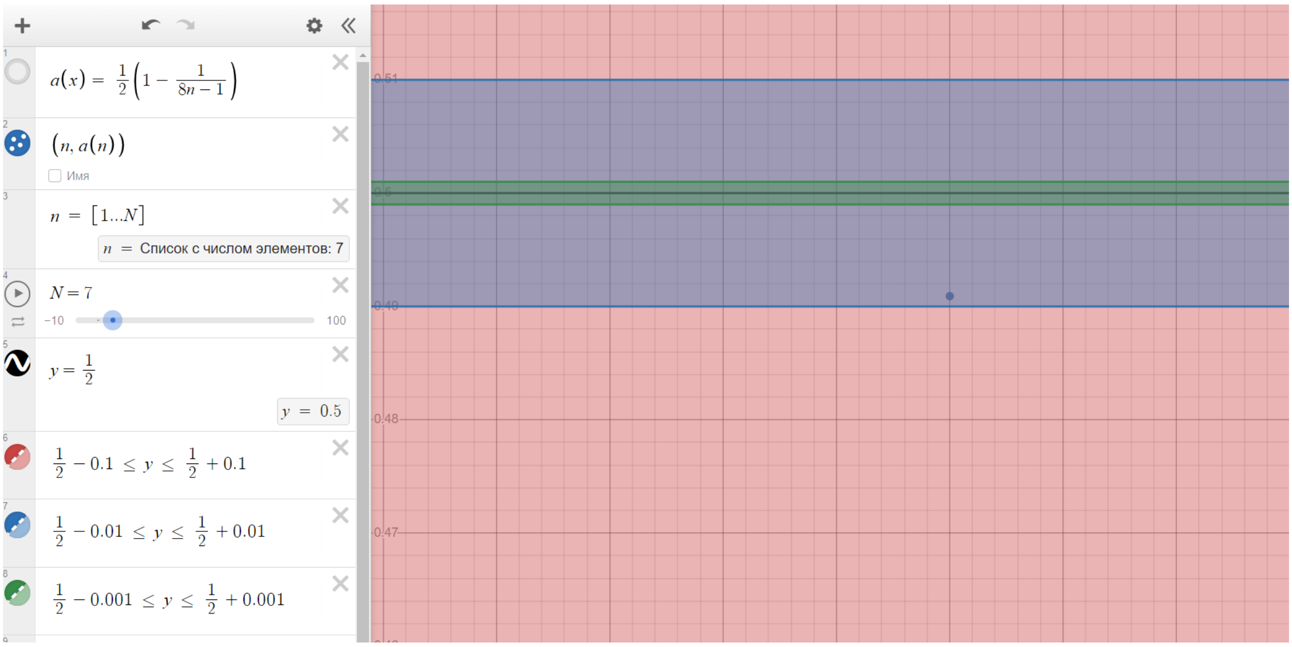

Рис. 5: График в desmos

При ε-окрестности $= \frac{1}{1000}$, n0 $= 63$

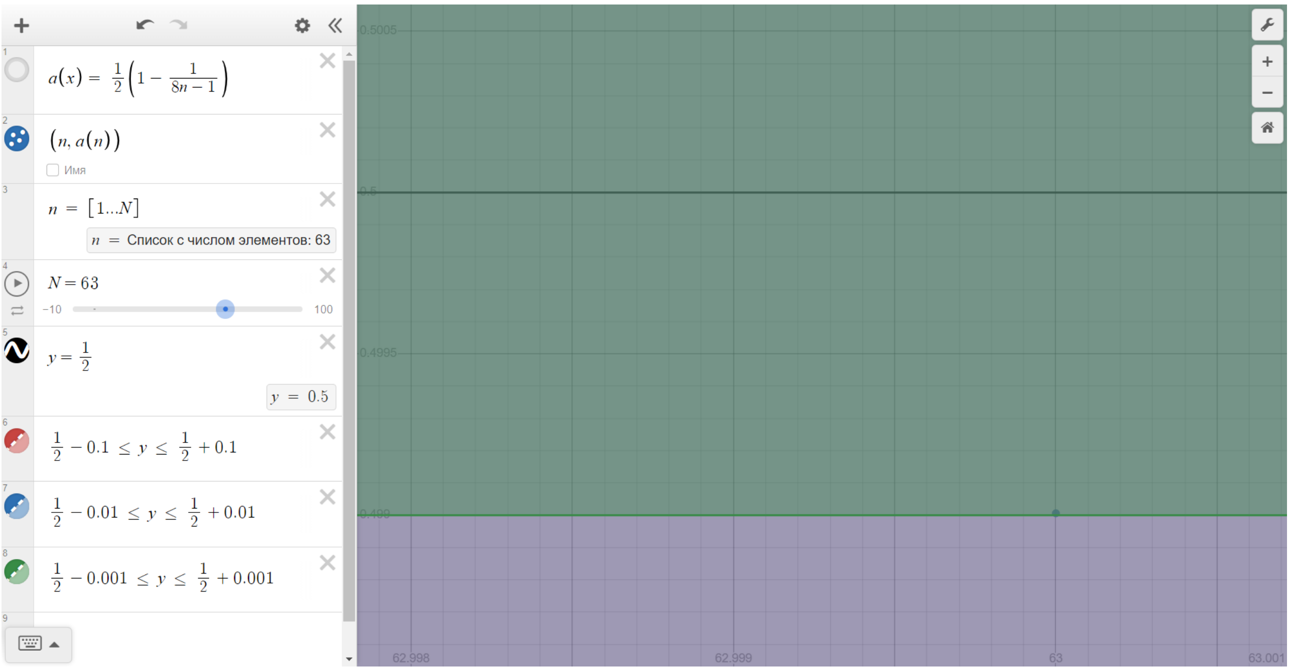

Рис. 6: График в desmos

Оценочный лист

Вклад каждого исполнителя:

Данько Савелий P3112 - 25%
Фан Нгок Туан P3121 - 25%
Фам Данг Чунг Нгия P3121 - 25%
Амири Насрулла P3106 - 25%