Chương 3
TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

BỘ MÔN TOÁN CƠ BẢN

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

SAMI.HUST – 2023

Nội dung

Tích phân xác định phụ thuộc tham số

Cho $f(x, y)$ là một hàm hai biến số xác định trên hình chữ nhật $[a, b] \times [c, d]$. Giả sử với mỗi $y \in [c, d]$, hàm số $z = f(x, y)$ khả tích theo x trên $[a, b]$. Khi đó tích phân

$$\int_a^b f(x, y)\, dx$$

xác định hàm phụ thuộc vào tham số y, ta có thể viết

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

như một hàm số theo biến y.
Tích phân trên gọi là tích phân phụ thuộc tham số, y là tham số.

Ví dụ 1.

$$\int_0^1 e^{xy}\, dx = \frac{1}{y}e^y - \frac{1}{y} \quad (y \neq 0).$$

Ví dụ 1.

$$\int_0^1 e^{xy}\,dx = \frac{1}{y}e^y - \frac{1}{y} \quad (y \neq 0).$$

Tích phân ở ví dụ này có thể tính được tường minh, với kết quả là hàm số theo biến y.

Tích phân xác định phụ thuộc tham số

Ví dụ 1.

$$\int_0^1 e^{xy}\,dx = \frac{1}{y}e^y - \frac{1}{y} \quad (y \neq 0).$$

Tích phân ở ví dụ này có thể tính được tường minh, với kết quả là hàm số theo biến y.

Ví dụ 2.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - y^2 \sin^2 x}}.$$

Ví dụ 1.

$$\int_0^1 e^{xy}\,dx = \frac{1}{y}e^y - \frac{1}{y} \quad (y \neq 0).$$

Tích phân ở ví dụ này có thể tính được tường minh, với kết quả là hàm số theo biến y.

Ví dụ 2.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - y^2\sin^2 x}}.$$

Tích phân này chỉ tính được khi $y = 0$.

Ví dụ 1.

$$\int_0^1 e^{xy}\,dx = \frac{1}{y}e^y - \frac{1}{y} \quad (y \neq 0).$$

Tích phân ở ví dụ này có thể tính được tường minh, với kết quả là hàm số theo biến y.

Ví dụ 2.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - y^2 \sin^2 x}}.$$

Tích phân này chỉ tính được khi $y = 0$. Đây là hàm số theo biến y, $y \in (-1, 1)$.

Ví dụ 1.

$$\int_0^1 e^{xy}\,dx = \frac{1}{y}e^y - \frac{1}{y} \quad (y \neq 0).$$

Tích phân ở ví dụ này có thể tính được tường minh, với kết quả là hàm số theo biến y.

Ví dụ 2.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-y^2\sin^2 x}}.$$

Tích phân này chỉ tính được khi $y=0$. Đây là hàm số theo biến y, $y \in (-1,1)$.

Trong nhiều trường hợp, ta không tính được tường minh tích phân phụ thuộc tham số, nhưng có thể xét được một số tính chất của hàm số xác định bởi tích phân đó.

Ví dụ 1.

$$\int_0^1 e^{xy}\,dx = \frac{1}{y}e^y - \frac{1}{y} \quad (y \neq 0).$$

Tích phân ở ví dụ này có thể tính được tường minh, với kết quả là hàm số theo biến y.

Ví dụ 2.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - y^2 \sin^2 x}}.$$

Tích phân này chỉ tính được khi $y = 0$. Đây là hàm số theo biến y, $y \in (-1, 1)$.

Trong nhiều trường hợp, ta không tính được tường minh tích phân phụ thuộc tham số, nhưng có thể xét được một số tính chất của hàm số xác định bởi tích phân đó.

Tính liên tục, khả vi, khả tích của hàm số $I(y)$?

Định lý

Nếu f *là hàm liên tục trên* $[a,b]\times[c,d]$, *thì* $I(y)=\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ *là hàm số liên tục trên* $[c,d]$.

Chứng minh.

Với $y\in[c,d]$ và số gia h sao cho $y+h\in[c,d]$. Ta có

$$|I(y+h)-I(y)|\le\int_a^b|f(x,y+h)-f(x,y)|\,dx.$$

Do f là hàm số liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$ nên f liên tục đều

$$|f(x,y+h)-f(x,y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}\quad\text{với } |h|<\delta \text{ và } \forall x\in[a,b]\Rightarrow|I(y+h)-I(y)|<\varepsilon.$$

Hàm số $I(y)$ liên tục. $\square$

Tính liên tục

Ví dụ (20201). Cho hàm số $I(y)=\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^4(1+y^6)+3(y^2+2)}$. Xét tính liên tục của $I(y)$. Từ đó tìm $\lim\limits_{y\to 0} I(y)$.

Ví dụ (20201). Cho hàm số $I(y) = \int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^4(1+y^6)+3(y^2+2)}$. Xét tính liên tục của $I(y)$. Từ đó tìm $\lim\limits_{y\to 0} I(y)$.

Lời giải. Hàm số $f(x,y) = \frac{x}{x^4(1+y^6)+3(y^2+2)}$ liên tục trên $[0,1]\times[c,d]$, với mọi khoảng $[c,d]\subset\mathbb{R}$ nên hàm số $I(y) = \int\limits_0^1 f(x,y)dx$ liên tục trên mọi khoảng $[c,d]\subset\mathbb{R}$, tức là liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ (20201). Cho hàm số $I(y) = \int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^4(1+y^6)+3(y^2+2)}$. Xét tính liên tục của $I(y)$. Từ đó tìm $\lim\limits_{y\to 0} I(y)$.

Lời giải. Hàm số $f(x,y) = \frac{x}{x^4(1+y^6)+3(y^2+2)}$ liên tục trên $[0,1]\times[c,d]$, với mọi khoảng $[c,d]\subset\mathbb{R}$ nên hàm số $I(y) = \int\limits_0^1 f(x,y)dx$ liên tục trên mọi khoảng $[c,d]\subset\mathbb{R}$, tức là liên tục trên $\mathbb{R}$. Suy ra

$$\lim_{y\to 0} I(y) = I(0)$$

Ví dụ (20201). Cho hàm số $I(y) = \int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^4(1+y^6)+3(y^2+2)}$. Xét tính liên tục của $I(y)$. Từ đó tìm $\lim\limits_{y\to 0} I(y)$.

Lời giải. Hàm số $f(x,y) = \frac{x}{x^4(1+y^6)+3(y^2+2)}$ liên tục trên $[0,1]\times[c,d]$, với mọi khoảng $[c,d]\subset\mathbb{R}$ nên hàm số $I(y) = \int\limits_0^1 f(x,y)dx$ liên tục trên mọi khoảng $[c,d]\subset\mathbb{R}$, tức là liên tục trên $\mathbb{R}$. Suy ra

$$\lim_{y\to 0} I(y) = I(0) = \int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^4+6}$$

Ví dụ (20201). Cho hàm số $I(y) = \int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^4(1+y^6)+3(y^2+2)}$. Xét tính liên tục của $I(y)$. Từ đó tìm $\lim\limits_{y\to 0} I(y)$.

Lời giải. Hàm số $f(x,y) = \frac{x}{x^4(1+y^6)+3(y^2+2)}$ liên tục trên $[0,1]\times[c,d]$, với mọi khoảng $[c,d]\subset\mathbb{R}$ nên hàm số $I(y) = \int\limits_0^1 f(x,y)dx$ liên tục trên mọi khoảng $[c,d]\subset\mathbb{R}$, tức là liên tục trên $\mathbb{R}$. Suy ra

$$\lim_{y\to 0} I(y) = I(0) = \int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^4+6} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{d(x^2)}{x^4+6}$$

Ví dụ (20201). Cho hàm số $I(y)=\int\limits_0^1 \dfrac{xdx}{x^4(1+y^6)+3(y^2+2)}$. Xét tính liên tục của $I(y)$. Từ đó tìm $\lim\limits_{y\to 0} I(y)$.

Lời giải. Hàm số $f(x,y)=\dfrac{x}{x^4(1+y^6)+3(y^2+2)}$ liên tục trên $[0,1]\times[c,d]$, với mọi khoảng $[c,d]\subset\mathbb{R}$ nên hàm số $I(y)=\int\limits_0^1 f(x,y)dx$ liên tục trên mọi khoảng $[c,d]\subset\mathbb{R}$, tức là liên tục trên $\mathbb{R}$. Suy ra

$$\lim_{y\to 0} I(y)=I(0)=\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^4+6}=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{d(x^2)}{x^4+6}=\left[\frac{1}{2\sqrt{6}}\arctan\frac{x^2}{\sqrt{6}}\right]_0^1$$

Ví dụ (20201). Cho hàm số $I(y) = \int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^4(1+y^6)+3(y^2+2)}$. Xét tính liên tục của $I(y)$. Từ đó tìm $\lim\limits_{y\to 0} I(y)$.

Lời giải. Hàm số $f(x,y) = \frac{x}{x^4(1+y^6)+3(y^2+2)}$ liên tục trên $[0,1]\times[c,d]$, với mọi khoảng $[c,d]\subset\mathbb{R}$ nên hàm số $I(y) = \int\limits_0^1 f(x,y)dx$ liên tục trên mọi khoảng $[c,d]\subset\mathbb{R}$, tức là liên tục trên $\mathbb{R}$. Suy ra

$$\lim_{y\to 0} I(y) = I(0) = \int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^4+6} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{d(x^2)}{x^4+6} = \left[\frac{1}{2\sqrt{6}}\arctan\frac{x^2}{\sqrt{6}}\right]_0^1 = \frac{1}{2\sqrt{6}}\arctan\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Tính khả vi

$$I'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)\,dx?$$

Leibnitz là người đầu tiên tìm ra công thức này năm 1697.

Định lý (Quy tắc Leibniz)

Giả sử $f(x,y)$ là hàm số liên tục và có đạo hàm riêng $f'_y(x,y)$ liên tục trên một miền của mặt phẳng Oxy chứa hình chữ nhật $[a,b]\times[c,d]$. Khi đó với $c \le y \le d$, ta có

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b f'_y(x,y)\,dx.$$

Tích phân xác định phụ thuộc tham số

Ví dụ, xét tích phân phụ thuộc tham số

$$I(y) = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{1}{y}\arctan\frac{1}{y} \quad \text{với } y \neq 0.$$

Đạo hàm hai vế và sử dụng quy tắc Leibnitz, ta có

$$I'(y) = -2y\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+y^2)^2} = -2y\left(\frac{1}{2y^3}\arctan\frac{1}{y} + \frac{1}{2y^2(1+y^2)}\right) = -\frac{1}{y^2}\arctan\frac{1}{y} - \frac{1}{y(1+y^2)}.$$

Áp dụng: Tính tích phân sau

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

Định lý (Định lý Fubini)

Nếu f là hàm số liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$, thì

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx.$$

Ví dụ 1. Tính tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx, \quad (0 < a \le b).$$

Định lý (Định lý Fubini)

Nếu f là hàm số liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$, thì

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy \right) dx.$$

Ví dụ 1. Tính tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx, \quad (0 < a \le b).$$

Đáp số.

$$I = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x,y) = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$ xác định trên $[0,1] \times [0,1] \setminus \{(0;0)\}$ và $f(0;0) = 0$. Có hay không đẳng thức sau?

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy.$$

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x,y) = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$ xác định trên $[0,1] \times [0,1] \setminus \{(0;0)\}$ và $f(0;0) = 0$. Có hay không đẳng thức sau?

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy.$$

Lời giải. Không, $VT = \dfrac{\pi}{4}$, $VP = -\dfrac{\pi}{4}$.

Lý do. Hàm số $f(x,y)$ không liên tục tại điểm $(0;0)$.

Xét tích phân phụ thuộc tham số

$$I(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx,$$

ở đây $a(y)$ và $b(y)$ là các hàm số của biến y, xác định trên $[c, d]$.

Xét tích phân phụ thuộc tham số

$$I(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx,$$

ở đây $a(y)$ và $b(y)$ là các hàm số của biến y, xác định trên $[c, d]$.

Tính liên tục

Định lý

Giả sử $f(x, y)$ là hàm số liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$; các hàm số $a(y)$, $b(y)$ liên tục trên $[c, d]$ và nhận giá trị trên $[a, b]$. Khi đó hàm số $I(y)$ liên tục trên đoạn $[c, d]$.

Tích phân với cận phụ thuộc tham số

Xét tích phân phụ thuộc tham số

$$I(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx,$$

ở đây $a(y)$ và $b(y)$ là các hàm số của biến y, xác định trên $[c, d]$.

Tính liên tục

Định lý

Giả sử $f(x, y)$ là hàm số liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$; các hàm số $a(y)$, $b(y)$ liên tục trên $[c, d]$ và nhận giá trị trên $[a, b]$. Khi đó hàm số $I(y)$ liên tục trên đoạn $[c, d]$.

Ví dụ (20173). Tìm giới hạn $\lim\limits_{y \to 0} \int\limits_{\sin y}^{\cos y} \dfrac{\arctan(x + y)}{1 + x^2 + y^2}\, dx$.

Tính liên tục

Định lý

Giả sử $f(x, y)$ *là hàm số liên tục trên* $[a, b] \times [c, d]$*; các hàm số* $a(y)$*,* $b(y)$ *liên tục trên* $[c, d]$ *và nhận giá trị trên* $[a, b]$*. Khi đó hàm số* $I(y)$ *liên tục trên đoạn* $[c, d]$*.*

Ví dụ (20173). Tìm giới hạn $\lim\limits_{y \to 0} \int\limits_{\sin y}^{\cos y} \dfrac{\arctan(x+y)}{1+x^2+y^2}\, dx$.

Tính liên tục

Định lý

Giả sử $f(x,y)$ *là hàm số liên tục trên* $[a,b]\times[c,d]$*; các hàm số* $a(y)$*,* $b(y)$ *liên tục trên* $[c,d]$ *và nhận giá trị trên* $[a,b]$*. Khi đó hàm số* $I(y)$ *liên tục trên đoạn* $[c,d]$*.*

Ví dụ (20173). Tìm giới hạn $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_{\sin y}^{\cos y}\dfrac{\arctan(x+y)}{1+x^2+y^2}\,dx.$

Lời giải. Đặt $I(y)=\int\limits_{\sin y}^{\cos y}\dfrac{\arctan(x+y)}{1+x^2+y^2}\,dx.$

Tính liên tục

Định lý

Giả sử $f(x,y)$ là hàm số liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$; các hàm số $a(y)$, $b(y)$ liên tục trên $[c,d]$ và nhận giá trị trên $[a,b]$. Khi đó hàm số $I(y)$ liên tục trên đoạn $[c,d]$.

Ví dụ (20173). Tìm giới hạn $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_{\sin y}^{\cos y}\dfrac{\arctan(x+y)}{1+x^2+y^2}\,dx$.

Lời giải. Đặt $I(y)=\int\limits_{\sin y}^{\cos y}\dfrac{\arctan(x+y)}{1+x^2+y^2}\,dx$. Hàm số $f(x,y)=\dfrac{\arctan(x+y)}{1+x^2+y^2}$ liên tục trên $[-1,1]\times[-1,1]$; các hàm số $a(y)=\sin y$, $b(y)=\cos y$ liên tục trên $[-1,1]$.

Tính liên tục

Định lý

Giả sử $f(x,y)$ *là hàm số liên tục trên* $[a,b]\times[c,d]$*; các hàm số* $a(y)$*,* $b(y)$ *liên tục trên* $[c,d]$ *và nhận giá trị trên* $[a,b]$*. Khi đó hàm số* $I(y)$ *liên tục trên đoạn* $[c,d]$*.*

Ví dụ (20173). Tìm giới hạn $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_{\sin y}^{\cos y}\dfrac{\arctan(x+y)}{1+x^2+y^2}\,dx$.

Lời giải. Đặt $I(y)=\int\limits_{\sin y}^{\cos y}\dfrac{\arctan(x+y)}{1+x^2+y^2}\,dx$. Hàm số $f(x,y)=\dfrac{\arctan(x+y)}{1+x^2+y^2}$ liên tục trên $[-1,1]\times[-1,1]$; các hàm số $a(y)=\sin y$, $b(y)=\cos y$ liên tục trên $[-1,1]$. Suy ra, hàm $I(y)$ liên tục trên $[-1,1]$ và do đó liên tục tại $y=0$.

Tính liên tục

Định lý

Giả sử $f(x,y)$ là hàm số liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$; các hàm số $a(y)$, $b(y)$ liên tục trên $[c,d]$ và nhận giá trị trên $[a,b]$. Khi đó hàm số $I(y)$ liên tục trên đoạn $[c,d]$.

Ví dụ (20173). Tìm giới hạn $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_{\sin y}^{\cos y}\dfrac{\arctan(x+y)}{1+x^2+y^2}\,dx$.

Lời giải. Đặt $I(y)=\int\limits_{\sin y}^{\cos y}\dfrac{\arctan(x+y)}{1+x^2+y^2}\,dx$. Hàm số $f(x,y)=\dfrac{\arctan(x+y)}{1+x^2+y^2}$ liên tục trên $[-1,1]\times[-1,1]$; các hàm số $a(y)=\sin y$, $b(y)=\cos y$ liên tục trên $[-1,1]$. Suy ra, hàm $I(y)$ liên tục trên $[-1,1]$ và do đó liên tục tại $y=0$. Ta có

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_{\sin y}^{\cos y}\frac{\arctan(x+y)}{1+x^2+y^2}\,dx=\lim_{y\to 0}I(y)=I(0)$$

Tính liên tục

Định lý

Giả sử $f(x,y)$ là hàm số liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$; các hàm số $a(y)$, $b(y)$ liên tục trên $[c,d]$ và nhận giá trị trên $[a,b]$. Khi đó hàm số $I(y)$ liên tục trên đoạn $[c,d]$.

Ví dụ (20173). Tìm giới hạn $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_{\sin y}^{\cos y}\dfrac{\arctan(x+y)}{1+x^2+y^2}\,dx.$

Lời giải. Đặt $I(y)=\int\limits_{\sin y}^{\cos y}\dfrac{\arctan(x+y)}{1+x^2+y^2}\,dx$. Hàm số $f(x,y)=\dfrac{\arctan(x+y)}{1+x^2+y^2}$ liên tục trên $[-1,1]\times[-1,1]$; các hàm số $a(y)=\sin y$, $b(y)=\cos y$ liên tục trên $[-1,1]$. Suy ra, hàm $I(y)$ liên tục trên $[-1,1]$ và do đó liên tục tại $y=0$. Ta có

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_{\sin y}^{\cos y}\frac{\arctan(x+y)}{1+x^2+y^2}\,dx=\lim_{y\to 0}I(y)=I(0)=\int\limits_0^1\frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx=\left[\frac{1}{2}(\arctan x)^2\right]_0^1=\frac{\pi^2}{32}.$$

Tính khả vi. Hàm số $I(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$ có khả vi không?

Tính khả vi. Hàm số $I(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx$ có khả vi không?

Định lý

Giả sử $f(x, y)$ thỏa mãn các điều kiện phát biểu trong quy tắc Leibniz. Ngoài ra, giả sử $a(y)$ và $b(y)$ là các hàm số khả vi liên tục trên $[c, d]$. Khi đó, với $c \leq y \leq d$, ta có

$$\frac{d}{dy} \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx = f(b(y), y)b'(y) - f(a(y), y)a'(y) + \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y)\, dx.$$

Tính khả vi. Hàm số $I(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx$ có khả vi không?

Định lý

Giả sử $f(x, y)$ thỏa mãn các điều kiện phát biểu trong quy tắc Leibniz. Ngoài ra, giả sử $a(y)$ và $b(y)$ là các hàm số khả vi liên tục trên $[c, d]$. Khi đó, với $c \leq y \leq d$, ta có

$$\frac{d}{dy} \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx = f(b(y), y) b'(y) - f(a(y), y) a'(y) + \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y)\, dx.$$

Ví dụ. Cho hàm số $I(y) = \int\limits_0^{1+y} \cos(x^2 + xy + y^2)\, dx$. Tính $I'(0)$.

Tích phân với cận phụ thuộc tham số

Ví dụ. Cho hàm số $I(y) = \int\limits_0^{1+y} \cos(x^2 + xy + y^2)\, dx$. Tính $I'(0)$.

Tích phân với cận phụ thuộc tham số

Ví dụ. Cho hàm số $I(y) = \int\limits_0^{1+y} \cos(x^2 + xy + y^2)\, dx$. Tính $I'(0)$.

Lời giải. Hàm $f(x, y) = \cos(x^2 + xy + y^2)$ liên tục và có đạo hàm riêng $f'_y(x, y)$ liên tục; hàm $y + 1$ khả vi liên tục.

Ví dụ. Cho hàm số $I(y) = \int\limits_0^{1+y} \cos(x^2 + xy + y^2)\, dx$. Tính $I'(0)$.

Lời giải. Hàm $f(x, y) = \cos(x^2 + xy + y^2)$ liên tục và có đạo hàm riêng $f'_y(x, y)$ liên tục; hàm $y + 1$ khả vi liên tục.
Ta có

$$I'(y) = \cos\left[(1 + y)^2 + (1 + y)y + y^2\right] - \int\limits_0^{1+y} (x + 2y) \sin(x^2 + xy + y^2)\, dx.$$

Ví dụ. Cho hàm số $I(y) = \int\limits_0^{1+y} \cos(x^2 + xy + y^2)\,dx$. Tính $I'(0)$.

Lời giải. Hàm $f(x,y) = \cos(x^2 + xy + y^2)$ liên tục và có đạo hàm riêng $f'_y(x,y)$ liên tục; hàm $y + 1$ khả vi liên tục.
Ta có

$$I'(y) = \cos\left[(1+y)^2 + (1+y)y + y^2\right] - \int\limits_0^{1+y} (x+2y)\sin(x^2 + xy + y^2)\,dx.$$

Suy ra

$$I'(0) = \cos 1 - \int\limits_0^1 x\sin(x^2)\,dx$$

Ví dụ. Cho hàm số $I(y) = \int\limits_0^{1+y} \cos(x^2 + xy + y^2)\, dx$. Tính $I'(0)$.

Lời giải. Hàm $f(x,y) = \cos(x^2 + xy + y^2)$ liên tục và có đạo hàm riêng $f'_y(x,y)$ liên tục; hàm $y + 1$ khả vi liên tục.
Ta có

$$I'(y) = \cos\left[(1+y)^2 + (1+y)y + y^2\right] - \int\limits_0^{1+y} (x + 2y)\sin(x^2 + xy + y^2)\, dx.$$

Suy ra

$$I'(0) = \cos 1 - \int\limits_0^1 x\sin(x^2)\, dx = \cos 1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sin(x^2)\, d(x^2) = \frac{3}{2}\cos 1 - \frac{1}{2}.$$

Nội dung

1. Tích phân xác định phụ thuộc tham số
2. **Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số**
3. Hàm Gamma
4. Hàm Beta

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Xét tích phân suy rộng

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx, \tag{1}$$

phụ thuộc vào tham số y. Theo định nghĩa,

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x,y)\,dx. \tag{2}$$

Tích phân suy rộng (1) được gọi là hội tụ nếu giới hạn ở (2) tồn tại (hữu hạn). Ngược lại, ta nói tích phân là phân kỳ.

Định nghĩa

Tích phân suy rộng $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *được gọi là* ***hội tụ đều*** *trên khoảng* $U \subset \mathbb{R}$, *nếu nó là tích phân hội tụ với mỗi* $y \in U$ *và với* $\varepsilon > 0$ *cho trước, tồn tại số* B *sao cho*

$$\left| \int\limits_b^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon \quad \text{với mọi } b > B, y \in U,$$

trong đó B *không phụ thuộc vào* y.

Định nghĩa

Tích phân suy rộng $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)dx$ *được gọi là* **hội tụ đều** *trên khoảng* $U \subset \mathbb{R}$, *nếu nó là tích phân hội tụ với mỗi* $y \in U$ *và với* $\varepsilon > 0$ *cho trước, tồn tại số* B *sao cho*

$$\left| \int\limits_b^{+\infty} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon \quad \text{với mọi } b > B, y \in U,$$

trong đó B *không phụ thuộc vào* y.

Ví dụ. Xét tích phân suy rộng $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} ye^{-xy}\, dx$ với $y \in [0, +\infty)$.

Tính trực tiếp tích phân, ta được

$$\int_b^{+\infty} ye^{-xy}\,dx = e^{-by} > 0 \quad \text{với } y > 0.$$

Với y cố định, bất đẳng thức

$$e^{-by} < \varepsilon$$

tương đương với $b > B(y)$, trong đó

$$B(y) = \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{y} \quad \text{phụ thuộc vào } y.$$

Tích phân suy rộng $I(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-xy}\,dx$ hội tụ đều trên $[c,d]$, trong đó c,d là các số bất kỳ thỏa mãn $0 < c < d$.
Tích phân đó không hội tụ đều trên $[0,d]$ $(d > 0)$.

Định lý (Tiêu chuẩn Weierstrass)

Cho $f(x, y)$ *là hàm số liên tục theo* x *trên* $[a, +\infty)$, *với mỗi* $y \in [c, d]$. *Giả sử* $g(x)$ *là hàm số liên tục trên* $[a, +\infty)$. *Khi đó, nếu* $|f(x, y)| \leq g(x)$ *với mọi* $(x, y) \in [a, +\infty) \times [c, d]$ *và tích phân* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *hội tụ, thì tích phân*

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$$

hội tụ tuyệt đối và hội tụ đều trên $[c, d]$.

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Định lý (Tiêu chuẩn Weierstrass)

Cho $f(x,y)$ là hàm số liên tục theo x trên $[a,+\infty)$, với mỗi $y \in [c,d]$. Giả sử $g(x)$ là hàm số liên tục trên $[a,+\infty)$. Khi đó, nếu $|f(x,y)| \le g(x)$ với mọi $(x,y) \in [a,+\infty) \times [c,d]$ và tích phân $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ hội tụ, thì tích phân

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

hội tụ tuyệt đối và hội tụ đều trên $[c,d]$.

Chú ý. Trong định lý trên, khoảng biến thiên $[c,d]$ của tham số có thể được thay bởi một khoảng bất kỳ mở, đóng hoặc nửa mở, bị chặn hoặc không.

Ví dụ. Xét sự hội tụ đều của tích phân suy rộng $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{1+x^2+y^2}\,dx$.

Ví dụ. Xét sự hội tụ đều của tích phân suy rộng $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{1+x^2+y^2}\,dx$.

Lời giải. Hàm số $f(x,y) = \frac{\cos(xy)}{1+x^2+y^2}$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$ và có đánh giá

$$|f(x,y)| = \frac{|\cos(xy)|}{1+x^2+y^2} \leq \frac{1}{1+x^2} =: g(x).$$

Ví dụ. Xét sự hội tụ đều của tích phân suy rộng $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{1+x^2+y^2}\, dx$.

Lời giải. Hàm số $f(x,y) = \frac{\cos(xy)}{1+x^2+y^2}$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$ và có đánh giá

$$|f(x,y)| = \frac{|\cos(xy)|}{1+x^2+y^2} \le \frac{1}{1+x^2} =: g(x).$$

Tích phân suy rộng $\int\limits_0^{+\infty} g(x)dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ hội tụ.

Ví dụ. Xét sự hội tụ đều của tích phân suy rộng $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{1+x^2+y^2}\, dx$.

Lời giải. Hàm số $f(x,y) = \frac{\cos(xy)}{1+x^2+y^2}$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$ và có đánh giá

$$|f(x,y)| = \frac{|\cos(xy)|}{1+x^2+y^2} \le \frac{1}{1+x^2} =: g(x).$$

Tích phân suy rộng $\int\limits_0^{+\infty} g(x)dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ hội tụ.

Theo tiêu chuẩn Weierstrass, tích phân suy rộng phụ thuộc tham số đã cho hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

Tính liên tục

Tính liên tục

Định lý

Nếu $f(x, y)$ *liên tục trên* $[a, +\infty) \times [c, d]$ *và tích phân*

$$I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$$

hội tụ đều trên $[c, d]$*, thì hàm số* $I(y)$ *liên tục trên* $[c, d]$.

Tính liên tục

Định lý

Nếu $f(x, y)$ *liên tục trên* $[a, +\infty) \times [c, d]$ *và tích phân*

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$$

hội tụ đều trên $[c, d]$*, thì hàm số* $I(y)$ *liên tục trên* $[c, d]$*.*

Ví dụ. Xét sự liên tục của hàm số xác định bởi $I(y) = \int_1^{+\infty} \frac{x^3}{x^2 + y^2} e^{-x}\, dx$.

Tính liên tục

Định lý

Nếu $f(x,y)$ *liên tục trên* $[a,+\infty)\times[c,d]$ *và tích phân*

$$I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

hội tụ đều trên $[c,d]$*, thì hàm số* $I(y)$ *liên tục trên* $[c,d]$*.*

Ví dụ. Xét sự liên tục của hàm số xác định bởi $I(y)=\int_1^{+\infty}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}e^{-x}\,dx.$

Gợi ý. Sử dụng đánh giá $\left|\dfrac{x^3}{x^2+y^2}e^{-x}\right|\le xe^{-x}$ trên $[1,+\infty)\times\mathbb{R}$ và TPSR $\int_1^{+\infty} xe^{-x}\,dx$ hội tụ.

Tính khả tích

Định lý

Giả sử $f(x,y)$ *là hàm số liên tục trên* $[a,+\infty)\times[c,d]$ *và tích phân*

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

hội tụ đều tới $I(y)$ *trên* $[c,d]$. *Khi đó*

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_a^{+\infty}\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Tính khả vi

Định lý

Giả sử $f(x,y)$ *là hàm số liên tục theo* x *đối với mỗi* y *cố định thuộc* $[c,d]$ *và* $f'_y(x,y)$ *liên tục trên* $[a,+\infty)\times[c,d]$. *Khi đó, nếu các tích phân*

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx, \quad \int_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$$

hội tụ, trong đó tích phân thứ hai hội tụ đều trên $[c,d]$, *thì* $I(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ *là hàm số khả vi liên tục, với* $y\in[c,d]$, *và*

$$I'(y)=\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx.$$

Ví dụ 1. Tích phân suy rộng

$$I(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-yx^2}\, dx$$

là hội tụ đều trên $[1, +\infty)$?

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Ví dụ 1. Tích phân suy rộng

$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-yx^2}\, dx$$

là hội tụ đều trên $[1, +\infty)$?

Ví dụ 2 (20193). Chứng minh rằng hàm số

$$I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^6 + 3y + 2)}{1 + x^6 + y^2}\, dx$$

là hàm số liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Nội dung

Hàm Gamma

Hàm Gamma được định nghĩa bởi

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx \quad \text{với } a > 0.$$

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số này hội tụ đều trên $[a_0, +\infty)$, với $a_0 > 0$. Đó là tích phân hội tụ, với $a > 0$.

Hàm Gamma

Hàm Gamma được định nghĩa bởi

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx \quad \text{với } a > 0.$$

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số này hội tụ đều trên $[a_0, +\infty)$, với $a_0 > 0$. Đó là tích phân hội tụ, với $a > 0$. Thật vậy,

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx = \int_0^{1} x^{a-1} e^{-x}\, dx + \int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx.$$

Hàm Gamma

Hàm Gamma được định nghĩa bởi

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx \quad \text{với } a > 0.$$

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số này hội tụ đều trên $[a_0, +\infty)$, với $a_0 > 0$. Đó là tích phân hội tụ, với $a > 0$. Thật vậy,

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx = \int_0^1 x^{a-1}e^{-x}\,dx + \int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx.$$

TP thứ nhất ở vế phải hội tụ, vì $0 < x^{a-1}e^{-x} \leq x^{1-a} = \dfrac{1}{x^{1-a}}$ với $x \in (0,1)$ và $1 - a < 1$.

Hàm Gamma

Hàm Gamma được định nghĩa bởi

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx \quad \text{với } a > 0.$$

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số này hội tụ đều trên $[a_0, +\infty)$, với $a_0 > 0$. Đó là tích phân hội tụ, với $a > 0$. Thật vậy,

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx = \int_0^1 x^{a-1} e^{-x}\, dx + \int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx.$$

TP thứ nhất ở vế phải hội tụ, vì $0 < x^{a-1} e^{-x} \le x^{1-a} = \dfrac{1}{x^{1-a}}$ với $x \in (0,1)$ và $1 - a < 1$.

TP thứ hai ở vế phải hội tụ, do ta có đánh giá

$$0 < x^{a-1} e^{-x} \le \frac{1}{x^2} \quad \text{với } x \text{ đủ lớn.}$$

Một số tính chất của hàm Gamma

Tính chất 1: Hàm Gamma $\Gamma(a)$ xác định và có đạo hàm mọi cấp trên $(0,+\infty)$.
Đạo hàm

$$\Gamma'(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1} \ln x \, e^{-x} \, dx, \quad \Gamma''(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1} (\ln x)^2 e^{-x} \, dx.$$

Một số tính chất của hàm Gamma

Tính chất 1: Hàm Gamma $\Gamma(a)$ xác định và có đạo hàm mọi cấp trên $(0, +\infty)$.
Đạo hàm

$$\Gamma'(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} \ln x \, e^{-x} \, dx, \quad \Gamma''(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} (\ln x)^2 e^{-x} \, dx.$$

Tổng quát

$$\Gamma^{(n)}(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} (\ln x)^n e^{-x} \, dx.$$

Một số tính chất của hàm Gamma

Tính chất 2:

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \quad \text{nếu } a > 0.$$

Tính chất 2:

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \quad \text{nếu } a > 0.$$

Ta có thể chứng minh tính chất này bằng cách sử dụng tích phân từng phần.

Tính chất 2:

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \quad \text{nếu } a > 0.$$

Ta có thể chứng minh tính chất này bằng cách sử dụng tích phân từng phần.

Do $\Gamma(1) = 1$, nên

$$\Gamma(n+1) = n!$$

với n là một số nguyên dương.

Tính chất 2:

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \quad \text{nếu } a > 0.$$

Ta có thể chứng minh tính chất này bằng cách sử dụng tích phân từng phần.
Do $\Gamma(1) = 1$, nên

$$\Gamma(n+1) = n!$$

với n là một số nguyên dương.

Ví dụ 1. Tính tích phân $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^4}{x^2}\,dx.$

Tính chất 2:

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \quad \text{nếu } a > 0.$$

Ta có thể chứng minh tính chất này bằng cách sử dụng tích phân từng phần.
Do $\Gamma(1) = 1$, nên

$$\Gamma(n+1) = n!$$

với n là một số nguyên dương.

Ví dụ 1. Tính tích phân $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^4}{x^2}\, dx$.

Lời giải. Đặt $t = \ln x$, $x = e^t$, suy ra $I = \int\limits_0^{+\infty} t^4 e^{-t}\, dt = \Gamma(5) = 4! = 24$.

Một số tính chất của hàm Gamma

Tính chất 2:

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \quad \text{nếu } a > 0.$$

Ta có thể chứng minh tính chất này bằng cách sử dụng tích phân từng phần.

Do $\Gamma(1) = 1$, nên

$$\Gamma(n+1) = n!$$

với n là một số nguyên dương.

Ví dụ 1. Tính tích phân $I = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{(\ln x)^4}{x^2}\, dx$.

Lời giải. Đặt $t = \ln x$, $x = e^t$, suy ra $I = \int\limits_0^{+\infty} t^4 e^{-t}\, dt = \Gamma(5) = 4! = 24$.

Ví dụ 2. Tính tích phân $J = \int\limits_0^{+\infty} t^8 e^{-t^3}\, dt$. (Gợi ý: Đặt $x = t^3$, ĐS: $J = \frac{2}{3}$).

Một số tính chất khác của hàm Gamma:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} \quad \text{với } 0 < a < 1. \text{ Đặc biệt } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Một số tính chất khác của hàm Gamma:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} \quad \text{với } 0 < a < 1. \text{ Đặc biệt } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a) \text{ với } a > 0.$$

Một số tính chất của hàm Gamma

Một số tính chất khác của hàm Gamma:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} \quad \text{với } \; 0 < a < 1. \text{ Đặc biệt } \; \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a) \; \text{ với } a > 0.$$

Ví dụ 3. Tính tích phân $\int\limits_0^{+\infty} t^{10}e^{-t^2}\,dt$.

Một số tính chất khác của hàm Gamma:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} \quad \text{với } 0 < a < 1. \text{ Đặc biệt } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a) \text{ với } a > 0.$$

Ví dụ 3. Tính tích phân $\int\limits_0^{+\infty} t^{10}e^{-t^2}\,dt$.

Lời giải. Đặt $x = t^2 \Rightarrow t = x^{\frac{1}{2}}$, $dt = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$. Suy ra

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{10}e^{-t^2}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} x^5 e^{-x}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} x^{\frac{9}{2}}e^{-x}dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{9!!}{2^6}\sqrt{\pi} = \frac{945}{64}\sqrt{\pi}.$$

Nội dung

Hàm Beta

Hàm Beta, $B(a,b)$, được định nghĩa bởi

$$B(a,b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx.$$

Đây là tích phân phụ thuộc vào hai tham số a và b. Hàm Beta là hàm hai biến số xác định khi $a > 0$, $b > 0$.

Hàm Beta, $B(a,b)$, được định nghĩa bởi

$$B(a,b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx.$$

Đây là tích phân phụ thuộc vào hai tham số a và b. Hàm Beta là hàm hai biến số xác định khi $a > 0$, $b > 0$.

Một số tính chất của hàm Beta

Hàm Beta

Hàm Beta, $B(a,b)$, được định nghĩa bởi

$$B(a,b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx.$$

Đây là tích phân phụ thuộc vào hai tham số a và b. Hàm Beta là hàm hai biến số xác định khi $a > 0$, $b > 0$.

Một số tính chất của hàm Beta

Tính chất 1: Hàm Beta xác định và có đạo hàm mọi cấp trên miền xác định $a > 0$, $b > 0$.

Hàm Beta

Tính chất 2: Hàm Beta là hàm đối xứng, tức là $B(b,a) = B(a,b)$, $a, b > 0$.
Tính chất này được chứng minh bằng cách sử dụng phép đổi biến số $t = 1 - x$.

Hàm Beta

Tính chất 2: Hàm Beta là hàm đối xứng, tức là $B(b,a) = B(a,b)$, $a, b > 0$.
Tính chất này được chứng minh bằng cách sử dụng phép đổi biến số $t = 1 - x$.
Tính chất 3:

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1) \quad \text{với } a > 0, b > 1.$$

Hơn nữa, do tính đối xứng nên

$$B(a,b) = \frac{a-1}{a+b-1}B(a-1,b) \quad \text{với } a > 1, b > 0.$$

Vậy, với số nguyên dương $b = n$, ta có

$$B(a,n) = \frac{n-1}{a+n-1}\frac{n-2}{a+n-2}\cdots\frac{1}{a+1}B(a,1),$$

trong đó

$$B(a,1) = \int_0^1 x^{a-1}\,dx = \frac{1}{a}.$$

Hàm Beta

Do đó,

$$B(a,n) = B(n,a) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}.$$

Đặc biệt,

$$B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} \quad \text{với } m,n \in \mathbb{N}^{+}.$$

Do đó,

$$B(a,n) = B(n,a) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}.$$

Đặc biệt,

$$B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} \quad \text{với } m, n \in \mathbb{N}^+.$$

Ví dụ. Tính tích phân kép $\iint\limits_D x^m y^n \, dxdy$, với $m, n \in \mathbb{N}^+$ và D là miền tam giác xác định bởi $x + y \leq 1$, $x \geq 0$ và $y \geq 0$.

Do đó,

$$B(a,n) = B(n,a) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots (n-1)}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}.$$

Đặc biệt,

$$B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} \quad \text{với } m,n \in \mathbb{N}^+.$$

Ví dụ. Tính tích phân kép $\iint\limits_D x^m y^n\,dxdy$, với $m,n\in\mathbb{N}^+$ và D là miền tam giác xác định bởi $x+y\le 1$, $x\ge 0$ và $y\ge 0$.

Lời giải. Ta viết miền D dạng $D=\{(x,y)|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$. Khi đó

$$\iint\limits_D x^m y^n\,dxdy = \int_0^1 dx\int_0^{1-x} x^m y^n dy = \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^m(1-x)^{n+1}dx = \frac{1}{n+1}B(m+1,n+2)$$

$$= \frac{m!n!}{(m+n+2)!}.$$

Các dạng khác nhau của hàm Beta

Bằng cách đổi biến số $x = \sin^2 t$, ta thu được

$$B(a,b) = 2\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2a-1} t \cos^{2b-1} t\, dt \quad \Rightarrow \quad \int\limits_0^{\pi/2} \sin^m t \cos^n t\, dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$

Các dạng khác nhau của hàm Beta

Bằng cách đổi biến số $x = \sin^2 t$, ta thu được

$$B(a,b) = 2\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2a-1} t \cos^{2b-1} t \, dt \quad \Rightarrow \quad \int\limits_0^{\pi/2} \sin^m t \cos^n t \, dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$

Hơn nữa, nếu đổi biến số $x = \dfrac{y}{y+1}$, thì $dx = \dfrac{1}{(y+1)^2} dy$ và ta có

$$B(a,b) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{y+1}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{y}{y+1}\right)^{b-1} \frac{1}{(y+1)^2} \, dy = \int_0^{+\infty} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}} \, dy.$$

Các dạng khác nhau của hàm Beta

Bằng cách đổi biến số $x = \sin^2 t$, ta thu được

$$B(a,b) = 2\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2a-1} t \cos^{2b-1} t\, dt \quad \Rightarrow \quad \int\limits_0^{\pi/2} \sin^m t \cos^n t\, dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$

Hơn nữa, nếu đổi biến số $x = \dfrac{y}{y+1}$, thì $dx = \dfrac{1}{(y+1)^2} dy$ và ta có

$$B(a,b) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{y+1}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{y}{y+1}\right)^{b-1} \frac{1}{(y+1)^2}\, dy = \int_0^{+\infty} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}\, dy.$$

Đặc biệt,

$$B(a, 1-a) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{a-1}}{1+y}\, dy = \frac{\pi}{\sin \pi a} \quad \text{với } 0 < a < 1.$$

Ví dụ 1. Tính tích phân $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^5 t \cos^7 t \, dt$.

Ví dụ 1. Tính tích phân $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^5 t \cos^7 t \, dt$.

Lời giải. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^5 t \cos^7 t \, dt = \frac{1}{2} B(3,4) = \frac{1}{2} \frac{2!3!}{6!} = \frac{1}{120}$.

Ví dụ 1. Tính tích phân $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^5 t \cos^7 t \, dt$.

Lời giải. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^5 t \cos^7 t \, dt = \frac{1}{2} B(3,4) = \frac{1}{2} \frac{2!3!}{6!} = \frac{1}{120}$.

Ví dụ 2. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3}{1+8x^6} \, dx$.

Ví dụ 1. Tính tích phân $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^5 t \cos^7 t\, dt$.

Lời giải. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^5 t \cos^7 t\, dt = \frac{1}{2}B(3,4) = \frac{1}{2}\frac{2!3!}{6!} = \frac{1}{120}$.

Ví dụ 2. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3}{1+8x^6}\, dx$.

Lời giải. Đặt $y = 8x^6 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}y^{\frac{1}{6}}$, $dx = \frac{1}{6\sqrt{2}}y^{-\frac{5}{6}}dy$. Suy ra

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}y^{\frac{1}{2}}}{1+y}\frac{1}{6\sqrt{2}}y^{-\frac{5}{6}}dy = \frac{1}{24}\int\limits_0^{+\infty} \frac{y^{-\frac{1}{3}}}{1+y}dy = \frac{1}{24}B\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{12\sqrt{3}}.$$

Ví dụ 1. Tính tích phân $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^5 t \cos^7 t\, dt$.

Lời giải. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^5 t \cos^7 t\, dt = \frac{1}{2}B(3,4) = \frac{1}{2}\frac{2!3!}{6!} = \frac{1}{120}$.

Ví dụ 2. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3}{1+8x^6}\, dx$.

Lời giải. Đặt $y = 8x^6 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}y^{\frac{1}{6}}$, $dx = \frac{1}{6\sqrt{2}}y^{-\frac{5}{6}}dy$. Suy ra

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}y^{\frac{1}{2}}}{1+y}\frac{1}{6\sqrt{2}}y^{-\frac{5}{6}}dy = \frac{1}{24}\int\limits_0^{+\infty} \frac{y^{-\frac{1}{3}}}{1+y}dy = \frac{1}{24}B\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{12\sqrt{3}}.$$

Ví dụ 3. Tính tích phân $J = \int\limits_0^2 \sqrt{\frac{x}{2-x}}\,dx$. (ĐS $J = \pi$).

Mối liên hệ giữa hàm Gamma và hàm Beta

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Với $a+b=1$, ta có

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = B(a,1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}, \quad 0 < a < 1.$$

Mối liên hệ giữa hàm Gamma và hàm Beta

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Với $a+b=1$, ta có

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = B(a,1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}, \quad 0 < a < 1.$$

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau:

a) $I = \int\limits_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,dx$ b) $J = \int\limits_0^3 x^4 \sqrt[3]{27-x^3}\,dx$ c) $I_n = \int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^n x^{n-1}\,dx, \quad (n>0).$

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau:

a) $I = \int\limits_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,dx$ b) $J = \int\limits_0^3 x^4\sqrt[3]{27-x^3}\,dx$ c) $I_n = \int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^n x^{n-1}\,dx, \quad (n>0).$

Gợi ý, ĐS: a) Đặt $x = 2t$, $I = \frac{64\sqrt{2}}{15}$. b) $x = 3y^{\frac{1}{3}}$, $J = 18\sqrt{3}\pi$. c) $y = \ln\frac{1}{x}$, $I_n = \frac{(n-1)!}{n^n}$.

Ví dụ 2. Tính các tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$.

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau:

a) $I = \int\limits_0^2 \dfrac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,dx$ b) $J = \int\limits_0^3 x^4\sqrt[3]{27-x^3}\,dx$ c) $I_n = \int\limits_0^1 \left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^n x^{n-1}\,dx$, $(n>0)$.

Gợi ý, ĐS: a) Đặt $x = 2t$, $I = \dfrac{64\sqrt{2}}{15}$. b) $x = 3y^{\frac{1}{3}}$, $J = 18\sqrt{3}\pi$. c) $y = \ln\frac{1}{x}$, $I_n = \dfrac{(n-1)!}{n^n}$.

Ví dụ 2. Tính các tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx,\quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2m-1}dx = \frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!},\quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2m}dx = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2}.$$