GIẢI TÍCH III

TS. Lê Văn Tứ

Hanoi University of Science and Technology

Bài toán mở đầu

Bài toán tách sóng

Cho hàm f thoả mãn tính chất sau:

- $f(x) = f(x + 2\pi)$.
- Tồn tại $a, b \in \mathbb{R}$ và $m, n \in \mathbb{N}$ sao cho

$$f(x) = a\cos(mx) + b\sin(nx).$$

Tìm a, b, m, n?

Bài toán mở đầu

Bài toán tìm sóng thành phần

Cho hàm f thoả mãn $f(x) = f(x + 2\pi)$ có dạng

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{k} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

với $k \in \mathbb{N}$. Xác định a_n, b_n ?

Chuỗi lượng giác

Định nghĩa

Cho $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 1}$ là hai dãy số thực. Chuỗi lượng giác với hệ số a_n, b_n là chuỗi hàm có dạng

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right).$$

Mệnh đề

Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|, \sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ hội tụ thì chuỗi lượng giác hệ số a_n, b_n hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

Gợi ý chứng minh. Do

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n| + |b_n|\right).$$

Khai triển thành chuỗi lượng giác

Câu hỏi

Cho f là một hàm số.

- Khi nào thì tồn tại a_n, b_n sao cho $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$?
- Nếu tồn tại khai triển thành chuỗi lượng giác thì giá trị của a_n, b_n bằng bao nhiêu?

Ý nghĩa của khai triển lượng giác: Wiki Quora.

- Giải phương trình truyền nhiệt.
- Bài toán truyền tín hiệu.
- Bài toán xử lí tín hiệu (lọc âm, lọc hình ảnh, X-ray,...).

Điều kiện cần

Định lí

Cho hàm f tuần hoàn với chu kì 2π. Nếu f có thể biểu diễn được dưới dạng chuỗi lượng giác

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

thì

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)dx, \quad n = 1, 2, \dots.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)dx, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Điều kiện cần

Gợi ý chứng minh. Giả sử chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ hội tụ. Ta lấy tích phân hai vế trên $[-\pi,\pi]$ và sử dụng các đẳng thức sau.

Bổ đề

- $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx = 0.$
- $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\sin(nx)dx = 0, \quad m,n\in\mathbb{N}.$
- $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\sin(nx)dx = \begin{cases}0, m\neq n,\\ \pi, m=n\neq 0\end{cases}, \quad m,n\in\mathbb{N}.$

Điều kiện đủ

Định nghĩa

Với hàm f tuần hoàn chu kì 2π. Ta gọi chuỗi $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ với a_n, b_n được tính bởi công thức trên là *chuỗi Fourier* của hàm f.

Định lí Dirichlet

Cho hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm tuần hoàn chu kì 2π thoả mãn

- f liên tục từng khúc trên $(-\pi, \pi)$.
- f' tồn tại và liên tục từng khúc trên $(-\pi, \pi)$.

Khi đó, chuỗi Fourier của f hội tụ điểm trên $\mathbb{R}$ và

$$S(x) = \begin{cases} f(x) \text{ nếu } f \text{ liên tục tại } x \\ \frac{f(x)^+ + f(x)^-}{2} \text{ nếu } f \text{ gián đoạn tại } x \end{cases}$$

Ví dụ

Hàm tuần hoàn chu kì 2π nào sau đây có khai triển chuỗi Fourier

a. $f(x) = x, x \in (-\pi, \pi)$. *Có*

b. $f(x) = \begin{cases} \alpha x, -\pi < x < 0 \\ \beta x, 0 < x < \pi \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Có*

c. $f(x) = \begin{cases} \tan\left(\frac{x}{2}\right), x \in (-\pi, \pi) \\ 0, |x| = \pi \end{cases}$. *Không*

d $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi < x < 0 \\ 1, 0 < x < \pi \end{cases}$. *Có*

Ví dụ

Khai triển hàm tuần hoàn $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi < x < 0 \\ 1, 0 < x < \pi \end{cases}$ thành chuỗi Fourier.

- Chuỗi Fourier của f có dạng

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right).$$

với

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad n = 1, 2, \ldots. \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad n = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

.

Ví dụ

Khai triển hàm tuần hoàn $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi < x < 0 \\ 1, 0 < x < \pi \end{cases}$ thành chuỗi Fourier.

- $a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} 1 dx = 1.$
- $a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos(nx) dx = 0.$
- $b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{-1}{n\pi} \cos(nx)\Big|_0^{\pi} = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}.$

$$\boxed{\Rightarrow S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \sin(nx).}$$

Ví dụ

Khai triển hàm tuần hoàn $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi < x < 0 \\ 1, 0 < x < \pi \end{cases}$ thành chuỗi Fourier.

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \sin(nx).$$

Áp dụng Định lí Dirichlet, tại $x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \sin(nx)$.

Như vậy, tại $x = \frac{\pi}{2}$, ta có

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \sin(\frac{n\pi}{2}) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi} = 1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Khai triển Fourier của hàm chẵn/lẻ

Bổ đề

Cho hàm f khả tích trên $[-\pi, \pi]$.

- Nếu f chẵn thì $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx$.
- Nếu f lẻ thì $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$.

Bổ đề

Xét hàm f, g trên $[-\pi, \pi]$.

- Nếu f, g cùng chẵn (hoặc cùng lẻ) thì fg chẵn.
- Nếu f chẵn, g lẻ thì fg lẻ.

Khai triển Fourier của hàm chẵn/lẻ

Định lí

Cho hàm f tuần hoàn chu kì 2π và giả sử f có khai triển Fourier.

- Nếu f chẵn thì $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$,

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad b_n = 0.$$

- Nếu f lẻ thì $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$,

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

Ví dụ

Khai triển hàm tuần hoàn chu kì 2π sau $f(x) = x, x \in (-\pi, \pi)$ thành chuỗi Fourier

Do f là hàm lẻ, chuỗi Fourier của f có dạng

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

với

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx.$$

Ví dụ

Khai triển hàm tuần hoàn chu kì 2π sau $f(x) = x, x \in (-pi, \pi)$ thành chuỗi Fourier

$$\begin{aligned}\int x\sin(nx)dx &= \int xd\left(\frac{-1}{n}\cos(nx)\right)\\ &= -\frac{1}{n}x\cos(nx) + \frac{1}{n}\int\cos(nx)dx\\ &= -\frac{1}{n}x\cos(nx) + \frac{1}{n^2}\sin(nx) + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Với $g(x) = -\frac{1}{n}x\cos(nx) + \frac{1}{n^2}\sin(nx)$, ta có $g(\pi) = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}, g(0) = 0.$

$$\Rightarrow b_n = \frac{2}{\pi}(g(\pi) - g(0)) = \frac{(-1)^{n+1}2}{n}$$

$$\Rightarrow S(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$$

Khai triển Fourier với hàm tuần hoàn chu kì $2T$

Định lí

Cho hàm $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tuần hoàn chu kì $2T$ thì chuỗi Fourier của f có dạng

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\frac{n\pi x}{T}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{T}) \right)$$

với

$$a_0 = \frac{1}{T} \int\limits_{-T}^{T} f(x)dx.$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int\limits_{-T}^{T} f(x) \cos(\frac{n\pi x}{T})dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int\limits_{-T}^{T} f(x) \sin(\frac{n\pi x}{T})dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Khai triển Fourier của hàm tuần hoàn chu kì $2T$

Định lí

Cho hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tuần hoàn chu kì $2T$, liên tục từng khúc trên $(-T, T)$, f' tồn tại và liên tục từng khúc trên $(-T, T)$ với chuỗi Fourier $S(x)$.

- $$S(x) = \begin{cases} f(x) \text{ nếu } f \text{ liên tục tại } x \\ \frac{f^+(x)+f^-(x)}{2} \text{ nếu } f \text{ gián đoạn tại } x \end{cases}$$

- Nếu f chẵn thì
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(\frac{n\pi x}{T})dx,\ b_n = 0.$$

- Nếu f lẻ thì
$$a_n = 0,\ b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(\frac{n\pi x}{T})dx.$$

Ví dụ

Khai triển hàm tuần hoàn chu kì 2 sau $f(x) = |x|, x \in (-1, 1)$ thành chuỗi Fourier

Do hàm f chẵn, chuỗi Fourier của f có dạng

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right)$$

với

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 |x|dx, a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 |x| \cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx.$$

- $a_0 = 2\int_0^1 xdx = 1.$

Ví dụ

Khai triển hàm tuần hoàn chu kì 2 sau $f(x) = |x|, x \in (-1, 1)$ thành chuỗi Fourier

$$\begin{aligned} \int x\cos(n\pi x) &= \int x d\left(\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\right) \\ &= \frac{x}{n\pi}\sin(n\pi x) - \frac{1}{n\pi}\int \sin(n\pi x)dx \\ &= \frac{x}{n\pi}\sin(n\pi x) + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x) + C \end{aligned}$$

Với $g(x) = \frac{x}{n\pi}\sin(n\pi x) + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x) \Rightarrow g(1) = \frac{\cos(n\pi)}{n^2\pi^2}, g(0) = \frac{1}{n^2\pi^2}$.

$$a_n = 2(g(1) - g(0) = ((-1)^n - 1)\frac{2}{n^2\pi^2}.$$

$$\Rightarrow S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^2}.$$

Khai triển Fourier của hàm f trên (a, b)

Thác triển tuần hoàn

Cho hàm f xác định từng khúc trên (a, b). Hàm g là *thác triển tuần hoàn* của f nếu như:

- Chu kì $2T$ của g thoả mãn $2T > a - b$.
- Với mọi $x \in (a, b)$ mà $f(x)$ xác định, $g(x) = f(x)$.

Ví dụ. Thác triển $f(x)$ thành hàm tuần hoàn chu kì $b - a$

Đặt $\delta = b - a$. Ta sẽ dựng hàm g tuần hoàn chu kì δ như sau:

- Với $x \in (a, b) = (a, a + \delta), g(x) = f(x)$.
- Với $x \in (b, b + \delta) = (a + \delta, a + 2\delta), g(x) = f(x - \delta)$.
- Với $x \in (a + 2\delta, a + 3\delta), g(x) = f(x - 2\delta)$.
- Với $x \in (a - \delta, a), g(x) = f(x + \delta)$.

$$\boxed{\forall x \in (a + k\delta, a + (k + 1)\delta), g(x) = f(x - k\delta).}$$

Khai triển Fourier của hàm f trên (a, b)

Thác triển thành hàm tuần hoàn chẵn

Cho f xác định từng khúc trên $(0, a)$. Ta có thể thác triển hàm f thành hàm g tuần hoàn và chẵn như sau:

- Xét hàm $h(x) = \begin{cases} f(x), x \in (0, a) \\ f(-x), x \in (-a, 0) \end{cases}.$
- Thác triển h trên $(-a, a)$ thành hàm g tuần hoàn chu kì $2a$.

Thác triển thành hàm tuần hoàn lẻ

Cho f xác định từng khúc trên $(0, a)$. Ta có thể thác triển hàm f thành hàm g tuần hoàn và chẵn như sau:

- Xét hàm $h(x) = \begin{cases} f(x), x \in (0, a) \\ -f(-x), x \in (-a, 0) \end{cases}.$
- Thác triển h trên $(-a, a)$ thành hàm g tuần hoàn chu kì $2a$.

Khai triển Fourier của hàm f trên (a, b)

Khai triển hàm $f(x) = \cos(x), x \in (0, \pi)$ thành chuỗi Fourier của các hàm sin

Ta cần thác triển $f(x)$ thành một hàm tuần hoàn lẻ. Xét hàm

$$h(x) = \begin{cases} \cos(x), x \in (0, \pi) \\ -\cos(x), x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

Thác triển h thành hàm tuần hoàn chu kì 2π, chuỗi Fourier của h có dạng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ với

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos(x)\sin(nx)dx.$$

Khai triển Fourier của hàm f trên (a, b)

Khai triển hàm $f(x) = \cos(x), x \in (0, \pi)$ thành chuỗi Fourier của các hàm sin

- Với $n = 1$:

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin(2x) dx = 0.$$

- Với $n \neq 1$:

$$\begin{aligned} \int \cos(x) \sin(nx) dx &= \tfrac{1}{2} \int \left(\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)\right) dx \\ &= -\tfrac{1}{2} \left(\tfrac{1}{n+1} \cos((n+1)x) + \tfrac{1}{n-1} \cos((n-1)x) \right) + C. \end{aligned}$$

Khai triển Fourier của hàm f trên (a, b)

Khai triển hàm $f(x) = \cos(x), x \in (0, \pi)$ thành chuỗi Fourier của các hàm sin

Đặt $k(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}\cos((n+1)x) + \frac{1}{n-1}\cos((n-1)x)\right)$.

$$\Rightarrow k(\pi) = -\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1}\right) = \frac{n(-1)^n}{n^2-1},$$

$$k(0) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{-n}{n^2-1}.$$

Khai triển Fourier của hàm f trên (a, b)

Khai triển hàm $f(x) = \cos(x), x \in (0, \pi)$ thành chuỗi Fourier của các hàm sin

$$\Rightarrow b_n = \frac{2}{\pi}(g(\pi) - g(0)) = ((-1)^n + 1)\frac{2n}{\pi(n^2 - 1)}.$$

Do $(-1)^n + 1 = \begin{cases} 0, x = 2k+1 \\ 2, x = 2k \end{cases} \quad \Rightarrow b_n = \begin{cases} 0, n = 2k+1 \\ \frac{8k}{\pi(4k^2-1)}, n = 2k \end{cases}$

$$\boxed{\cos(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n + 1)2n}{\pi(n^2 - 1)} \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{\pi(4n^2 - 1)} \sin(2nx), x \in (0, \pi).}$$