Chương 2
TÍCH PHÂN BỘI

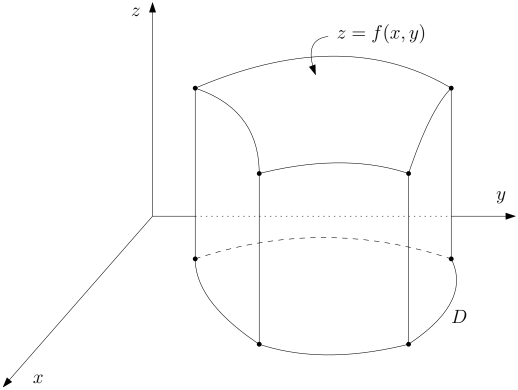
BỘ MÔN TOÁN CƠ BẢN

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

Nội dung

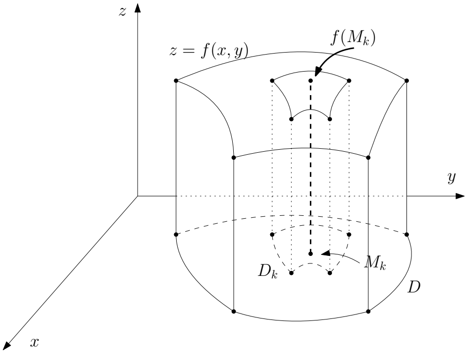
Cho hàm hai biến $z = f(x, y)$ xác định và liên tục trên miền D đóng và bị chặn với biên ∂D trong mặt phẳng Oxy. Giả sử $f(x, y) \geq 0$. Gọi E là vật thể hình trụ giới hạn bởi mặt phẳng Oxy, mặt $z = f(x, y)$ và mặt trụ có đường sinh song song với Oz tựa trên ∂D, tức là,

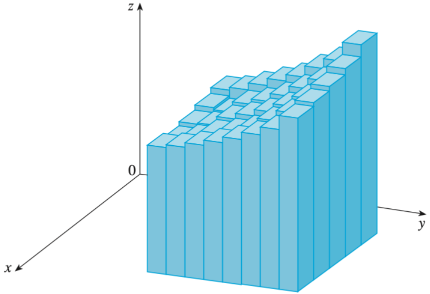
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in D\}.$$



Bài toán: Hãy tìm thể tích $V(E)$ của vật thể E.

Xấp xỉ vật thể thành các hình trụ con





Phân hoạch miền D một cách tùy ý thành các miền con $D_1, D_2, \ldots, D_n$ sao cho các miền D_k không giao nhau ngoại trừ biên của chúng. Gọi ΔS_k là diện tích của miền D_k. Trong mỗi miền D_k, lấy điểm M_k tùy ý. Khi đó,

$$V(E) \approx \sum_{k=1}^{n} f(M_k) \cdot \Delta S_k.$$

Định nghĩa tích phân kép

Cho $z = f(x, y)$ là một hàm hai biến xác định trên miền đóng và bị chặn D.

- Phân hoạch miền D một cách tùy ý thành các miền con $D_1, D_2, \dots, D_n$ sao cho các D_k không giao nhau ngoại trừ biên của chúng.
- Gọi ΔS_k là diện tích của miền con D_k.
- Đặt $d(D_k)$ là khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm trong D_k, và $d = \max\limits_{1 \le k \le n} \{d(D_k)\}$.
- Lấy M_k là điểm tùy ý trong D_k.
- Tổng tích phân của $f(x, y)$ trên miền D là $I_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(M_k) \cdot \Delta S_k$.

Nếu $\lim\limits_{d \to 0} I_n$ tồn tại không phụ thuộc vào cách phân hoạch miền D và cách chọn các điểm M_k trong mỗi miền D_k, thì giới hạn này được gọi là tích phân kép của hàm f trên miền D. Kí hiệu là

$$\iint\limits_D f(x, y) dS.$$

Lúc đó, ta nói hàm $f(x, y)$ khả tích trên miền D.

Định nghĩa tích phân kép

Giả sử $f(x, y)$ khả tích trên miền D. Khi đó, việc tính tích phân kép không phụ thuộc cách phân hoạch miền D. Do đó, ta có thể phân hoạch miền D theo các đường song song với các trục tọa độ. Lúc đó, $\Delta S_k = \Delta x \cdot \Delta y$ và ta có thể viết như sau:

$$\iint\limits_D f(x, y) dS = \iint\limits_D f(x, y) dx dy.$$

Hệ quả 1

Nếu $f(x,y) \geq 0$ *liên tục trên miền* D, *thì thể tích* V *của vật thể hình trụ giới hạn bởi mặt phẳng* Oxy, *mặt* $z = f(x,y)$ *và mặt trụ có đường sinh song song với* Oz *tựa trên* ∂D, *được tính theo công thức*

$$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Hệ quả 1

Nếu $f(x,y) \geq 0$ *liên tục trên miền* D, *thì thể tích* V *của vật thể hình trụ giới hạn bởi mặt phẳng* Oxy, *mặt* $z = f(x,y)$ *và mặt trụ có đường sinh song song với* Oz *tựa trên* ∂D, *được tính theo công thức*

$$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Ví dụ. Cho $D = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$. Hãy tính tích phân $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{1-x^2}dxdy$.

Hệ quả 1

Nếu $f(x,y) \geq 0$ liên tục trên miền D, thì thể tích V của vật thể hình trụ giới hạn bởi mặt phẳng Oxy, mặt $z = f(x,y)$ và mặt trụ có đường sinh song song với Oz tựa trên ∂D, được tính theo công thức

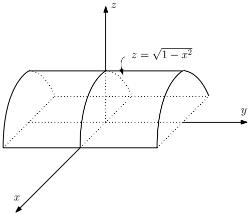
$$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Ví dụ. Cho $D = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$. Hãy tính tích phân $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2}dxdy$.

Lời giải.

Theo Hệ quả trên, tích phân cần tìm là thể tích V của vật thể nằm phía dưới hàm không âm $z = f(x,y) = \sqrt{1-x^2}$ và nằm trên hình chữ nhật $D = [-1,1] \times [-2,2]$. Do đó, vật thể này là nửa hình trụ như hình vẽ và vì vậy

$$V = 2\pi(\text{đvtt}).$$



Các tính chất của tích phân kép

Cho $f(x,y), g(x,y)$ là các hàm khả tích trên miền $D \subseteq \mathbb{R}^2$, và c, m, M là các số thực. Khi đó,

1. $\displaystyle\iint\limits_D [f(x,y)+g(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D g(x,y)dxdy;$
2. $\displaystyle\iint\limits_D c\cdot f(x,y)dxdy = c\iint\limits_D f(x,y)dxdy;$
3. Nếu $D = D_1 \cup D_2$, trong đó D_1 và D_2 không giao nhau ngoại trừ biên của chúng, thì
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy;$$
4. Nếu $f(x,y) \geq g(x,y), \forall (x,y)\in D$, thì $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$

Định lý 2 (Định lý Fubini)

Nếu f liên tục trên $R = [a, b] \times [c, d]$, thì

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Kí hiệu:

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy := \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx \quad \text{và} \quad \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx := \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Định lý Fubini

Định lý 2 (Định lý Fubini)

Nếu f liên tục trên $R = [a, b] \times [c, d]$, thì

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Kí hiệu:

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy := \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx \quad \text{và} \quad \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx := \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Đặc biệt, nếu $f(x, y)$ có thể phân tích thành tích của hàm một biến của x và hàm một biến của y, thì tích phân kép của f có thể viết thành tích của các tích phân sau:

$$\boxed{\iint\limits_R g(x)h(y)dxdy = \left(\int\limits_a^b g(x)dx \right) \cdot \left(\int\limits_c^d h(y)dy \right).}$$

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tính $\iint\limits_R (x - 3y^2)dxdy$, trong đó $R = [0, 2] \times [1, 2]$.

Ví dụ 1. Tính $\displaystyle\iint\limits_R (x-3y^2)dxdy$, trong đó $R=[0,2]\times[1,2]$.

Lời giải. Theo Định lý Fubini, ta có thể viết lại tích phân đã cho như sau:

$$\begin{aligned}\iint\limits_R (x-3y^2)dxdy &= \int_0^2 dx\int_1^2 (x-3y^2)dy = \int_0^2 \left[xy-y^3\right]_{y=1}^{y=2} dx\\ &= \int_0^2 (x-7)dx = -12.\end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tìm thể tích của vật thể S bị chặn bởi elliptic paraboloid $x^2 + 2y^2 + z = 16$, các mặt phẳng $x = 2$ và $y = 2$ và ba mặt phẳng toạ độ.

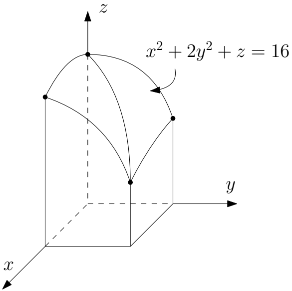
Các ví dụ

Ví dụ 2. Tìm thể tích của vật thể S bị chặn bởi elliptic paraboloid $x^2 + 2y^2 + z = 16$, các mặt phẳng $x = 2$ và $y = 2$ và ba mặt phẳng toạ độ.

Lời giải.

Thể tích cần tìm là

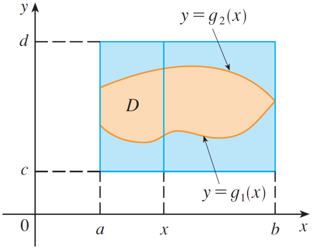
$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_{[0,2]\times[0,2]} (16 - x^2 - 2y^2)dxdy \\ &= \int_0^2 dx \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2)dy \\ &= 48(\text{đvtt}). \end{aligned}$$



Một miền phẳng D được gọi là kiểu 1 nếu nó nằm giữa hai đồ thị của các hàm liên tục của x, tức là,

$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\},$$

trong đó g_1 và g_2 liên tục trên $[a,b]$.



Định lý 3

Nếu $f(x,y)$ khả tích trên miền kiểu 1 ở trên thì

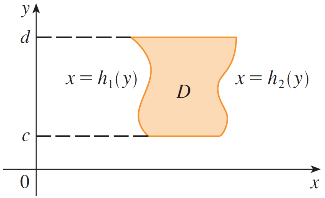
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy.$$

Miền phẳng kiểu 2

Một miền phẳng kiểu 2 là

$$D = \{(x,y) \mid c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y)\},$$

trong đó h_1 và h_2 là các hàm liên tục trên $[c,d]$.



Định lý 4

Nếu $f(x,y)$ khả tích trên miền kiểu 2 ở trên thì

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx.$$

Các ví dụ

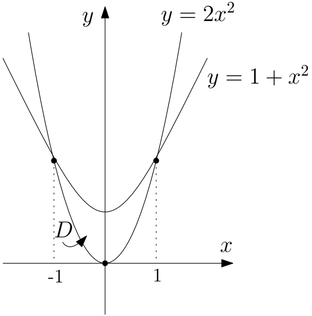
Ví dụ 1. Tính $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, trong đó D là miền bị chặn bởi các parabol $y = 2x^2$ và $y = 1 + x^2$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tính $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, trong đó D là miền bị chặn bởi các parabol $y = 2x^2$ và $y = 1 + x^2$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D (x+2y)dxdy &= \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{2x^2}^{1+x^2} (x+2y)dy \\
&= \int\limits_{-1}^{1} \left[x(1+x^2) - 2x^3 + (1+x^2)^2 - 4x^4\right] dx \\
&= 2\int\limits_{0}^{1} \left[(1+x^2)^2 - 4x^4\right] dx = \frac{32}{15}.
\end{aligned}$$

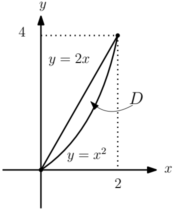


Ví dụ 2. Tìm thể tích của vật thể nằm dưới paraboloid $z = x^2 + y^2$ và trên miền D trong mặt phẳng Oxy, trong đó D bị chặn bởi đường thẳng $y = 2x$ và parabol $y = x^2$.

Ví dụ 2. Tìm thể tích của vật thể nằm dưới paraboloid $z = x^2 + y^2$ và trên miền D trong mặt phẳng Oxy, trong đó D bị chặn bởi đường thẳng $y = 2x$ và parabol $y = x^2$.

Lời giải. Thể tích của vật thể cần tìm là

$$V = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy = \int_0^2 dx \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2)dy = \frac{216}{35}(\text{đvtt}).$$

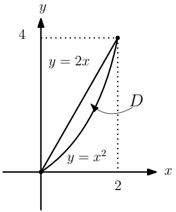


Các ví dụ

Ví dụ 2. Tìm thể tích của vật thể nằm dưới paraboloid $z = x^2 + y^2$ và trên miền D trong mặt phẳng Oxy, trong đó D bị chặn bởi đường thẳng $y = 2x$ và parabol $y = x^2$.

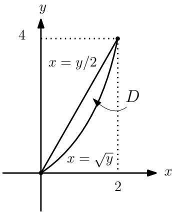
Lời giải. Thể tích của vật thể cần tìm là

$$V = \iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^2 dx \int_{x^2}^{2x} (x^2+y^2)dy = \frac{216}{35}(\text{đvtt}).$$



Cách khác.

$$V = \iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (x^2+y^2)dx = \frac{216}{35}(\text{đvtt}).$$



Các ví dụ

Ví dụ 3. Đổi thứ tự tính tích phân

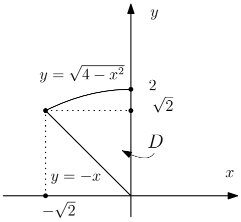
$$I = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{0} dx \int\limits_{-x}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy.$$

Ví dụ 3. Đổi thứ tự tính tích phân

$$I = \int_{-\sqrt{2}}^{0} dx \int_{-x}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy.$$

Lời giải. Đặt

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) : -\sqrt{2} \le x \le 0, -x \le y \le \sqrt{4-x^2}\} \\ &= \{(x,y) : 0 \le y \le \sqrt{2}, -y \le x \le 0\} \cup \{(x,y) : \sqrt{2} \le y \le 2, -\sqrt{4-y^2} \le x \le 0\}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} I &= \iint_D f(x,y)dxdy \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} dy \int_{-y}^{0} f(x,y)dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} f(x,y)dx. \end{aligned}$$

Tính tích phân dạng: $\iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$

Phương pháp giải:

B1 Chia miền $D = D^+ \cup D^-$, với $D^+ = D \cap \{(x,y) : f(x,y) \geq 0\}$ và $D^- = D \cap \{(x,y) : f(x,y) \leq 0\}$.

B2 Áp dụng công thức cộng tính, $\iint\limits_D |f(x,y)|dxdy = \iint\limits_{D^+} f(x,y)dxdy - \iint\limits_{D^-} f(x,y)dxdy$.

Tính tích phân dạng: $\iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$

Phương pháp giải:

- **B1** Chia miền $D = D^+ \cup D^-$, với $D^+ = D \cap \{(x,y) : f(x,y) \geq 0\}$ và $D^- = D \cap \{(x,y) : f(x,y) \leq 0\}$.
- **B2** Áp dụng công thức cộng tính, $\iint\limits_D |f(x,y)|dxdy = \iint\limits_{D^+} f(x,y)dxdy - \iint\limits_{D^-} f(x,y)dxdy$.

Ví dụ 3. Tính $I = \iint\limits_D |x+y|dxdy$, trong đó $D = \{(x,y) \mid |x| \leq 1 \text{ và } |y| \leq 1\}$.

Tính tích phân dạng: $\iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$

Phương pháp giải:

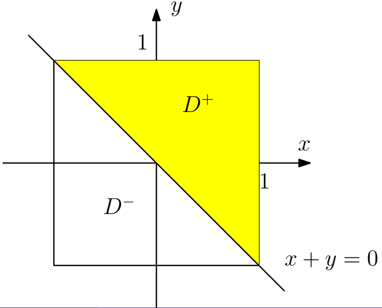
B1 Chia miền $D = D^+ \cup D^-$, với $D^+ = D \cap \{(x,y) : f(x,y) \geq 0\}$ và $D^- = D \cap \{(x,y) : f(x,y) \leq 0\}$.

B2 Áp dụng công thức cộng tính, $\iint\limits_D |f(x,y)|dxdy = \iint\limits_{D^+} f(x,y)dxdy - \iint\limits_{D^-} f(x,y)dxdy$.

Ví dụ 3. Tính $I = \iint\limits_D |x+y|dxdy$, trong đó $D = \{(x,y) \mid |x| \leq 1 \text{ và } |y| \leq 1\}$.

Lời giải.

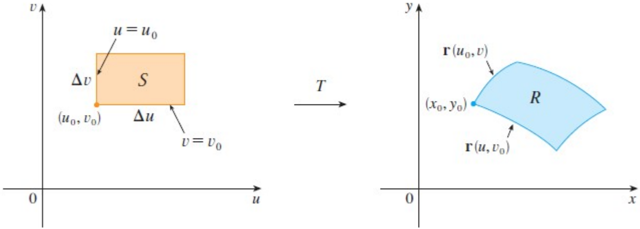
$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{D^+} (x+y)dxdy - \iint\limits_{D^-} (x+y)dxdy \\ &= \int_{-1}^{1} dx \int_{-x}^{1} (x+y)dy - \int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{-y} (x+y)dx \\ &= \frac{4}{3} - (-\frac{4}{3}) = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$



Nội dung

Một phép biến đổi T từ mặt phẳng $O'uv$ đến mặt phẳng Oxy là một ánh xạ xác định bởi

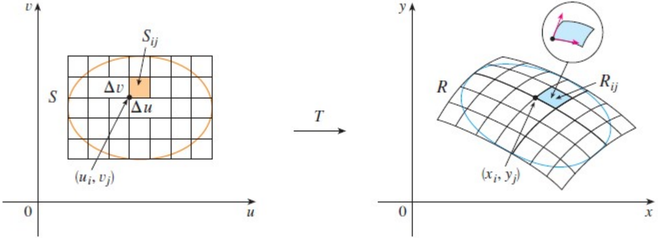
$$T(u,v) = (x(u,v), y(u,v)).$$



$$\Delta x \Delta y \approx \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \Delta u \Delta v.$$

Nếu các hàm $x(u,v)$, $y(u,v)$ tồn tại các đạo hàm riêng, thì định thức Jacobi của phép biến đổi T là:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}.$$



Chú ý 5

Nếu $J \neq 0$ thì

$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}.$$

Sơ lược chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} dx &= x'_u du + x'_v dv = x'_u(u'_x dx + u'_y dy) + x'_v(v'_x dx + v'_y dy) \\ &= (x'_u u'_x + x'_v v'_x)dx + (x'_u u'_y + x'_v v'_y)dy. \end{aligned}$$

Suy ra $x'_u u'_x + x'_v v'_x = 1$ và $x'_u u'_y + x'_v v'_y = 0$. Tương tự, ta có $y'_u u'_x + y'_v v'_x = 0$ và $y'_u u'_y + y'_v v'_y = 1$. Đặt $A = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}$. Do đó, $AB = \mathbb{I}_2$. Vì vậy, $|B| = \dfrac{1}{|A|}$.

Đổi biến trong tích phân kép

Xét phép đổi biến $T : S \subseteq O'uv \to D \subseteq Oxy$ xác định bởi $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ thoả mãn:

1. T là song ánh,
2. $x(u,v)$ và $y(u,v)$ là các hàm liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục,
3. Định thức Jacobi của T khác 0.

Giả sử f là hàm liên tục trên D. Khi đó, công thức đổi biến trong tích phân kép là:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_S f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |J|\, dudv.$$

Xét phép đổi biến $T : S \subseteq O'uv \to D \subseteq Oxy$ xác định bởi $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ thoả mãn:

1. T là song ánh,
2. $x(u,v)$ và $y(u,v)$ là các hàm liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục,
3. Định thức Jacobi của T khác 0.

Giả sử f là hàm liên tục trên D. Khi đó, công thức đổi biến trong tích phân kép là:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_S f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |J|\, dudv.$$

Nhận xét: Trong thực hành tính tích phân kép, nếu miền $D \subseteq Oxy$ phức tạp thì có thể sử dụng phép biến đổi T để đưa về miền $S \subseteq O'uv$ đơn giản hơn.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tính tích phân $I = \iint\limits_D (x+y)dxdy$, trong đó D là miền xác định bởi $1 \le x+y \le 3$, $x \le y \le 3x$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tính tích phân $I = \iint\limits_D (x+y)dxdy$, trong đó D là miền xác định bởi $1 \le x+y \le 3$, $x \le y \le 3x$.

Lời giải. Đặt $u = x+y$ và $v = \dfrac{y}{x}$. Suy ra $x = \dfrac{u}{1+v}$ và $y = \dfrac{uv}{1+v}$. Do đó, $D: 1 \le u \le 3, 1 \le v \le 3$ và định thức Jacobi của phép biến đổi này là $J = \dfrac{u}{(1+v)^2}$. Vì vậy

$$I = \int_1^3 du \int_1^3 \frac{u^2}{(1+v)^2} dv = \int_1^3 u^2 du \int_1^3 \frac{1}{(1+v)^2} dv = \frac{26}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{13}{6}.$$

Các ví dụ

Ví dụ 2. Tính tích phân

$$\iint\limits_{R} e^{\frac{x+y}{x-y}}\,dxdy,$$

trong đó R là miền hình thang có các đỉnh $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$, $(0,-1)$.

Ví dụ 2. Tính tích phân

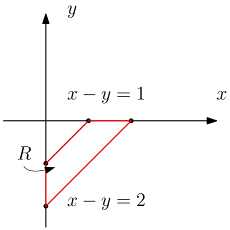
$$\iint\limits_R e^{\frac{x+y}{x-y}}\,dxdy,$$

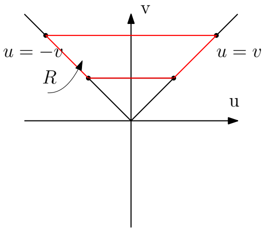
trong đó R là miền hình thang có các đỉnh $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$, $(0,-1)$.

Lời giải. Đặt $u = x+y$ và $v = x-y$.

Khi đó $R: 1 \le v \le 2, -v \le u \le v$ và $J = \dfrac{1}{2}$. Vì vậy

$$\iint\limits_R e^{\frac{x+y}{x-y}}\,dxdy = \int_1^2 dv \int_{-v}^{v} \frac{e^{\frac{u}{v}}}{2} du = \frac{3}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right).$$





Tích phân kép trên miền đối xứng

Kí hiệu $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Mệnh đề 6

1. *Nếu D là miền đối xứng qua trục Ox, thì*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \begin{cases} 0 & \text{nếu } f(x,-y) = -f(x,y), \forall (x,y) \in D, \\ 2 \displaystyle\iint\limits_{D\cap(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{\geq 0})} f(x,y)dxdy & \text{nếu } f(x,-y) = f(x,y), \forall (x,y) \in D. \end{cases}$$

2. *Nếu D là miền đối xứng qua trục Oy, thì*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \begin{cases} 0 & \text{nếu } f(-x,y) = -f(x,y), \forall (x,y) \in D, \\ 2 \displaystyle\iint\limits_{D\cap(\mathbb{R}_{\geq 0}\times\mathbb{R})} f(x,y)dxdy & \text{nếu } f(-x,y) = f(x,y), \forall (x,y) \in D. \end{cases}$$

Gợi ý chứng minh. Áp dụng công thức đổi biến với: (1) $u = x$ và $v = -y$. (2) $u = -x$ và $v = y$.

Ví dụ

Ví dụ. Tính tích phân

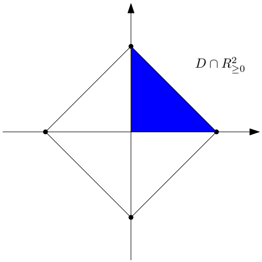
$$I = \iint\limits_{|x|+|y|\leq 1} (|x| + |y|)dxdy.$$

Ví dụ. Tính tích phân

$$I = \iint\limits_{|x|+|y|\leq 1} (|x|+|y|)dxdy.$$

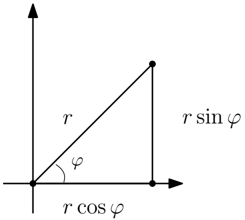
Lời giải. Vì miền $D : |x|+|y| \leq 1$ đối xứng qua trục Ox và Oy, và hàm số $f(x,y) = |x|+|y|$ là hàm chẵn đối với biến x và y. Do đó,

$$\begin{aligned} I &= 4 \iint\limits_{D\cap\mathbb{R}^2_{\geq 0}} (x+y)dxdy \\ &= 4\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y)dy = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$



Nội dung

Tích phân kép trong toạ độ cực



Mối liên hệ giữa toạ độ cực (r, φ) và toạ độ Đề các (x, y):

$$\boxed{x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi}$$

$$(r \geq 0 \text{ và } 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

Khi đó, định thức Jacobi của phép biến đổi này là

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Định lý 7

Cho f liên tục trên miền $D \subseteq Oxy$. Nếu $D = \{(r,\varphi) \mid a \leq r \leq b, \alpha \leq \varphi \leq \beta\}$ được biểu diễn trong tọa độ cực, thì

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dr \int\limits_\alpha^\beta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r d\varphi.$$

Ví dụ

Ví dụ. Tìm thể tích của vật thể bị chặn bởi mặt phẳng $z = 0$ và paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$.

Ví dụ

Ví dụ. Tìm thể tích của vật thể bị chặn bởi mặt phẳng $z = 0$ và paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$.

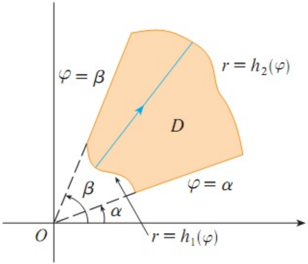
Lời giải. Thể tích cần tìm là

$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} (1 - x^2 - y^2)dxdy = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} (1 - r^2) \cdot r d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^1 (1 - r^2) r dr = \frac{\pi}{2} (\text{đvtt}). \end{aligned}$$

Định lý 8

Nếu f *liên tục trên miền* $D = \{(r, \varphi) \mid \alpha \leq \varphi \leq \beta, h_1(\varphi) \leq r \leq h_2(\varphi)\}$, *thì*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{h_1(\varphi)}^{h_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot rdr.$$



Các ví dụ

Ví dụ 1. Tính $I = \iint\limits_D (4x^2+1)dxdy$, với $D : (x-1)^2 + y^2 \leq 1$.

Ví dụ 1. Tính $I = \iint\limits_D (4x^2+1)dxdy$, với $D : (x-1)^2 + y^2 \leq 1$.

Lời giải. Miền D trong tọa độ cực xác định bởi $r \leq 2\cos\varphi$, với $-\dfrac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$. Do đó,

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} (4r^2\cos^2\varphi + 1) r dr = 6\pi.$$

Ví dụ 1. Tính $I = \iint\limits_D (4x^2+1)dxdy$, với $D : (x-1)^2 + y^2 \leq 1$.

Lời giải. Miền D trong tọa độ cực xác định bởi $r \leq 2\cos\varphi$, với $-\dfrac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$. Do đó,

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} (4r^2\cos^2\varphi + 1)rdr = 6\pi.$$

Cách khác. Đặt $x = 1 + r\cos\varphi$ và $y = r\sin\varphi$. Khi đó,

$$I = \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^{2\pi} \left[4(1+r\cos\varphi)^2 + 1\right] rd\varphi = 6\pi.$$

Các ví dụ

Ví dụ 2. Tìm thể tích của vật thể nằm dưới paraboloid $z = x^2 + y^2$, nằm trên mặt phẳng Oxy, và nằm trong hình trụ $x^2 + y^2 = 2x$.

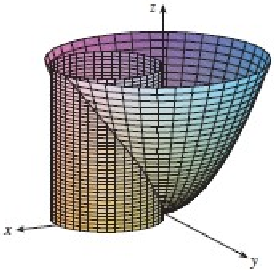
Ví dụ 2. Tìm thể tích của vật thể nằm dưới paraboloid $z = x^2 + y^2$, nằm trên mặt phẳng Oxy, và nằm trong hình trụ $x^2 + y^2 = 2x$.

Lời giải. $V = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$, trong đó

$$D = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\} = \{(r, \varphi) \mid -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2\cos\varphi\}.$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_{x^2+y^2 \leq 2x} (x^2 + y^2)dxdy \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^3 dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\varphi d\varphi \\ &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi = \frac{3\pi}{2} (\text{đvtt}). \end{aligned}$$



Nội dung

Diện tích hình phẳng

Diện tích của miền D được cho bởi công thức

$$\boxed{S_D = \iint\limits_D 1 \cdot dxdy.}$$

Ví dụ 1. Tính diện tích của miền D xác định bởi $2y \leq x^2 + y^2 \leq 4$ và $0 \leq y \leq x$.

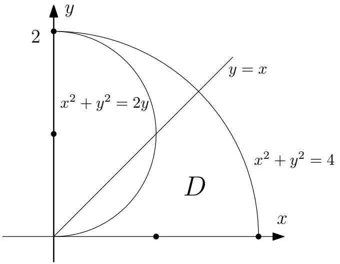
Diện tích của miền D được cho bởi công thức

$$\boxed{S_D = \iint\limits_D 1 \cdot dxdy.}$$

Ví dụ 1. Tính diện tích của miền D xác định bởi $2y \leq x^2 + y^2 \leq 4$ và $0 \leq y \leq x$.

Lời giải. Đặt $x = r\cos\varphi$ và $y = r\sin\varphi$. Ta có $J = r$ và

$$\begin{aligned} S_D &= \iint\limits_D 1 \cdot dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{2\sin\varphi}^{2} r dr \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (2 - 2\sin^2\varphi) d\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \text{(đvdt)}. \end{aligned}$$



Ví dụ 2. Tính tích phân

$$I = \iint\limits_D (2 - 6y^4x^3 + e^{x^2}\sin^3 y)dxdy,$$

trong đó $D : x^2 + y^2 \leq 4.$

Ví dụ 2. Tính tích phân

$$I = \iint\limits_D (2 - 6y^4x^3 + e^{x^2}\sin^3 y)dxdy,$$

trong đó $D : x^2 + y^2 \leq 4$.

Lời giải. Vì miền $D : x^2 + y^2 \leq 4$ đối xứng qua trục Ox và Oy; hàm số $f(x,y) = 6y^4x^3$ là hàm lẻ theo biến x và $g(x,y) = e^{x^2}\sin^3 y$ là hàm lẻ theo biến y, nên $\iint\limits_D 6y^4x^3dxdy = \iint\limits_D e^{x^2}\sin^3 ydxdy = 0$. Do đó,

$$I = \iint\limits_D 2dxdy = 2 \cdot S_D = 8\pi.$$

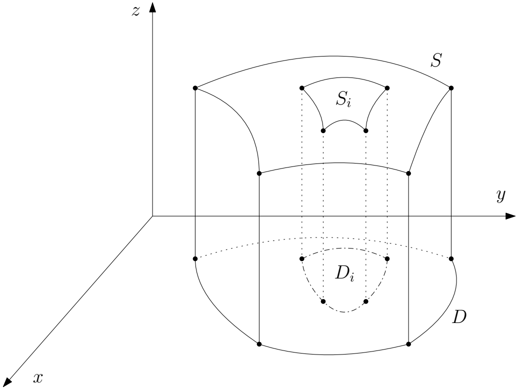
Nội dung

Diện tích mặt cong

Cho $S: z = f(x, y)$ là một mặt xác định trên miền D, trong đó f có các đạo hàm riêng liên tục.

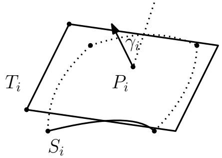
Chia miền D thành n miền nhỏ $D_1, \ldots, D_n$. Gọi S_i là các mảnh của mặt S xác định trên D_i. Lấy một điểm P_i tùy ý trên mảnh S_i. Gọi T_i là tiếp diện tại điểm P_i của mặt S xác định trên miền D_i. Kí hiệu ΔT_i và ΔS_i lần lượt là diện tích của T_i và S_i. Khi đó

$$\Delta T_i \approx \Delta S_i.$$



Diện tích mặt cong

Gọi γ_i là góc giữa pháp tuyến của mặt S tại P_i và trục Oz. Ta có $\Delta S_i = \Delta T_i \cdot \cos\gamma_i$. Gọi M_i là hình chiếu của P_i xuống mặt phẳng Oxy.



$$\Delta T_i = \frac{\Delta S_i}{\cos\gamma_i} = \sqrt{1 + (z'_x(M_i))^2 + (z'_y(M_i))^2}\ \Delta S_i.$$

Vì vậy, diện tích mặt cong S xấp xỉ

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta T_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (z'_x(M_i))^2 + (z'_y(M_i))^2}\ \Delta S_i.$$

Khi $n \to \infty$ sao cho $\max d_i \to 0$, trong đó d_i là đường kính của S_i, giới hạn này nếu tồn tại chính là $\iint\limits_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dxdy$. Từ đó, ta có được công thức tính diện tích của mặt cong S như sau:

$$A(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy.$$

Ví dụ 1. Tính diện tích của phần mặt cong $z = x^2 + 2y$ nằm trên miền tam giác S trong mặt phẳng Oxy với các đỉnh $(0;0), (1;0)$ và $(1;1)$.

Ví dụ 1. Tính diện tích của phần mặt cong $z = x^2 + 2y$ nằm trên miền tam giác S trong mặt phẳng Oxy với các đỉnh $(0;0), (1;0)$ và $(1;1)$.

Lời giải. Diện tích cần tìm là

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint\limits_T \sqrt{4x^2+4+1}dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \sqrt{5+4x^2}dy \\ &= \int\limits_0^1 x\sqrt{5+4x^2}dx = \frac{9}{4} - \frac{5\sqrt{5}}{12} \quad \text{(đvdt)}. \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tìm diện tích của phần paraboloid $z = x^2 + y^2$ nằm dưới mặt phẳng $z = 9$.

Các ví dụ

Ví dụ 2. Tìm diện tích của phần paraboloid $z = x^2 + y^2$ nằm dưới mặt phẳng $z = 9$.

Lời giải. Diện tích cần tìm là

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 9} \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \sqrt{1+4r^2}\cdot rdr \\ &= 2\pi \int\limits_0^3 \sqrt{1+4r^2}\cdot rdr = \frac{\pi}{6}(37\sqrt{37}-1) \quad \text{(đvdt)}. \end{aligned}$$

Bài tập về nhà

1. Tính diện tích của miền phẳng D được cho bởi $(x^2+y^2)^2 \leq 2x^2y, x \geq 0$.
2. Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt cong $y = x^2$, $x = y^2$, $z = y^2$ và mặt phẳng Oxy.
3. Tính diện tích phần mặt cong $x - 2y^2 + 2z^2 = 0$ nằm trong mặt trụ $y^2 + z^2 = 1$.
4. Đổi thứ tự lấy tích phân $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$.
5. Tính tích phân $\iint_D 3xdxdy$, trong đó D là miền $0 \leq x \leq 2, 1 \leq x+y \leq 3$.
6. Tính tích phân $\iint_D (x-2y)dxdy$, trong đó D giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 1$ và $y = 0$.
7. Tính $\iint_D (x^2+4y^2)dxdy$, với $D : x^2+y^2 \leq 1$.
8. Tính $\iint_D 4ydxdy$, với D là miền xác định bởi $x^2+y^2 \leq 1, x+y \geq 1$.
9. Tính tích phân $\iint_D |\cos(x+y)|dxdy$, với $D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.
10. Sử dụng tích phân kép để tìm diện tích của miền bị chặn bởi một lá của hình hoa hồng có bốn lá: $r = \cos 2\varphi$.

Nội dung

Định nghĩa tích phân bội ba

Cho hàm ba biến $z = f(x, y, z)$ trên miền V đóng và bị chặn trong không gian $Oxyz$.

- Chia miền V một cách tùy ý thành n khối $V_1, \dots, V_n$ sao cho các V_k không giao nhau ngoại trừ biên.
- Gọi ΔV_k là thể tích của khối V_k.
- Đặt $d(V_k)$ là khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm trong khối V_k, và đặt $d = \max\limits_{1 \le k \le n} d(V_k)$.
- Lấy điểm M_k tùy ý trong mỗi khối V_k.
- Tổng tích phân của f trên miền V là $I_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(M_k) \cdot \Delta V_k$.

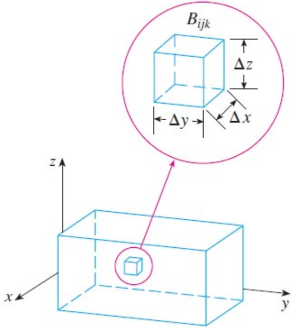
Nếu $\lim\limits_{d \to 0} I_n$ tồn tại không phụ thuộc vào cách phân hoạch miền V và cách chọn các điểm M_k trong mỗi khối V_k, thì giới hạn này được gọi là tích phân bội ba của hàm f trên miền V, kí hiệu

$$\iiint\limits_V f(x, y, z) dV.$$

Lúc đó, ta nói hàm $f(x, y, z)$ khả tích trên miền V.

Giả sử hàm $f(x,y,z)$ khả tích trên miền V. Khi đó, việc tính tích phân bội ba không phụ thuộc cách phân hoạch miền V. Do đó, ta có thể phân hoạch miền V theo họ các mặt phẳng song song với các mặt phẳng tọa độ. Lúc đó, $\Delta V_k = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ và ta có thể viết như sau:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz.$$



Định lý Fubini

Nếu f liên tục trên hình hộp $B = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$, thì f khả tích trên B và

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz &= \int\limits_r^s \left[\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y,z)dx \right) dy \right] dz =: \int\limits_r^s dz \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y,z)dx \\
&= \int\limits_r^s \left[\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y,z)dy \right) dx \right] dz =: \int\limits_r^s dz \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y,z)dy \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

Nếu f liên tục trên hình hộp $B = [a,b]\times[c,d]\times[r,s]$, thì f khả tích trên B và

$$\begin{aligned}\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz &= \int\limits_r^s \left[\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y,z)dx\right)dy\right]dz =: \int\limits_r^s dz\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y,z)dx \\ &= \int\limits_r^s \left[\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y,z)dy\right)dx\right]dz =: \int\limits_r^s dz\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y,z)dy \\ &= \cdots\end{aligned}$$

Chú ý: Tích phân bội ba trên hình hộp có thể được tính theo sáu thứ tự khác nhau.

Hệ quả của Định lý Fubini

Đặc biệt, nếu $f(x, y, z)$ có thể phân tích thành tích của các hàm một biến, tức là $f(x, y, z) = g(x)h(y)k(z)$, thì tích phân bội ba trên miền $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ có thể viết thành tích của các tích phân xác định như sau:

$$\iiint\limits_{B} f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{B} g(x)h(y)k(z)dxdydz = \left(\int\limits_{a}^{b} g(x)dx\right) \cdot \left(\int\limits_{c}^{d} h(y)dy\right) \cdot \left(\int\limits_{r}^{s} k(z)dz\right).$$

Hệ quả của Định lý Fubini

Đặc biệt, nếu $f(x,y,z)$ có thể phân tích thành tích của các hàm một biến, tức là $f(x,y,z) = g(x)h(y)k(z)$, thì tích phân bội ba trên miền $B = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$ có thể viết thành tích của các tích phân xác định như sau:

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_B g(x)h(y)k(z)dxdydz = \left(\int\limits_a^b g(x)dx\right) \cdot \left(\int\limits_c^d h(y)dy\right) \cdot \left(\int\limits_r^s k(z)dz\right).$$

Ví dụ. Tính tích phân bội ba $\iiint_B xyz^2 dxdydz$, trong đó B là hình hộp chữ nhật cho bởi

$$B = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 2, 0 \le z \le 3\}.$$

Đặc biệt, nếu $f(x,y,z)$ có thể phân tích thành tích của các hàm một biến, tức là $f(x,y,z) = g(x)h(y)k(z)$, thì tích phân bội ba trên miền $B = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$ có thể viết thành tích của các tích phân xác định như sau:

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_B g(x)h(y)k(z)dxdydz = \left(\int\limits_a^b g(x)dx\right) \cdot \left(\int\limits_c^d h(y)dy\right) \cdot \left(\int\limits_r^s k(z)dz\right).$$

Ví dụ. Tính tích phân bội ba $\iiint_B xyz^2dxdydz$, trong đó B là hình hộp chữ nhật cho bởi

$$B = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 2, 0 \le z \le 3\}.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned}\iiint\limits_B xyz^2dxdydz &= \int\limits_0^1 xdx \cdot \int\limits_{-1}^2 ydy \cdot \int\limits_0^3 z^2dz \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^2 \cdot \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 9 = \frac{27}{4}.\end{aligned}$$

Các tính chất

Cho $f(x,y,z)$ và $g(x,y,z)$ là các hàm khả tích trong miền $E \subseteq \mathbb{R}^3$.

1. (Tính tuyến tính) Với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, hàm $\alpha f + \beta g$ khả tích trên E và ta có

$$\iiint\limits_E [\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z)]dxdydz = \alpha \iiint\limits_E f(x,y,z)dxdydz + \beta \iiint\limits_E g(x,y,z)dxdydz.$$

2. (Tính cộng tính) Nếu $E = E_1 \cup E_2$, với E_1 và E_2 không giao nhau ngoại trừ trên biên, thì

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{E_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{E_2} f(x,y,z)dxdydz.$$

3. (Tính bảo toàn thứ tự) Nếu $f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$ trên E thì

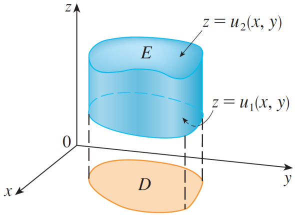
$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dxdydz \leq \iiint\limits_E g(x,y,z)dxdydz.$$

Đặc biệt, $|f|$ cũng khả tích trên E và $\left|\iiint_E f(x,y,z)dxdydz\right| \leq \iiint_E |f(x,y,z)|dxdydz.$

Cách tính tích phân bội ba

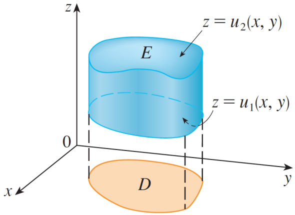
Nếu $E = \left\{(x,y,z) \mid \begin{array}{l} (x,y) \in D, \\ u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y) \end{array}\right\}$, trong đó D là hình chiếu của E lên mặt phẳng Oxy, thì

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy.$$



Nếu $E = \left\{ (x,y,z) \mid \begin{array}{l} (x,y) \in D, \\ u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y) \end{array} \right\}$, trong đó D là hình chiếu của E lên mặt phẳng Oxy, thì

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy.$$

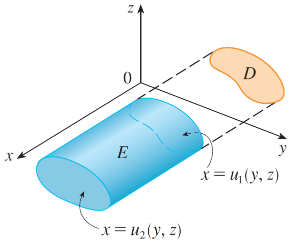


Đặc biệt, nếu $E = \left\{ (x,y,z) \mid \begin{array}{l} a \le x \le b, \\ v_1(x) \le y \le v_2(x), \\ u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y) \end{array} \right\}$ thì

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{v_1(x)}^{v_2(x)} dy \int\limits_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

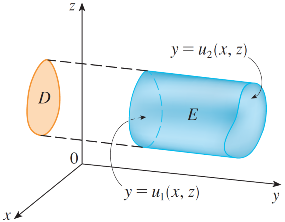
Nếu $E = \left\{(x,y,z) \mid \begin{array}{l}(y,z)\in D,\\ u_1(y,z)\le x\le u_2(y,z)\end{array}\right\}$, trong đó D là hình chiếu của E lên mặt phẳng Oyz, thì

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x,y,z)dx\right) dydz.$$



Nếu $E = \left\{(x,y,z) \mid \begin{array}{l}(x,z)\in D,\\ u_1(x,z)\le y\le u_2(x,z)\end{array}\right\}$, trong đó D là hình chiếu của E lên mặt phẳng Oxz, thì

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x,y,z)dy\right) dxdz.$$



Ví dụ

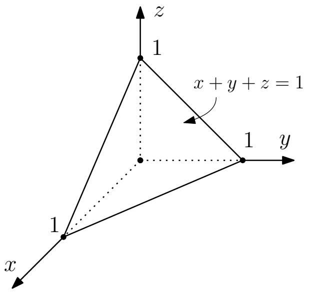
Ví dụ. Tính $I = \iiint\limits_E z dx dy dz$, trong đó E là tứ diện bị chặn bởi bốn mặt phẳng $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, và $x + y + z = 1$.

Ví dụ

Ví dụ. Tính $I = \iiint\limits_E z\,dx\,dy\,dz$, trong đó E là tứ diện bị chặn bởi bốn mặt phẳng $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, và $x + y + z = 1$.

Lời giải. $E = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x, 0 \le z \le 1 - x - y\}$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1-x-y} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^2}{2} dy = \int_0^1 \left[\frac{-(1-x-y)^3}{6}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3 dx = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$



Nội dung

Đổi biến trong tích phân bội ba

Cho T là một phép biến đổi từ miền $E' \subseteq (O'uvw)$ đến miền $E \subseteq (Oxyz)$ xác định bởi

$$x = x(u, v, w) \qquad y = y(u, v, w) \qquad z = z(u, v, w).$$

Định thức Jacobi của phéo biến đổi T là định thức

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}.$$

Chú ý 9

Nếu $J \neq 0$, thì

$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix}.$$

Công thức đổi biến trong tích phân bội ba

Nếu phép biến đổi T từ miền $E' \subseteq (O'uvw)$ đến miền $E \subseteq (Oxyz)$ thoả mãn các điều kiện sau:

1. Các đạo hàm riêng của $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$, $z(u,v,w)$ liên tục,
2. T là song ánh,
3. Định thức Jacobi của T khác 0,

thì

$$\iiint\limits_{E} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{E'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\,|J|\,dudvdw.$$

Ví dụ. Tính $\iiint\limits_V dxdydz$, trong đó V giới hạn bởi các mặt phẳng sau:

$$|x+y+z| = 3, |x+2y-z| = 1, |x+4y+z| = 2.$$

Ví dụ. Tính $\displaystyle\iiint\limits_V dxdydz$, trong đó V giới hạn bởi các mặt phẳng sau:

$$|x+y+z|=3, |x+2y-z|=1, |x+4y+z|=2.$$

Lời giải. Đặt $u=x+y+z$, $v=x+2y-z$ và $w=x+4y+z$. Suy ra

$$V'=\{(u,v,w) \mid -3\le u\le 3, -1\le v\le 1, -2\le w\le 2\}$$

và $\dfrac{1}{J}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 4 & 1\end{vmatrix}=6$. Do đó, $\displaystyle\iiint\limits_{V'} dxdydz=\int_{-3}^{3}du\int_{-1}^{1}dv\int_{-2}^{2}\frac{1}{6}dw=6\cdot 2\cdot 4\cdot\frac{1}{6}=8.$

Tích phân bội ba trên miền đối xứng

Áp dụng công thức đổi biến trong tích phân bội ba, ta có thể chứng minh được các khẳng định sau:

- Nếu V là miền đối xứng qua mặt phẳng Oxy, thì

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \begin{cases} 2\iiint\limits_{V\cap(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_{\geq 0})} f(x,y,z)dxdydz & \text{nếu } f(x,y,-z)=f(x,y,z), \forall (x,y,z)\in V, \\ 0 & \text{nếu } f(x,y,-z)=-f(x,y,z), \forall (x,y,z)\in V. \end{cases}$$

- Nếu $V=\Omega\cup\Omega'$, trong đó Ω và Ω' là các miền đối xứng qua trục Ox, thì

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \begin{cases} 2\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz & \text{nếu } f(x,-y,-z)=f(x,y,z), \forall (x,y,z)\in V, \\ 0 & \text{nếu } f(x,-y,-z)=-f(x,y,z), \forall (x,y,z)\in V. \end{cases}$$

- Nếu $V=\Omega\cup\Omega'$, trong đó Ω và Ω' là các miền đối xứng qua gốc tọa độ O, thì

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \begin{cases} 2\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz & \text{nếu } f(-x,-y,-z)=f(x,y,z), \forall (x,y,z)\in V, \\ 0 & \text{nếu } f(-x,-y,-z)=-f(x,y,z), \forall (x,y,z)\in V. \end{cases}$$

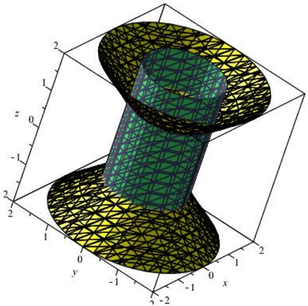
Các ví dụ

Ví dụ 1. Tính $I = \iiint\limits_E (1 + \sin(x^2y^4z^3))dxdydz$, trong đó miền vật thể E giới hạn bởi $z^2 = x^2 + y^2$ và $x^2 + y^2 = 1$.

Ví dụ 1. Tính $I = \iiint\limits_E (1+\sin(x^2y^4z^3))dxdydz$, trong đó miền vật thể E giới hạn bởi $z^2 = x^2+y^2$ và $x^2+y^2 = 1$.

Lời giải. Vì hàm $\sin(x^2y^4z^3)$ là hàm lẻ theo biến z, và miền E đối xứng qua mặt phẳng $z=0$, nên

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_E dxdydz = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left(\int\limits_{-\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz \right) \\
&= \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} 2\sqrt{x^2+y^2}dxdy.
\end{aligned}
$$



Đổi biến trong tọa độ cực, ta được

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 2r^2dr = \frac{4\pi}{3}.$$

Các ví dụ

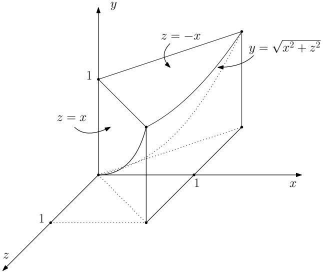
Ví dụ 2. Tính tích phân $I = \iiint\limits_E (z\cos z\cos(xy) + y)\,dxdydz$, trong đó E là miền giới hạn bởi các mặt $z = x$, $z = -x$, $x = 1$, $y = 0$, $y = \sqrt{x^2 + z^2}$.

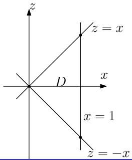
Ví dụ 2. Tính tích phân $I = \iiint\limits_E (z\cos z\cos(xy) + y)\,dxdydz$, trong đó E là miền giới hạn bởi các mặt $z = x$, $z = -x$, $x = 1$, $y = 0$, $y = \sqrt{x^2+z^2}$.

Lời giải. $E = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1, -x \le z \le x, 0 \le y \le \sqrt{x^2+z^2}\}$ là miền đối xứng qua mặt phẳng $z = 0$.

Hàm số $z\cos z\cos(xy)$ là hàm lẻ theo biến z. Do đó, $\iiint\limits_E z\cos z\cos(xy)dxdydz = 0$. Vì vậy,

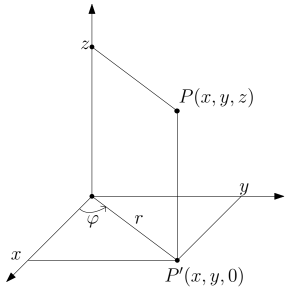
$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_E ydxdydz = \iint\limits_D dxdz\left(\int\limits_0^{\sqrt{x^2+z^2}} ydy\right) \\ &= \iint\limits_D \frac{x^2+z^2}{2}dxdz = \int\limits_0^1 dx\int\limits_{-x}^{x}\frac{x^2+z^2}{2}dz \\ &= \int\limits_0^1 \frac{4x^3}{3}dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$





Nội dung

Tích phân bội ba trong toạ độ trụ



Trong hệ toạ độ trụ, điểm P trong không gian ba chiều được biểu diễn bởi bộ ba (r, φ, z), trong đó r và φ là các toạ độ cực của P' trong mặt phẳng Oxy và z là khoảng cách từ P đến mặt phẳng Oxy. Để chuyển từ toạ độ trụ sang toạ độ Đề các, ta sử dụng phương trình sau

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z.$$

Chú ý rằng: $x^2 + y^2 = r^2$.

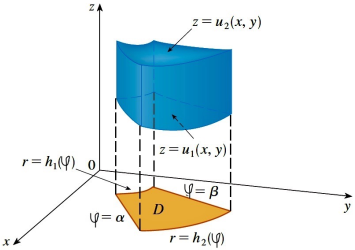
Khi đó, định thức Jacobi của phép biến đổi trên là

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Áp dụng

Giả sử E là miền vật thể trong $Oxyz$ có thể được biểu diễn trong toạ độ trụ $Or\varphi z$ như sau:

$$E = \left\{ (r, \varphi, z) \mid \begin{array}{l} \alpha \le \varphi \le \beta,\ h_1(\varphi) \le r \le h_2(\varphi), \\ u_1(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \le z \le u_2(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \end{array} \right\}$$



$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{h_1(\varphi)}^{h_2(\varphi)} dr \int\limits_{u_1(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}^{u_2(r\cos\varphi, r\sin\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r dz$$

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tính

$$I = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2+y^2)dz.$$

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tính

$$I = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2+y^2)dz.$$

Lời giải. Đặt $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ và $z = z$. Khi đó,

$$\begin{aligned} E &= \{(x,y,z) \mid -2 \le x \le 2, -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2\} \\ &= \{(r,\varphi,z) \mid 0 \le r \le 2, 0 \le \varphi \le 2\pi, r \le z \le 2\}. \end{aligned}$$

Lúc đó,

$$I = \iiint\limits_E (x^2+y^2)dxdydz = \int\limits_0^2 dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_r^2 r^3 dz = 2\pi \cdot \int\limits_0^2 r^3(2-r)dr = \frac{16\pi}{5}.$$

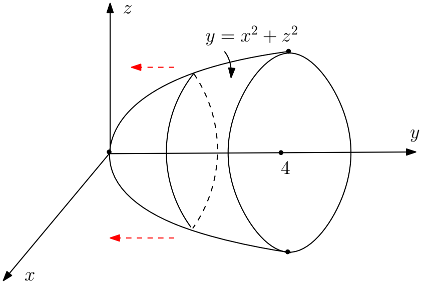
Các ví dụ

Ví dụ 2. Tính $I = \iiint\limits_E \sqrt{x^2+z^2}dxdydz$, trong đó E là miền bị chặn bởi paraboloid $y = x^2 + z^2$ và mặt phẳng $y = 4$.

Ví dụ 2. Tính $I = \iiint\limits_E \sqrt{x^2+z^2}\,dxdydz$, trong đó E là miền bị chặn bởi paraboloid $y = x^2 + z^2$ và mặt phẳng $y = 4$.

Lời giải. Đặt $x = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$ và $y = y$. Khi đó,
$E = \{(r,\varphi,y) \mid 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le 2, r^2 \le y \le 4\}$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_{r^2}^4 r^2 dy \\ &= 2\pi \cdot \int_0^2 r^2(4-r^2)dr \\ &= \frac{128\pi}{15}. \end{aligned}$$



Các ví dụ

Ví dụ 3. Tính tích phân $I = \iiint_E z dx dy dz$, với E giới hạn bởi $y^2 + z^2 = 4$, $x = 0$, $y = 2x$ và $z = 0$, trong góc phần tám thứ nhất.

Ví dụ 3. Tính tích phân $I = \iiint\limits_{E} z\,dx\,dy\,dz$, với E giới hạn bởi $y^2 + z^2 = 4$, $x = 0$, $y = 2x$ và $z = 0$, trong góc phần tám thứ nhất.

Lời giải. Đặt $y = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$ và $x = x$. Khi đó,

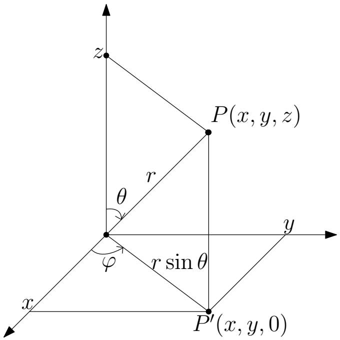
$$E = \left\{(r, \varphi, x) \mid 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2, 0 \leq x \leq \frac{r\cos\varphi}{2}\right\}.$$

Lúc đó,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 dr \int_0^{\frac{r\cos\varphi}{2}} r^2 \sin\varphi\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 r^3 \sin\varphi\cos\varphi\, dr \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi\right)\cdot\left(\int_0^2 r^3\, dr\right) = 1. \end{aligned}$$

Nội dung

Tích phân bội ba trong toạ độ cầu



Toạ độ cầu (r, φ, θ) của điểm P, trong đó $r = |OP|$, φ là góc như trong toạ độ trụ, và θ là góc tạo bởi giữa tia Oz và tia OP. Công thức chuyển từ tọa độ cầu sang tọa độ Đề các là:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta.$$

Chú ý:

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \text{và}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Định thức Jacobi của phép biến đổi trên là

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = -r^2\sin\theta.$$

Áp dụng

Giả sử miền vật thể E có thể biểu diễn trong toạ độ cầu như sau:

$$E = \{(r, \theta, \varphi) \mid a \leq r \leq b, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \alpha \leq \varphi \leq \beta\}.$$

Khi đó,

$$\iiint\limits_E f(x, y, z) dxdydz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int\limits_{a}^{b} f(r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta) r^2 \sin\theta dr.$$

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tính $I = \iiint\limits_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dxdydz$, trong đó B là hình cầu đơn vị

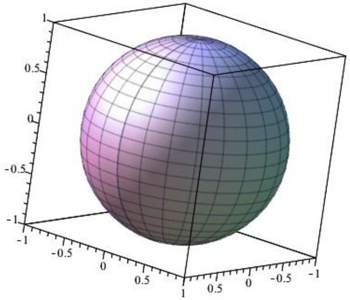
$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Ví dụ 1. Tính $I = \iiint\limits_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dxdydz$, trong đó B là hình cầu đơn vị

$$B = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}.$$

Lời giải. Đổi biến sang tọa độ cầu, $B = \{(r,\theta,\varphi) \mid 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$. Do đó,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} r^2 \sin\theta e^{r^3} d\theta \\ &= \left(\int_0^1 r^2 e^{r^3} dr\right) \cdot 2\pi \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta\right) \\ &= \frac{e-1}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{4\pi(e-1)}{3}. \end{aligned}$$



Ví dụ 2. Tính $I = \iiint\limits_E (x+y)dxdydz$, trong đó $E : \dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{9} \leq 1$ và $y \geq 0$.

Các ví dụ

Ví dụ 2. Tính $I = \iiint\limits_E (x+y)dxdydz$, trong đó $E : \dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{9} \le 1$ và $y \ge 0$.

Lời giải. Vì E là miền đối xứng qua mặt phẳng $x = 0$, nên $\iiint\limits_E xdxdydz = 0$. Do đó,

$$I = \iiint\limits_E ydxdydz.$$

Đặt $x = 2r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = 3r\cos\theta$. Khi đó, $|J| = 6r^2\sin\theta$, và

$$E = \{(r,\theta,\varphi) \mid 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le \pi\}.$$

Do đó,

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_E ydxdydz = \int_0^1 dr \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi 6r^3\sin^2\theta\sin\varphi d\theta = 6\left(\int_0^1 r^3dr\right)\cdot\left(\int_0^\pi \sin\varphi d\varphi\right)\cdot\left(\int_0^\pi \sin^2\theta d\theta\right) \\ &= 6\cdot\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Nội dung

Ứng dụng của tích phân bội ba: Thể tích

Xét trường hợp đặc biệt $f(x,y,z) = 1$ với mọi $(x,y,z) \in E$. Khi đó, thể tích của E được tính như sau:

$$\boxed{V(E) = \iiint\limits_E dxdydz.}$$

Các ví dụ

Ví dụ 1. Sử dụng tích phân bội ba, tìm thể tích của miền vật thể T bị chặn bởi các mặt phẳng $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ và $z = 0$.

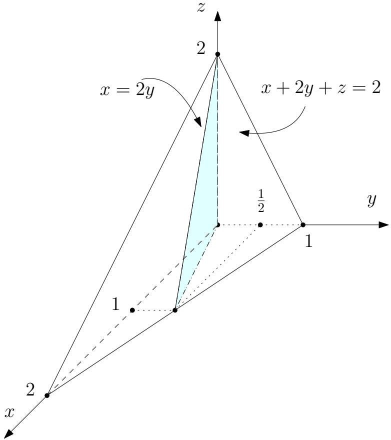
Ví dụ 1. Sử dụng tích phân bội ba, tìm thể tích của miền vật thể T bị chặn bởi các mặt phẳng $x+2y+z=2$, $x=2y$, $x=0$ và $z=0$.

Lời giải. $T=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le 1, \frac{x}{2}\le y\le \frac{2-x}{2}, 0\le z\le 2-x-2y\}$.

$$V=\iiint\limits_T dxdydz = \int_0^1 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}} dy\int_0^{2-x-2y} dz$$

$$= \int_0^1 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}} (2-x-2y)dy$$

$$= \frac{1}{3}\quad \text{(đvtt)}.$$



Các ví dụ

Ví dụ 2. Tính thể tích của vật thể E giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + y^2$ và $z = 2 - x^2 - y^2$.

Ví dụ 2. Tính thể tích của vật thể E giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + y^2$ và $z = 2 - x^2 - y^2$.

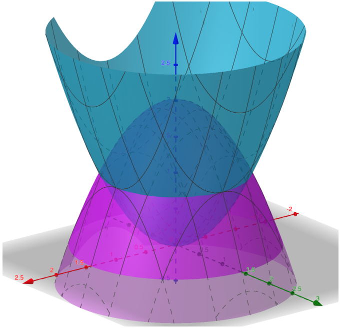
Lời giải.

Vật thể E trong tọa độ trụ được biểu diễn như sau:

$E = \{(r, \varphi, z) \mid 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le 2\pi, r^2 \le z \le 2 - r^2\}.$

Do đó, thể tích của vật thể E là

$$\begin{aligned} V(E) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^{2-r^2} r dz \\ &= 2\pi \cdot \int_0^1 (2 - 2r^2) r dr \\ &= \pi \quad \text{(đvtt)}. \end{aligned}$$



Bài tập về nhà

1. Tính tích phân bội ba $\iiint\limits_V yzdxdydz$, với $V = \{(x,y,z) \mid z^2 \leq x \leq \sqrt{z}, 0 \leq y \leq z, 0 \leq z \leq 1\}$.
2. Tính tích phân bội ba $\iiint\limits_V xdxdydz$, với V là miền giới hạn bởi các mặt phẳng toạ độ và mặt $3x + y + z = 3$.
3. Chứng minh rằng miền $E : 3x^2 + 2y^2 + (ax + 2y + 3z)^2 \leq 1$ có thể tích không đổi, với mọi $a \in \mathbb{R}$.
4. Tính tích phân bội ba $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, với $V = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}\}$.
5. Tính tích phân bội ba $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, với $V : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, z \geq 0$.
6. Tính $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, với V xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \sqrt{3(x^2+y^2)} \leq z$.
7. Tính thể tích miền có biên là các mặt cong $x = y^2 + z^2$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ nằm trong phần không gian $x \geq 0$.