Chương 6
LÝ THUYẾT TRƯỜNG

BỘ MÔN TOÁN CƠ BẢN

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

SAMI.HUST – 2023

Nội dung

1. **Nội dung, mục tiêu**
   - Nội dung Chương 6
   - 6.1 Trường vô hướng
   - 6.2 Trường vectơ

Nội dung Chương 6

Nội dung Chương 6

Trường vô hướng

Trường vô hướng

Ta nói trên miền $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ xác định một trường vô hướng nếu tại mỗi điểm $M(x, y, z) \in \Omega$ cho tương ứng một giá trị $u = f(x, y, z) \in \mathbb{R}$. Như vậy, trường vô hướng trên Ω là một hàm số xác định trên Ω.

VD: Sự phân bố nhiệt trong một vật thể tạo nên một trường vô hướng trong vật thể đó.

Mặt đẳng cự

Cho trường vô hướng $u(x, y, z)$ xác định trên $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ và hằng số $c \in \mathbb{R}$. Lúc đó,

$$S = \{(x, y, z) \in \Omega : u(x, y, z) = c\}$$

được gọi là mặt đẳng cự (mặt mức) của trường vô hướng u.

Nhận xét

+) Miền Ω bị phủ kín bởi các mặt mức;

+) Các mặt mức khác nhau không giao nhau.

Đạo hàm theo hướng

Cho hàm số $u(x, y, z)$, các đạo hàm riêng của u mô tả sự biến thiên của nó theo hướng của các trục tọa độ. Tuy nhiên, chúng không trực tiếp biểu diễn được sự biến thiên của u theo các hướng khác. Để khắc phục, ta sử dụng đạo hàm theo hướng. Cho vectơ đơn vị $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Định nghĩa

Giới hạn (nếu có)

$$\lim_{t \to 0} \frac{u(M + t\vec{v}) - u(M)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{u(x + ta, y + tb, z + tc) - u(x, y, z)}{t}$$

được gọi là đạo hàm theo hướng $\vec{v}$ tại điểm $M(x, y, z)$ của u và được kí hiệu là $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{v}}(M)$.

+) Nếu $\vec{\ell}$ không phải vectơ đơn vị thì xét $\vec{v} = \dfrac{\vec{\ell}}{|\vec{\ell}|}$, khi đó $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\ell}} = \dfrac{\partial u}{\partial \vec{v}}$;

+) Đạo hàm theo hướng $\vec{v}$ tại điểm $M(x, y, z)$ của trường vô hướng u thể hiện tốc độ biến thiên của trường vô hướng u tại điểm $M(x, y, z)$ theo hướng $\vec{v}$.

Đạo hàm theo hướng

Nhận xét

+) $\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{i}}(M_0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{u(x_0+t, y_0, z_0) - u(x_0, y_0, z_0)}{t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}(M_0);$

+) $\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{j}}(M_0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{u(x_0, y_0+t, z_0) - u(x_0, y_0, z_0)}{t} = \dfrac{\partial u}{\partial y}(M_0);$

+) $\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{k}}(M_0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{u(x_0, y_0, z_0+t) - u(x_0, y_0, z_0)}{t} = \dfrac{\partial u}{\partial z}(M_0).$

Định lý 1 (Đạo hàm theo hướng-Đạo hàm riêng)

Nếu u khả vi tại M_0 thì u có đạo hàm theo mọi hướng tại M_0 và

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{\ell}}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma,$$

ở đây (α, β, γ) là góc chỉ phương của $\overrightarrow{\ell}$.

Ví dụ 1

Tính đạo hàm của hàm số $u(x,y,z) = 3e^x \cos(yz)$ tại điểm $M(0;0;0)$ theo hướng $\overrightarrow{\ell} = (2;1;-2)$.

Ta có $u'_x(M) = 3e^x \cos(yz)\mid_M = 3, u'_y(M) = -3ze^x \sin(yz)\mid_M = 0, u'_z(M) = -3ye^x \sin(yz)\mid_M = 0$ và $\cos\alpha = \frac{2}{3}, \cos\beta = \frac{1}{3}, \cos\gamma = -\frac{2}{3}$. Do đó, $\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{\ell}}(M_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma = 2.$

Gradient

Định nghĩa

Cho trường vô hướng $u(x, y, z)$. Lúc đó, gradient của u tại M là một vectơ, ký hiệu $\overrightarrow{\text{grad}}\ u(M)$ và có dạng

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(M), \frac{\partial u}{\partial y}(M), \frac{\partial u}{\partial z}(M)\Big).$$

Định lý 2 (Đạo hàm theo hướng-Grad)

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}(M) = \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\ u(M) \cdot \vec{\ell}}{|\vec{\ell}|} = |\overrightarrow{\text{grad}}\ u(M)| \cos(\overrightarrow{\text{grad}}\ u(M), \vec{\ell}).$$

Nhận xét

Trường vô hướng tăng nhanh nhất theo hướng vectơ gradient.

Ví dụ 2

Tính đạo hàm của hàm số $u(x,y) = 2xy - 3y^2$ tại điểm $M(5;5)$ theo hướng $\overrightarrow{\ell} = (4;3)$.

Ta có $u'_x(M) = (2y)\mid_M = 10, u'_y(M) = (2x-6y)\mid_M = -20 \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\ u(M) = (10;-20)$. Do đó,

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{\ell}}(M) = \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\ u(M)\cdot\overrightarrow{\ell}}{|\overrightarrow{\ell}|} = \frac{10\cdot 4 + (-20)\cdot 3}{5} = -4.$$

Một số tính chất của gradient

1. Tuyến tính: $\overrightarrow{\text{grad}}\ (\alpha u + \beta v) = \alpha\overrightarrow{\text{grad}}\ u + \beta\overrightarrow{\text{grad}}\ v$ với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
2. $\overrightarrow{\text{grad}}\ (uv) = u\overrightarrow{\text{grad}}\ v + v\overrightarrow{\text{grad}}\ u$;
3. $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\overrightarrow{\text{grad}}\ u - u\overrightarrow{\text{grad}}\ v}{v^2}$ nếu $v \neq 0$;
4. $\overrightarrow{\text{grad}}\ f(u) = f'(u)\overrightarrow{\text{grad}}\ u$.

BTVN

1. Tính đạo hàm của hàm $u = x^3 + 2y^3 + 3z^2 + 2xyz$ theo hướng $\vec{l} = (1; 1; 2)$ tại điểm $P(1; 1; 2)$;
2. Cho hàm $u = x^2 + xy + z^3$ và các điểm $A(1; -1; 1)$, $B(2; 1; -1)$. Tìm đạo hàm của u tại A theo hướng $\overrightarrow{AB}$;
3. Cho trường vô hướng $u = xy + yz + xz$. Tính tốc độ tăng lớn nhất của trường u tại điểm $A(2; 1; 1)$;
4. Cho mặt S với phương trình $z = -x^2 - y^2$ có hướng lên phía trên so với trục Oz, điểm $M(1; 1; -2)$ thuộc mặt S và hàm $u = z + x^2 + y^2$. Tính đạo hàm của u theo hướng pháp tuyến dương của mặt S tại điểm M;
5. Tìm hướng mà tại điểm $A(1; 1; 1)$ hàm số $f(x, y, z) = x^2 + 2x^2y + yz$ giảm nhanh nhất. Từ đó, tính đạo hàm theo hướng đó của hàm f tại A.

Trường vectơ

Cho $V \subset \mathbb{R}^3$, ta nói trong V xác định một trường vectơ nếu tại mỗi điểm $M(x, y, z) \in V$ xác định một vectơ

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\overrightarrow{i} + Q(x, y, z)\overrightarrow{j} + R(x, y, z)\overrightarrow{k}.$$

VD: Dòng nước đang chảy thì tại mỗi điểm xác định một vectơ vận tốc. Toàn thể các vectơ vận tốc xác định một trường vectơ.

Đường dòng

Trong $\mathbb{R}^3$ cho trường vectơ $\overrightarrow{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\overrightarrow{i} + Q(x, y, z)\overrightarrow{j} + R(x, y, z)\overrightarrow{k}$. Đường cong $C \subset \mathbb{R}^3$ gọi là đường dòng của trường vectơ $\overrightarrow{F}$ nếu tại mỗi điểm M trên đường cong C, tiếp tuyến tại đó cùng phương với vectơ $\overrightarrow{F}(M)$.

VD: Các đường sức trong từ trường hoặc điện trường là các đường dòng.

Trường vectơ

Phương trình đường dòng

Cho trường vectơ
$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$$
và đường dòng C có phương trình tham số là $x = x(t); y = y(t); z = z(t)$. Khi đó, tiếp tuyến tại mỗi điểm $M(x,y,z)$ của C có vectơ chỉ phương là $(x'(t), y'(t), z'(t))$. Do tiếp tuyến này đồng phương với $\overrightarrow{F}(M)$ nên
$$\frac{x'(t)}{P} = \frac{y'(t)}{Q} = \frac{z'(t)}{R} \Leftrightarrow \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$
(gọi là hệ phương trình vi phân của họ đường dòng của trường vectơ $\overrightarrow{F}(M)$).

Nhận xét

Qua mỗi điểm của trường vectơ có duy nhất một đường dòng. Các đường dòng không cắt nhau.

Thông lượng

Định nghĩa

Cho trường vectơ

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$$

và S là mặt cong định hướng trong $\mathbb{R}^3$. Khi đó, thông lượng của trường vectơ $\overrightarrow{F}$ qua mặt S là

$$\Phi = \iint\limits_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} dS = \iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy,$$

trong đó $\overrightarrow{n}$ là vectơ pháp tuyến đơn vị của mặt S.

Ví dụ 3

Tính thông lượng của trường vectơ $\overrightarrow{F} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ qua phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Ta có vectơ pháp tuyến đơn vị của phía ngoài mặt cầu S là $\overrightarrow{n} = (x,y,z)$. Theo công thức tính thông lượng ta có: $\Phi = \iint\limits_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} dS = \iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2) dS = \iint\limits_S dS = 4\pi$.

Độ phân tán

Định nghĩa

Cho trường vectơ $\overrightarrow{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$. Khi đó, đại lượng vô hướng

$$\frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M)$$

được gọi là độ phân tán của trường $\overrightarrow{F}$ tại $M(x,y,z)$ và ký hiệu $\operatorname{div}\overrightarrow{F}(M)$. Vậy

$$\operatorname{div}\overrightarrow{F}(M) = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M).$$

Ví dụ: Chú ý một dòng nước đang chảy thì tập các vectơ vận tốc tạo thành một trường vectơ. Lúc đó, độ phân tán của trường vectơ vận tốc tại một điểm là “độ bắn tung tóe" của dòng nước tại điểm đó.

Một số tính chất

Cho $\overrightarrow{F}_1, \overrightarrow{F}_2$ là các trường vectơ trên $\mathbb{R}^3$, c_1, c_2 là các hằng số. Lúc đó

+) $\operatorname{div}\left(c_1\overrightarrow{F}_1 + c_2\overrightarrow{F}_2\right) = c_1\operatorname{div}\overrightarrow{F}_1 + c_2\operatorname{div}\overrightarrow{F}_2;$

+) $\operatorname{div}\left(u\overrightarrow{F}_1\right) = u\operatorname{div}\overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_1 \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, u$ (u là một trường vô hướng trên $\mathbb{R}^3$).

Công thức OS dưới dạng vectơ

Cho Ω là miền đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^3$, S là phía ngoài mặt biên của Ω (S là mặt cong kín). Khi đó,

$$\iint\limits_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\overrightarrow{F}\, dV \ (dV = dxdydz).$$

Nhận xét

Thông lượng của trường $\overrightarrow{F}$ qua phía ngoài mặt S (bao miền V) bằng tổng các độ phân tán tại các điểm trong V của trường $\overrightarrow{F}$.

Trường ống

Chú ý

Thông lượng của trường vectơ qua mặt kín S ra phía ngoài là hiệu của lượng vật chất từ trong chảy ra (đầu ra) và từ ngoài chảy vào (đầu vào).

Trường ống, điểm nguồn, điểm rò

+) Trường vectơ $\overrightarrow{F}$ được gọi là trường ống nếu

$$\operatorname{div} \overrightarrow{F}(M) = 0, \forall M \in V;$$

+) M được gọi là điểm nguồn của trường $\overrightarrow{F}$ nếu

$$\operatorname{div} \overrightarrow{F}(M) > 0;$$

+) M được gọi là điểm rò của trường $\overrightarrow{F}$ nếu

$$\operatorname{div} \overrightarrow{F}(M) < 0.$$

Định nghĩa

Cho trường vectơ $\overrightarrow{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$ xác định trên Ω và $\mathcal{C}$ là đường cong kín trong Ω. Khi đó, hoàn lưu (lưu số) của trường $\overrightarrow{F}$ dọc theo $\mathcal{C}$ là

$$C = \oint_{\mathcal{C}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} \quad (d\overrightarrow{r} = (dx,dy,dz)).$$

Ví dụ 4

Tính hoàn lưu (lưu số) của trường $\overrightarrow{F} = -y\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j}$ dọc theo chiều dương của elip $\mathcal{C} : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Ta có hoàn lưu (lưu số) cần tính là $C = \oint_{\mathcal{C}} -ydx + xdy$. Do $\mathcal{C}$ kín, hướng dương nên áp dụng công thức Green $C = \iint\limits_D 2dxdy = 2A(D)$ với $D : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} \le 1$. Vậy $C = 2\cdot 4\cdot 5\pi = 40\pi$.

Vectơ xoáy

Định nghĩa

Cho trường vectơ $\overrightarrow{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$. Khi đó, vectơ

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\Bigg|_M$$

được gọi là vectơ xoáy hay Rôta của trường $\overrightarrow{F}$ tại M và ký hiệu $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{F}(M)$.

Điểm xoáy

Điểm M được gọi là điểm xoáy (điểm không xoáy) của trường $\overrightarrow{F}$ nếu $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{F}(M) \neq \overrightarrow{0}$ $(= \overrightarrow{0})$.

Công thức Stokes dưới dạng vectơ

Công thức Stokes

Cho trường vectơ $\overrightarrow{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$ xác định trên mặt S có biên là đường cong kín $\mathcal{C}$. Khi đó,

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \iint\limits_{S} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\,dS.$$

Nhận xét

Hoàn lưu của trường $\overrightarrow{F}$ dọc theo đường cong kín $\mathcal{C}$ bằng thông lượng của vectơ xoáy qua mặt S của trường $\overrightarrow{F}$.

Ví dụ 5

Cho trường vectơ $\overrightarrow{F} = xz\,\overrightarrow{i} + xyz\,\overrightarrow{j} - 2y^2\,\overrightarrow{k}$, tìm $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{F}$.

Ta có

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k} = -y(4+x)\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j} + yz\,\overrightarrow{k}.$$

Định nghĩa

Trường vectơ $\overrightarrow{F}(M)$ xác định trên Ω được gọi là trường thế nếu tồn tại trường vô hướng $u(M)$ sao cho: $\overrightarrow{F}(M) = \overrightarrow{\text{grad}}u(M), \quad \forall M \in \Omega$. Khi đó, hàm $u(M)$ được gọi là hàm thế vị của trường $\overrightarrow{F}(M)$.

Định lý bốn mệnh đề tương đương

Cho Ω là miền đơn liên, liên thông. Trường vectơ $\overrightarrow{F} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + R\overrightarrow{k}$ thỏa mãn P, Q, R và các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên $\overline{\Omega}$. Khi đó, bốn mệnh đề sau tương đương:

1. $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{F}(M) = \overrightarrow{0}$ với mọi $M \in \Omega$;
2. $\int\limits_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy + Rdz = 0$ với mọi đường cong kín $\mathcal{C}$ trong Ω;
3. $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ không phụ thuộc đường đi từ A tới B, với mọi đường cong AB nằm trong Ω;
4. $\overrightarrow{F}$ là trường thế, nghĩa là tồn tại hàm thế vị u sao cho $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\text{grad}}u$.

Ví dụ 6

Cho trường vectơ $\overrightarrow{F}(x,y,z) = y^2\overrightarrow{i} + (2xy + e^{3z})\overrightarrow{j} + 3ye^{3z}\overrightarrow{k}$. Chứng minh $\overrightarrow{F}$ là trường thế và tìm hàm thế vị.

Ta có

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}$$
$$= (3e^{3z} - 3e^{3z})\overrightarrow{i} + (0-0)\overrightarrow{j} + (2y - 2y)\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}.$$

Nên $\overrightarrow{F}$ là trường thế. Chọn $(x_0, y_0, z_0) = (0;0;0)$, hàm thế vị u được xác định bởi

$$u(x,y,z) = \int_0^x P(t,0,0)dt + \int_0^y Q(x,t,0)dt + \int_0^z R(x,y,t)dt + C$$
$$= \int_0^x 0dt + \int_0^y (2xt+1)dt + \int_0^z 3ye^{3t}dt + C = xy^2 + ye^{3z} + C.$$

BTVN

BTVN

1. Cho trường vô hướng $u = z + x^2 + y^2 - 3$. Tính $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad} u})$;
2. Trường vectơ $\overrightarrow{F} = e^{yz}\overrightarrow{i} + xze^{yz}\overrightarrow{j} + xye^{yz}\overrightarrow{k}$ có phải là trường thế không? Tìm hàm thế vị (nếu có);
3. Cho trường vectơ $\overrightarrow{F} = (xy^2 + z)\overrightarrow{i} + (x^2y + z)\overrightarrow{j}$. Tính thông lượng của $\overrightarrow{F}$ qua phía dưới của mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ với $z \leq 4$, khi ta nhìn từ chiều dương của trục Oz;
4. Tính thông lượng của trường vectơ $\overrightarrow{F} = x^3y\overrightarrow{i} - x^2y^2\overrightarrow{j} - x^2yz\overrightarrow{k}$ qua phía ngoài của biên của khối V được giới hạn bởi mặt hyperboloid $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ và các mặt phẳng $z = 2$ và $z = -2$;
5. Cho trường vectơ $\overrightarrow{F} = (3y - y\sin x - z)\overrightarrow{i} + (\cos x + 2y - 6z)\overrightarrow{j} + (2x + 3y)\overrightarrow{k}$. Gọi C là giao của mặt $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$ với mặt phẳng $x + y + z = 1$ lấy theo chiều kim đồng hồ nhìn từ phía dương của trục Oy. Tìm lưu số của trường $\overrightarrow{F}$ dọc cung C;
6. Cho trường vectơ $\overrightarrow{F} = (4z^2 - 8xy)\overrightarrow{i} + (z^2 - 8xy)\overrightarrow{j} + (4x^2 + y^2)\overrightarrow{k}$ và đường cong $\mathcal{C}$ là giao tuyến của mặt $4x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Chứng minh rằng hoàn lưu của trường $\overrightarrow{F}$ dọc đường $\mathcal{C}$ bằng 0.