Chương 5
TÍCH PHÂN MẶT

BỘ MÔN TOÁN CƠ BẢN

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

SAMI.HUST – 2023

Nội dung

Tích phân mặt

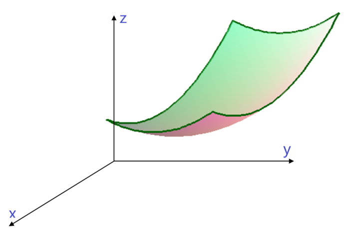
Nội dung Chương 5

Tích phân mặt loại một

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x, y, z)$ xác định trên một mặt S đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^3$.

- Chia mặt S thành n mặt con $p : S_1, S_2, \ldots, S_n$ với diện tích tương ứng là $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$.
- Trong mỗi mảnh S_i lấy một điểm tuỳ ý $M_i(x_i, y_i, z_i)$.
- Lập tổng tích phân $S(f, p) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i$.
- Nếu tồn tại giới hạn $\lim_{dp\to 0} S(f, p) = I$ $(dp = \max\limits_{1\le i\le n} d(S_i))$, không phụ thuộc vào cách chia miền thành các miền con S_i



Hình 1: Mặt cong

và cách lấy các điểm M_i, thì giới hạn này được gọi là tích phân mặt loại một của hàm số $f(x, y, z)$ trên mặt S. Tích phân này được ký hiệu là $\iint\limits_S f(x, y, z)dS$. Khi đó, ta nói f khả tích trên S.

Các tính chất của tích phân mặt loại một

Tính chất

1. Diện tích của mặt cong $S = \iint\limits_S 1dS$;
2. Tích phân mặt loại một không phụ thuộc phía của S;
3. Nếu $S = S_1 \cup S_2$ và S_1, S_2 không dẫm lên nhau thì $\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_{S_1} f(x,y,z)dS + \iint\limits_{S_2} f(x,y,z)dS$;
4. Nếu S gồm 2 phần S_1 và S_2 đối xứng với nhau qua mp $z = 0$ (Oxy) và

- f chẵn theo z thì $\iint\limits_S f(x,y,z)dS = 2\iint\limits_{S_1} f(x,y,z)dS$,
- f lẻ theo z thì $\iint\limits_S f(x,y,z)dS = 0$.

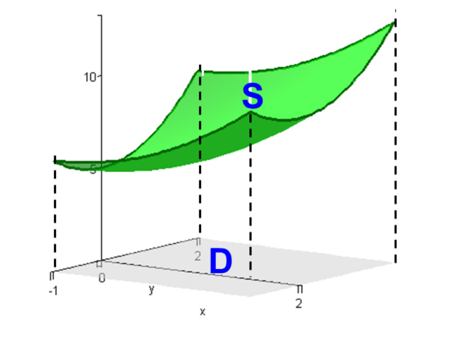
Tích phân mặt loại một có nhiều ứng dụng trong vật lý tương tự như tích phân xác định và tích phân bội ta đã xét. Ví dụ, trong trường hợp một mặt mỏng (như mảnh giấy nhôm) có hình dạng của mặt cong S, khối lượng riêng tại mỗi điểm $M(x,y,z)$ là $\rho(x,y,z)$ thì khối lượng của mặt mỏng sẽ được cho bởi $\iint\limits_S \rho(x,y,z)dS$.

Cách tính tích phân mặt loại một

Cách tính

Giả sử S được cho bởi phương trình $z = z(x, y)$ với $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, trong đó $z(x, y)$ là một hàm số khả vi liên tục, D là hình chiếu của mặt S lên mặt phẳng (Oxy). Khi đó,

- $dS = \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\,dxdy,$
- $\iint\limits_S f(x, y, z)dS$
  $= \iint\limits_D f\big(x, y, z(x, y)\big)\sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\,dxdy.$



Hình 2: Cách tính tích phân mặt loại một

Cách tính tích phân mặt loại một

Tổng quát:

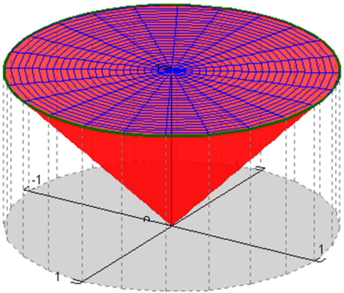
B1. Chọn cách viết phương trình mặt cong S (theo biến có số lần xuất hiện ít nhất trong phương trình mặt cong S và các mặt chắn),

B2. Tìm hình chiếu D của S lên mp tương ứng (giống tính thể tích trong phần tích phân kép),

B3. Tính tích phân trên D.

Ví dụ 1

Tính $\iint\limits_{S} \sqrt{x^2+y^2}dS$ trên mặt biên của miền $\Omega : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1.$



Hình 3: Mặt nón

Ví dụ 1

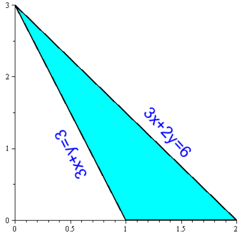
- S gồm mặt nón $z_1 = \sqrt{x^2+y^2}$ và mặt phẳng $z_2 = 1$.
- $\mathrm{hc}_{(Oxy)}S_1 = \mathrm{hc}_{(Oxy)}S_2 = D : x^2+y^2 \leq 1$.
- $S_1 : z = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow dS = \sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}dxdy = \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}dxdy = \sqrt{2}dxdy$.
- $S_2 : z = 1 \Rightarrow dS = \sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}dxdy = dxdy$.

Do đó,

$$I = \iint\limits_{S_1} \sqrt{x^2+y^2}dS + \iint\limits_{S_2} \sqrt{x^2+y^2}dS = \iint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy + \iint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2}dxdy$$
$$= (1+\sqrt{2})\iint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2}dxdy = (1+\sqrt{2})\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r.rdr = \frac{2\pi}{3}(1+\sqrt{2}).$$

Ví dụ 2

Tính $\iint\limits_S z dS$, với S là phần mặt $z = 5 - x - y$ bị chắn bởi các mặt $3x + y = 3, 3x + 2y = 6, y = 0$.



Hình 4: Miền D

Ví dụ 2

- $S: z = 5 - x - y$.
- D giới hạn bởi các đường $3x + y = 3, 3x + 2y = 6, y = 0$.

Do đó,

$$I = \iint\limits_D (5 - x - y)\sqrt{1+1+1}dxdy = \sqrt{3}\int_1^3 dy \int_{1-\frac{y}{3}}^{2-2\frac{y}{3}} (5 - x - y)dx$$

$$= \sqrt{3}\int_1^3 \left(5(1-\frac{y}{3}) - 3\frac{(1-\frac{y}{3})^2}{2} - y(1-\frac{y}{3})\right) = \frac{16\sqrt{3}}{9}.$$

BTVN

1. Tính: $\iint\limits_S zdS$, với S là phần mặt $z = x^2 + y^2$ bị chắn bởi các mặt $z = 1$ và $z = 2$;
2. Tính diện tích của mặt $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ bị chắn trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 2y$;
3. Tính diện tích của phần mặt trụ: $2z = x^2$ bị chắn bởi các mặt $x - 2y = 0, y - 2x = 0, x = 2\sqrt{2}$.

Tích phân mặt loại hai

Mặt định hướng

Cho (S) là mặt cong trơn, giới hạn bởi một đường cong trơn từng khúc C. Lấy điểm $M \in (S)$ và dựng pháp tuyến $\overrightarrow{n}$ của (S) tại M. Nếu xuất phát từ điểm M di chuyển theo một đường cong kín, quay về điểm xuất phát M mà pháp tuyến $\overrightarrow{n}$ không đổi hướng, thì ta nói (S) định hướng được.

Mặt định hướng được

Các mặt xác định bởi $z = f(x, y)$ là mặt định hướng được và có hai hướng:

+) Hướng $\overrightarrow{n}$ tạo với trục $\overrightarrow{Oz}$ một góc $\leq 90^\circ$,

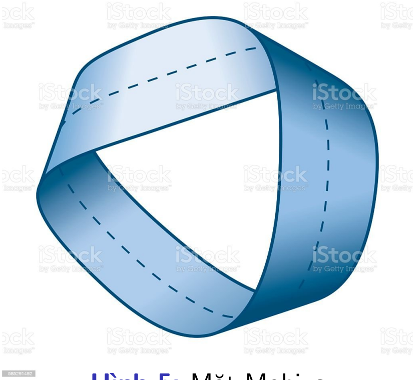
+) Hướng $\overrightarrow{n}$ tạo với trục $\overrightarrow{Oz}$ một góc $\geq 90^\circ$.

Mặt định hướng được

Các mặt kín như mặt cầu, ellipsoid,... là mặt định hướng được và có hai hướng: $\overrightarrow{n}$ hướng ra ngoài và $\overrightarrow{n}$ hướng vào trong.

Mặt không định hướng được

Mặt Mobius không định hướng được:



Hình 5: Mặt Mobius

Trong chương trình vật lý phổ thông, chúng ta đã biết công thức tính từ thông của trường cảm ứng điện từ đều $\overrightarrow{B}$ qua một vòng dây dẫn phẳng có diện tích S và vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}$ được tính bằng công thức $\Phi = (\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{B})S$. Trong phần này, chúng ta giới thiệu tích phân mặt loại hai, giúp tính lưu lượng của một trường vectơ $\overrightarrow{F}$ qua một diện tích ghềnh S. Mặt S có tính *định hướng* được và hướng của nó thể hiện qua vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}$.

Trường vectơ

Cho $V \subset \mathbb{R}^3$, ta nói trong V xác định một trường vectơ nếu tại mỗi điểm $M(x, y, z) \in V$ xác định một vectơ

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\overrightarrow{i} + Q(x, y, z)\overrightarrow{j} + R(x, y, z)\overrightarrow{k}.$$

Ví dụ

Dòng nước đang chảy thì tại mỗi điểm xác định một vectơ vận tốc. Toàn thể các vectơ vận tốc xác định một trường vectơ.

Định nghĩa Thông lượng

+) Cho S là mặt định hướng được trong V. Nếu $\overrightarrow{F} = \text{const}$ và S là một miền phẳng có vectơ pháp tuyến đơn vị là $\overrightarrow{n}$ và diện tích là ΔS. Lúc đó, thông lượng của $\overrightarrow{F}$ qua S (lượng chất lỏng thông qua mặt S trong một đơn vị thời gian) là

$$\Phi = \Delta S |\overrightarrow{F}| \cos(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{F}).$$

+) Nếu S là mặt định hướng trong V và $\overrightarrow{F}(M)$ biến thiên theo M thì ta xác định thông lượng:

-) Chia S thành n mảnh nhỏ $S_1, S_2, \ldots, S_n$ có diện tích tương ứng là $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ sao cho khi ΔS_i khá nhỏ, mảnh S_i có thể xem như là miền phẳng và có thể xem như vectơ $\overrightarrow{F}(M)$ không đổi trên mảnh ấy. Lúc đó, thông lượng qua mảnh S_i là

$$\Phi_{S_i} = \Delta S_i |\overrightarrow{F}(M_i)| \cos(\overrightarrow{n}_{M_i}, \overrightarrow{F}(M_i)) = \Delta S_i \Big[P(M_i)\cos\alpha_i + Q(M_i)\cos\beta_i + R(M_i)\cos\gamma_i \Big].$$

Thông lượng

-) Nếu $\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Phi_{S_i}=\Phi\ \ \Big(d=\max d(S_i)\Big)$ thì Φ chính là thông lượng của trường $\overrightarrow{F}$ qua mặt S. Đồng thời, Φ còn được gọi là tích phân mặt loại hai của các hàm P, Q, R trên mặt S và ký hiệu

$$\iint\limits_S \big[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\big]dS,$$

ở đây (α,β,γ) là góc chỉ phương của pháp tuyến tại M của S.

-) Gọi $S_{yz}^i, S_{zx}^i, S_{xy}^i$ theo thứ tự là hình chiếu của S_i lên $(Oyz),(Ozx),(Oxy) \Rightarrow \Delta S_{yz}^i=\Delta S_i\cos\alpha_i$. Khi đó, tích phân mặt loại hai còn được ký hiệu là

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy.$$

Các tính chất của tích phân mặt loại hai

Tính chất

1. Nếu S đổi hướng thì tích phân đổi dấu;
2. Nếu P, Q, R liên tục trên mặt S định hướng, trơn thì tồn tại tích phân mặt loại hai;
3. Mối liên hệ giữa tích phân mặt loại một và hai:

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_S (P,Q,R)\cdot \overrightarrow{n}\, dS$$

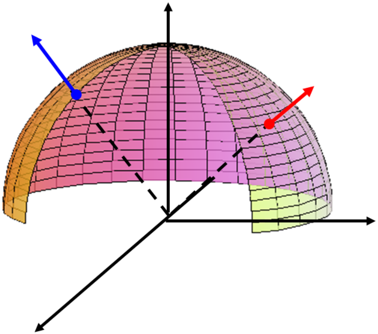
$$= \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS.$$

Ví dụ 1

Cho S là phía ngoài của nửa mặt cầu $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Tính

$$I = \iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy.$$

Ví dụ 1



Hình 6: Nửa trên của Cầu

Tại $M(x, y, z)$ trên S, vectơ pháp tuyến đơn vị là $\overrightarrow{n} = \frac{(x,y,z)}{R}$. Dó đó,

$$I = \iint\limits_S (P, Q, R) \cdot \overrightarrow{n} dS = \iint\limits_S (x, y, z) \cdot \frac{(x, y, z)}{R} dS = \iint\limits_S \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R} dS = \iint\limits_S R dS = 2\pi R^3.$$

Cách tính tích phân mặt loại hai

Cách tính

Ngoài phương pháp tính tích phân mặt loại hai thông qua tích phân mặt loại một, chúng ta còn có cách sau để tính tích phân mặt loại hai thông qua tích phân kép:

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy \\ &= \iint\limits_S P(x,y,z)dydz + \iint\limits_S Q(x,y,z)dzdx + \iint\limits_S R(x,y,z)dxdy := I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Tính $I_3 = \iint\limits_S R(x,y,z)dxdy$. Ký hiệu γ là góc hợp bởi $\overrightarrow{Oz}$ với $\overrightarrow{n}$.

- Viết pt S dạng: $z = z(x,y)$ (bắt buộc),
- Tìm hình chiếu D_{xy} của S lên mp $z = 0$ (Oxy) (bắt buộc),

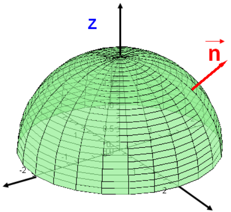
  $\gamma < \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_3 = \iint\limits_D R\Big(x,y,z(x,y)\Big)dxdy,$ $\qquad \gamma > \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_3 = -\iint\limits_D R\Big(x,y,z(x,y)\Big)dxdy,$

  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ $(S \parallel Oz$ hoặc S chứa $Oz) \Rightarrow I_3 = 0$. Tương tự ta tính cho I_1 và I_2.

Các ví dụ

Ví dụ 2

Cho S là phía ngoài của nửa mặt cầu $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Tính $I = \iint\limits_S z dx dy$.



Hình 7: Nửa cầu hướng ra ngoài

Ví dụ 2

$I = I_3 = \iint\limits_S z dx dy.$

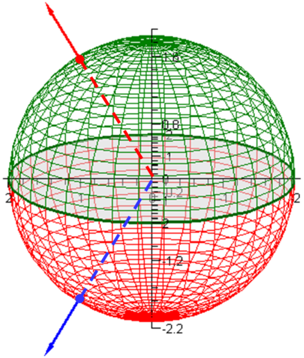
- Pt: $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$,
- $\gamma \leq \frac{\pi}{2}$,
- $\mathrm{hc}_{(Oxy)} S = D_{xy} : x^2 + y^2 \leq R^2$.

Do đó,

$$I = + \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr = \frac{2\pi}{3} R^3.$$

Ví dụ 3

Cho S là phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Tính $I = \iint\limits_S x^{2022} z^2 dxdy$.



Hình 8: Cầu hướng ra ngoài (S_1 và S_2 đối xứng với nhau qua mp $z = 0$)

Ví dụ 3

- $S_1, S_2 : z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$,
- $\gamma_1 \leq \frac{\pi}{2}, \quad \gamma_2 \geq \frac{\pi}{2}$,
- $\text{hc}_{(Oxy)} S_{1,2} = D_{xy} : x^2 + y^2 \leq R^2$.

$$I = \iint\limits_{S} x^{2022} z^2 dxdy = \iint\limits_{S_1} x^{2022} z^2 dxdy + \iint\limits_{S_2} x^{2022} z^2 dxdy$$

$$= + \iint\limits_{D_{xy}} x^{2022} (\sqrt{R^2 - x^2 - y^2})^2 dxdy - \iint\limits_{D_{xy}} x^{2022} (\sqrt{R^2 - x^2 - y^2})^2 dxdy = 0.$$

Lưu ý: $R(x, y, z) = x^{2022} z^2$ chẵn theo biến z.

Lưu ý về tính đối xứng

S gồm S_1 và S_2 đối xứng với nhau qua mp $z = 0$:

- $R(x, y, z)$ chẵn theo biến z thì $I_3 = 0$,
- $R(x, y, z)$ lẻ theo biến z thì $I_3 = 2 \iint\limits_{S_1} R(x, y, z) dxdy$.

  Tương tự cho I_1 (xét P và mp $x = 0$), I_2 (xét Q và mp $y = 0$).

BTVN

BTVN

1. Cho S là phía ngoài của nửa mặt cầu $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Tính
$$I = \iint\limits_S xdydz.$$

2. Cho S là phía trên của phần mặt trụ $z = y^2$ bị chắn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$. Tính
$$I = \iint\limits_S (x + y^2)dydz + 2z\cos ydzdx + zdxdy.$$

Định lý Ostrogradsky

Trong trường hợp mặt lấy tích phân là một mặt cong kín, công thức Ostrogradsky cho phép đưa tích phân mặt loại hai về tích phân bội ba.

Định lý

Cho Ω là miền đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^3$, S là phía ngoài mặt biên của Ω (S là mặt cong kín, trơn từng mảnh). P, Q, R và các đạo hàm riêng liên tục trên Ω. Khi đó,

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_\Omega \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big)dxdydz.$$

Ví dụ 4

Cho S là phía ngoài mặt bao khối $\Omega : x^2 + y^2 \leq z \leq 1$. Tính

$$I = \iint\limits_S zy^2dydz + (y + y^2)dzdx + x^2dxdy.$$

Ví dụ 4

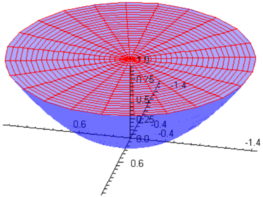
Ta có S kín, hướng ra ngoài. Theo Công thức OS,

$$I = \iiint\limits_{\Omega} \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big) dxdydz$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} (0 + 1 + 2y + 0) dxdydz$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} (1 + 2y) dxdydz \quad (\Omega : x^2 + y^2 \leq z \leq 1)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_{r^2}^1 (1 + 2r \sin\varphi) dz = \frac{\pi}{2}.$$

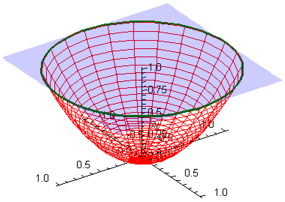


Hình 9: Mặt Elliptic Paraboloid kín

Ví dụ 5

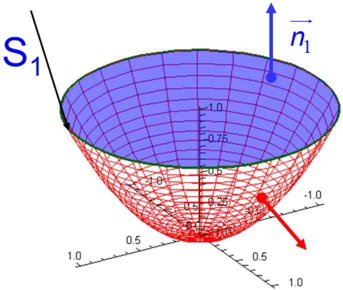
Cho S là phía ngoài phần mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ bị chắn bởi mp $z = 1$. Tính

$$I = \iint\limits_S zy^2 dydz + (y + y^2) dzdx + x^2 dxdy.$$



Hình 10: Mặt Elliptic Paraboloid chưa kín

Ví dụ 5



Hình 11: Thêm S_1 vào để tạo thành mặt kín

- S_1 là phía trên phần mp $z = 1$ bị chắn trong paraboloid.
- Gọi Ω là vật thể được bao bởi $S \cup S_1$.

Ví dụ 5

Áp dụng công thức OS và xem Ví dụ 4:

$$\iint\limits_{S\cup S_1} zy^2dydz+(y+y^2)dzdx+x^2dxdy=\iiint\limits_{\Omega}\Big(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\Big)dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(1+2y)dxdydz=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\iint\limits_{S}+\iint\limits_{S1}=\frac{\pi}{2}.$$

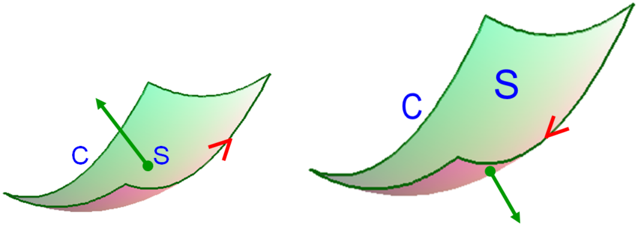
Vậy,

$$I=\frac{\pi}{2}-\iint\limits_{S_1} zy^2dydz+(y+y^2)dzdx+x^2dxdy=\frac{\pi}{2}-\iint\limits_{S_1}x^2dxdy=\frac{\pi}{2}-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}x^2dxdy=\frac{\pi}{4}$$

(do S_1 song song với Ox và Oy).

Công thức Stokes

Cho mặt định hướng S trơn từng mảnh, có biên là đường cong kín C trơn từng khúc không tự cắt. C gọi là định hướng dương theo S nếu khi đứng trên mặt S (pháp tuyến của mặt theo hướng từ chân đến đầu) và đi trên C theo hướng đó sẽ luôn thấy S ở bên trái.



Hình 12: C định hướng theo S

Công thức Stokes

Môi liên quan giữa tích phân đường loại hai và tích phân mặt loại hai

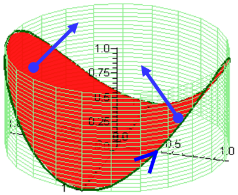
Giả sử P, Q, R là các hàm số khả vi liên tục trong một miền chứa mặt S, biên C định hướng dương theo S. Khi đó,

$$\oint_C P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Ví dụ 6

Cho C là giao tuyến của trụ $x^2 + y^2 = 1$ và trụ $z = y^2$ lấy ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ phía dương Oz.
Tính: $\int_C (x + y)dx + (2x^2 - z)dy + xy^2 dz$.

Ví dụ 6



Hình 13: Hướng C sinh ra hướng S

S là phía trên mặt trụ $z = y^2$.Theo CT Stokes

$$I = \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

$$= \iint\limits_S (2xy+1)\,dydz + \left(0 - y^2\right) dzdx + (4x-1)\,dxdy.$$

- S chứa Ox nên $\iint\limits_S (2xy+1)\,dydz = 0$.
- S đối xứng qua mặt phẳng $y=0$ và $f=y^2$ chẵn theo y nên $\iint\limits_S y^2dzdx = 0$.

Vậy, $I = \iint\limits_S (4x-1)\,dxdy = + \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} (4x-1)\,dxdy = -\pi$.

BTVN

1. Cho S là phía trong mặt bao khối Ω giới hạn bởi $z = 4-y^2, x=0, x=4, z=0$. Tính: $I = \iint\limits_S xzdydz + xdzdx + zydxdy$.
2. Cho C là giao tuyến của trụ $x^2+y^2=1$ và mặt phẳng $x+z=1$ lấy ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ gốc tọa độ. Tính: $I = \int_C (y-z^2)dx + (z-y^2)dy + (x-y^2)dz$.