GIẢI TÍCH III

TS. Lê Văn Tứ

Hanoi University of Science and Technology

Chuỗi luỹ thừa

Định nghĩa

Cho $(a_n)_{n\geq 0}$ là một dãy số. Chuỗi hàm $u_n(x)$ được gọi là một chuỗi luỹ thừa với dãy hệ số a_n nếu nó có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Ghi chú: Dãy chỉ số n có thể bắt đầu từ 0 hoặc từ một số nguyên dương k.

Ví dụ

- Với $|x| < 1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
- Với $|x| < 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

Định lí Abel

Định lí

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \text{ hội tụ } \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ hội tụ tuyệt đối trên } (-|x_0|, |x_0|).$$

Chứng minh. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ hội tụ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n x_0^n = 0 \Rightarrow$ Tồn tại $M > 0$, $n_0 > 0$ sao cho

$$\forall n > n_0, |a_n x_0^n| < M.$$

Khi đó, với $|x| < |x_0|$ và $n \geq n_0$,

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

$\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ hội tụ $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối.

Bán kính hội tụ

Hệ quả

Cho chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Tồn tại $0 \le R \le +\infty$ thoả mãn:

- Chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ trên $(-R, R)$.
- Chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kì trên $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$.

Giá trị R được gọi là *bán kính hội tụ*.

Ví dụ

- Chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ có $R = 0$.

- Chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ có $R = 1$.

- Chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ có $R = +\infty$.

Tính toán bán kính hội tụ

Định lí

Cho chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ với bán kính hội tụ R.

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \Rightarrow R = \begin{cases} \frac{1}{\rho} \text{ khi } \rho \neq 0 \\ 0 \text{ khi } \rho = +\infty \\ +\infty \text{ khi } \rho = 0 \end{cases}$$

Ta có phát biểu tương tự khi $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$.

Gợi ý chứng minh. Với $\rho \neq 0$, xét tiêu chuẩn D'Alembert

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}x\right| \xrightarrow{n\to+\infty} |x|\rho.$$

Nếu $|x| < \frac{1}{\rho}$ thì $|x|\rho < 1$, chuỗi hội tụ tuyệt đối. Nếu $|x| > \frac{1}{\rho}$ thì $|x|\rho > 1$, chuỗi phân kì.

Ví dụ

Tìm miền hội tụ D của chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n}{n^2+1}x^n$

Xét

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)2^{n+1}}{(n+1)^2+1}.\frac{n^2+1}{n2^n} = 2.$$

$\Rightarrow$ Bán kính hội tụ $R = \frac{1}{2}$.

- Tại $x = \frac{1}{2}$, $a_n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$. Theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi phân kì tại $\frac{1}{2}$.

- Tại $x = -\frac{1}{2}$, $a_n\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$. Do $\frac{n}{n^2+1}$ giảm về 0 khi $n \to +\infty$, chuỗi hội tụ tại $-\frac{1}{2}$ theo Leibniz.

Kết luận: $D = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Ví dụ

Tìm miền hội tụ D của $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$

Chuỗi có dạng $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x)$ với $a_n = \frac{1}{2^n}$, $u_n(x) = x^{2n}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Vậy bán kính hội tụ là $R = 2$.

Tuy nhiên, tại $x = \frac{3}{2} \in (-2, 2)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n u_n(\frac{3}{2}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}}{2^{2n}2^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{8}\right)^n$ phân kì.

Sai lầm ở đâu ? Sai lầm: Nếu viết $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$ dưới dạng chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ thì

$$a_n = \begin{cases} 0 \text{ nếu } n = 2k+1 \\ \frac{1}{2^n} \text{ nếu } n = 2k \end{cases}.$$

Ví dụ

Tìm miền hội tụ D của $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$

Đặt $y = x^2$. Xét chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{2^n}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Bán kính hội tụ của $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ là $R = 2 \Rightarrow (-2, 2)$ thuộc miền hội tụ của $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n$.
$\Rightarrow (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \subset D$.
Tại $x = \sqrt{2}$, chuỗi có dạng $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}^{2n}}{2^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1$ phân kì. Tương tự, tại $x = -\sqrt{2}$, chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$ phân kì.
Kết luận: $D = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Tính chất của chuỗi luỹ thừa

Định lí

Cho chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ với bán kính hội tụ $R > 0$. Đặt $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ trên $(-R, R)$.

- Với mọi $[a, b] \subset (-R, R)$, chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ đều trên $[a, b]$.
- $S(x)$ liên tục trên $(-R, R)$.
- Với mọi $[a, b] \subset (-R, R)$, $S(x)$ khả tích trên $[a, b]$ và

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx.$$

- $S(x)$ khả vi trên $(-R, R)$ và

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Ví dụ

Tính tổng $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$

Đây là chuỗi luỹ thừa bán kính $R = 1$. Đặt $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$.

$$\begin{aligned}\int S(x)dx &= \sum_{n=0}^{\infty}\int(n+1)x^n dx\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}x^n\\ &= \frac{x}{1-x}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow S(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Khai triển Taylor cấp n

Định lí

Cho hàm $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ có đạo hàm đến cấp $n+1$ trên (a, b). Cố định $x_0 \in (a, b)$. Với mọi $x \in (a, b)$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

với c nằm giữa x và x_0.

Đại lượng $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ còn được gọi là phần dư Lagrange của khai triển Taylor.

Định lí

Cho hàm $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ có đạo hàm mọi cấp. Cố định $x_0 \in (a, b)$. Với $x \in (a, b)$,

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Đọc thêm: Hàm khả vi vô hạn lần nhưng không bằng chuỗi Maclaurin

Xét hàm $f(x) = \begin{cases} e^{-\dfrac{1}{x^2}} \text{ nếu } x \neq 0 \\ 0 \text{ nếu } x = 0 \end{cases}$.

- $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0 \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ nếu } x \neq 0 \\ 0 \text{ nếu } x = 0 \end{cases}$.
- Bằng qui nạp, $f^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}} P_{2n-2}(x)}{x^{3n}} \text{ nếu } x \neq 0 \\ 0 \text{ nếu } x = 0 \end{cases}$.

với $P_{2n-2}(x)$ là đa thức bậc $2n-2$.

$\Rightarrow$ Chuỗi Maclaurin của f có dạng $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 + 0 + \dots$

Vậy $f(x)$ khác chuỗi Maclaurin của nó trong bất kì lân cận nào của 0.

Chuỗi Taylor - Chuỗi Maclaurin

Định lí

Cho hàm $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ có đạo hàm mọi cấp. Cố định $x_0 \in (a, b)$. Nếu tồn tại $M > 0$ sao cho

$$\forall x \in (a, b), |f^{(n)}(x)| < M \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Khi đó, ta gọi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ là chuỗi Taylor của f trong lân cận (a, b) của x_0.

Ghi chú

- Sự hội tụ của chuỗi Taylor là sự hội tụ điểm. Chuỗi Taylor có thể không hội tụ đều về $f(x)$.
- Nếu x_0, chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ được gọi là chuỗi Maclaurin của f trong một lân cận của 0.

Các chuỗi Maclaurin cơ bản

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \ldots, \quad R = +\infty.$
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots, \quad R = +\infty.$
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots, \quad R = +\infty.$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots, R = 1.$
- $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots, R = 1.$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \alpha \in \mathbb{R}, R = 1.$
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots, R = 1.$
- $\arctan(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots, R = 1.$

Ví dụ

Khai triển hàm $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$ thành chuỗi luỹ thừa của $x-2$

Ta có $f(x) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}\right)$.

- $$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{(x-2)-1} = -\frac{1}{1-(x-2)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n.$$
- $$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{(x-2)+5} = \frac{1}{5}\frac{1}{1+\dfrac{x-2}{5}} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-2}{5}\right)^n.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{6}\left(-1-\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}\right)(x-2)^n.$$

Ví dụ

Tính chuỗi Maclaurin của $f(x) = e^x \cos x$

Do

- $f'(x) = e^x(\cos x - \sin x) = \sqrt{2}e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
- $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2}^n e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}^n e^x \left(\cos(x + \frac{n\pi}{4}) - \sin(x + \frac{n\pi}{4})\right) = \sqrt{2}^{n+1} e^x \cos\left(x + \frac{(n+1)\pi}{4}\right)$.

$\Rightarrow$ Theo qui nạp, $f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$.
Vậy chuỗi Maclaurin của $e^x \cos(x)$ có dạng

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n!} x^n.$$