Chương 4
TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

BỘ MÔN TOÁN CƠ BẢN

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

SAMI.HUST – 2023

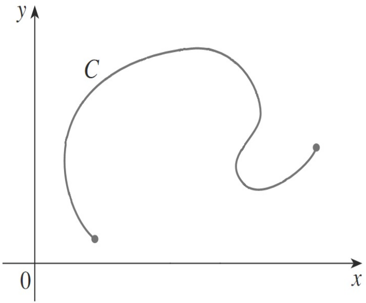
Nội dung

Tích phân đường

Tích phân đường được đưa ra vào đầu thế kỷ 19, khi giải quyết các bài toán liên quan đến dòng chảy, lực, điện trường và từ trường. Bài giảng này sẽ trình bày về tích phân đường, bao gồm tích phân đường loại một và tích phân đường loại hai.

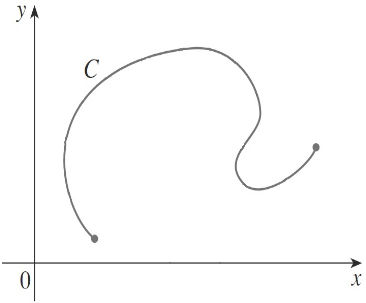
Tích phân đường

Tích phân đường được đưa ra vào đầu thế kỷ 19, khi giải quyết các bài toán liên quan đến dòng chảy, lực, điện trường và từ trường. Bài giảng này sẽ trình bày về tích phân đường, bao gồm tích phân đường loại một và tích phân đường loại hai.



Tích phân đường

Tích phân đường được đưa ra vào đầu thế kỷ 19, khi giải quyết các bài toán liên quan đến dòng chảy, lực, điện trường và từ trường. Bài giảng này sẽ trình bày về tích phân đường, bao gồm tích phân đường loại một và tích phân đường loại hai.

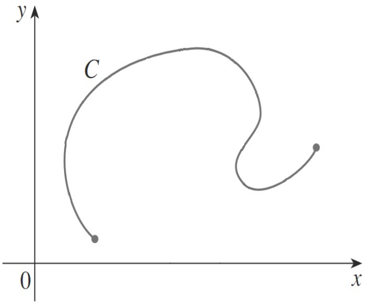


Giả sử C là đường cong trơn, cho bởi phương trình tham số

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{với } a \leq t \leq b.$$

Tích phân đường

Tích phân đường được đưa ra vào đầu thế kỷ 19, khi giải quyết các bài toán liên quan đến dòng chảy, lực, điện trường và từ trường. Bài giảng này sẽ trình bày về tích phân đường, bao gồm tích phân đường loại một và tích phân đường loại hai.



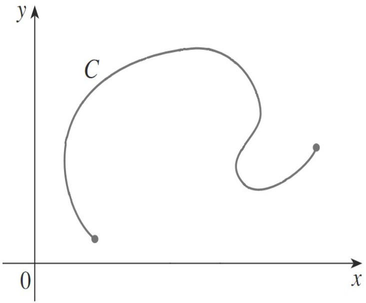
Giả sử C là đường cong trơn, cho bởi phương trình tham số

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{với } a \leq t \leq b.$$

Khi đó độ dài đường cong C là

$$\ell = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Tích phân đường được đưa ra vào đầu thế kỷ 19, khi giải quyết các bài toán liên quan đến dòng chảy, lực, điện trường và từ trường. Bài giảng này sẽ trình bày về tích phân đường, bao gồm tích phân đường loại một và tích phân đường loại hai.



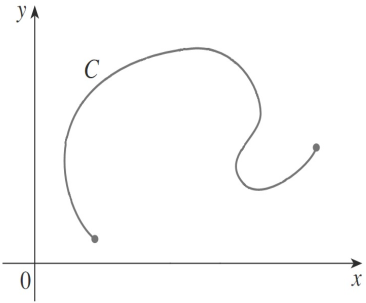
Giả sử C là đường cong trơn, cho bởi phương trình tham số

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{với } a \leq t \leq b.$$

Khi đó độ dài đường cong C là

$$\ell = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt =: \int_C ds.$$

Tích phân đường được đưa ra vào đầu thế kỷ 19, khi giải quyết các bài toán liên quan đến dòng chảy, lực, điện trường và từ trường. Bài giảng này sẽ trình bày về tích phân đường, bao gồm tích phân đường loại một và tích phân đường loại hai.



Giả sử C là đường cong trơn, cho bởi phương trình tham số

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{với } a \leq t \leq b.$$

Khi đó độ dài đường cong C là

$$\ell = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt =: \int_C ds.$$

Khái niệm tích phân đường!

Tích phân đường loại một

Bài toán Xét một sợi dây kim loại có mật độ khối lượng (khối lượng theo đơn vị độ dài) phân bố dọc theo đường cong C, với $f(x, y)$ là mật độ khối lượng tại điểm (x, y) của sợi dây.

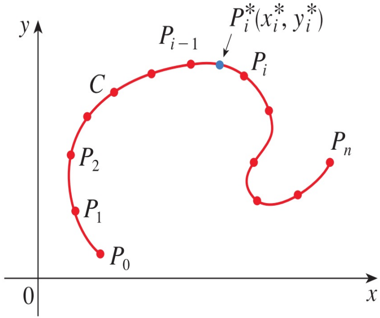
Tích phân đường loại một

Bài toán Xét một sợi dây kim loại có mật độ khối lượng (khối lượng theo đơn vị độ dài) phân bố dọc theo đường cong C, với $f(x, y)$ là mật độ khối lượng tại điểm (x, y) của sợi dây.
Tính khối lượng của sợi dây đó.

Tích phân đường loại một

Bài toán Xét một sợi dây kim loại có mật độ khối lượng (khối lượng theo đơn vị độ dài) phân bố dọc theo đường cong C, với $f(x,y)$ là mật độ khối lượng tại điểm (x,y) của sợi dây.
Tính khối lượng của sợi dây đó.

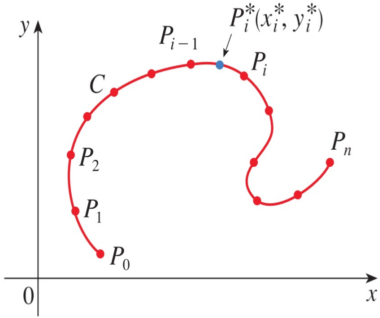
Ta chia đường cong C thành n cung nhỏ bởi các điểm chia P_i, $i=\overline{0,n}$. Gọi Δs_i là độ dài cung $\overset{\frown}{P_{i-1}P_i}$, $i=\overline{1,n}$. Chọn $P_i^*(x_i^*,y_i^*)$ bất kỳ trên cung $\overset{\frown}{P_{i-1}P_i}$.



Bài toán Xét một sợi dây kim loại có mật độ khối lượng (khối lượng theo đơn vị độ dài) phân bố dọc theo đường cong C, với $f(x,y)$ là mật độ khối lượng tại điểm (x,y) của sợi dây.
Tính khối lượng của sợi dây đó.

Ta chia đường cong C thành n cung nhỏ bởi các điểm chia P_i, $i=\overline{0,n}$. Gọi Δs_i là độ dài cung $\overparen{P_{i-1}P_i}$, $i=\overline{1,n}$. Chọn $P_i^*(x_i^*,y_i^*)$ bất kỳ trên cung $\overparen{P_{i-1}P_i}$. Khối lượng của sợi dây được xấp xỉ bởi tổng (tương tự như tổng tích phân Riemann)

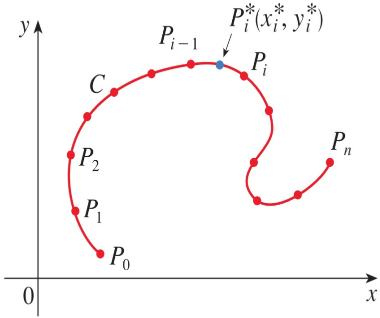
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*,y_i^*)\Delta s_i \approx m.$$



Bài toán Xét một sợi dây kim loại có mật độ khối lượng (khối lượng theo đơn vị độ dài) phân bố dọc theo đường cong C, với $f(x,y)$ là mật độ khối lượng tại điểm (x,y) của sợi dây.
Tính khối lượng của sợi dây đó.

Ta chia đường cong C thành n cung nhỏ bởi các điểm chia P_i, $i=\overline{0,n}$. Gọi Δs_i là độ dài cung $\overparen{P_{i-1}P_i}$, $i=\overline{1,n}$. Chọn $P_i^*(x_i^*,y_i^*)$ bất kỳ trên cung $\overparen{P_{i-1}P_i}$. Khối lượng của sợi dây được xấp xỉ bởi tổng (tương tự như tổng tích phân Riemann)

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*,y_i^*)\Delta s_i \approx m.$$



Khối lượng của sợi dây là

$$m=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*,y_i^*)\Delta s_i \quad \text{(lấy giới hạn sao cho } \max_{i=\overline{1,n}}\Delta s_i\to 0\text{)}.$$

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên miền chứa đường cong C. Tích phân đường loại một của hàm f dọc theo cung C là

$$\int_C f(x,y)\,ds = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*,y_i^*)\Delta s_i,$$

nếu giới hạn đó tồn tại và không phụ thuộc vào cách chia cung C và cách chọn điểm $P_i^*(x_i^*,y_i^*)$ trên cung nhỏ thứ i. Khi đó ta nói hàm f khả tích trên cung C.

Tích phân đường loại một

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trên miền chứa đường cong C. Tích phân đường loại một của hàm f dọc theo cung C là

$$\int\limits_C f(x, y)\, ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i,$$

nếu giới hạn đó tồn tại và không phụ thuộc vào cách chia cung C và cách chọn điểm $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ trên cung nhỏ thứ i. Khi đó ta nói hàm f khả tích trên cung C.

Nếu $f(x, y) \equiv 1$ thì tích phân đường $\int\limits_C ds$ cho ta độ dài của đường cong C.

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trên miền chứa đường cong C. Tích phân đường loại một của hàm f dọc theo cung C là

$$\int\limits_C f(x, y)\, ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i,$$

nếu giới hạn đó tồn tại và không phụ thuộc vào cách chia cung C và cách chọn điểm $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ trên cung nhỏ thứ i. Khi đó ta nói hàm f khả tích trên cung C.

Nếu $f(x, y) \equiv 1$ thì tích phân đường $\int\limits_C ds$ cho ta độ dài của đường cong C.

Tính khả tích: Nếu f là hàm số liên tục trên cung trơn C, thì hàm f khả tích trên cung C.

Tích phân đường loại một

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên miền chứa đường cong C. Tích phân đường loại một của hàm f dọc theo cung C là

$$\int\limits_C f(x,y)\,ds = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i,$$

nếu giới hạn đó tồn tại và không phụ thuộc vào cách chia cung C và cách chọn điểm $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ trên cung nhỏ thứ i. Khi đó ta nói hàm f khả tích trên cung C.

Nếu $f(x,y) \equiv 1$ thì tích phân đường $\int\limits_C ds$ cho ta độ dài của đường cong C.

Tính khả tích: Nếu f là hàm số liên tục trên cung trơn C, thì hàm f khả tích trên cung C.
Tích chất: Tích phân đường loại một có các tính chất tương tự như tích phân xác định. Ngoài ra, tích phân đường loại một không phụ thuộc vào chiều của đường cong.

Cách tính tích phân đường loại một

Cách tính tích phân đường loại một

Nếu C có phương trình tham số $x = x(t),\ y = y(t),\ a \leq t \leq b$, thì

$$\boxed{\int\limits_C f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.}$$

Cách tính tích phân đường loại một

Nếu C có phương trình tham số $x = x(t),\ y = y(t),\ a \leq t \leq b$, thì

$$\boxed{\int\limits_C f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.}$$

Ví dụ 1. Tính $I = \int_C (3 + xy^2)ds$, trong đó C là nửa trên của đường tròn đơn vị $x^2 + y^2 = 1$.

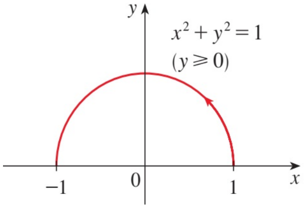
Cách tính tích phân đường loại một

Nếu C có phương trình tham số $x = x(t),\ y = y(t),\ a \leq t \leq b$, thì

$$\boxed{\int\limits_C f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.}$$

Ví dụ 1. Tính $I = \int_C (3 + xy^2)ds$, trong đó C là nửa trên của đường tròn đơn vị $x^2 + y^2 = 1$.

Lời giải. Pt tham số của C là $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$.



Cách tính tích phân đường loại một

Nếu C có phương trình tham số $x = x(t),\ y = y(t),\ a \leq t \leq b$, thì

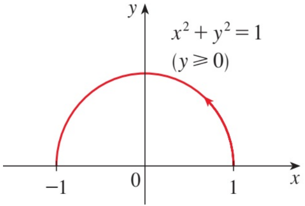
$$\boxed{\int\limits_C f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.}$$

Ví dụ 1. Tính $I = \int_C (3 + xy^2)ds$, trong đó C là nửa trên của đường tròn đơn vị $x^2 + y^2 = 1$.

Lời giải. Pt tham số của C là $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$.

Ta có

$$I =$$



Cách tính tích phân đường loại một

Nếu C có phương trình tham số $x = x(t),\ y = y(t),\ a \le t \le b$, thì

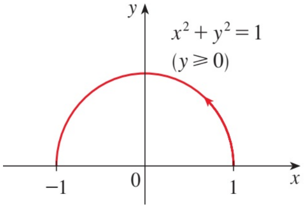
$$\boxed{\int\limits_C f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.}$$

Ví dụ 1. Tính $I = \int_C (3 + xy^2)ds$, trong đó C là nửa trên của đường tròn đơn vị $x^2 + y^2 = 1$.

Lời giải. Pt tham số của C là $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$.

Ta có

$$I = \int_0^\pi (3 + \cos t \sin^2 t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$



Cách tính tích phân đường loại một

Nếu C có phương trình tham số $x = x(t),\ y = y(t),\ a \leq t \leq b$, thì

$$\boxed{\int\limits_C f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.}$$

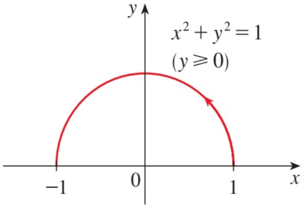
Ví dụ 1. Tính $I = \int_C (3 + xy^2)ds$, trong đó C là nửa trên của đường tròn đơn vị $x^2 + y^2 = 1$.

Lời giải. Pt tham số của C là $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$.

Ta có

$$I = \int_0^\pi (3 + \cos t \sin^2 t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_0^\pi (3 + \cos t \sin^2 t)dt$$



Cách tính tích phân đường loại một

Nếu C có phương trình tham số $x = x(t),\ y = y(t),\ a \le t \le b$, thì

$$\boxed{\int\limits_C f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.}$$

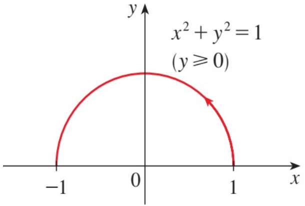
Ví dụ 1. Tính $I = \int_C (3 + xy^2)ds$, trong đó C là nửa trên của đường tròn đơn vị $x^2 + y^2 = 1$.

Lời giải. Pt tham số của C là $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$.

Ta có

$$I = \int_0^\pi (3 + \cos t \sin^2 t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_0^\pi (3 + \cos t \sin^2 t)dt = \left(3t + \frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^\pi$$



Cách tính tích phân đường loại một

Nếu C có phương trình tham số $x = x(t),\ y = y(t),\ a \le t \le b$, thì

$$\boxed{\int\limits_C f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.}$$

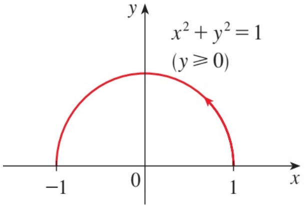
Ví dụ 1. Tính $I = \int_C (3 + xy^2)ds$, trong đó C là nửa trên của đường tròn đơn vị $x^2 + y^2 = 1$.

Lời giải. Pt tham số của C là $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$.

Ta có

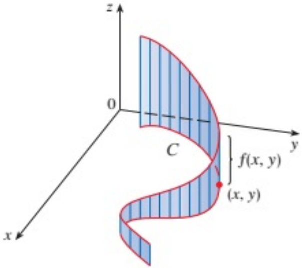
$$I = \int_0^\pi (3 + \cos t \sin^2 t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_0^\pi (3 + \cos t \sin^2 t)dt = \left(3t + \frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^\pi = 3\pi.$$



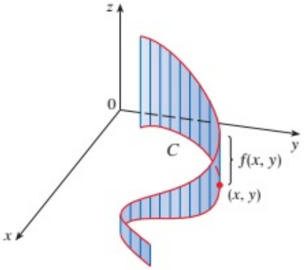
Một số tính chất

Chú ý 1. Tích phân đường loại một $\int_C f(x,y)ds$ của hàm số dương $f(x,y)$ biểu biễn diện tích của "bức tường" với chân tường tựa trên đường cong C và chiều cao tại điểm (x,y) là $h = f(x,y)$.



Một số tính chất

Chú ý 1. Tích phân đường loại một $\int_C f(x,y)ds$ của hàm số dương $f(x,y)$ biểu biễn diện tích của "bức tường" với chân tường tựa trên đường cong C và chiều cao tại điểm (x,y) là $h = f(x,y)$.

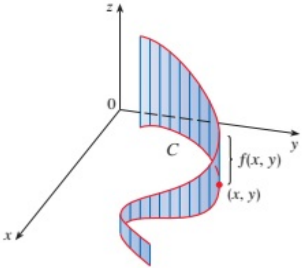


Chú ý 2. Nếu C là đường cong trơn từng khúc (C là hợp của hữu hạn các đường cong trơn C_1, C_2, ..., C_n), thì tích phân đường của f dọc theo đường cong C là

$$\int_C f(x,y)ds = \int_{C_1} f(x,y)ds + \int_{C_2} f(x,y)ds + \cdots + \int_{C_n} f(x,y)ds.$$

Một số tính chất

Chú ý 1. Tích phân đường loại một $\int_C f(x,y)ds$ của hàm số dương $f(x,y)$ biểu biễn diện tích của "bức tường" với chân tường tựa trên đường cong C và chiều cao tại điểm (x,y) là $h = f(x,y)$.



Chú ý 2. Nếu C là đường cong trơn từng khúc (C là hợp của hữu hạn các đường cong trơn C_1, C_2, ..., C_n), thì tích phân đường của f dọc theo đường cong C là

$$\int_C f(x,y)ds = \int_{C_1} f(x,y)ds + \int_{C_2} f(x,y)ds + \cdots + \int_{C_n} f(x,y)ds.$$

Ví dụ 2. Tính $\int_C (x+y)ds$, với C gồm cung C_1 của parabol $y = x^2$ từ $(0;0)$ đến $(1;1)$ và đoạn thẳng C_2 từ $(1;1)$ đến $(2;2)$.

Ví dụ 3. (20182CK Đề 4) Tính $J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds$, với C là đường astroid $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất nối 2 điểm $A(1;0)$ và $B(0;1)$.

Ví dụ 3. (20182CK Đề 4) Tính $J = \int\limits_C (x^2 + 1)\, ds$, với C là đường astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất nối 2 điểm $A(1; 0)$ và $B(0; 1)$.

Lời giải. Phương trình tham số của đường astroid C là $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$,

Ví dụ 3. (20182CK Đề 4) Tính $J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds$, với C là đường astroid $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất nối 2 điểm $A(1;0)$ và $B(0;1)$.

Lời giải. Phương trình tham số của đường astroid C là $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$.

Ví dụ 3. (20182CK Đề 4) Tính $J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds$, với C là đường astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất nối 2 điểm $A(1;0)$ và $B(0;1)$.

Lời giải. Phương trình tham số của đường astroid C là $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $0 \leq t \leq \pi/2$. Ta có

$$J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds$$

Ví dụ 3. (20182CK Đề 4) Tính $J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds$, với C là đường astroid $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất nối 2 điểm $A(1;0)$ và $B(0;1)$.

Lời giải. Phương trình tham số của đường astroid C là $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $0\le t\le \pi/2$. Ta có

$$J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds = \int\limits_0^{\pi/2} (\cos^6 t+1)\sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2}dt$$

Ví dụ 3. (20182CK Đề 4) Tính $J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds$, với C là đường astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất nối 2 điểm $A(1;0)$ và $B(0;1)$.

Lời giải. Phương trình tham số của đường astroid C là $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$. Ta có

$$J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds = \int\limits_0^{\pi/2} (\cos^6 t + 1)\sqrt{(-3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2} dt$$

$$= 3\int\limits_0^{\pi/2} (\cos^6 t + 1)\sin t \cos t dt$$

Ví dụ 3. (20182CK Đề 4) Tính $J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds$, với C là đường astroid $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất nối 2 điểm $A(1;0)$ và $B(0;1)$.

Lời giải. Phương trình tham số của đường astroid C là $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$. Ta có

$$J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds = \int\limits_0^{\pi/2} (\cos^6 t + 1)\sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2 + (3\sin^2 t\cos t)^2}dt$$

$$= 3\int\limits_0^{\pi/2} (\cos^6 t + 1)\sin t\cos t dt = -3\int\limits_0^{\pi/2} (\cos^7 t + \cos t)d(\cos t)$$

Ví dụ 3. (20182CK Đề 4) Tính $J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds$, với C là đường astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất nối 2 điểm $A(1;0)$ và $B(0;1)$.

Lời giải. Phương trình tham số của đường astroid C là $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$. Ta có

$$J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds = \int\limits_0^{\pi/2} (\cos^6 t + 1)\sqrt{(-3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2} dt$$

$$= 3\int\limits_0^{\pi/2} (\cos^6 t + 1)\sin t \cos t dt = -3\int\limits_0^{\pi/2} (\cos^7 t + \cos t) d(\cos t)$$

$$= -3\left(\frac{1}{8}\cos^8 t + \frac{1}{2}\cos^2 t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}$$

Ví dụ 3. (20182CK Đề 4) Tính $J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds$, với C là đường astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất nối 2 điểm $A(1;0)$ và $B(0;1)$.

Lời giải. Phương trình tham số của đường astroid C là $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$. Ta có

$$J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds = \int\limits_0^{\pi/2} (\cos^6 t + 1)\sqrt{(-3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2}dt$$

$$= 3\int\limits_0^{\pi/2} (\cos^6 t + 1)\sin t \cos t dt = -3\int\limits_0^{\pi/2} (\cos^7 t + \cos t)d(\cos t)$$

$$= -3\left(\frac{1}{8}\cos^8 t + \frac{1}{2}\cos^2 t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 3\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right)$$

Ví dụ 3. (20182CK Đề 4) Tính $J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds$, với C là đường astroid $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất nối 2 điểm $A(1;0)$ và $B(0;1)$.

Lời giải. Phương trình tham số của đường astroid C là $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$. Ta có

$$J = \int\limits_C (x^2+1)\,ds = \int\limits_0^{\pi/2} (\cos^6 t+1)\sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2}dt$$

$$= 3\int\limits_0^{\pi/2} (\cos^6 t+1)\sin t\cos t dt = -3\int\limits_0^{\pi/2} (\cos^7 t+\cos t)d(\cos t)$$

$$= -3\left(\frac{1}{8}\cos^8 t+\frac{1}{2}\cos^2 t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 3\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8}.$$

Tích phân đường loại một

Nếu C có phương trình $y = y(x)$, với $a \le x \le b$, thì

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx.$$

Tích phân đường loại một

Nếu C có phương trình $y = y(x)$, với $a \leq x \leq b$, thì

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx.$$

Và nếu C được cho bởi $x = x(y)$, $c \leq y \leq d$, thì

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_c^d f(x(y),y)\sqrt{1+[x'(y)]^2}\,dy.$$

Tích phân đường loại một

Nếu C có phương trình $y = y(x)$, với $a \le x \le b$, thì

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx.$$

Và nếu C được cho bởi $x = x(y),\ c \le y \le d$, thì

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_c^d f(x(y), y)\sqrt{1 + [x'(y)]^2}\,dy.$$

Bài tập. Tính các tích phân đường sau:

a) $\oint\limits_C (x^2 - y^2)\,ds$, với C là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$.

b) $\int\limits_{AB} x\,ds$, trong đó AB là đoạn thẳng nối $A(0;0)$ với $B(1;1)$.

c) $\int\limits_C ds$, với C là cung parabol $y = x^2$ từ điểm $A(0;0)$ đến điểm $B(1;1)$.

Tích phân đường loại một trong không gian

Cho C là đường cong trơn, có phương trình tham số

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad a \leq t \leq b$$

hay viết dưới dạng hàm vectơ $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\mathbf{i}} + y(t)\vec{\mathbf{j}} + z(t)\vec{\mathbf{k}}$. Nếu hàm ba biến số f liên tục trên miền chứa đường cong C, thì ta định nghĩa tích phân đường của f dọc theo C là

$$\int\limits_C f(x, y, z)\, ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta s_i.$$

Cho C là đường cong trơn, có phương trình tham số

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad a \leq t \leq b$$

hay viết dưới dạng hàm vectơ $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\mathbf{i}} + y(t)\vec{\mathbf{j}} + z(t)\vec{\mathbf{k}}$. Nếu hàm ba biến số f liên tục trên miền chứa đường cong C, thì ta định nghĩa tích phân đường của f dọc theo C là

$$\int\limits_C f(x,y,z)\,ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta s_i.$$

Tích phân đường loại một được tính theo công thức

$$\int\limits_C f(x,y,z)\,ds = \int\limits_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Cho C là đường cong trơn, có phương trình tham số

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad a \le t \le b$$

hay viết dưới dạng hàm vectơ $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\mathbf{i}} + y(t)\vec{\mathbf{j}} + z(t)\vec{\mathbf{k}}$. Nếu hàm ba biến số f liên tục trên miền chứa đường cong C, thì ta định nghĩa tích phân đường của f dọc theo C là

$$\int\limits_C f(x,y,z)\,ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta s_i.$$

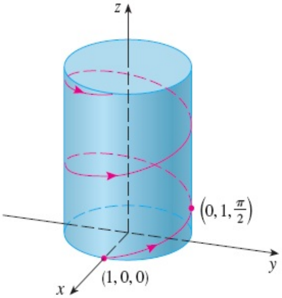
Tích phân đường loại một được tính theo công thức

$$\int\limits_C f(x,y,z)\,ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt.$$

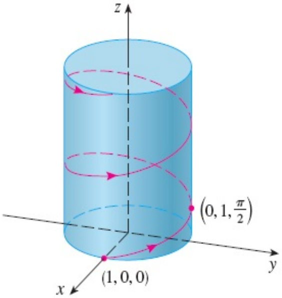
Ví dụ. Tính tích phân đường $\int_C y\sin z ds$, với C là một vòng của đường xoáy trôn ốc, có phương trình $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t,$ với $0 \le t \le 2\pi$.

Ví dụ. Tính tích phân đường $\int_C y\sin z ds$, với C là một vòng của đường xoáy trôn ốc, có phương trình $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t,$ với $0 \le t \le 2\pi$.

Ví dụ. Tính tích phân đường $\int_C y\sin z\,ds$, với C là một vòng của đường xoáy trôn ốc, có phương trình $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, với $0 \le t \le 2\pi$.



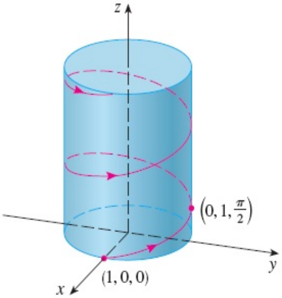
Ví dụ. Tính tích phân đường $\int_C y \sin z ds$, với C là một vòng của đường xoáy trôn ốc, có phương trình $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t,$ với $0 \leq t \leq 2\pi$.



$$\int_C y \sin z ds = \int_0^{2\pi} \sin t \sin t \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} dt$$

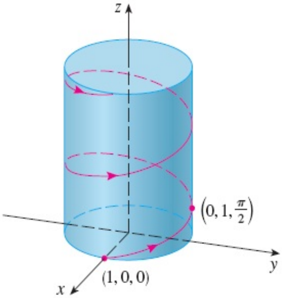
Tích phân đường loại một trong không gian

Ví dụ. Tính tích phân đường $\int_C y \sin z ds$, với C là một vòng của đường xoáy trôn ốc, có phương trình $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t,$ với $0 \leq t \leq 2\pi$.



$$\int_C y \sin z ds = \int_0^{2\pi} \sin t \sin t \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt$$

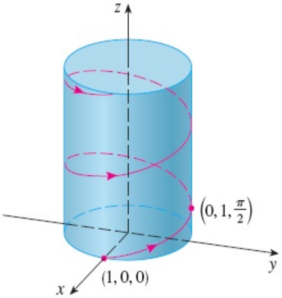
Ví dụ. Tính tích phân đường $\int_C y\sin z ds$, với C là một vòng của đường xoáy trôn ốc, có phương trình $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t,$ với $0 \le t \le 2\pi$.



$$\int_C y\sin z ds = \int_0^{2\pi} \sin t \sin t \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi} [1 - \cos 2t] dt$$

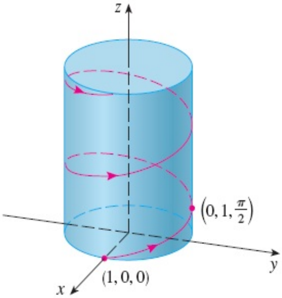
Ví dụ. Tính tích phân đường $\int_C y\sin z ds$, với C là một vòng của đường xoáy trôn ốc, có phương trình $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t,$ với $0 \leq t \leq 2\pi$.



$$\int_C y\sin z ds = \int_0^{2\pi} \sin t \sin t \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi} [1 - \cos 2t] dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi}$$

Ví dụ. Tính tích phân đường $\int_C y \sin z ds$, với C là một vòng của đường xoáy trôn ốc, có phương trình $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t,$ với $0 \leq t \leq 2\pi$.



$$\int_C y \sin z ds = \int_0^{2\pi} \sin t \sin t \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} [1 - \cos 2t] dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\pi.$$

Nội dung

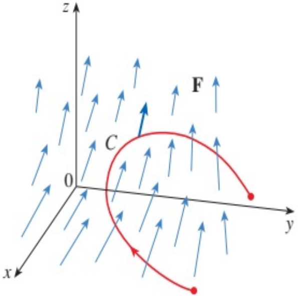
1. Tích phân đường loại một

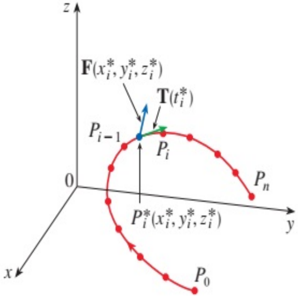
2. **Tích phân đường loại hai**
   - Công thức Green
   - Tích phân đường không phụ thuộc vào đường đi

Tích phân đường loại hai

Bài toán. Cho trường lực $\overrightarrow{\mathbf{F}} = P\vec{\mathbf{i}} + Q\vec{\mathbf{j}} + R\vec{\mathbf{k}}$ liên tục trong $\mathbb{R}^3$, chẳng hạn như trường trọng lực, với P, Q và R là ba thành phần của lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}$. Tính công của lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ làm di chuyển chất điểm dọc theo đường cong trơn C.

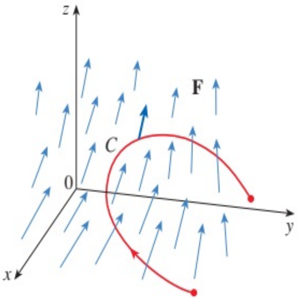
Bài toán. Cho trường lực $\overrightarrow{\mathbf{F}} = P\vec{\mathbf{i}} + Q\vec{\mathbf{j}} + R\vec{\mathbf{k}}$ liên tục trong $\mathbb{R}^3$, chẳng hạn như trường trọng lực, với P, Q và R là ba thành phần của lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}$. Tính công của lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ làm di chuyển chất điểm dọc theo đường cong trơn C.

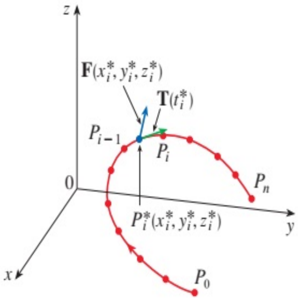




Tích phân đường loại hai

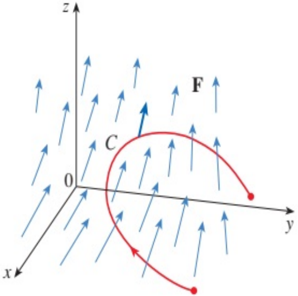
Bài toán. Cho trường lực $\overrightarrow{\mathbf{F}} = P\vec{\mathbf{i}} + Q\vec{\mathbf{j}} + R\vec{\mathbf{k}}$ liên tục trong $\mathbb{R}^3$, chẳng hạn như trường trọng lực, với P, Q và R là ba thành phần của lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}$. Tính công của lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ làm di chuyển chất điểm dọc theo đường cong trơn C.

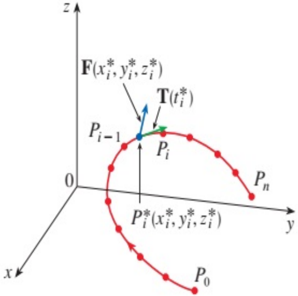




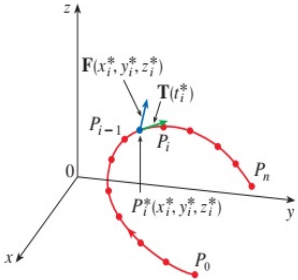
Để tính công của lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}$, ta chia cung C thành n cung nhỏ $\widehat{P_{i-1}P_i}$, với độ dài Δs_i:
$\overrightarrow{P_{i-1}P_i} = \Delta x_i\,\vec{\mathbf{i}} + \Delta y_i\,\vec{\mathbf{j}} + \Delta z_i\,\vec{\mathbf{k}} = (x_i - x_{i-1})\vec{\mathbf{i}} + (y_i - y_{i-1})\vec{\mathbf{j}} + (z_i - z_{i-1})\vec{\mathbf{k}}.$

Bài toán. Cho trường lực $\overrightarrow{\mathbf{F}} = P\vec{\mathbf{i}} + Q\vec{\mathbf{j}} + R\vec{\mathbf{k}}$ liên tục trong $\mathbb{R}^3$, chẳng hạn như trường trọng lực, với P, Q và R là ba thành phần của lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}$. Tính công của lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ làm di chuyển chất điểm dọc theo đường cong trơn C.



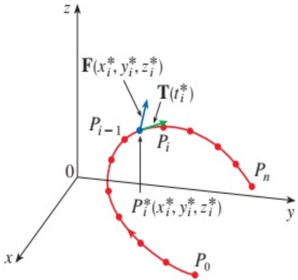


Để tính công của lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}$, ta chia cung C thành n cung nhỏ $\widehat{P_{i-1}P_i}$, với độ dài Δs_i:
$\overrightarrow{P_{i-1}P_i} = \Delta x_i\,\vec{\mathbf{i}} + \Delta y_i\,\vec{\mathbf{j}} + \Delta z_i\,\vec{\mathbf{k}} = (x_i - x_{i-1})\vec{\mathbf{i}} + (y_i - y_{i-1})\vec{\mathbf{j}} + (z_i - z_{i-1})\vec{\mathbf{k}}.$
Chọn điểm $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ bất kỳ trên cung nhỏ $\widehat{P_{i-1}P_i}$.



Nếu Δs_i nhỏ, thì công của lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ di chuyển chất điểm từ P_{i-1} đến P_i xấp xỉ bởi

$$W_i \approx \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{P_{i-1}P_i} = P(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta x_i + Q(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta y_i + R(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta z_i$$



Nếu Δs_i nhỏ, thì công của lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ di chuyển chất điểm từ P_{i-1} đến P_i xấp xỉ bởi

$$W_i \approx \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{P_{i-1}P_i} = P(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta x_i + Q(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta y_i + R(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta z_i$$

và công của lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ di chuyển chất điểm dọc theo đường cong C xấp xỉ bởi tổng

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} \left(P(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta x_i + Q(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta y_i + R(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta z_i\right). \tag{1}$$

Tích phân đường loại hai

Công W của lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ là giới hạn của tổng Riemann (1)

$$W = \int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =: \int_C \overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y,z) \cdot \overrightarrow{\mathbf{T}}(x,y,z)ds$$

trong đó $\overrightarrow{\mathbf{T}}(x,y,z)$ là vectơ tiếp tuyến đơn vị tại điểm (x,y,z) trên đường cong C, theo hướng chuyển động của chất điểm.

Công W của lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ là giới hạn của tổng Riemann (1)

$$W = \int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =: \int_C \overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y,z)\cdot\overrightarrow{\mathbf{T}}(x,y,z)ds$$

trong đó $\overrightarrow{\mathbf{T}}(x,y,z)$ là vectơ tiếp tuyến đơn vị tại điểm (x,y,z) trên đường cong C, theo hướng chuyển động của chất điểm.

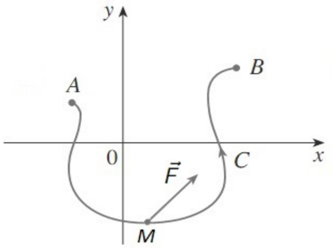
Định nghĩa

Cho trường vectơ $\overrightarrow{\mathbf{F}} = P\vec{\mathbf{i}} + Q\vec{\mathbf{j}} + R\vec{\mathbf{k}}$. Giả sử các hàm P, Q và R xác định và liên tục trên đường cong trơn C, với C cho bởi hàm vectơ $\vec{r}(t)$, $a \le t \le b$. Tích phân đường của $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ dọc theo C là

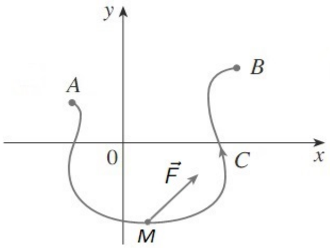
$$\int\limits_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_C \overrightarrow{\mathbf{F}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{T}}ds = \int\limits_C \overrightarrow{\mathbf{F}}\cdot d\vec{r} = \int\limits_a^b \overrightarrow{\mathbf{F}}\cdot\vec{r}\,'(t)dt.$$

Tích phân đường loại hai

Trường vectơ trên $\mathbb{R}^2$ xem như trường hợp đặc biệt khi $R = 0$ và P, Q phụ thuộc vào x, y.



Trường vectơ trên $\mathbb{R}^2$ xem như trường hợp đặc biệt khi $R = 0$ và P, Q phụ thuộc vào x, y.

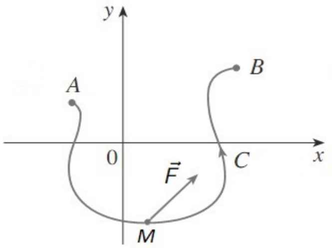


Tích phân đường loại hai của P và Q dọc theo C là

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i + Q(x_i^*, y_i^*)\Delta y_i\right].$$

Tích phân đường loại hai

Trường vectơ trên $\mathbb{R}^2$ xem như trường hợp đặc biệt khi $R = 0$ và P, Q phụ thuộc vào x, y.

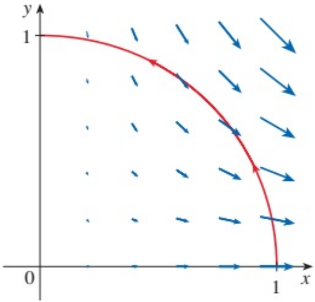


Tích phân đường loại hai của P và Q dọc theo C là

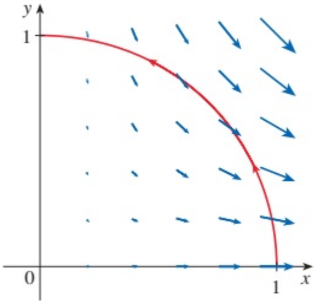
$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i + Q(x_i^*, y_i^*)\Delta y_i\right].$$

Ví dụ. Tính công của lực $\vec{\mathbf{F}}(x,y) = x^2\vec{\mathbf{i}} - xy\vec{\mathbf{j}}$ di chuyển chất điểm dọc theo một phần tư đường tròn $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{\mathbf{i}} + \sin t\,\vec{\mathbf{j}}$, $0 \le t \le \pi/2$ từ điểm $(1;0)$ đến điểm $(0;1)$.

Ví dụ. Tính công của lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y) = x^2\vec{\mathbf{i}} - xy\vec{\mathbf{j}}$ di chuyển chất điểm dọc theo một phần tư đường tròn $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{\mathbf{i}} + \sin t\,\vec{\mathbf{j}}$, $0 \le t \le \pi/2$ từ $(1;0)$ đến $(0;1)$.



Ví dụ. Tính công của lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y) = x^2\vec{\mathbf{i}} - xy\vec{\mathbf{j}}$ di chuyển chất điểm dọc theo một phần tư đường tròn $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{\mathbf{i}} + \sin t\,\vec{\mathbf{j}}$, $0 \le t \le \pi/2$ từ $(1;0)$ đến $(0;1)$.

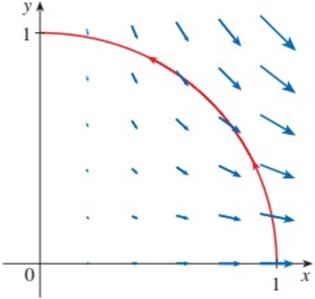


Lời giải. Do $\vec{r}\,'(t) = -\sin t\,\vec{\mathbf{i}} + \cos t\,\vec{\mathbf{j}}$,

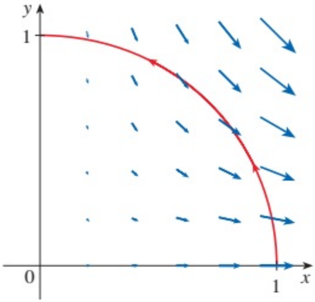
Ví dụ. Tính công của lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y) = x^2\vec{\mathbf{i}} - xy\vec{\mathbf{j}}$ di chuyển chất điểm dọc theo một phần tư đường tròn $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{\mathbf{i}} + \sin t\,\vec{\mathbf{j}}$, $0 \le t \le \pi/2$ từ $(1;0)$ đến $(0;1)$.

Lời giải. Do $\vec{r}\,'(t) = -\sin t\,\vec{\mathbf{i}} + \cos t\,\vec{\mathbf{j}}$, công của lực là

$$W = \int\limits_C x^2dx - xydy$$



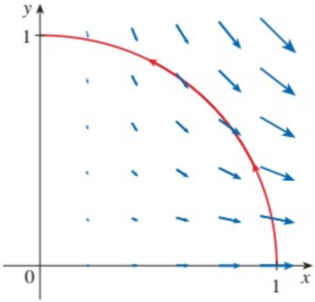
Ví dụ. Tính công của lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y) = x^2\vec{\mathbf{i}} - xy\vec{\mathbf{j}}$ di chuyển chất điểm dọc theo một phần tư đường tròn $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{\mathbf{i}} + \sin t\,\vec{\mathbf{j}}$, $0 \le t \le \pi/2$ từ $(1;0)$ đến $(0;1)$.



Lời giải. Do $\vec{r}\,'(t) = -\sin t\,\vec{\mathbf{i}} + \cos t\,\vec{\mathbf{j}}$, công của lực là

$$W = \int\limits_C x^2dx - xydy = \int\limits_0^{\pi/2} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \vec{r}\,'(t)dt$$

Ví dụ. Tính công của lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y) = x^2\vec{\mathbf{i}} - xy\vec{\mathbf{j}}$ di chuyển chất điểm dọc theo một phần tư đường tròn $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{\mathbf{i}} + \sin t\,\vec{\mathbf{j}}$, $0 \le t \le \pi/2$ từ $(1;0)$ đến $(0;1)$.

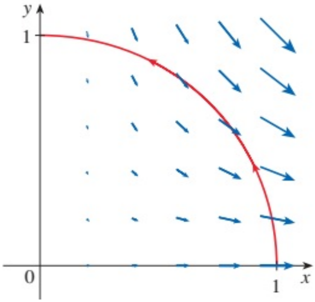


Lời giải. Do $\vec{r}\,'(t) = -\sin t\,\vec{\mathbf{i}} + \cos t\,\vec{\mathbf{j}}$, công của lực là

$$W = \int\limits_C x^2dx - xydy = \int\limits_0^{\pi/2} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \vec{r}\,'(t)dt$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left(\cos^2 t(-\sin t) - \cos t \sin t \cos t\right) dt$$

Ví dụ. Tính công của lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y) = x^2\vec{\mathbf{i}} - xy\vec{\mathbf{j}}$ di chuyển chất điểm dọc theo một phần tư đường tròn $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{\mathbf{i}} + \sin t\,\vec{\mathbf{j}}$, $0 \le t \le \pi/2$ từ $(1;0)$ đến $(0;1)$.



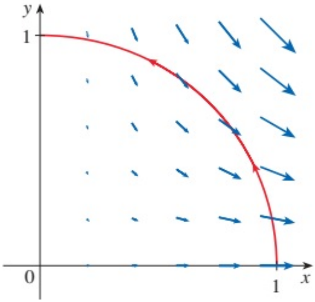
Lời giải. Do $\vec{r}\,'(t) = -\sin t\,\vec{\mathbf{i}} + \cos t\,\vec{\mathbf{j}}$, công của lực là

$$W = \int_C x^2dx - xydy = \int_0^{\pi/2} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \vec{r}\,'(t)dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\cos^2 t(-\sin t) - \cos t \sin t \cos t\right) dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(-2\cos^2 t \sin t\right) dt$$

Ví dụ. Tính công của lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y) = x^2\vec{\mathbf{i}} - xy\vec{\mathbf{j}}$ di chuyển chất điểm dọc theo một phần tư đường tròn $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{\mathbf{i}} + \sin t\,\vec{\mathbf{j}}$, $0 \le t \le \pi/2$ từ $(1;0)$ đến $(0;1)$.



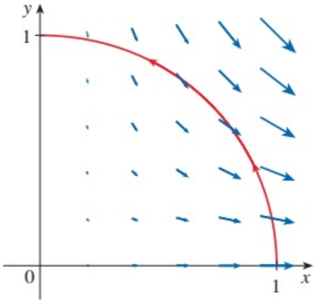
Lời giải. Do $\vec{r}'(t) = -\sin t\,\vec{\mathbf{i}} + \cos t\,\vec{\mathbf{j}}$, công của lực là

$$W = \int\limits_C x^2dx - xydy = \int\limits_0^{\pi/2} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \vec{r}'(t)dt$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left(\cos^2 t(-\sin t) - \cos t \sin t \cos t\right) dt$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left(-2\cos^2 t \sin t\right) dt = \left[\frac{2}{3}\cos^3 t\right]_0^{\pi/2}$$

Ví dụ. Tính công của lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y) = x^2\vec{\mathbf{i}} - xy\vec{\mathbf{j}}$ di chuyển chất điểm dọc theo một phần tư đường tròn $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{\mathbf{i}} + \sin t\,\vec{\mathbf{j}}$, $0 \le t \le \pi/2$ từ $(1;0)$ đến $(0;1)$.



Lời giải. Do $\vec{r}\,'(t) = -\sin t\,\vec{\mathbf{i}} + \cos t\,\vec{\mathbf{j}}$, công của lực là

$$W = \int\limits_C x^2dx - xydy = \int\limits_0^{\pi/2} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \vec{r}\,'(t)dt$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left(\cos^2 t(-\sin t) - \cos t \sin t \cos t\right) dt$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left(-2\cos^2 t \sin t\right) dt = \left[\frac{2}{3}\cos^3 t\right]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}.$$

Tính khả tích: Nếu P và Q là các hàm số liên tục trên cung trơn từng khúc C, thì tích phân đường $\int\limits_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy$ tồn tại.

Tính khả tích: Nếu P và Q là các hàm số liên tục trên cung trơn từng khúc C, thì tích phân đường $\int\limits_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy$ tồn tại.

Một số tính chất của tích phân đường loại hai

1. $\int\limits_C \alpha P(x,y)\,dx + \beta Q(x,y)\,dy = \alpha \int\limits_C P(x,y)\,dx + \beta \int\limits_C Q(x,y)\,dy.$
2. $\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$
3. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{\overset{\frown}{AM}} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\vec{r} + \int\limits_{\overset{\frown}{MB}} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\vec{r}$, với M là một điểm nằm trên cung $\overset{\frown}{AB}$,
   $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y) = P(x,y)\vec{\mathbf{i}} + Q(x,y)\vec{\mathbf{j}}.$

Cách tính tích phân đường loại hai

Giả sử C là đường cong trơn trong mặt phẳng Oxy, điểm đầu A và điểm cuối B; $\overrightarrow{\mathbf{F}} = P(x,y)\vec{\mathbf{i}} + Q(x,y)\vec{\mathbf{j}}$. Nếu C cho bởi phương trình tham số

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{với } A(x(t_A), y(t_A)) \text{ và } B(x(t_B), y(t_B)),$$

Cách tính tích phân đường loại hai

Giả sử C là đường cong trơn trong mặt phẳng Oxy, điểm đầu A và điểm cuối B; $\overrightarrow{\mathbf{F}} = P(x,y)\vec{\mathbf{i}} + Q(x,y)\vec{\mathbf{j}}$. Nếu C cho bởi phương trình tham số

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{với } A(x(t_A), y(t_A)) \text{ và } B(x(t_B), y(t_B)),$$

thì

$$\boxed{\int_C Pdx + Qdy = \int\limits_C \overrightarrow{\mathbf{F}}.d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} \left[P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\right] dt}$$

Cách tính tích phân đường loại hai

Giả sử C là đường cong trơn trong mặt phẳng Oxy, điểm đầu A và điểm cuối B; $\overrightarrow{\mathbf{F}} = P(x,y)\vec{\mathbf{i}} + Q(x,y)\vec{\mathbf{j}}$. Nếu C cho bởi phương trình tham số

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{với } A(x(t_A), y(t_A)) \text{ và } B(x(t_B), y(t_B)),$$

thì

$$\boxed{\int_C P dx + Q dy = \int\limits_C \overrightarrow{\mathbf{F}}.d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} \left[P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\right] dt}$$

Nếu C xác định bởi $y = \varphi(x)$, thì có thể xem x như tham số và

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{x_A}^{x_B} \left[P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)\right] dx,$$

với x_A, x_B tương ứng là hoành độ của điểm A và điểm B.

Cách tính tích phân đường loại hai

Tương tự, nếu C có phương trình $x = \psi(y)$, thì

$$\int\limits_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{y_A}^{y_B} \left[P(\psi(y),y)\psi'(y) + Q(\psi(y),y)\right]\,dy,$$

với y_A, y_B tương ứng là tung độ của điểm A và điểm B.

Tương tự, nếu C có phương trình $x = \psi(y)$, thì

$$\int\limits_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{y_A}^{y_B} \left[P(\psi(y),y)\psi'(y) + Q(\psi(y),y)\right]\,dy,$$

với y_A, y_B tương ứng là tung độ của điểm A và điểm B.

Ví dụ 1. Tính tích phân đường

$$I = \int\limits_C y dx + (x^3 - y^3)\,dy,$$

với C là nửa đường tròn $y = \sqrt{1-x^2}$ đi từ $A(1;0)$ đến $B(-1;0)$.

Tương tự, nếu C có phương trình $x = \psi(y)$, thì

$$\int\limits_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{y_A}^{y_B} \left[P(\psi(y),y)\psi'(y) + Q(\psi(y),y)\right]\,dy,$$

với y_A, y_B tương ứng là tung độ của điểm A và điểm B.

Ví dụ 1. Tính tích phân đường

$$I = \int\limits_C y dx + (x^3 - y^3)\,dy,$$

với C là nửa đường tròn $y = \sqrt{1-x^2}$ đi từ $A(1;0)$ đến $B(-1;0)$.

Lời giải. $C: x = \cos t,\; y = \sin t,\, 0 \le t \le \pi.$

Cách tính tích phân đường loại hai

Tương tự, nếu C có phương trình $x = \psi(y)$, thì

$$\int\limits_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{y_A}^{y_B} \left[P(\psi(y),y)\psi'(y) + Q(\psi(y),y)\right]\,dy,$$

với y_A, y_B tương ứng là tung độ của điểm A và điểm B.

Ví dụ 1. Tính tích phân đường

$$I = \int\limits_C ydx + (x^3 - y^3)\,dy,$$

với C là nửa đường tròn $y = \sqrt{1-x^2}$ đi từ $A(1;0)$ đến $B(-1;0)$.

Lời giải. $C : x = \cos t,\ \ y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$. Tích phân đường bằng

$$I = \int\limits_0^{\pi} \left[\sin t(-\sin t) + (\cos^3 t - \sin^3 t)\cos t\right]\,dt$$

Tương tự, nếu C có phương trình $x = \psi(y)$, thì

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{y_A}^{y_B} \left[P(\psi(y),y)\psi'(y) + Q(\psi(y),y)\right]\,dy,$$

với y_A, y_B tương ứng là tung độ của điểm A và điểm B.

Ví dụ 1. Tính tích phân đường

$$I = \int_C y dx + (x^3 - y^3)\,dy,$$

với C là nửa đường tròn $y = \sqrt{1-x^2}$ đi từ $A(1;0)$ đến $B(-1;0)$.

Lời giải. $C: x = \cos t,\ y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$. Tích phân đường bằng

$$I = \int_0^{\pi} \left[\sin t(-\sin t) + (\cos^3 t - \sin^3 t)\cos t\right]\,dt = \ldots$$

Tương tự, nếu C có phương trình $x = \psi(y)$, thì

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{y_A}^{y_B} \left[P(\psi(y),y)\psi'(y) + Q(\psi(y),y)\right]\,dy,$$

với y_A, y_B tương ứng là tung độ của điểm A và điểm B.

Ví dụ 1. Tính tích phân đường

$$I = \int_C ydx + (x^3 - y^3)\,dy,$$

với C là nửa đường tròn $y = \sqrt{1-x^2}$ đi từ $A(1;0)$ đến $B(-1;0)$.

Lời giải. $C : x = \cos t,\ \ y = \sin t,\ 0 \le t \le \pi$. Tích phân đường bằng

$$I = \int_0^{\pi} \left[\sin t(-\sin t) + (\cos^3 t - \sin^3 t)\cos t\right]\,dt = \ldots = -\frac{\pi}{8}.$$

Ví dụ 2. Tính tích phân đường

$$I = \int\limits_C (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 + 2x)\,dy,$$

với C là cung parabol $y^2 = 1 - x$ đi từ $A(0;-1)$ đến $B(0;1)$.

Ví dụ 2. Tính tích phân đường

$$I = \int\limits_C (x^2 - 2xy)\, dx + (y^2 + 2x)\, dy,$$

với C là cung parabol $y^2 = 1 - x$ đi từ $A(0; -1)$ đến $B(0; 1)$.

Lời giải. Ta viết đường cong C dưới dạng $x = 1 - y^2$

Ví dụ 2. Tính tích phân đường

$$I = \int\limits_C (x^2 - 2xy)\, dx + (y^2 + 2x)\, dy,$$

với C là cung parabol $y^2 = 1 - x$ đi từ $A(0; -1)$ đến $B(0; 1)$.
Lời giải. Ta viết đường cong C dưới dạng $x = 1 - y^2$, và

$$I = \int_{-1}^{1} \left(\left[(1 - y^2)^2 - 2(1 - y^2)y \right] (-2y) + y^2 + 2 - 2y^2 \right) dy$$

Ví dụ 2. Tính tích phân đường

$$I = \int_C (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 + 2x)\,dy,$$

với C là cung parabol $y^2 = 1 - x$ đi từ $A(0;-1)$ đến $B(0;1)$.
Lời giải. Ta viết đường cong C dưới dạng $x = 1 - y^2$, và

$$I = \int_{-1}^{1} \left(\left[(1-y^2)^2 - 2(1-y^2)y \right](-2y) + y^2 + 2 - 2y^2 \right) dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(-2y^5 - 4y^4 + 4y^3 + 3y^2 - 2y + 2 \right) dy$$

Ví dụ 2. Tính tích phân đường

$$I = \int\limits_C (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 + 2x)\,dy,$$

với C là cung parabol $y^2 = 1 - x$ đi từ $A(0;-1)$ đến $B(0;1)$.
Lời giải. Ta viết đường cong C dưới dạng $x = 1 - y^2$, và

$$I = \int_{-1}^{1} \left(\left[(1-y^2)^2 - 2(1-y^2)y\right](-2y) + y^2 + 2 - 2y^2\right) dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(-2y^5 - 4y^4 + 4y^3 + 3y^2 - 2y + 2\right) dy = \frac{22}{5}.$$

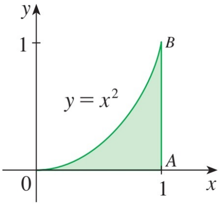
Tích phân đường loại hai

Ví dụ 3. Cho C là đường cong kín, là biên của miền giới hạn bởi đường parabol $y = x^2$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 1$, với hướng ngược chiều kim đồng hồ. Tính tích phân

$$I = \oint\limits_C (x + y^2)\, dx + (x - y)\, dy.$$

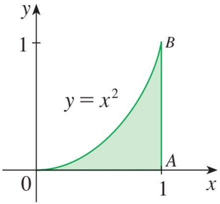
Ví dụ 3. Cho C là đường cong kín, là biên của miền giới hạn bởi đường parabol $y = x^2$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 1$, với hướng ngược chiều kim đồng hồ. Tính tích phân

$$I = \oint_C (x + y^2)\, dx + (x - y)\, dy.$$



Ví dụ 3. Cho C là đường cong kín, là biên của miền giới hạn bởi đường parabol $y = x^2$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 1$, với hướng ngược chiều kim đồng hồ. Tính tích phân

$$I = \oint_C (x + y^2)\, dx + (x - y)\, dy.$$



Gợi ý. Ta viết tích phân đường

$$I = \int_{OA} (x + y^2)\, dx + (x - y)\, dy + \int_{AB} (x + y^2)\, dx + (x - y)\, dy + \int_{BO} (x + y^2)\, dx + (x - y)\, dy.$$

Tích phân đường

Với tích phân đường, ta có đẳng thức sau

$$\int_C \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{T}} ds = \int\limits_C P\,dx + Q\,dy = \int\limits_C (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\,ds,$$

trong đó α là góc tạo bởi trục Ox và vectơ tiếp tuyến theo hướng của đường cong C.

Với tích phân đường, ta có đẳng thức sau

$$\int_C \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{T}} ds = \int\limits_C P\,dx + Q\,dy = \int\limits_C (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\,ds,$$

trong đó α là góc tạo bởi trục Ox và vectơ tiếp tuyến theo hướng của đường cong C.

Ví dụ. Với đường tròn đơn vị $C: x^2 + y^2 = 1$, hướng dương, ta có

$$\cos\alpha = -y, \quad \sin\alpha = x,$$

Tích phân đường

Với tích phân đường, ta có đẳng thức sau

$$\int_C \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{T}}\, ds = \int\limits_C P\,dx + Q\,dy = \int\limits_C (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\,ds,$$

trong đó α là góc tạo bởi trục Ox và vectơ tiếp tuyến theo hướng của đường cong C.
Ví dụ. Với đường tròn đơn vị $C : x^2 + y^2 = 1$, hướng dương, ta có

$$\cos\alpha = -y, \quad \sin\alpha = x,$$

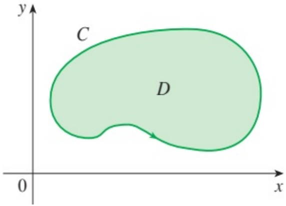
và với các hàm liên tục $P(x,y)$, $Q(x,y)$ ta có

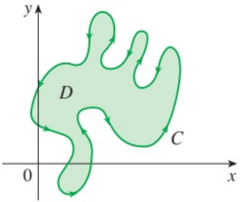
$$\int\limits_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_C (xQ(x,y) - yP(x,y))\,ds.$$

Tích phân đường: Định lý Green

Định lý Green cho ta mối liên hệ giữa tích phân đường loại hai dọc theo một đường cong kín với tích phân kép trên miền giới hạn bởi đường cong kín đó.

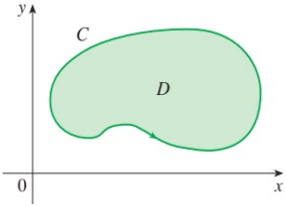
Định lý Green cho ta mối liên hệ giữa tích phân đường loại hai dọc theo một đường cong kín với tích phân kép trên miền giới hạn bởi đường cong kín đó.

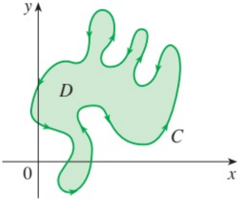




Tích phân đường: Định lý Green

Định lý Green cho ta mối liên hệ giữa tích phân đường loại hai dọc theo một đường cong kín với tích phân kép trên miền giới hạn bởi đường cong kín đó.





Cho đường cong kín C không tự cắt, là biên của miền phẳng D. Ta định nghĩa hướng dương trên C là hướng sao cho một người đi dọc đường cong C theo hướng đó, sẽ thấy miền D, giới hạn bởi C, nằm về bên tay trái. Khi đó, với các hàm số P, Q xác định trên C, tích phân đường được ký hiệu là

$$\oint\limits_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \oint\limits_C \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\vec{r}.$$

Định lý (Green)

Cho C là đường cong kín, trơn từng khúc trên mặt phẳng, định hướng dương và D là miền giới hạn bởi đường cong C. Nếu P và Q là các hàm liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trên D, thì

$$\oint\limits_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Công thức Green

Định lý (Green)

Cho C là đường cong kín, trơn từng khúc trên mặt phẳng, định hướng dương và D là miền giới hạn bởi đường cong C. Nếu P và Q là các hàm liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trên D, thì

$$\oint\limits_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Ví dụ 1. Cho C là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ với chiều dương. Khi đó

$$\oint\limits_C (2x - y)dx + (x + 3y)dy =$$

Định lý (Green)

Cho C là đường cong kín, trơn từng khúc trên mặt phẳng, định hướng dương và D là miền giới hạn bởi đường cong C. Nếu P và Q là các hàm liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trên D, thì

$$\oint_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Ví dụ 1. Cho C là đường tròn $x^2+y^2=4$ với chiều dương. Khi đó

$$\oint_C (2x-y)dx + (x+3y)dy = \iint_{D:\, x^2+y^2\le 4} (1+1)dxdy$$

Công thức Green

Định lý (Green)

Cho C là đường cong kín, trơn từng khúc trên mặt phẳng, định hướng dương và D là miền giới hạn bởi đường cong C. Nếu P và Q là các hàm liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trên D, thì

$$\oint_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Ví dụ 1. Cho C là đường tròn $x^2+y^2=4$ với chiều dương. Khi đó

$$\oint_C (2x-y)dx + (x+3y)dy = \iint_{D:\,x^2+y^2\leq 4} (1+1)dxdy = 2S_D$$

Công thức Green

Định lý (Green)

Cho C là đường cong kín, trơn từng khúc trên mặt phẳng, định hướng dương và D là miền giới hạn bởi đường cong C. Nếu P và Q là các hàm liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trên D, thì

$$\oint\limits_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Ví dụ 1. Cho C là đường tròn $x^2+y^2=4$ với chiều dương. Khi đó

$$\oint\limits_C (2x-y)dx + (x+3y)dy = \iint\limits_{D:\, x^2+y^2\le 4} (1+1)dxdy = 2S_D = 8\pi.$$

Định lý (Green)

Cho C là đường cong kín, trơn từng khúc trên mặt phẳng, định hướng dương và D là miền giới hạn bởi đường cong C. Nếu P và Q là các hàm liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trên D, thì

$$\oint_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Ví dụ 1. Cho C là đường tròn $x^2+y^2=4$ với chiều dương. Khi đó

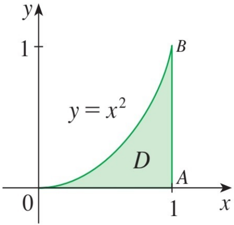
$$\oint_C (2x-y)dx + (x+3y)dy = \iint_{D:\,x^2+y^2\le 4} (1+1)dxdy = 2S_D = 8\pi.$$

Ví dụ 2. Tính tích phân đường $I = \oint_C (x+y^2)\,dx + (x-y)\,dy$, với C là đường cong kín giới hạn bởi đường parabol $y=x^2$ và các đường thẳng $y=0$, $x=1$.

Công thức Green

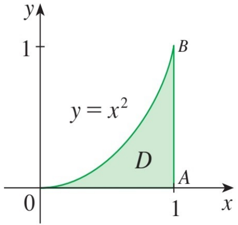
Ví dụ 2. Tính tích phân đường $I = \oint\limits_C (x+y^2)\,dx + (x-y)\,dy$, với C là đường cong kín giới hạn bởi đường parabol $y = x^2$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 1$.

Ví dụ 2. Tính tích phân đường $I = \oint\limits_C (x + y^2)\,dx + (x - y)\,dy$, với C là đường cong kín giới hạn bởi đường parabol $y = x^2$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 1$.



Công thức Green

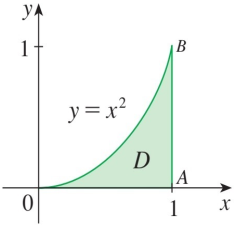
Ví dụ 2. Tính tích phân đường $I = \oint\limits_C (x + y^2)\,dx + (x - y)\,dy$, với C là đường cong kín giới hạn bởi đường parabol $y = x^2$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 1$.



Lời giải. Sử dụng công thức Green

$$I =$$

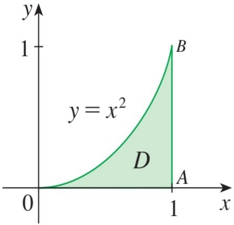
Ví dụ 2. Tính tích phân đường $I = \oint\limits_C (x + y^2)\, dx + (x - y)\, dy$, với C là đường cong kín giới hạn bởi đường parabol $y = x^2$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 1$.



Lời giải. Sử dụng công thức Green

$$I = \iint_D (1 - 2y)dxdy$$

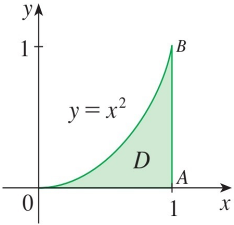
Ví dụ 2. Tính tích phân đường $I = \oint\limits_C (x+y^2)\,dx + (x-y)\,dy$, với C là đường cong kín giới hạn bởi đường parabol $y = x^2$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 1$.



Lời giải. Sử dụng công thức Green

$$I = \iint_D (1-2y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (1-2y)dy$$

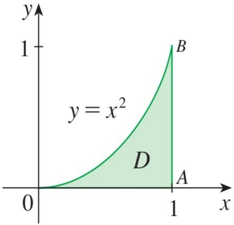
Ví dụ 2. Tính tích phân đường $I = \oint\limits_C (x+y^2)\,dx + (x-y)\,dy$, với C là đường cong kín giới hạn bởi đường parabol $y = x^2$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 1$.



Lời giải. Sử dụng công thức Green

$$I = \iint_D (1-2y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (1-2y)dy = \int_0^1 (x^2 - x^4)dx$$

Ví dụ 2. Tính tích phân đường $I = \oint\limits_C (x + y^2)\,dx + (x - y)\,dy$, với C là đường cong kín giới hạn bởi đường parabol $y = x^2$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 1$.



Lời giải. Sử dụng công thức Green

$$I = \iint_D (1-2y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (1-2y)dy = \int_0^1 (x^2 - x^4)dx = \frac{2}{15}.$$

Chứng minh định lý Green

Ta chứng minh định lý Green cho trường hợp D là miền đơn liên và mọi đường thẳng song song với các trục tọa độ cắt C tại nhiều nhất hai điểm.

Chứng minh định lý Green

Ta chứng minh định lý Green cho trường hợp D là miền đơn liên và mọi đường thẳng song song với các trục tọa độ cắt C tại nhiều nhất hai điểm.
Định lý Green được chứng minh nếu chỉ ra được rằng

$$\int\limits_{C} P(x,y)\,dx = -\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

Chứng minh định lý Green

Ta chứng minh định lý Green cho trường hợp D là miền đơn liên và mọi đường thẳng song song với các trục tọa độ cắt C tại nhiều nhất hai điểm.
Định lý Green được chứng minh nếu chỉ ra được rằng

$$\int\limits_C P(x,y)\,dx = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy \quad \text{và} \quad \int\limits_C Q(x,y)\,dy = \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy.$$

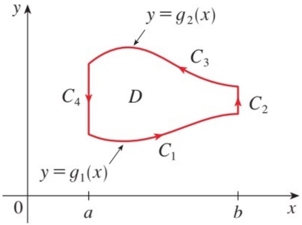
Chứng minh định lý Green

Ta chứng minh định lý Green cho trường hợp D là miền đơn liên và mọi đường thẳng song song với các trục tọa độ cắt C tại nhiều nhất hai điểm.
Định lý Green được chứng minh nếu chỉ ra được rằng

$$\int\limits_C P(x,y)\,dx = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy \quad \text{và} \quad \int\limits_C Q(x,y)\,dy = \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy.$$

Ta chứng minh đẳng thức thứ nhất bằng cách viết

$$D = \{(x,y) : a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}.$$

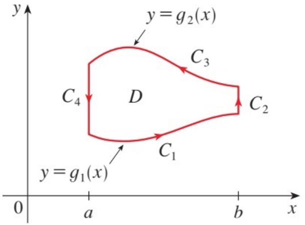


Ta chứng minh định lý Green cho trường hợp D là miền đơn liên và mọi đường thẳng song song với các trục tọa độ cắt C tại nhiều nhất hai điểm.
Định lý Green được chứng minh nếu chỉ ra được rằng

$$\int\limits_C P(x,y)\,dx = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy \quad \text{và} \quad \int\limits_C Q(x,y)\,dy = \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy.$$

Ta chứng minh đẳng thức thứ nhất bằng cách viết
$D = \{(x,y) : a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$. Tích phân kép

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy$$



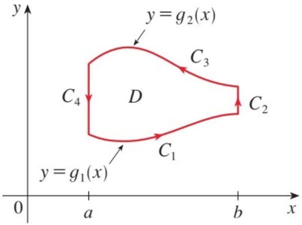
Ta chứng minh định lý Green cho trường hợp D là miền đơn liên và mọi đường thẳng song song với các trục tọa độ cắt C tại nhiều nhất hai điểm.
Định lý Green được chứng minh nếu chỉ ra được rằng

$$\int\limits_C P(x,y)\,dx = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy \quad \text{và} \quad \int\limits_C Q(x,y)\,dy = \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy.$$

Ta chứng minh đẳng thức thứ nhất bằng cách viết
$D = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$. Tích phân kép

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy$$

$$= \int_a^b \left[P(x,g_2(x)) - P(x,g_1(x))\right] dx.$$



$$\int_C P(x,y)\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

Chứng minh định lý Green

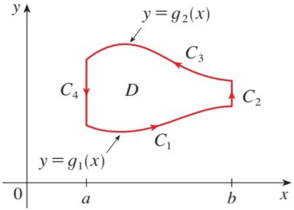
$$\boxed{\int_C P(x,y)\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_a^b \left[P(x,g_2(x)) - P(x,g_1(x))\right] dx}$$

Chứng minh định lý Green

$$\boxed{\int_C P(x,y)\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_a^b [P(x,g_2(x)) - P(x,g_1(x))]\,dx}$$

Tích phân đường ở vế trái

$$\int_C P(x,y)\,dx = \int_{C_1} P\,dx + \int_{C_2} P\,dx + \int_{C_3} P\,dx + \int_{C_4} P\,dx.$$



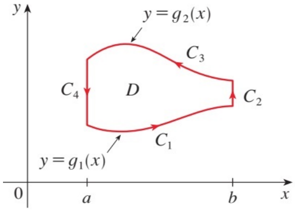
Chứng minh định lý Green

$$\boxed{\int_C P(x,y)\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = -\int_a^b \left[P(x,g_2(x)) - P(x,g_1(x))\right]dx}$$

Tích phân đường ở vế trái

$$\int_C P(x,y)\,dx = \int_{C_1} P\,dx + \int_{C_2} P\,dx + \int_{C_3} P\,dx + \int_{C_4} P\,dx.$$

Đường cong C_1: $y = g_1(x)$ với x từ a đến b,

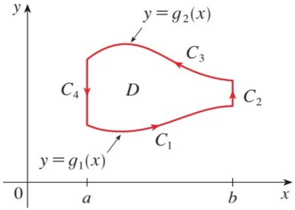


Chứng minh định lý Green

$$\boxed{\int_C P(x,y)\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_a^b \left[P(x,g_2(x)) - P(x,g_1(x))\right] dx}$$

Tích phân đường ở vế trái

$$\int_C P(x,y)\,dx = \int_{C_1} P\,dx + \int_{C_2} P\,dx + \int_{C_3} P\,dx + \int_{C_4} P\,dx.$$



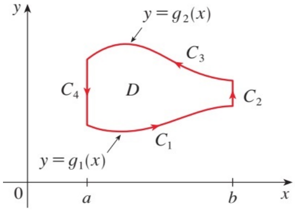
Đường cong C_1: $y = g_1(x)$ với x từ a đến b, do đó

$$\int_{C_1} P(x,y)\,dx = \int_a^b P(x,g_1(x))dx$$

$$\boxed{\int_C P(x,y)\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = -\int_a^b [P(x,g_2(x)) - P(x,g_1(x))]\,dx}$$

Tích phân đường ở vế trái

$$\int_C P(x,y)\,dx = \int_{C_1} P\,dx + \int_{C_2} P\,dx + \int_{C_3} P\,dx + \int_{C_4} P\,dx.$$



Đường cong C_1: $y = g_1(x)$ với x từ a đến b, do đó

$$\int_{C_1} P(x,y)\,dx = \int_a^b P(x,g_1(x))dx$$

Phương trình của C_3 là $y = g_2(x)$ với x từ b đến a,

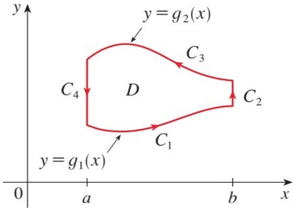
$$\int_{C_3} P(x,y)\,dx = \int_b^a P(x,g_2(x))dx = -\int_a^b P(x,g_2(x))dx$$

Chứng minh định lý Green

$$\boxed{\int_C P(x,y)\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_a^b [P(x,g_2(x)) - P(x,g_1(x))]\,dx}$$

Tích phân đường ở vế trái

$$\int_C P(x,y)\,dx = \int_{C_1} P\,dx + \int_{C_2} P\,dx + \int_{C_3} P\,dx + \int_{C_4} P\,dx.$$



Đường cong C_1: $y = g_1(x)$ với x từ a đến b, do đó

$$\int_{C_1} P(x,y)\,dx = \int_a^b P(x,g_1(x))dx$$

Phương trình của C_3 là $y = g_2(x)$ với x từ b đến a,

$$\int_{C_3} P(x,y)\,dx = \int_b^a P(x,g_2(x))dx = -\int_a^b P(x,g_2(x))dx$$

Trên C_2 và C_4, x là hằng số, nên $dx = 0$ và $\int_{C_2} P(x,y)\,dx = 0 = \int_{C_4} P(x,y)\,dx.$

Chứng minh định lý Green

Do đó

$$\int\limits_{C} P(x,y)\,dx = \int_a^b \left[P(x,g_1(x)) - P(x,g_2(x))\right] dx = -\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

Chứng minh định lý Green

Do đó

$$\int\limits_C P(x,y)\,dx = \int_a^b [P(x,g_1(x)) - P(x,g_2(x))]\,dx = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

Một cách tương tự, ta chỉ ra được

$$\int\limits_C Q(x,y)\,dy = \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy.$$

Định lý được chứng minh.

Chứng minh định lý Green

Do đó

$$\int\limits_C P(x,y)\,dx = \int_a^b [P(x,g_1(x)) - P(x,g_2(x))]\,dx = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

Một cách tương tự, ta chỉ ra được

$$\int\limits_C Q(x,y)\,dy = \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy.$$

Định lý được chứng minh.

Ví dụ 3. Tính $I = \oint\limits_C (\sin x + y^3 - x^2 y)\,dx + (4xy^2 + e^y)\,dy$, với C là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$, chiều dương.

Do đó

$$\int\limits_C P(x,y)\,dx = \int_a^b [P(x,g_1(x)) - P(x,g_2(x))]\,dx = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

Một cách tương tự, ta chỉ ra được

$$\int\limits_C Q(x,y)\,dy = \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy.$$

Định lý được chứng minh.

Ví dụ 3. Tính $I = \oint\limits_C (\sin x + y^3 - x^2 y)\,dx + (4xy^2 + e^y)\,dy$, với C là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$, chiều dương.

Lời giải. Áp dụng công thức Green ta được

Do đó

$$\int\limits_C P(x,y)\,dx = \int_a^b [P(x,g_1(x)) - P(x,g_2(x))]\,dx = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

Một cách tương tự, ta chỉ ra được

$$\int\limits_C Q(x,y)\,dy = \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy.$$

Định lý được chứng minh.

Ví dụ 3. Tính $I = \oint\limits_C (\sin x + y^3 - x^2 y)\,dx + (4xy^2 + e^y)\,dy$, với C là đường tròn $x^2+y^2=4$, chiều dương.

Lời giải. Áp dụng công thức Green ta được

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} (4y^2 - 3y^2 + x^2) dxdy$$

Chứng minh định lý Green

Do đó

$$\int\limits_C P(x,y)\,dx = \int_a^b [P(x,g_1(x)) - P(x,g_2(x))]\,dx = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

Một cách tương tự, ta chỉ ra được

$$\int\limits_C Q(x,y)\,dy = \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy.$$

Định lý được chứng minh.

Ví dụ 3. Tính $I = \oint\limits_C (\sin x + y^3 - x^2 y)\,dx + (4xy^2 + e^y)\,dy$, với C là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$, chiều dương.

Lời giải. Áp dụng công thức Green ta được

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} (4y^2 - 3y^2 + x^2)dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} (x^2+y^2)dxdy = \ldots$$

Do đó

$$\int\limits_C P(x,y)\,dx = \int_a^b [P(x,g_1(x)) - P(x,g_2(x))]\,dx = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

Một cách tương tự, ta chỉ ra được

$$\int\limits_C Q(x,y)\,dy = \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy.$$

Định lý được chứng minh.

Ví dụ 3. Tính $I = \oint\limits_C (\sin x + y^3 - x^2 y)\,dx + (4xy^2 + e^y)\,dy$, với C là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$, chiều dương.

Lời giải. Áp dụng công thức Green ta được

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2 \leq 4} (4y^2 - 3y^2 + x^2) dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2 \leq 4} (x^2 + y^2) dxdy = \dots = 8\pi.$$

Ví dụ 4. Cho C là đường elip $4x^2 + y^2 = 4$. Có thể áp dụng trực tiếp định lý Green cho tích phân sau không?

$$\oint\limits_C \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

Ví dụ 4. Cho C là đường elip $4x^2 + y^2 = 4$. Có thể áp dụng trực tiếp định lý Green cho tích phân sau không?

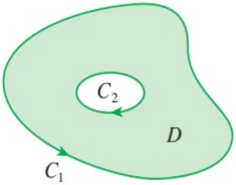
$$\oint\limits_C \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

Định lý Green có thể mở rộng cho miền có lỗ, như hình sau

Ví dụ 4. Cho C là đường elip $4x^2 + y^2 = 4$. Có thể áp dụng trực tiếp định lý Green cho tích phân sau không?

$$\oint\limits_C \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

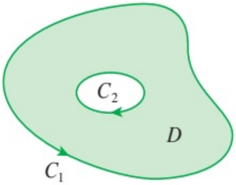
Định lý Green có thể mở rộng cho miền có lỗ, như hình sau



Ví dụ 4. Cho C là đường elip $4x^2 + y^2 = 4$. Có thể áp dụng trực tiếp định lý Green cho tích phân sau không?

$$\oint\limits_C \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

Định lý Green có thể mở rộng cho miền có lỗ, như hình sau



Ví dụ như miền nằm giữa hai đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ và $x^2 + y^2 = 4$.

Ta có thể sử dụng định lý Green tính diện tích miền phẳng

$$S_D = \oint\limits_C x\,dy = -\oint\limits_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint\limits_C x\,dy - y\,dx.$$

Ta có thể sử dụng định lý Green tính diện tích miền phẳng

$$S_D = \oint\limits_C x\,dy = -\oint\limits_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint\limits_C x\,dy - y\,dx.$$

Ví dụ 5. Tìm diện tích của hình elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1.$

Ta có thể sử dụng định lý Green tính diện tích miền phẳng

$$S_D = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx.$$

Ví dụ 5. Tìm diện tích của hình elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$

Lời giải. Đường elip có phương trình tham số $x = a\cos t$ và $y = b\sin t$, với $0 \leq t \leq 2\pi$.

Ta có thể sử dụng định lý Green tính diện tích miền phẳng

$$S_D = \oint\limits_C x\,dy = -\oint\limits_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint\limits_C x\,dy - y\,dx.$$

Ví dụ 5. Tìm diện tích của hình elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$.

Lời giải. Đường elip có phương trình tham số $x = a\cos t$ và $y = b\sin t$, với $0 \leq t \leq 2\pi$. Sử dụng công thức thứ ba, ta có

$$S_E = \frac{1}{2}\oint\limits_C x\,dy - y\,dx$$

Ta có thể sử dụng định lý Green tính diện tích miền phẳng

$$S_D = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx.$$

Ví dụ 5. Tìm diện tích của hình elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1.$

Lời giải. Đường elip có phương trình tham số $x = a\cos t$ và $y = b\sin t$, với $0 \leq t \leq 2\pi$. Sử dụng công thức thứ ba, ta có

$$S_E = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(a\cos t)(b\cos t) - (b\sin t)(-a\sin t)]\,dt$$

Ta có thể sử dụng định lý Green tính diện tích miền phẳng

$$S_D = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx.$$

Ví dụ 5. Tìm diện tích của hình elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$

Lời giải. Đường elip có phương trình tham số $x = a\cos t$ và $y = b\sin t$, với $0 \leq t \leq 2\pi$. Sử dụng công thức thứ ba, ta có

$$S_E = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(a\cos t)(b\cos t) - (b\sin t)(-a\sin t)]\,dt$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt$$

Ta có thể sử dụng định lý Green tính diện tích miền phẳng

$$S_D = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx.$$

Ví dụ 5. Tìm diện tích của hình elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

Lời giải. Đường elip có phương trình tham số $x = a\cos t$ và $y = b\sin t$, với $0 \leq t \leq 2\pi$. Sử dụng công thức thứ ba, ta có

$$S_E = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[(a\cos t)(b\cos t) - (b\sin t)(-a\sin t)\right] dt$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

Bài tập 1. Tính $I = \oint_C \dfrac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2}$ với C là đường tròn $x^2+y^2=4$, chiều ngược chiều kim đồng hồ.

Bài tập 1. Tính $I = \oint_C \dfrac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2}$ với C là đường tròn $x^2+y^2=4$, chiều ngược chiều kim đồng hồ.

Bài tập 2. Tìm diện tích nằm dưới một nhịp của đường cycloid

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t.$$

Bài tập 1. Tính $I = \oint_C \dfrac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2}$ với C là đường tròn $x^2+y^2=4$, chiều ngược chiều kim đồng hồ.

Bài tập 2. Tìm diện tích nằm dưới một nhịp của đường cycloid

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t.$$

Bài tập 3. Tính $I = \oint_L \arctan \dfrac{x}{y} dx + y^3 dy$, với L là đường cong kín, biên của miền giới hạn bởi đường parabol $y = x^2$ và các đường thẳng $y = x$, $x = \sqrt{3}$ (chiều dương).

Bài tập 1. Tính $I = \oint_C \dfrac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2}$ với C là đường tròn $x^2+y^2=4$, chiều ngược chiều kim đồng hồ.

Bài tập 2. Tìm diện tích nằm dưới một nhịp của đường cycloid

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t.$$

Bài tập 3. Tính $I = \oint_L \arctan \dfrac{x}{y} dx + y^3 dy$, với L là đường cong kín, biên của miền giới hạn bởi đường parabol $y = x^2$ và các đường thẳng $y = x$, $x = \sqrt{3}$ (chiều dương).

Bài tập 4. Tính $I = \oint_C (y + e^{\sqrt{x}})dx + (x^2 + \cos y)dy$, với C là biên của miền giới hạn bởi các đường parabol $y = x^2$ và $x = y^2$ (chiều dương).

Bài tập 1. Tính $I = \oint_C \dfrac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2}$ với C là đường tròn $x^2+y^2=4$, chiều ngược chiều kim đồng hồ.

Bài tập 2. Tìm diện tích nằm dưới một nhịp của đường cycloid

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t.$$

Bài tập 3. Tính $I = \oint_L \arctan\dfrac{x}{y}dx + y^3dy$, với L là đường cong kín, biên của miền giới hạn bởi đường parabol $y = x^2$ và các đường thẳng $y = x$, $x = \sqrt{3}$ (chiều dương).

Bài tập 4. Tính $I = \oint_C (y + e^{\sqrt{x}})dx + (x^2 + \cos y)dy$, với C là biên của miền giới hạn bởi các đường parabol $y = x^2$ và $x = y^2$ (chiều dương).

Bài tập 5. Tính $\int\limits_C (y^2 + e^x \sin y)dx + (x^2 + 2xy + e^x \cos y)dy$, với C là nửa đường tròn $x = \sqrt{2y - y^2}$, đi từ $(0;0)$ đến $(0;2)$.

Bài tập 6. Cho C là đường elip $4x^2 + y^2 = 4$, định hướng dương. Tính tích phân đường

$$\oint_C \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

Tích phân đường loại hai

Bài tập 6. Cho C là đường elip $4x^2 + y^2 = 4$, định hướng dương. Tính tích phân đường

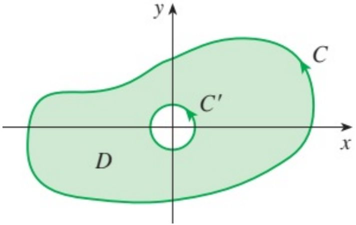
$$\oint\limits_C \frac{y}{x^2 + y^2}\, dx - \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy.$$

Gợi ý. Xét C là đường cong kín bất kỳ chứa gốc tọa độ.

Bài tập 6. Cho C là đường elip $4x^2 + y^2 = 4$, định hướng dương. Tính tích phân đường

$$\oint\limits_C \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

Gợi ý. Xét C là đường cong kín bất kỳ chứa gốc tọa độ.

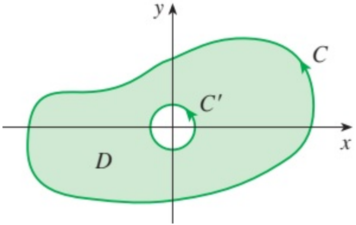


Tích phân đường loại hai

Bài tập 6. Cho C là đường elip $4x^2 + y^2 = 4$, định hướng dương. Tính tích phân đường

$$\oint\limits_C \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

Gợi ý. Xét C là đường cong kín bất kỳ chứa gốc tọa độ.



$$\oint\limits_C \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = -2\pi.$$

Cho P và Q là các hàm số liên tục trên miền D. Tích phân đường loại hai $\int_C Pdx + Qdy$ được gọi là *không phụ thuộc vào đường đi* trên D nếu

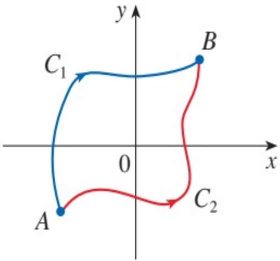
$$\int_{C_1} Pdx + Qdy = \int_{C_2} Pdx + Qdy$$

với C_1 và C_2 là hai đường bất kỳ, thuộc D, có cùng điểm đầu và cùng điểm cuối.

Cho P và Q là các hàm số liên tục trên miền D. Tích phân đường loại hai $\int_C Pdx + Qdy$ được gọi là *không phụ thuộc vào đường đi* trên D nếu

$$\int_{C_1} Pdx + Qdy = \int_{C_2} Pdx + Qdy$$

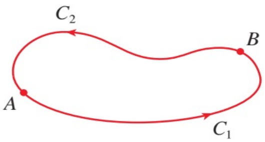
với C_1 và C_2 là hai đường bất kỳ, thuộc D, có cùng điểm đầu và cùng điểm cuối.



Giả sử rằng tích phân $\int_L Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào đường đi trên D và C là đường cong kín thuộc D

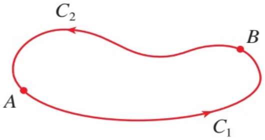
Tích phân đường không phụ thuộc vào đường đi

Giả sử rằng tích phân $\int_L Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào đường đi trên D và C là đường cong kín thuộc D



Ta chọn hai điểm A và B trên C và xem C gồm đường C_1 từ A đến B và đường C_2 từ B đến A (như hình vẽ).

Giả sử rằng tích phân $\int_L Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào đường đi trên D và C là đường cong kín thuộc D

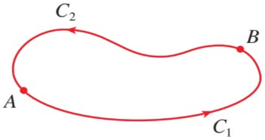


Ta chọn hai điểm A và B trên C và xem C gồm đường C_1 từ A đến B và đường C_2 từ B đến A (như hình vẽ). Khi đó

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_{C_1} Pdx + Qdy + \int_{C_2} Pdx + Qdy$$

Tích phân đường không phụ thuộc vào đường đi

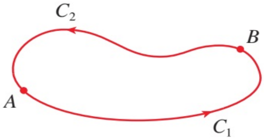
Giả sử rằng tích phân $\int_L Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào đường đi trên D và C là đường cong kín thuộc D



Ta chọn hai điểm A và B trên C và xem C gồm đường C_1 từ A đến B và đường C_2 từ B đến A (như hình vẽ). Khi đó

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_{C_1} Pdx + Qdy + \int_{C_2} Pdx + Qdy = \int_{C_1} \dots - \int_{C_2^-} \dots$$

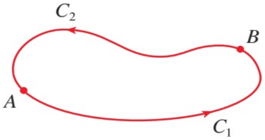
Giả sử rằng tích phân $\int_L Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào đường đi trên D và C là đường cong kín thuộc D



Ta chọn hai điểm A và B trên C và xem C gồm đường C_1 từ A đến B và đường C_2 từ B đến A (như hình vẽ). Khi đó

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_{C_1} Pdx + Qdy + \int_{C_2} Pdx + Qdy = \int_{C_1} \dots - \int_{C_2^-} \dots = 0.$$

Giả sử rằng tích phân $\int_L Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào đường đi trên D và C là đường cong kín thuộc D



Ta chọn hai điểm A và B trên C và xem C gồm đường C_1 từ A đến B và đường C_2 từ B đến A (như hình vẽ). Khi đó

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_{C_1} Pdx + Qdy + \int_{C_2} Pdx + Qdy = \int_{C_1} \ldots - \int_{C_2^-} \ldots = 0.$$

Định lý

Tích phân đường $\int_L Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào đường đi trong D khi và chỉ khi $\int_C Pdx + Qdy = 0$ dọc theo mọi đường cong kín C thuộc D.

Định lý

Giả sử P và Q là các hàm số liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trên miền đơn liên, liên thông D. Khi đó các mệnh đề sau tương đương với nhau.

1. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *trên* D.
2. $\oint\limits_C Pdx + Qdy = 0$ *với mọi đường cong kín* C *thuộc* D.
3. $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ *không phụ thuộc vào đường đi từ* A *đến* B *trong miền* D.
4. *Biểu thức* $Pdx + Qdy$ *là vi phân toàn phần của hàm* $f(x, y)$ *nào đó, tức là* $df = Pdx + Qdy$.

Định lý

Giả sử P và Q là các hàm số liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trên miền đơn liên, liên thông D. Khi đó các mệnh đề sau tương đương với nhau.

1. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *trên D.*
2. $\oint\limits_C Pdx + Qdy = 0$ *với mọi đường cong kín C thuộc D.*
3. $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ *không phụ thuộc vào đường đi từ A đến B trong miền D.*
4. *Biểu thức $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $f(x, y)$ nào đó, tức là $df = Pdx + Qdy$.*

Giá trị của tích phân đường phụ thuộc vào điểm đầu A và điểm cuối B, không phụ thuộc vào đường đi nối hai điểm đó. Trong trường hợp đó, ta có thể chọn đường đi bất kỳ nối hai điểm đó.

Ví dụ. Tính $I = \int_C (y^3 + y^2 - e^y \sin x)dx + (3xy^2 + e^y \cos x)dy$, với C là nửa đường tròn $y = \sqrt{x - x^2}$, đi từ $O(0;0)$ đến $A(1;0)$.

Ví dụ. Tính $I = \int_C (y^3 + y^2 - e^y \sin x)dx + (3xy^2 + e^y \cos x)dy$, với C là nửa đường tròn $y = \sqrt{x - x^2}$, đi từ $O(0;0)$ đến $A(1;0)$.

Lời giải. Ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 + 2y - e^y \sin x$$

Ví dụ. Tính $I = \int_C (y^3 + y^2 - e^y \sin x)dx + (3xy^2 + e^y \cos x)dy$, với C là nửa đường tròn $y = \sqrt{x - x^2}$, đi từ $O(0;0)$ đến $A(1;0)$.

Lời giải. Ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 + 2y - e^y \sin x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2 - e^y \sin x.$$

Ví dụ. Tính $I = \int_C (y^3 + y^2 - e^y \sin x)dx + (3xy^2 + e^y \cos x)dy$, với C là nửa đường tròn $y = \sqrt{x - x^2}$, đi từ $O(0;0)$ đến $A(1;0)$.

Lời giải. Ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 + 2y - e^y \sin x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2 - e^y \sin x.$$

Ta viết $I = \int_C (y^3 - e^y \sin x)dx + (3xy^2 + e^y \cos x)dy + \int_C y^2 dx$

Ví dụ. Tính $I = \int_C (y^3 + y^2 - e^y \sin x)dx + (3xy^2 + e^y \cos x)dy$, với C là nửa đường tròn $y = \sqrt{x - x^2}$, đi từ $O(0;0)$ đến $A(1;0)$.

Lời giải. Ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 + 2y - e^y \sin x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2 - e^y \sin x.$$

Ta viết $I = \int_C (y^3 - e^y \sin x)dx + (3xy^2 + e^y \cos x)dy + \int_C y^2 dx = I_1 + I_2.$

Ví dụ. Tính $I = \int_C (y^3 + y^2 - e^y \sin x)dx + (3xy^2 + e^y \cos x)dy$, với C là nửa đường tròn $y = \sqrt{x - x^2}$, đi từ $O(0;0)$ đến $A(1;0)$.

Lời giải. Ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 + 2y - e^y \sin x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2 - e^y \sin x.$$

Ta viết $I = \int_C (y^3 - e^y \sin x)dx + (3xy^2 + e^y \cos x)dy + \int_C y^2 dx = I_1 + I_2$. Tích phân đường I_1 không phụ thuộc vào đường đi.

Tích phân đường không phụ thuộc vào đường đi

Ví dụ. Tính $I = \int_C (y^3 + y^2 - e^y \sin x)dx + (3xy^2 + e^y \cos x)dy$, với C là nửa đường tròn $y = \sqrt{x - x^2}$, đi từ $O(0;0)$ đến $A(1;0)$.

Lời giải. Ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 + 2y - e^y \sin x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2 - e^y \sin x.$$

Ta viết $I = \int_C (y^3 - e^y \sin x)dx + (3xy^2 + e^y \cos x)dy + \int_C y^2 dx = I_1 + I_2$. Tích phân đường I_1 không phụ thuộc vào đường đi. Ta tính I_1 bằng cách chọn đường đi từ O đến A là đoạn thẳng OA, với phương trình $y = 0$, $0 \le x \le 1$.

Ví dụ. Tính $I = \int_C (y^3 + y^2 - e^y \sin x)dx + (3xy^2 + e^y \cos x)dy$, với C là nửa đường tròn $y = \sqrt{x - x^2}$, đi từ $O(0;0)$ đến $A(1;0)$.

Lời giải. Ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 + 2y - e^y \sin x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2 - e^y \sin x.$$

Ta viết $I = \int_C (y^3 - e^y \sin x)dx + (3xy^2 + e^y \cos x)dy + \int_C y^2 dx = I_1 + I_2$. Tích phân đường I_1 không phụ thuộc vào đường đi. Ta tính I_1 bằng cách chọn đường đi từ O đến A là đoạn thẳng OA, với phương trình $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$. Khi đó

$$I_1 = \int_0^1 (-\sin x)dx$$

Ví dụ. Tính $I = \int_C (y^3 + y^2 - e^y \sin x)dx + (3xy^2 + e^y \cos x)dy$, với C là nửa đường tròn $y = \sqrt{x - x^2}$, đi từ $O(0;0)$ đến $A(1;0)$.

Lời giải. Ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 + 2y - e^y \sin x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2 - e^y \sin x.$$

Ta viết $I = \int_C (y^3 - e^y \sin x)dx + (3xy^2 + e^y \cos x)dy + \int_C y^2 dx = I_1 + I_2$. Tích phân đường I_1 không phụ thuộc vào đường đi. Ta tính I_1 bằng cách chọn đường đi từ O đến A là đoạn thẳng OA, với phương trình $y = 0$, $0 \le x \le 1$. Khi đó

$$I_1 = \int_0^1 (-\sin x)dx = [\cos x]_0^1 = \cos 1 - 1.$$

Ví dụ. Tính $I = \int_C (y^3 + y^2 - e^y \sin x)dx + (3xy^2 + e^y \cos x)dy$, với C là nửa đường tròn $y = \sqrt{x - x^2}$, đi từ $O(0;0)$ đến $A(1;0)$.

Lời giải. Ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 + 2y - e^y \sin x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2 - e^y \sin x.$$

Ta viết $I = \int_C (y^3 - e^y \sin x)dx + (3xy^2 + e^y \cos x)dy + \int_C y^2 dx = I_1 + I_2$. Tích phân đường I_1 không phụ thuộc vào đường đi. Ta tính I_1 bằng cách chọn đường đi từ O đến A là đoạn thẳng OA, với phương trình $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$. Khi đó

$$I_1 = \int_0^1 (-\sin x)dx = [\cos x]_0^1 = \cos 1 - 1.$$

Mặt khác, $I_2 = \int_C y^2 dx$

Ví dụ. Tính $I = \int_C (y^3 + y^2 - e^y \sin x)dx + (3xy^2 + e^y \cos x)dy$, với C là nửa đường tròn $y = \sqrt{x - x^2}$, đi từ $O(0;0)$ đến $A(1;0)$.

Lời giải. Ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 + 2y - e^y \sin x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2 - e^y \sin x.$$

Ta viết $I = \int_C (y^3 - e^y \sin x)dx + (3xy^2 + e^y \cos x)dy + \int_C y^2 dx = I_1 + I_2$. Tích phân đường I_1 không phụ thuộc vào đường đi. Ta tính I_1 bằng cách chọn đường đi từ O đến A là đoạn thẳng OA, với phương trình $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$. Khi đó

$$I_1 = \int_0^1 (-\sin x)dx = [\cos x]_0^1 = \cos 1 - 1.$$

Mặt khác, $I_2 = \int_C y^2 dx = \int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{1}{6}$.

Ví dụ. Tính $I = \int_C (y^3 + y^2 - e^y \sin x)dx + (3xy^2 + e^y \cos x)dy$, với C là nửa đường tròn $y = \sqrt{x - x^2}$, đi từ $O(0;0)$ đến $A(1;0)$.

Lời giải. Ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 + 2y - e^y \sin x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2 - e^y \sin x.$$

Ta viết $I = \int_C (y^3 - e^y \sin x)dx + (3xy^2 + e^y \cos x)dy + \int_C y^2 dx = I_1 + I_2$. Tích phân đường I_1 không phụ thuộc vào đường đi. Ta tính I_1 bằng cách chọn đường đi từ O đến A là đoạn thẳng OA, với phương trình $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$. Khi đó

$$I_1 = \int_0^1 (-\sin x)dx = [\cos x]_0^1 = \cos 1 - 1.$$

Mặt khác, $I_2 = \int_C y^2 dx = \int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{1}{6}$. Vậy $I = I_1 + I_2 = \cos 1 - \frac{5}{6}$.

Tích phân đường không phụ thuộc vào đường đi

Nếu tích phân đường $\int P\,dx + Q\,dy$ không phụ thuộc vào đường đi trên D thì tồn tại hàm số $f(x,y)$ xác định trên D sao cho $\dfrac{\partial f}{\partial x} = P(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y)$ trên D.

Nếu tích phân đường $\int P\,dx + Q\,dy$ không phụ thuộc vào đường đi trên D thì tồn tại hàm số $f(x,y)$ xác định trên D sao cho $\dfrac{\partial f}{\partial x} = P(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y)$ trên D. Khi đó

$$\int\limits_A^B P\,dx + Q\,dy = \int\limits_A^B df = f(B) - f(A),$$

với mọi đường cong AB trong D.

Nếu tích phân đường $\int P\,dx + Q\,dy$ không phụ thuộc vào đường đi trên D thì tồn tại hàm số $f(x,y)$ xác định trên D sao cho $\dfrac{\partial f}{\partial x} = P(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y)$ trên D. Khi đó

$$\int\limits_A^B P\,dx + Q\,dy = \int\limits_A^B df = f(B) - f(A),$$

với mọi đường cong AB trong D. Hàm số $f(x,y)$ được cho bởi

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)\,dt + C_1 \\ &= \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)\,dt + \int_{x_0}^{x} P(t,y)\,dt + C_2. \end{aligned}$$

Tích phân đường không phụ thuộc vào đường đi

Ví dụ. Tích phân

$$\int\limits_{(1;2)}^{(5;6)} y\,dx + x\,dy = \int\limits_{(1;2)}^{(5;6)} d(xy) = xy\Big|_{(1;2)}^{(5;6)} = 30 - 2 = 28.$$

Ví dụ. Tích phân

$$\int_{(1;2)}^{(5;6)} y\,dx + x\,dy = \int_{(1;2)}^{(5;6)} d(xy) = xy\Big|_{(1;2)}^{(5;6)} = 30 - 2 = 28.$$

Bài tập 1. Chứng minh rằng tích phân $I = \int_C (1+y)\cos x\,dx + \sin x\,dy$ không phụ thuộc vào đường đi trên toàn mặt phẳng. Tính I nếu C là nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ đi từ $A(2;0)$ đến $O(0;0)$.

Ví dụ. Tích phân

$$\int_{(1;2)}^{(5;6)} y\,dx + x\,dy = \int_{(1;2)}^{(5;6)} d(xy) = xy\Big|_{(1;2)}^{(5;6)} = 30 - 2 = 28.$$

Bài tập 1. Chứng minh rằng tích phân $I = \int_C (1+y)\cos x\,dx + \sin x\,dy$ không phụ thuộc vào đường đi trên toàn mặt phẳng. Tính I nếu C là nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ đi từ $A(2;0)$ đến $O(0;0)$.

Bài tập 2. Tính

$$\int_C (e^{2x} + y^2)dx + (x^4 + 2e^y)dy,$$

với C là đường cong $y = \sqrt[4]{1 - x^2}$ đi từ điểm $A(-1;0)$ đến điểm $B(1;0)$.