GIẢI TÍCH III

TS. Lê Văn Tứ

Hanoi University of Science and Technology

Chuỗi số - Tổng riêng - Sự hội tụ

Định nghĩa

Xét một dãy các số thực $(u_n)_{n\geq 1}$. Tổng hình thức của vô hạn số hạng sau

$$u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

được gọi là một chuỗi số, kí hiệu là $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Ta gọi

- u_n là số hạng tổng quát.
- $S_n = u_1 + \ldots + u_n$ là tổng riêng của n số hạng đầu tiên.
- $R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$ được gọi là phần dư của S_n.

Ví dụ. Chuỗi $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$

Số hạng tổng quát: $\frac{1}{n^2}$. Tổng riêng $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Phần dư $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Chuỗi hội tụ - Chuỗi phân kì

Định nghĩa

Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ được gọi là *hội tụ* nếu tồn tại $\ell \in \mathbb{R}$ hữu hạn sao cho dãy tổng riêng $S_n = u_1 + \ldots + u_n$ hội tụ về ℓ.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = \ell.$$

Nếu dãy tổng riêng S_n không có giới hạn hoặc giới hạn bằng vô cùng khi n tiến về $+\infty$ thì ta nói $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *phân kì*.

Một số ví dụ

Chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n$

- Tổng riêng $S_n = 1 + q + \ldots + q^n = \begin{cases} n \text{ nếu } q = 1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ nếu } q \neq 1 \end{cases}$.
- Với $q \neq 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 \text{ nếu } |q| < 1 \\ +\infty \text{ nếu } q > 1 \\ \text{không tồn tại nếu } q \leq -1 \end{cases}$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} \text{ nếu } |q| < 1 \\ +\infty \text{ nếu } q \geq 1 \\ \text{không tồn tại nếu } q \leq -1 \end{cases}$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \Leftrightarrow |q| < 1}$$

Một số ví dụ

Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Ta có với mọi $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} S_n = 1 + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{3^2} + \ldots + \tfrac{1}{n^2} &< 1 + \tfrac{1}{1.2} + \tfrac{1}{2.3} + \ldots + \tfrac{1}{n(n-1)} \\ &< 1 + 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n} \\ &< 2 - \tfrac{1}{n} < 2. \end{aligned}$$

Suy ra S_n là dãy tăng ngặt và bị chặn trên. Do đó, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ tồn tại và hữu hạn.

Nói cách khác, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ.

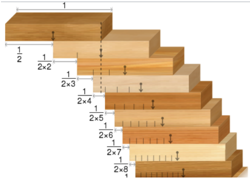
Một số ví dụ

Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

- Nếu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ hội tụ bằng L thì

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_n = L.$$

- $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$
- Suy ra $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ phân kì.



Câu hỏi trọng tâm

Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

- Chuỗi hội tụ hay phân kì ?
- Nếu chuỗi hội tụ thì giá trị bằng bao nhiêu ?

Các tính chất cơ bản của chuỗi hội tụ

Mệnh đề

Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ khi và chỉ khi với mọi $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=k}^{+\infty} u_n$ hội tụ.

Mệnh đề

Cho hai chuỗi hội tụ $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ell_1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \ell_2$. Khi đó, với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \ell_1 + \beta \ell_2.$$

Chú ý

Ta không kết luận được tính hội tụ hay phân kì của chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n$ (ví dụ sử dụng chuỗi đan dấu).

Một số ví dụ

Xét sự hội tụ của $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(u_n+v_n)$

a. $u_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}, v_n = \frac{1}{2^n}$.

$u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ hội tụ do $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$. Dó đó, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(u_n+v_n)$ hội tụ.

b. $u_n = \frac{2}{3^n}, v_n = \frac{1}{n}$.

Ta có $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -u_n$ hội tụ. Giả sử $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(u_n+v_n)$ hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(u_n+v_n+(-u_n))$ hội tụ. Tuy nhiên, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ phân kì. Do đó, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(u_n+v_n)$ phân kì.

c. $u_n = \frac{1}{n}, v_n = -\frac{1}{n}$.

$u_n + v_n = 0$ nên $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(u_n+v_n)$ hội tụ.

Các tính chất cơ bản của chuỗi hội tụ

Điều kiện cần của chuỗi hội tụ

Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ thì $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

Chứng minh. Nếu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ và bằng ℓ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1} = \ell$. Do đó, $u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$.

Ví dụ. Chứng minh các chuỗi sau phân kì

a. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n$

b. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$

Chú ý

Mệnh đề đảo không đúng. Ví dụ, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ có $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ nhưng phân kì.

Chuỗi dương

Định nghĩa

Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ được gọi là chuỗi dương nếu với mọi $n \geq 1, u_n > 0$.

Nhận xét

- Nếu với mọi $n \geq 0, u_n < 0$, ta xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -u_n = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$. Nói cách khác, các kết quả áp dụng cho chuỗi dương áp dụng được với mọi chuỗi không đổi dấu.
- Chuỗi dương $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ khi và chỉ khi dãy tổng riêng S_n là dãy bị chặn.

Tiêu chuẩn so sánh cho chuỗi dương

Định lí 1

Cho hai chuỗi dương $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ sao cho kể từ $n_0 \geq 0$ nào đó

$$\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n.$$

- Nếu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ.
- Nếu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ phân kì thì $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ phân kì.

Chứng minh. Giả sử với mọi $n, u_n \leq v_n$. Xét hai dãy tổng riêng $S_n = u_1 + \ldots + u_n$, $T_n = v_1 + \ldots v_n$. Khi đó, $0 < S_n \leq T_n$.

- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = T$ thì với mọi $n \geq 1, 0 < S_n \leq T_n < T$ nên S_n bị chặn, tức là $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ.
- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ phân kì thì $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty$, suy ra $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ phân kì.

Tiêu chuẩn so sánh cho chuỗi dương

Ví dụ. Xét sự hội tụ

- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n+n}$.

  Với mọi $n \geq 1$, $u_n < \frac{2^n}{3^n}$. Do $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ hội tụ. Suy ra $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n+n}$ hội tụ.

- $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$, $p > 0$.

  Do $p > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^p}{n} = 0$. Khi đó, tồn tại $n_0 > 0$ sao cho với mọi $n > n_0$, $\frac{(\ln n)^p}{n} < 1$. Suy ra,

$$\forall n > n_0, \frac{1}{n} < \frac{1}{(\ln n)^p}$$

  Chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$ phân kì suy ra $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$ phân kì.

Tiêu chuẩn so sánh cho chuỗi dương

Định lí 2

Cho hai chuỗi dương $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ thoả mãn

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = k.$$

Nếu $k \in (0, +\infty)$ thì $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *cùng* hội tụ hoặc *cùng* phân kì.

Khi $k = 1$, ta viết $u_n \sim v_n$.
Gợi ý chứng minh. Do $k > 0$ nên $\frac{k}{2} < k < \frac{3k}{2}$. Khi đó, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$ suy ra là từ chỉ số $n_0 > 0$ nào đó,

$$\frac{k}{2} v_n \leq u_n \leq \frac{3k}{2} v_n.$$

Tiêu chuẩn so sánh cho chuỗi dương

Nhận xét

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$ và

- $k = 0 \Rightarrow \forall n > n_0, \frac{u_n}{v_n} < 1$. Khi đó,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n \text{ hội tụ } \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ hội tụ }, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ phân kì } \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \text{ phân kì.}$$

- $k = +\infty \Rightarrow \forall n > n_0, \frac{u_n}{v_n} > 1$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n \text{ phân kì } \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ phân kì }, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ hội tụ } \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \text{ hội tụ }.$$

Tiêu chuẩn so sánh cho chuỗi dương

Ví dụ. Xét sự hội tụ

- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^4+3}$.

  Xét $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^4+3} \frac{1}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^4+3} = 1$. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ suy ra $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^4+3}$ hội tụ.

- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(3n+2)}{n^3}$.

  Xét $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(3n+2)}{n^3} \frac{1}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(3n+2)}{n} = 0$. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ suy ra $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(3n+2)}{n^3}$ hội tụ.

Các tiêu chuẩn hội tụ

Tiêu chuẩn D'Alembert

Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ dương. Giả sử tồn tại giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

- Nếu $l < 1$ thì $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ.
- Nếu $l > 1$ thì $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ phân kì.
- Nếu $l = 1$ thì không kết luận được sự hội tụ hay phân kì.

Chứng minh. Nếu $l < 1$ thì tồn tại $l < q < 1, n_0 > 0$ sao cho với mọi $n > n_0, u_n < q^{n-n_0} u_{n_0} \Rightarrow$ Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ.

Nếu $l > 1$ thì $n > n_0, u_{n+1} > u_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0 \Rightarrow$ Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ phân kì.

Các tiêu chuẩn hội tụ

Tiêu chuẩn Cauchy

Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ dương. Giả sử tồn tại giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$$

- Nếu $l < 1$ thì $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ.
- Nếu $l > 1$ thì $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ phân kì.
- Nếu $l = 1$ thì không kết luận được sự hội tụ hay phân kì.

Chứng minh. Nếu $l < 1$ thì tồn tại $l < q < 1, n_0 > 0$ sao cho với mọi $n > n_0, u_n < q^n \Rightarrow$ Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ.

Nếu $l > 1$ thì tồn tại $l > q > 1$ và $\forall n > n_0, u_n > q^n \Rightarrow$ Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ phân kì.

Một số ví dụ

Ví dụ. Xét sự hội tụ

- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.
  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n} \to 0 < 1 \Rightarrow$ Chuỗi hội tụ.
- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n(n+3)}$.
  $\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+3} = e > 1 \Rightarrow$ Chuỗi phân kì.
- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^{(-1)^n - n}$.
  $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{2^{(-1)^n}}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{2^{(-1)^n}}}{2} \to \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ Chuỗi hội tụ.
  Chú ý $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{(-1)^{n+1} - (-1)^n}}{2} = \begin{cases} \frac{1}{8} \text{ nếu } n \text{ chẵn} \\ 2 \text{ nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$ nên Tiêu chuẩn D'Alembert không áp dụng được.

Các tiêu chuẩn hội tụ

Tiêu chuẩn tích phân

Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ dương và f là hàm dương liên tục và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ thoả mãn

$$u_n = f(n).$$

Nếu tồn tại $N > 0$ sao cho f **giảm trên** $[N, +\infty)$ thì $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ và $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

Gợi ý chứng minh. Giả sử $N = 1$. Do f giảm,

$$u_{n+1} \le \int\limits_n^{n+1} f(x)dx \le u_n.$$

$$\Rightarrow u_2 + u_3 + \ldots + u_n \le \int\limits_1^{n} f(x)dx \le u_1 + u_2 + \ldots u_{n-1}.$$

Một số ví dụ

Chuỗi zeta $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha > 0$

Xét hàm $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Do $\alpha > 0$, f là hàm giảm về 0 khi $x \to +\infty$. Khi đó, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ và $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì. Nhắc lại rằng $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ hội tụ khi và chỉ khi $\alpha > 1$. Do đó,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ hội tụ } \Leftrightarrow \alpha > 1.}$$