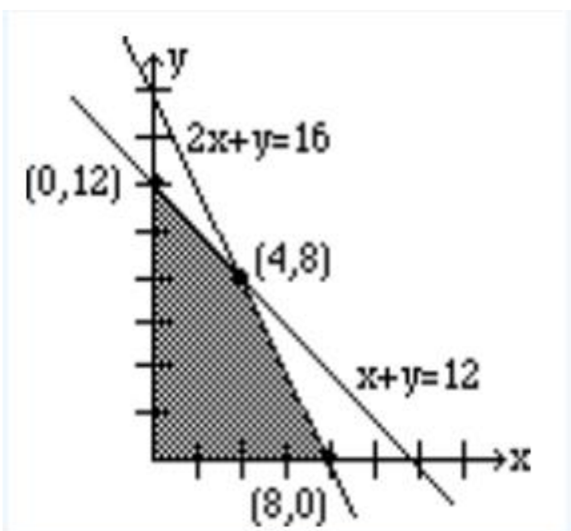
Lời Giải

1.

Đặt x = Số giờ mỗi tuần Niki sẽ làm việc tại Công việc I.
Đặt y = Số giờ mỗi tuần Niki sẽ làm việc tại Công việc II. ($x \geq 0$, $y \geq 0$)
Bây giờ chúng ta viết hàm mục tiêu. Vì Niki được trả 40 đô la một giờ tại Công việc I và 30 đô la một giờ tại Công việc II, nên tổng thu nhập I của cô được cho bởi phương trình sau:

- $F = 40x + 30y$
  Vì Cô không bao giờ muốn làm việc quá tổng cộng 12 giờ một tuần nên ta có:
- $x + y \leq 12$
  Vì mỗi giờ làm việc tại Công việc I, cô cần 2 giờ thời gian chuẩn bị, và cứ mỗi giờ làm việc tại Công việc II, cô cần 1 giờ thời gian chuẩn bị, và cô không thể dành nhiều hơn 16 giờ cho việc chuẩn bị nên ta có:
- $2x + y \leq 16$
  Vậy ta được :
- $F = 40x + 30y$
- $x + y \leq 12$
- $2x + y \leq 16$
  Để giải quyết bài này, chúng ta có thể dùng bất đẳng thức hoặc là vẽ đồ thị. Vì ở đây chúng ta đã có sẵn các công cụ để giải quyết đơn giản bằng đồ thị nên với cách bất đẳng thức thì mình xin phép nhường cho bạn đọc.
  Ta có đồ thi biểu diễn x và y như sau:
- 

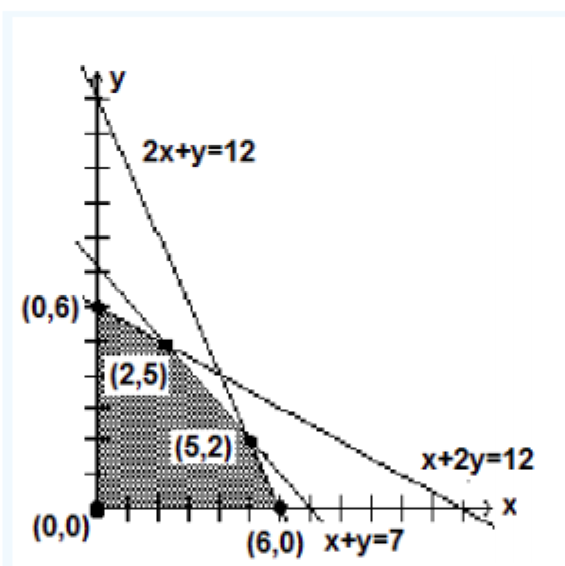
Vùng tô đậm là diện tích của 2 hàm và trong giải tích 2 thì khi tìm max của 1 hàm 2 biến chúng ta thường tìm giá trị cực đại hoặc cực tiểu tại các giá trị cắt trục hoành của đạo hàm.
Vì vậy nên ở trên đồ thị chúng ta có 4 điểm để chúng ta xét là (0, 0), (0, 12), (4, 8), (8, 0)

Điểm	Thu nhập : F = 40x + 30y
(0, 0)	40(0) + 30(0) = $0
(0, 12)	40(0) + 30(12) = $360
(4, 8)	40(4) + 30(8) = $400
(8, 0)	40(8) + 30(0) = $320

Vậy chúng ta có thể kết luận cô nên làm 4 giờ ở công ty I và 8 giờ ở công ty II để đem lại lợi nhuận lớn nhất.

2.

Đặt x = Số lượng các dụng cụ loại thường được sản xuất mỗi ngày.
Đặt y = Số lượng các dụng cụ loại cao cấp được sản xuất mỗi ngày. ($x \geq 0$, $y \geq 0$)
Chúng ta có phương trình sau:

- $P = 20x + 30y$
  Vì Công ty chỉ sản xuất 7 dụng cụ mỗi ngày nên:
- $x + y \leq 7$
  Vì dụng cụ thường cần một giờ lắp ráp và dụng cụ cao cấp cần 2 giờ lắp ráp mà chỉ có 12 giờ làm việc mỗi ngày nên:
- $x + 2y \leq 12$
  Vậy ta được :
- $P = 20x + 30y$
- $x + y \leq 7$
- $x + 2y \leq 12$
  Biểu diễn trên đồ thị ta được:
- 

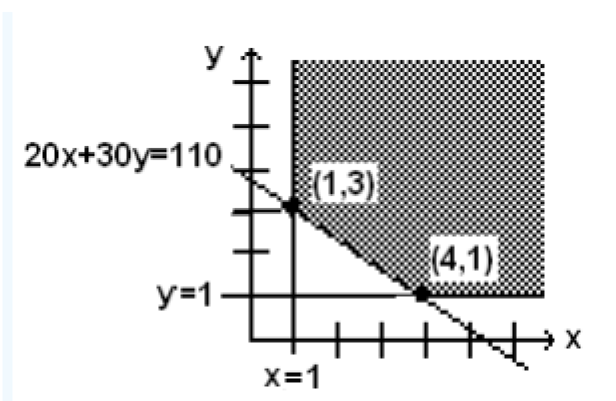
Ở trên đồ thị chúng ta có 5 điểm để xét là (0, 0), (0, 6), (2, 5), (5, 2), và (6, 0).

Điểm	Thu nhập : P = 20x + 30y
(0, 0)	20(0) + 30(0) = \$0
(0, 6)	20(0) + 30(6) = \$180
(2, 5)	20(2) + 30(5) = \$190
(5, 2)	20(5) + 30(2) = \$160
(6, 0)	20(6) + 30(0) = \$120

Chúng tôi kết luận rằng chúng ta nên sản xuất 2 dụng cụ thường và 5 dụng cụ cao cấp mỗi ngày để đạt được lợi nhuận tối đa là 190 đô la.

4.

Đặt x = Số giờ làm việc mỗi tuần của John.
Đặt y = Số giờ làm việc mỗi tuần của Mary. ($x \geq 0, y \geq 0$)
Chúng ta có phương trình sau:

- $C = 15x + 25y$
  Thực tế là mỗi người phải làm việc ít nhất một giờ mỗi tuần dẫn đến hai ràng buộc sau:
- $x \geq 1, y \geq 1$
  Vì John có thể chấm 20 bài mỗi giờ và Mary chấm 30 bài mỗi giờ, và có ít nhất 110 bài cần chấm mỗi tuần, chúng ta có:
- $20x + 30y \geq 110$
  Vậy ta được :
- $C = 15x + 25y$
- $x \geq 1, y \geq 1$
- $20x + 30y \geq 110$
  Chúng ta có đồ thị sau:
- 

Điểm	Thu nhập: C = 15x + 25y
(1, 3)	15(1) + 25(3) = \$90
(4, 1)	15(4) + 25(1) = \$85

Do đó, chúng tôi kết luận rằng để giảm thiểu chi phí chấm điểm, Giáo sư Symons nên thuê John 4 giờ một tuần và Mary 1 giờ một tuần với chi phí là 85 đô la một tuần.

5.

Cân bằng phương trình ta có:

- 6 mol NH3 cần 3 mol N2 và 9mol H2
- $$N_2 + 3H_2 \rightarrow 2NH_3$$
- 12 mol NO2 cần 6 mol NH3 và 15 mol O2
- $$2NH_3 + 5/2O_2 \rightarrow 2NO_2 + 3H_2O$$
- 8 mol HNO3 cần 12 mol NO2 và 4 mol H2O
- $$3NO_2 + H_2O \rightarrow 2HNO_3 + NO$$

Vậy 8 mol axit nitric, cần 3 mol nitơ, 9 mol hydrogen và 15 mol oxygen.

6.

Theo đề bài ta được ma trận A = $\begin{bmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{bmatrix}$

Là thể hiện của các phần tử ở hàng đầu tiên của A sẽ là tỷ lệ phần trăm phụ nữ đã kết hôn và độc thân, tương ứng, những người sẽ kết hôn sau một năm. Các mục ở hàng thứ hai sẽ là tỷ lệ phần trăm phụ nữ độc thân sau một năm. Nếu ta cho ma trận x = $\begin{bmatrix} 8000 \\ 2000 \end{bmatrix}$ thì số người đã lập gia đình và độc thân phụ nữ sau một năm có thể được tính bằng cách nhân Ax:

Ax =$\begin{bmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8000 \\ 2000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6000 \\ 4000 \end{bmatrix}$

Sau một năm, sẽ có 6000 phụ nữ đã kết hôn và 4000 phụ nữ độc thân. Để tìm số người kết hôn và phụ nữ độc thân sau hai năm:

A^2x =A(Ax) = $\begin{bmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6000 \\ 4000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 \\ 5000 \end{bmatrix}$

Sau hai năm, một nửa số phụ nữ sẽ kết hôn và một nửa sẽ độc thân. Nhìn chung, số lượng người kết hôn và phụ nữ độc thân sau n năm có thể được xác định bởi A^nx.

7.

a) Chúng ta có ma trận kề:

A = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) A^2 = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Hàng đầu tiên của A^2 biểu thị số bước đi có độ dài 2 bắt đầu từ V_1. Cụ thể:

- 2 bước đi có chiều dài 2 từ V_1 đến V_2
- 1 bước đi có chiều dài 2 từ V_1 đến V_3
- 1 bước đi có chiều dài 2 từ V_1 đến V_4
- 1 bước đi có chiều dài 2 từ V_1 đến V_5.

c) A^3 = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Số bước đi có độ dài 3 từ V_2 đến V_4. Thông tin này được tìm thấy trong mục A^3[2][4] = 2. Vì vậy, có 2 bước đi có độ dài 3 từ V_2 đến V_4. Để tính số bước đi có độ dài nhỏ hơn hoặc bằng 3 từ V_2 đến V_4, chúng ta có thể kiểm tra các mục tương ứng trong A, A^2 và A^3:

- A[2][4] = 1 (1 bước đi có độ dài 1)
- A^2[2][4] = 1 (1 bước đi có chiều dài 2)
- A^3[2][4] = 2 (2 bước đi có chiều dài 3)

Tổng số bước đi có độ dài nhỏ hơn hoặc bằng 3 từ V_2 đến V_4 là 1 + 1 + 2 = 4 lần.

9.

Đặt ma trận A = $\begin{bmatrix} 0.94 & 0.02 \\ 0.06 & 0.98 \end{bmatrix}$ số người di chuyển mỗi năm qua lại giữa thành phố

Đặt ma trận X = $\begin{bmatrix} 0.30 \\ 0.70 \end{bmatrix}$ là phần trăm người dân ban đầu sống ở thành phố và ngoại ô.

Như vậy ta có thể nhận thấy tỉ lệ người dân sống ở thành phố và ngoại ô sau 1 năm là Ax.

Tỷ lệ người dân sống ở thành phố và ngoại ô sau 2 năm là A^2x.

Hay theo quy nạp ta có thể nói tỷ lệ người dân sống ở thành phố và ngoại ô sau n năm sẽ là A^nx.

Đặt Xn = A^nx => ta có X0 = $\begin{bmatrix} 0.30 \\ 0.70 \end{bmatrix}$. với n = 10, 30, 50 ta có lần lượt X10, X30, X50 là

X10 = $\begin{bmatrix} 0.27 \\ 0.73 \end{bmatrix}$, X30 = $\begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{bmatrix}$, X50 = $\begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{bmatrix}$

Hay ta có thể nói khi n tiệm cận với ∞ thì dãy Xn hội tụ đến một giới hạn X = $(0.25, 0.75)^T$

Để hiểu vì sao ta có thể nói Xn hội tụ tới X thì ta có thể viết Vectơ ban đầu X0 có thể được viết dưới dạng tuyến tính

sự kết hợp của các vectơ cơ sở mới:

X0 = $\begin{bmatrix} 0.30 \\ 0.70 \end{bmatrix}$ = 0.25$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ - 0.05$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ = 0.25u1 – 0.05u2

Dẫn đến Xn = $A^n x$ = 0.25u1 – 0.05$(0.92)^n$u2

Vì khi dần tới vô cùng ta có thể nói 0.92 tiệm cận dầu tới 0 nên Xn = 0.25u1 = $\begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{bmatrix}$

Ứng dụng này là một ví dụ về một loại toán học mô hình được gọi là quá trình Markov. Chuỗi vectơ x1, x2, … được gọi là Markov chain. Ma trận A có cấu trúc đặt biệt trong đó các giá trị trong ma trận không âm và các cột của nó có tổng bằng một và các ma trận như vậy được gọi là ma trận ngẫu nhiên

10.

Số tiền người P_1 chi tiêu ở cửa hàng S_1 là:

$$6 \cdot 1.50 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 16 = 50$$

Và ở cửa hàng S_2 là :

$$6 \cdot 1 + 5 \cdot 2.50 + 3 \cdot 4.50 + 1 \cdot 17 = 49$$

đối với những người khác cũng tương tự. Những phép tính này có thể được viết bằng cách sử dụng tích của hai ma trận

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Và

$$Q = \begin{pmatrix} 1.5 & 1 \\ 2 & 2.5 \\ 5 & 4.5 \\ 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$R = PQ = \begin{pmatrix} 50 & 49 \\ 58.5 & 61 \\ 43.5 & 43.5 \end{pmatrix}$$

thể hiện số tiền người P_1 chi tiêu tại cửa hàng S_1 (phần tử R_{11}) và tại cửa hàng

S_2 (phần tử R_{12}). Do đó, điều tối ưu là người P_1 mua hàng ở cửa hàng S_2, vì người P_2 ở S_1 và người P_3 sẽ trả giá ở S_1 như ở S_2

11.

Chúng ta đặt dòng chữ "BILA KOCKA" (một con mèo trắng) vào ma trận A:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 8 & 11 & 6 \\ 5 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

và mã hóa văn bản:

$$Z = CA = \begin{pmatrix} 19 & 19 & 14 \\ 12 & 15 & 11 \\ 8 & 11 & 6 \end{pmatrix}$$

Để giải mã thông điệp, chúng ta phải nhân ma trận Z với ma trận C^{-1} ở bên trái:

$C^{-1}Z = A$. và đây là kết quả

12.

cột đầu tiên liệt kê rằng 60% hàng hóa z1 được sản xuất được tiêu thụ bởi

P_1, 10% của P_2 và 30% của P_3. Như vậy hiển nhiên tổng các phần tử ở mỗi cột là

bằng 1.

Gọi x_1, x_2, x_3 là thu nhập của những người P_1, P_2, P_3. Sau đó số tiền bỏ ra

bởi P_1 trên z_1, z_2, z_3 là $0,6x_1 + 0,2x_2 + 0,3x_3$. Giả định rằng mức tiêu thụ của mỗi

một người bằng thu nhập của mình dẫn đến phương trình $0,6x_1 + 0,2x_2 + 0,3x_3 = x1$, tương tự với

những người khác. Ta thu được hệ phương trình tuyến tính:

$0.6x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 = x_1$

$0.1x_1 + 0.7x_2 + 0.2x_3 = x_2$

$0.3x_1 + 0.1x_2 + 0.5x_3 = x_3$.

Hệ thống này có thể được viết lại dưới dạng phương trình Ax = x, trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix} \text{ and } x = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^T$$

Hơn nữa, chúng tôi giả định thu nhập không âm, tức là $x_i \geq 0$ với i = 1, 2, 3 (chúng tôi biểu thị nó

$x \geq o$). Chúng ta có thể viết lại phương trình này thành dạng tương đương $(A - I)x = o$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0.4 & 0.2 & 0.3 & x_1 \\ 0.1 & -0.3 & 0.2 & x_2 \\ 0.3 & 0.2 & -0.5 & x_3 \end{array}\right)$$

Nghiệm tùy ý của hệ có dạng x = t(13, 11, 10)T và $x \geq o$ với $t \geq 0$.

Vì vậy, để đảm bảo xã hội này tồn tại thì những người P_1, P_2, P_3 phải có thu nhập của mình.

theo tỷ lệ 13:11:10.

13.

quỹ thanh toán của công ty A và công ty B là ak+1,bk+1

(đơn vị: 10.000 nhân dân tệ) tương ứng. Ta đặt a0=2600,b0=2800 thì

chúng ta có thể có được điều đó

$$\begin{cases} a_{k+1} = 0.88a_k + 0.1b_k \\ b_{k+1} = 0.12a_k + 0.9b_k \end{cases}$$

Khai triển mối quan hệ truy hồi trên, ta có

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.88 & 0.1 \\ 0.12 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.88 & 0.1 \\ 0.12 & 0.9 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ b_{k-1} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 0.88 & 0.1 \\ 0.12 & 0.9 \end{pmatrix}^{k+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

Điều đó dẫn tới:

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{27000}{11} + \frac{3800}{11} \cdot \left(\frac{39}{50}\right)^{k+1} \\ \frac{32400}{11} - \frac{3800}{11} \cdot \left(\frac{39}{50}\right)^{k+1} \end{pmatrix}$$

Rõ ràng {an} là một chuỗi giảm đơn điệu và {bn} là một chuỗi

chuỗi tăng đơn điệu. $\lim_{k\to\infty} a_k = \frac{27000}{11}, \lim_{k\to\infty} b_k = \frac{32400}{11},$

và $\frac{27000}{11} \approx 2454.5, \frac{32400}{11} \approx 2945.5$

Chúng tôi thấy rằng hai khoản tiền thanh toán là hơn 2.400, vì vậy không phải

cần thiết để chuyển tiền.

14.

đặt tổng giá trị sản lượng của mỏ than là x1 thì tổng sản lượng

giá trị của nhà máy điện là x2 thì tổng giá trị sản lượng của đường sắt địa phương là

x3. Các phương trình có thể được liệt kê như sau:

$$\begin{cases} x_1 - (0x_1 + 0.65x_2 + 0.55x_3) = 50000 \\ x_2 - (0.25x_1 + 0.05x_2 + 0.10x_3) = 25000 \\ x_3 - (0.25x_1 + 0.05x_2 + 0x_3) = 0 \end{cases}$$

Đặt vectơ đầu ra là

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

Vectơ cầu là

$$y = \begin{bmatrix} 50000 \\ 25000 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Ma trận hệ số tiêu dùng trực tiếp là

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.65 & 0.55 \\ 0.25 & 0.05 & 0.10 \\ 0.25 & 0.05 & 0 \end{bmatrix}.$$

Khi đó, hệ ban đầu có thể được chuyển đổi thành phương trình sau

$$(E - A)x = y$$

Vectơ đầu ra có thể thu được bằng phương trình trên

$$x = (E - A)^{-1} y = \begin{bmatrix} 102087.48 \\ 56163.02 \\ 28330.02 \end{bmatrix}$$

Ma trận đầu vào đầu ra có thể

được viết là

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0.65x_2 & 0.55x_3 \\ 0.25x_1 & 0.05x_2 & 0.10x_3 \\ 0.25x_1 & 0.05x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Vì vậy, vectơ giá trị mới được xây dựng dưới dạng

$$z = x - D = \begin{bmatrix} 51043.74 \\ 14040.75 \\ 9915.51 \end{bmatrix}$$

Phân tích đầu vào đầu ra được thể hiện trong bảng 1.

		Consumption sector			The outside world demand	Total output
		Coal mine	Power plants	The railway		
The production part	Coal mine	0	36505.96	15581.51	50000	102087.48
	Power plants	25521.87	2808.15	2833.00	25000	56163.02
	The railway	25521.87	2808.15	0	0	28330.02
New creative value		51043.74	14040.75	9915.51		
The total investment		51043.74	42122.27	18414.51		

15.

Giá thành đơn vị của sản phẩm được xác định là x1, x2, x3 và x4,

tương ứng.

$$\begin{cases} 2000x_1 + 1000x_2 + 1000x_3 + 500x_4 = 29000 \\ 5000x_1 + 2500x_2 + 2000x_3 + 1000x_4 = 70500 \\ 1000x_1 + 400x_2 + 400x_3 + 200x_4 = 13600 \\ 4000x_1 + 1800x_2 + 1600x_3 + 600x_4 = 55000 \end{cases}$$

Phương trình trên có thể được đơn giản hóa như sau:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 58 \\ 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 141 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 68 \\ 20x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 275 \end{cases}$$

Phương trình này có thể được giải bằng quy tắc Cramer nên ta có giá trị là :

$$x_1 = 10,\ x_2 = 5,\ x_3 = 3,\ x_4 = 2,$$

Do đó, giá thành đơn vị của 4 sản phẩm A, B, C và D là 10 nhân dân tệ

mỗi kg, 5 nhân dân tệ mỗi kg, 3 nhân dân tệ mỗi kg và 2 nhân dân tệ mỗi kg.

16.

Tỷ suất lợi nhuận của gạo, rượu, dầu và bột mì được đặt là x1,

x2, x3 và x4 tương ứng.

$$\begin{cases} 500x_1 + 400x_2 + 600x_3 + 1200x_4 = 160 \\ 400x_1 + 200x_2 + 1000x_3 + 1600x_4 = 170 \\ 320x_1 + 600x_2 + 800x_3 + 1500x_4 = 180 \\ 600x_1 + 500x_2 + 1000x_3 + 1000x_4 = 190 \end{cases}$$

Phương trình trên có thể đơn giản hóa như sau:

$$\begin{cases} 25x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 60x_4 = 8 \\ 40x_1 + 20x_2 + 100x_3 + 160x_4 = 17 \\ 16x_1 + 30x_2 + 40x_3 + 75x_4 = 9 \\ 60x_1 + 50x_2 + 100x_3 + 100x_4 = 19 \end{cases}$$

Phương trình này có thể được giải bằng quy tắc Cramer nên ta có giá trị là :

$$x_1 = 0.10,\ x_2 = 0.08,\ x_3 = 0.05,\ x_4 = 0.04.$$

Vì vậy, tỷ suất lợi nhuận của cửa hàng đối với các sản phẩm gạo, rượu, dầu và bột mì là

10%, 8%, 5%, 4%, tương ứng.

17.

Cửa hàng văn phòng phẩm bán được số hàng trong một tuần là

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 15 & 18 & 22 & 40 & 36 \\ 30 & 18 & 24 & 23 & 26 & 55 & 40 \\ 15 & 8 & 6 & 10 & 5 & 22 & 30 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 2 & 10 & 9 \end{pmatrix},$$

Đơn giá của hàng hóa cấu thành được xây dựng dưới dạng ma trận

$$B = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.4 \\ 0.3 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

Thu nhập có thể được tính theo công thức sau

$$A^T B = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 15 & 18 & 22 & 40 & 36 \\ 30 & 18 & 24 & 23 & 26 & 55 & 40 \\ 15 & 8 & 6 & 10 & 5 & 22 & 30 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 2 & 10 & 9 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.4 \\ 0.3 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

$$= (44.5 \quad 35.6 \quad 45.9 \quad 43.7 \quad 31.9 \quad 93.6 \quad 83.5)^T$$

Tổng số hàng bán được mỗi ngày được cộng vào tổng số

hàng bán được một tuần

$$44.5 + 35.6 + 45.9 + 43.7 + 31.9 + 93.6 + 83.5 = 378.7$$

Kết quả là tổng doanh số bán hàng của cửa hàng văn phòng phẩm trong một tuần là 378,7 nhân dân tệ.

18.

a) Ma trận đỉnh của g là:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Tất cả các đường đi có độ dài 3 được liệt kê dưới đây:

Danh sách tất cả các đường đi có độ dài là 3:

$$P_1 \to P_6 \to P_3 \to P_2$$

$$P_1 \to P_6 \to P_3 \to P_4$$

$$P_1 \to P_6 \to P_7 \to P_6$$

$$P_1 \to P_7 \to P_6 \to P_3$$

$$P_1 \to P_7 \to P_6 \to P_7$$

$$P_2 \to P_1 \to P_6 \to P_3$$

$$P_2 \to P_1 \to P_6 \to P_7$$

$$P_2 \to P_1 \to P_7 \to P_6$$

$$P_2 \to P_3 \to P_2 \to P_1$$

$$P_2 \to P_3 \to P_2 \to P_5$$

$$P_2 \to P_3 \to P_2 \to P_4$$

$$P_2 \to P_3 \to P_2 \to P_3$$

$$P_2 \to P_3 \to P_4 \to P_2$$

$$P_2 \to P_3 \to P_4 \to P_3$$

$$P_2 \to P_4 \to P_2 \to P_1$$

$$P_2 \to P_4 \to P_2 \to P_3$$

$$P_2 \to P_4 \to P_2 \to P_4$$

$$P_2 \to P_4 \to P_2 \to P_5$$
$$P_2 \to P_4 \to P_3 \to P_2$$
$$P_2 \to P_4 \to P_3 \to P_4$$
$$P_3 \to P_2 \to P_1 \to P_5$$
$$P_3 \to P_2 \to P_1 \to P_6$$
$$P_3 \to P_2 \to P_1 \to P_7$$
$$P_3 \to P_2 \to P_4 \to P_2$$
$$P_3 \to P_2 \to P_4 \to P_3$$
$$P_3 \to P_2 \to P_3 \to P_2$$
$$P_3 \to P_2 \to P_3 \to P_4$$
$$P_3 \to P_4 \to P_2 \to P_1$$
$$P_3 \to P_4 \to P_2 \to P_3$$
$$P_3 \to P_4 \to P_2 \to P_4$$
$$P_3 \to P_4 \to P_2 \to P_5$$
$$P_3 \to P_4 \to P_3 \to P_2$$
$$P_3 \to P_4 \to P_3 \to P_4$$

$P_4 \to P_2 \to P_1 \to P_5$

$P_4 \to P_2 \to P_1 \to P_6$

$P_4 \to P_2 \to P_1 \to P_7$

$P_4 \to P_2 \to P_4 \to P_2$

$P_4 \to P_2 \to P_4 \to P_3$

$P_4 \to P_2 \to P_3 \to P_2$

$P_4 \to P_2 \to P_3 \to P_4$

$P_4 \to P_3 \to P_2 \to P_1$

$P_4 \to P_3 \to P_2 \to P_3$

$P_4 \to P_3 \to P_2 \to P_4$

$P_4 \to P_3 \to P_2 \to P_5$

$P_4 \to P_3 \to P_4 \to P_2$

$P_4 \to P_3 \to P_4 \to P_3$

$P_6 \to P_3 \to P_2 \to P_1$

$P_6 \to P_3 \to P_2 \to P_3$

$P_6 \to P_3 \to P_2 \to P_4$

$P_6 \to P_3 \to P_2 \to P_4$

$P_6 \to P_3 \to P_2 \to P_5$

$P_6 \to P_3 \to P_4 \to P_2$

$P_6 \to P_3 \to P_4 \to P_3$

$P_6 \to P_7 \to P_6 \to P_3$

$P_6 \to P_7 \to P_6 \to P_7$

$P_7 \to P_6 \to P_3 \to P_2$

$P_7 \to P_6 \to P_3 \to P_4$

$P_7 \to P_6 \to P_7 \to P_6$

Số đường đi có độ dài 3:

$$M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tính tổng các mục nhập cho mỗi hàng và sau đó cộng chúng lại để có được : 4 + 15 + 13 + 13 + 0 + 8 + 3 = 56

C)

Câu trả lời là KHÔNG, vì không có đường dẫn nào từ điểm P5 này đến điểm khác. Một cách khác để kiểm tra tính kết nối của đồ thị là tính toán các ma trận C = M + M^2 + … + M^6 . Đồ thị được kết nối nếu và chỉ nếu C không có ô bằng không.

Vì có một hàng bằng 0, tức là hàng thứ năm, nên đồ thị không liên thông.

d)

$$M^6 = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 12 & 10 & 7 & 4 & 4 \\ 12 & 29 & 30 & 28 & 19 & 12 & 12 \\ 12 & 24 & 29 & 24 & 17 & 10 & 10 \\ 12 & 24 & 28 & 25 & 17 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 16 & 14 & 16 & 10 & 7 & 6 \\ 4 & 6 & 10 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Vì ở ô (7, 6) có 2 con đường nên ta có :

$$P_7 \to P_6 \to P_3 \to P_4 \to P_2 \to P_1 \to P_6$$

$$P_7 \to P_6 \to P_3 \to P_2 \to P_1 \to P_7 \to P_6$$

e)

Bằng cách nghiên cứu đồ thị, chúng ta có thể liệt kê tất cả các kết nối 4 bước từ đến:

$$P_1 \to P_6 \to P_3 \to P_2 \to P_3$$

$$P_1 \to P_6 \to P_3 \to P_4 \to P_3$$

$$P_1 \to P_6 \to P_7 \to P_6 \to P_3$$

Ta có :

$$M^4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 6 & 6 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 5 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 6 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vì ô (1, 3) có giá trị là 3 nên có 3 con đường từ P1 đến P3

f)

Sử dụng đồ thị để tìm ma trận:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- ⇨
- ⇨ C = {P2, P3, P4}

g)

Câu trả lời là không, vì không có cặp điểm nào giữa Pi và Pj. Ví dụ là P6 VÀ P7

19.

a) ma trận M^3:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Theo hàng thứ tư và mục nhập của cột thứ hai, chỉ có một 3 bước từ P4 đến P2 và đó là :

$$P_4 \to P_3 \to P_5 \to P_2 .$$

b) ma trận C = M + M^2 + M^3 + M^4

$$\begin{bmatrix} 16 & 8 & 21 & 7 & 21 \\ 12 & 6 & 15 & 4 & 15 \\ 14 & 7 & 16 & 5 & 16 \\ 12 & 6 & 15 & 4 & 15 \\ 16 & 8 & 21 & 7 & 21 \end{bmatrix}$$

Vì không có phần tử nào bằng 0 nên đồ thị được liên thông.

c)

$$M^4 = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 13 & 4 & 13 \\ 8 & 4 & 9 & 2 & 9 \\ 9 & 5 & 10 & 3 & 9 \\ 8 & 4 & 9 & 2 & 9 \\ 9 & 4 & 13 & 5 & 14 \end{bmatrix}$$

Xét ma trận M^4, từ M[1][2] = 2, chúng ta có 2 cách để P4 đi vòng lại đó là :

$$P_4 \to P_3 \to P_5 \to P_1 \to P_4$$

$$P_4 \to P_5 \to P_3 \to P_1 \to P_4$$

e)

$$P_1 \to P_3 \to P_1 \to P_5 \to P_2$$

$$P_1 \to P_4 \to P_3 \to P_5 \to P_2$$

$$P_1 \to P_5 \to P_1 \to P_5 \to P_2$$

$$P_1 \to P_5 \to P_2 \to P_5 \to P_2$$

$$P_1 \to P_5 \to P_3 \to P_5 \to P_2$$

f) Tương tự như phần (f) của bài toán 1. Tìm ma trận S và tính toán S^2, sau đó chúng ta tìm ra được C = {1, 3, 5}

g) Câu trả lời là không, vì không có cặp điểm nào giữa Pi và Pj

20.

a) ma trận chuyển của A:

$$\begin{bmatrix} 0.92 & 0.04 \\ 0.08 & 0.96 \end{bmatrix}$$

b) Số học sinh toán sau một năm là thành phần đầu tiên của vector x1 = Ax0

$$x_1 = Ax_0 = \begin{bmatrix} 0.92 & 0.04 \\ 0.08 & 0.96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 350 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 198 \\ 352 \end{bmatrix}$$

Do đó số lượng sinh viên chuyên ngành toán là 198.

c) Số sinh viên ngành sinh học sau ba năm là 355. Nó được xác định bởi X3 = A^3X0

Ta có :

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0.7876 & 0.1062 \\ 0.2124 & 0.8938 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = A^3 x_0 = \begin{bmatrix} 0.7876 & 0.1062 \\ 0.2124 & 0.8938 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 350 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 194.6912 \\ 355.3088 \end{bmatrix}$$

Do đó sẽ có 355 sinh viên chuyên ngành Sinh học vào năm cuối.

21.

a) gia trị riêng của A là :

$$\lambda_1 = 22/25, \qquad \lambda_2 = 1$$

và các vectơ riêng tương ứng là:

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} -985/1393 \\ 985/1393 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -1292/2889 \\ -2584/2889 \end{bmatrix}$$

Ma trận đường chéo D và ma trận là:

$$D = \begin{bmatrix} 22/25 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P = [\mathbf{v_1}|\mathbf{v_2}] = \begin{bmatrix} -985/1393 & -1292/2889 \\ 985/1393 & -2584/2889 \end{bmatrix}$$

Vì thế

$$x_{15} = PD^{15}P^{-1}x_0 = \begin{bmatrix} -985/1393 & -1292/2889 \\ 985/1393 & -2584/2889 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22/25 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{15} \begin{bmatrix} -1121/1189 & 1121/2378 \\ -963/1292 & -963/1292 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 350 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28239/152 \\ 8377/23 \end{bmatrix}$$

Vậy có 186 người quan tâm đến toán học sau mười lăm năm.

b) Tương tự như vậy, bạn có thể tính toán rằng sẽ có 365 người quan tâm đến sinh học sau hai mươi năm nữa.

22.

Chúng ta cần tìm :

$$A^{-1} = (8-3)^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = 5^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Ta nhận thấy ma trận này chứa các số không nguyên nên rất khó để giải, vậy chúng ta có thể xét vì chữ cái có 26 chữ số nên chúng ta có thể nhận xét là 5 * 21 mod 26 đồng dư với 1 mod 26 nên không mất tính tổng quát, ta thay 5^{-1} = 21 thì bài toán không thay đổi :

$$A^{-1} = 21 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 & -21 \\ -63 & 84 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 5 \\ 15 & 6 \end{bmatrix}$$

Bây giờ, chúng ta có thể chia toàn bộ thông điệp thành các cặp và chuyển đổi chúng thành các giá trị số tương ứng của chúng

11 14 15 24 1 15 10 24

Bây giờ nhân với mỗi vectơ được mã hóa này, các con số sẽ thay đổi thành

24624936036991105280294

Và giờ chúng ta hãy mod 26 ta được :

12 15 22 5 13 1 20 8

Chuyển đổi thành chuỗi ký tự sau:

L O V E M A T H

23.

Đầu tiên, tìm nghịch đảo của ma trận B, đó là:

$$\begin{bmatrix} 8 & -5 & -2 \\ 7 & -4 & -2 \\ -18 & 11 & 5 \end{bmatrix}$$

Sau đó, chia các số đầu vào thành các nhóm ba, tạo thành các vectơ, nhân mỗi vectơ với nghịch đảo của ma trận B. Bạn sẽ nhận được chuỗi số sau:

16 18 15 6 9 19 2 15 18 9 14 7

Chuyển đổi những thứ này thành chữ cái, tin nhắn sẽ đọc như sau:

P R O F I S B O R I N G

24.

Giả sử số xe đạp đi vào mỗi ngã tư bằng số xe đạp rời khỏi ngã tư. Đối với mỗi ngã tư, thực tế này có thể được thể hiện bằng một phương trình.

Viết lại hệ phương trình tuyến tính này:

$x_4+120 = x_1 + 250$, $x_3 + 115 = x_4 + 175$, $x_2 + 630 = x_3 + 390$, $x_1 + 70 = x_2 + 120$

$$\begin{cases} -x_1 & & & & & + & x_4 & = & 130 \\ & & & & x_3 & - & x_4 & = & 60 \\ & & x_2 & - & x_3 & & & = & -240 \\ x_1 & - & x_2 & & & & & = & 50 \end{cases}$$

Ma trận của hệ thống này là:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 130 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 60 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -240 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

Sau khi biến đổi chúng ta viết lại hệ phương trình này dưới dạng tuyến tính:

$$\begin{cases} x_1 = x_4 + 130 \\ x_2 = x_4 + -180 \\ x_3 = x_4 + 60 \end{cases}$$

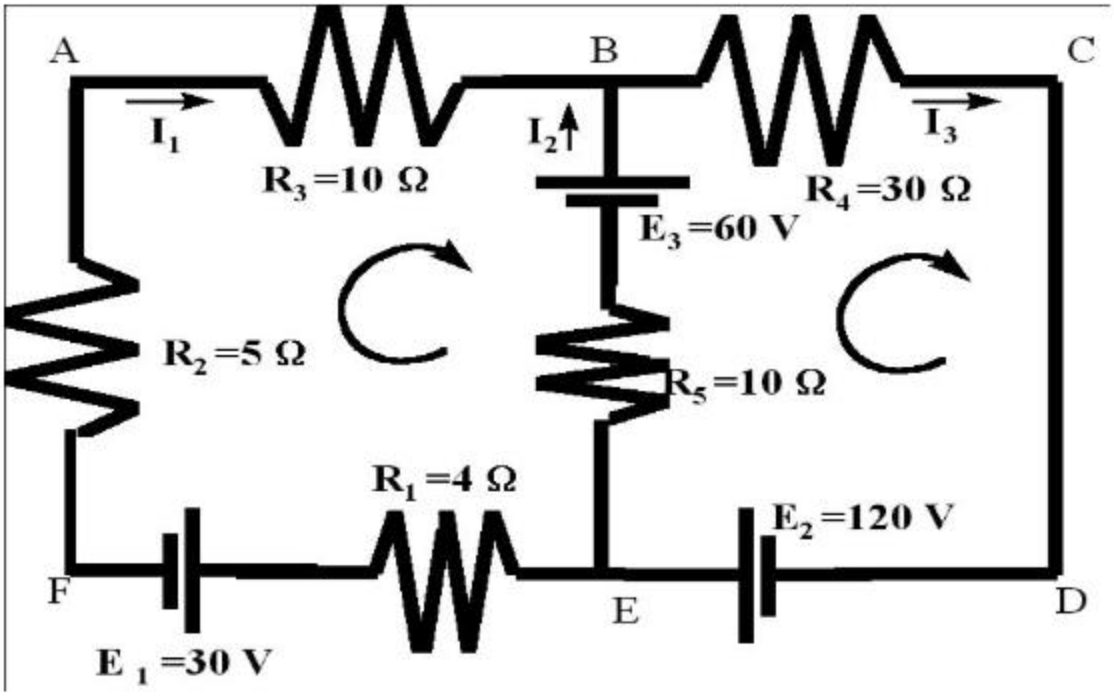
Vì có một biến tự do nên bài toán này có nhiều giải pháp khả thi, nhưng x4 > 180

Ví dụ nếu x4 = 400 thì nghiệm của hệ sẽ là

$$\begin{cases} x_1 = 530 \\ x_2 = 220 \\ x_3 = 460 \end{cases}$$

25.

Hãy gán dòng điện cho từng phần của mạch giữa các điểm nút. Chúng ta có hai điểm nút. Điều này sẽ cung cấp cho chúng ta ba dòng điện khác nhau. Giả sử các dòng điện theo chiều kim đồng hồ.



Vậy cường độ dòng điện trên đoạn EFAB là I1, trên đoạn BCDE là I3 và trên đoạn EB là I2

Sử dụng Định luật dòng điện Kirchhoff cho nút B ta có phương trình

$I_1 + I_2 = I_3$.

Đối với nút E, chúng ta sẽ có cùng một phương trình. Sau đó, chúng ta sử dụng định luật điện áp của Kirchhoff

$-4 I_1 + (-30) - 5 I_1 - 10 I_1 - 60 + 10 I_2 = 0$

Khi đi qua pin từ (-) đến (+), trên đoạn EF, hiệu điện thế là -30, và trên đoạn FA, khi di chuyển qua điện trở 5W

sẽ tạo ra hiệu điện thế là -5 I1 và theo cách tương tự, ta có thể tìm được hiệu điện thế trên đoạn còn lại của vòng EFAB.

Trong vòng lặp BCDE, định luật điện áp Kirchhoff sẽ đưa ra phương trình sau:

$-30 I_3 + 120 - 10 I_2 + 60 = 0$

Bây giờ chúng ta có ba phương trình với ba ẩn số:

$$
\begin{aligned}
I_1 + I_2 - I_3 &= 0 \\
-19 I_1 + 10 I_2 &= 90 \\
-10 I_2 - 30 I_3 &= -180
\end{aligned}
$$

Hệ tuyến tính này có thể được giải bằng phương pháp Đại số tuyến tính. Đại số tuyến tính hữu ích hơn khi mạng rất phức tạp và số lượng ẩn số lớn. Hệ trên có lời giải sau:

I_1 = -1.698
I_2 = 5.7736
I_3 =4.0755

26.

Nếu, như được chỉ ra trong Hình 1.9.3b, chúng ta để x biểu thị số lượng xe mỗi

giờ mà đèn giao thông phải cho qua, thì tổng số xe mỗi giờ

chảy vào và ra khỏi khu phức hợp sẽ là

Flowing in: 500 + 400 + 600 + 200 = 1700
Flowing out: x + 700 + 400

Việc cân bằng lưu lượng vào và ra cho thấy đèn giao thông phải cho x = 600 xe mỗi giờ đi qua

27.

Cho x1, x2, x3 và x4 là các số nguyên dương cân bằng phương trình

$$x_1\,(\mathrm{HCl}) + x_2\,(\mathrm{Na_3PO_4}) \longrightarrow x_3\,(\mathrm{H_3PO_4}) + x_4\,(\mathrm{NaCl})$$

Việc cân bằng số nguyên tử của mỗi loại ở hai vế sẽ cho kết quả

$1x_1 = 3x_3$ **Hydrogen (H)**
$1x_1 = 1x_4$ **Chlorine (Cl)**
$3x_2 = 1x_4$ **Sodium (Na)**
$1x_2 = 1x_3$ **Phosphorus (P)**
$4x_2 = 4x_3$ **Oxygen (O)**

từ đó chúng ta thu được hệ thống tuyến tính đồng nhất

$$\begin{aligned}
x_1 \qquad\quad - 3x_3 \qquad &= 0\\
x_1 \qquad\qquad\qquad - x_4 &= 0\\
3x_2 \qquad\quad - x_4 &= 0\\
x_2 - x_3 \qquad &= 0\\
4x_2 - 4x_3 \qquad &= 0
\end{aligned}$$

Chúng tôi để bạn chứng minh rằng dạng bậc thang hàng giảm của ma trận tăng cường

cho hệ thống này là

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

28.

Vì có bốn điểm, chúng ta sẽ sử dụng đa thức nội suy bậc

n = 3. Ký hiệu đa thức này là

$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$

và biểu thị tọa độ x và y của các điểm đã cho bằng

$x1 = 1$, $x2 = 2$, $x3 = 3$, $x4 = 4$ and $y1 = 3$, $y2 = -2$, $y3 = -5$, $y4 = 0$

Do đó, từ (14) suy ra rằng ma trận tăng cường cho hệ thống tuyến tính trong các ẩn số a0, a1, a2 và a3 là

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & y_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & y_3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & -2 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & -5 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 0 \end{bmatrix}$$

Chúng tôi để bạn xác nhận rằng dạng bậc thang hàng giảm của ma trận này là

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

từ đó suy ra a0 = 4, a1 = 3, a2 = −5, a3 = 1. Do đó, đa thức nội suy

là

$p(x) = 4 + 3x - 5x^2 + x^3$

29.

tại những điểm này là khoảng

$$f(0) = 0, \quad f(0.25) = 0.098017, \quad f(0.5) = 0.382683,$$
$$f(0.75) = 0.77301, \quad f(1) = 1$$

Đa thức nội suy là (xác minh)

$$p(x) = 0.098796x + 0.762356x^2 + 2.14429x^3 - 2.00544x^4$$

Và

$$\int_0^1 p(x)\,dx \approx 0.438501$$

Như thể hiện trong Hình 1.9.13, đồ thị của f và p khớp rất chặt chẽ trong khoảng

[0, 1], do đó phép xấp xỉ khá tốt

30.

Chúng ta hãy bắt đầu bằng cách giới thiệu các biến phụ thuộc thời gian

$x_1(t)$ = phần thị trường do kênh 1 nắm giữ tại thời điểm t

$x_2(t)$ = phần thị trường do kênh 2 nắm giữ tại thời điểm t

và vector cột

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Các biến $x_1(t)$ và $x_2(t)$ tạo thành một hệ thống động có trạng thái tại thời điểm t là vectơ

x(t). Nếu chúng ta lấy t = 0 là điểm bắt đầu mà tại đó hai kênh có 50%

thị trường, thì trạng thái của hệ thống tại thời điểm đó là

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Bây giờ chúng ta hãy thử tìm trạng thái của hệ thống tại thời điểm t = 1 (một năm sau). Trong khoảng thời gian một năm, kênh 1 giữ lại 80% trong số 50% ban đầu của nó và đạt được 10% trong số 50% ban đầu của kênh 2. Do đó,

$$\mathbf{x}_1(1) = 0.8(0.5) + 0.1(0.5) = 0.45$$

Tương tự như vậy, kênh 2 đạt được 20% trong số 50% ban đầu của kênh 1 và giữ lại 90% trong số 50% ban đầu của nó. Do đó,

$$x_2(1) = 0.2(0.5) + 0.9(0.5) = 0.55$$

Do đó, trạng thái của hệ thống tại thời điểm t = 1 là

$$\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.55 \end{bmatrix}$$

31.

Để giải quyết vấn đề này, giả sử chúng ta đã tính toán được thị phần của mỗi kênh tại thời điểm t = k và chúng ta muốn sử dụng các giá trị đã biết của

$x_1(k)$ và $x_2(k)$ để tính thị phần $x_1(k + 1)$ và $x_2(k + 1)$ một năm sau đó.

Phân tích này hoàn toàn giống với phân tích được sử dụng để thu được Phương trình (2) và (3). Trong khoảng thời gian một năm, kênh 1 giữ lại 80% phân số ban đầu $x_1(k)$ và tăng 10% phân số ban đầu $x_2(k)$ của kênh 2. Do đó (5) :

$$x_1(k+1) = (0.8)x_1(k) + (0.1)x_2(k)$$

Tương tự như vậy, kênh 2 đạt được 20% phân số bắt đầu của kênh 1 $x_1(k)$ và giữ lại 90% phân số bắt đầu của riêng nó $x_2(k)$. Do đó (6):

$$x_2(k+1) = (0.2)x_1(k) + (0.9)x_2(k)$$

Các phương trình (5) và (6) có thể được biểu thị dưới dạng ma trận như sau (7)

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

cung cấp một cách sử dụng phép nhân ma trận để tính trạng thái của hệ thống tại thời điểm t = k + 1 từ trạng thái tại thời điểm t = k. Ví dụ, sử dụng (1) và (7), chúng ta thu được

$$\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.55 \end{bmatrix}$$

Bây giờ chúng ta có thể tiếp tục quá trình này, sử dụng Công thức (7) để tính x(3) từ x(2), sau đó x(4) từ x(3), v.v. Điều này tạo ra (xác minh)

$$\mathbf{x}(3) = \begin{bmatrix} 0.3905 \\ 0.6095 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(4) = \begin{bmatrix} 0.37335 \\ 0.62665 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(5) = \begin{bmatrix} 0.361345 \\ 0.638655 \end{bmatrix}$$

Như vậy, sau năm năm, kênh 1 sẽ nắm giữ khoảng 36% thị trường và kênh 2 sẽ nắm giữ khoảng 64% thị trường.

32.

Giả sử x1(k), x2(k) và x3(k) là xác suất sư tử ở vị trí dự bị 1, 2,

hoặc 3, tương ứng, tại thời điểm t = k, và giả sử

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

là vectơ trạng thái tại thời điểm đó. Vì chúng ta biết chắc chắn rằng sư tử đang ở trạng thái dự bị

2 tại thời điểm t = 0, vectơ trạng thái ban đầu là

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Chúng tôi để bạn chứng minh rằng các vectơ trạng thái trong khoảng thời gian sáu tháng là

$$\mathbf{x}(1) = P\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0.400 \\ 0.200 \\ 0.400 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(2) = P\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 0.520 \\ 0.240 \\ 0.240 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(3) = P\mathbf{x}(2) = \begin{bmatrix} 0.500 \\ 0.224 \\ 0.276 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(4) = P\mathbf{x}(3) \approx \begin{bmatrix} 0.505 \\ 0.228 \\ 0.267 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(5) = P\mathbf{x}(4) \approx \begin{bmatrix} 0.504 \\ 0.227 \\ 0.269 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(6) = P\mathbf{x}(5) \approx \begin{bmatrix} 0.504 \\ 0.227 \\ 0.269 \end{bmatrix}$$

33.

Thay thế tọa độ của năm điểm đã cho vào (10) và làm tròn đến

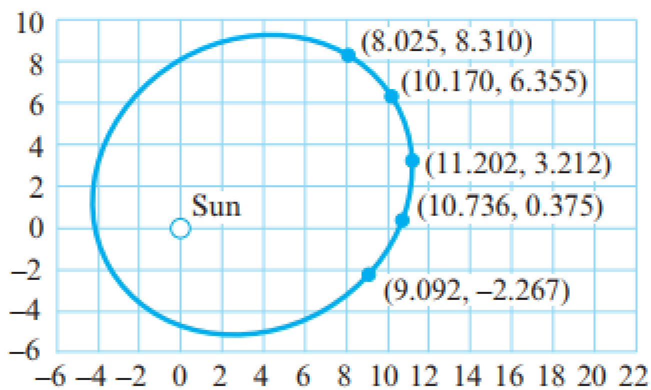
ba chữ số thập phân, ta được

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 64.401 & 66.688 & 69.056 & 8.025 & 8.310 & 1 \\ 103.429 & 64.630 & 40.386 & 10.170 & 6.355 & 1 \\ 125.485 & 35.981 & 10.317 & 11.202 & 3.212 & 1 \\ 115.262 & 4.026 & 0.141 & 10.736 & 0.375 & 1 \\ 82.664 & -20.612 & 5.139 & 9.092 & -2.267 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sự mở rộng cofactor của định thức này dọc theo hàng đầu tiên tạo ra

$386.802x^2 - 102.895xy + 446.029y^2 - 2476.443x - 1427.998y - 17109.375 = 0$

Hình 10.1.5 là sơ đồ chính xác của quỹ đạo, cùng với năm điểm đã cho.



▶ Figure 10.1.5

34.

Ta có :

$$\begin{aligned} x_1 &= -10, & y_1 &= .99815 \\ x_2 &= 0, & y_2 &= .99987 \\ x_3 &= 10, & y_3 &= .99973 \\ x_4 &= 20, & y_4 &= .99823 \\ x_5 &= 30, & y_5 &= .99567 \end{aligned}$$

Và

$$\begin{aligned} 6[y_1 - 2y_2 + y_3]/h^2 &= -.0001116 \\ 6[y_2 - 2y_3 + y_4]/h^2 &= -.0000816 \\ 6[y_3 - 2y_4 + y_5]/h^2 &= -.0000636 \end{aligned}$$

và hệ thống tuyến tính (21) cho đường cong spline parabol trở thành

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.0001116 \\ -.0000816 \\ -.0000636 \end{bmatrix}$$

Giải hệ thống này sẽ cho kết quả

$$M_2 = -.00001973$$
$$M_3 = -.00001293$$
$$M_4 = -.00001013$$

Và chúng ta có :

$$M_1 = M_2 = -.00001973$$
$$M_5 = M_4 = -.00001013$$

$$\begin{aligned} a_i &= (M_{i+1} - M_i)/6h \\ b_i &= M_i/2 \\ c_i &= (y_{i+1} - y_i)/h - [(M_{i+1} + 2M_i)h/6] \\ d_i &= y_i \end{aligned} \qquad (14)$$

Giải cho các giá trị ai, bi, ci và di trong (14), chúng ta thu được biểu thức sau cho

đường cong spline parabol nội suy:

$$S(x) = \begin{cases} -.00000987(x+10)^2 + .0002707(x+10) + .99815, & -10 \le x \le 0 \\ .000000113(x-0)^3 - .00000987(x-0)^2 + .0000733(x-0) + .99987, & 0 \le x \le 10 \\ .000000047(x-10)^3 - .00000647(x-10)^2 - .0000900(x-10) + .99973, & 10 \le x \le 20 \\ -.00000507(x-20)^2 - .0002053(x-20) + .99823, & 20 \le x \le 30 \end{cases}$$

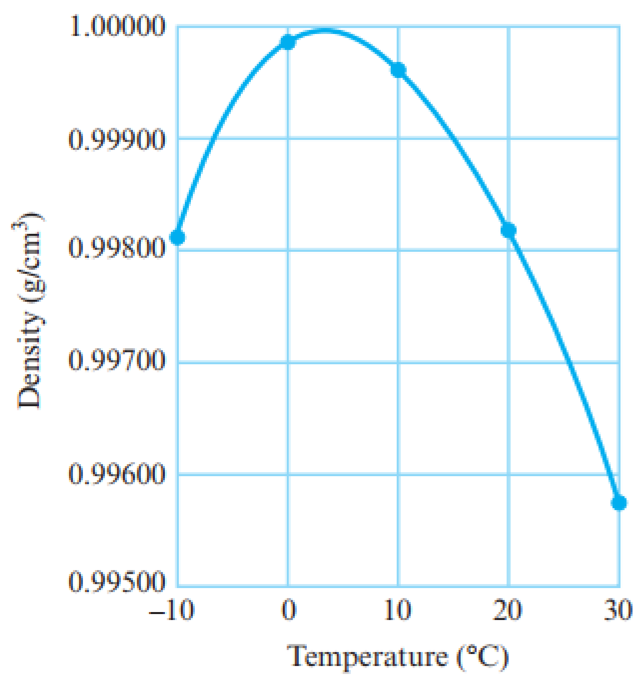
Spline này được vẽ trên Hình 10.3.6. Từ hình đó, chúng ta thấy rằng giá trị lớn nhất

đạt được trong khoảng [0, 10]. Để tìm giá trị lớn nhất này, chúng ta đặt S (x) bằng không trong

khoảng [0, 10]

$$S'(x) = .000000339x^2 - .0000197x + .0000733 = 0$$

Với ba chữ số có nghĩa, căn bậc hai này trong khoảng [0, 10] là x = 3,99, và đối với giá trị x này, S(3,99) = 1,00001. Do đó, theo ước tính nội suy của chúng tôi, mật độ tối đa của nước là 1,00001 g/cm3 đạt được ở 3,99◦C. Điều này phù hợp với mật độ tối đa thực nghiệm là 1,00000 g/cm3 đạt được ở 3,98◦C. (Trong hệ mét ban đầu, gam được định nghĩa là khối lượng của một centimet khối nước ở mật độ tối đa của nó.)



▶ Figure 10.3.6

35.

Chúng ta có thể coi đây là một trò chơi hai người trong đó người chơi R (chính phủ) muốn làm cho phần thưởng (tỷ lệ công dân kháng vi-rút) lớn nhất có thể và người chơi C (vi-rút) muốn làm cho phần thưởng nhỏ nhất có thể.

Ma trận phần thưởng là

$$\begin{array}{cc} & \text{Strain} \\ & \begin{array}{cc} 1 & \quad 2 \end{array} \\ \text{Vaccine} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} .85 & .70 \\ .60 & .90 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ma trận này không có điểm yên ngựa, do đó Định lý 10.6.2 có thể áp dụng. Do đó

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{.90 - .60}{.85 + .90 - .70 - .60} = \frac{.30}{.45} = \frac{2}{3}$$

$$p_2^* = 1 - p_1^* = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{.90 - .70}{.85 + .90 - .70 - .60} = \frac{.20}{.45} = \frac{4}{9}$$

$$q_2^* = 1 - q_1^* = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{(.85)(.90) - (.70)(.60)}{.85 + .90 - .70 - .60} = \frac{.345}{.45} = .7666\ldots$$

Do đó, chiến lược tối ưu cho chính phủ là tiêm vắc-xin 1 cho 23 công dân và vắc-xin 2 cho 13 công dân. Điều này sẽ đảm bảo rằng khoảng 76,7% công dân sẽ có khả năng kháng lại một cuộc tấn công của vi-rút bất kể sự phân bố của hai chủng.

Ngược lại, sự phân bố vi-rút của 49 chủng 1 và 59 chủng 2 sẽ dẫn đến cùng 76,7% công dân có khả năng kháng thuốc, bất kể chiến lược tiêm chủng mà chính phủ áp dụng

36.

Trong thời hạn một tuần hãy để

x1 = giá trị tổng sản lượng khai thác than

x2 = giá trị tổng sản lượng nhà máy phát điện

x3 = giá trị tổng sản lượng đường sắt địa phương

Từ thông tin được cung cấp, ma trận tiêu thụ của hệ thống là

$$C = \begin{bmatrix} 0 & .65 & .55 \\ .25 & .05 & .10 \\ .25 & .05 & 0 \end{bmatrix}$$

Hệ thống tuyến tính (I − C)x = d sau đó là

$$\begin{bmatrix} 1.00 & -.65 & -.55 \\ -.25 & .95 & -.10 \\ -.25 & -.05 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50{,}000 \\ 25{,}000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận hệ số ở bên trái có thể đảo ngược và giải pháp được đưa ra bởi

$$\mathbf{x} = (I - C)^{-1}\mathbf{d} = \frac{1}{503}\begin{bmatrix} 756 & 542 & 470 \\ 220 & 690 & 190 \\ 200 & 170 & 630 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 50,000 \\ 25,000 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 102,087 \\ 56,163 \\ 28,330 \end{bmatrix}$$

Do đó, tổng sản lượng của hoạt động khai thác than phải là 102.087 đô la, tổng sản lượng của nhà máy phát điện phải là 56.163 đô la và tổng sản lượng của đường sắt phải là 28.330 đô la.

37.

Bảng dưới đây mô tả thông tin trên

	Proportion produced by the farmer	Proportion produced by the carpenter	Proportion produced by the tailor
The proportion used by the farmer	.40	.40	.30
The proportion used by the carpenter	.40	.30	.20
The proportion used by the tailor	.20	.30	.50

Ở dạng ma trận, nó có thể được viết như sau.

$$A = \begin{bmatrix} .40 & .40 & .30 \\ .40 & .30 & .20 \\ .20 & .30 & .50 \end{bmatrix}$$

Ma trận này được gọi là ma trận đầu vào-đầu ra. Điều quan trọng là chúng ta phải đọc ma trận một cách chính xác. Ví dụ, mục A_{23} , mục ở hàng 2 và cột 3, biểu diễn như sau.

A_{23} = 20% của sản phẩm của thợ may được thợ mộc sử dụng.

A_{33} = 50% của sản phẩm của thợ may được thợ may sử dụng.