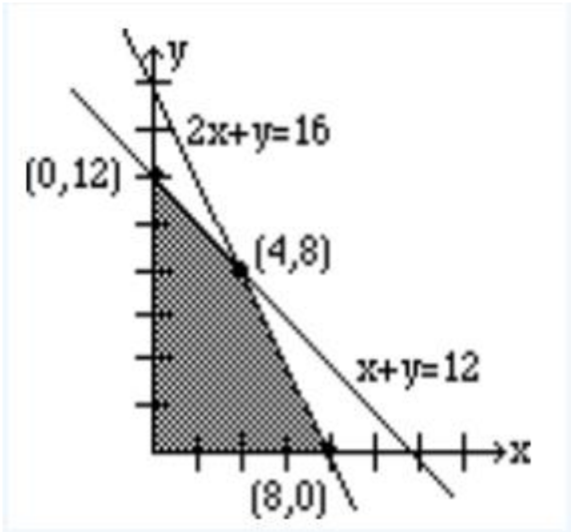
Lời Giải

1.

Đặt x = Số giờ mỗi tuần Niki sẽ làm việc tại Công việc I.
Đặt y = Số giờ mỗi tuần Niki sẽ làm việc tại Công việc II. ($x \geq 0$, $y \geq 0$)
Bây giờ chúng ta viết hàm mục tiêu. Vì Niki được trả 40 đô la một giờ tại Công việc I và 30 đô la một giờ tại Công việc II, nên tổng thu nhập I của cô được cho bởi phương trình sau:

- $F = 40x + 30y$
  Vì Cô không bao giờ muốn làm việc quá tổng cộng 12 giờ một tuần nên ta có:
- $x + y \leq 12$
  Vì mỗi giờ làm việc tại Công việc I, cô cần 2 giờ thời gian chuẩn bị, và cứ mỗi giờ làm việc tại Công việc II, cô cần 1 giờ thời gian chuẩn bị, và cô không thể dành nhiều hơn 16 giờ cho việc chuẩn bị nên ta có:
- $2x + y \leq 16$
  Vậy ta được :
- $F = 40x + 30y$
- $x + y \leq 12$
- $2x + y \leq 16$
  Để giải quyết bài này, chúng ta có thể dùng bất đẳng thức hoặc là vẽ đồ thị. Vì ở đây chúng ta đã có sẵn các công cụ để giải quyết đơn giản bằng đồ thị nên với cách bất đẳng thức thì mình xin phép nhường cho bạn đọc.
  Ta có đồ thi biểu diễn x và y như sau:

- 

Vùng tô đậm là diện tích của 2 hàm và trong giải tích 2 thì khi tìm max của 1 hàm 2 biến chúng ta thường tìm giá trị cực đại hoặc cực tiểu tại các giá trị cắt trục hoành của đạo hàm. Vì vậy nên ở trên đồ thị chúng ta có 4 điểm để chúng ta xét là (0, 0), (0, 12), (4, 8), (8, 0)

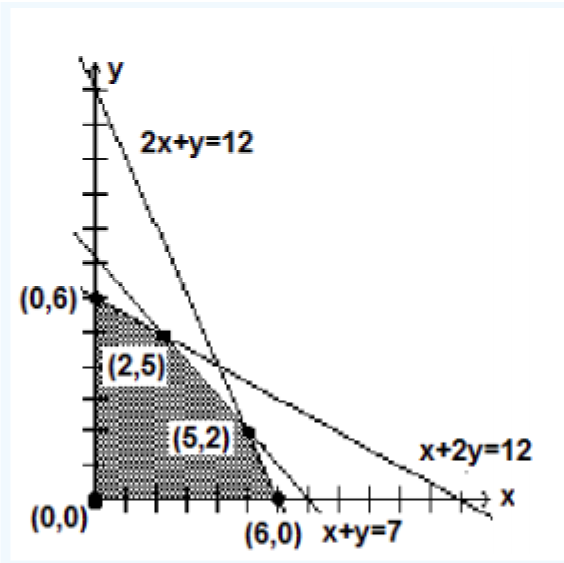
Điểm	Thu nhập : F = 40x + 30y
(0, 0)	40(0) + 30(0) = $0
(0, 12)	40(0) + 30(12) = $360
(4, 8)	40(4) + 30(8) = $400
(8, 0)	40(8) + 30(0) = $320

Vậy chúng ta có thể kết luận cô nên làm 4 giờ ở công ty I và 8 giờ ở công ty II để đem lại lợi nhuận lớn nhất.

2.

Đặt x = Số lượng các dụng cụ loại thường được sản xuất mỗi ngày.
Đặt y = Số lượng các dụng cụ loại cao cấp được sản xuất mỗi ngày. (x ≥ 0, y ≥ 0)
Chúng ta có phương trình sau:

- P = 20x + 30y
  Vì Công ty chỉ sản xuất 7 dụng cụ mỗi ngày nên:
- x + y ≤ 7
  Vì dụng cụ thường cần một giờ lắp ráp và dụng cụ cao cấp cần 2 giờ lắp ráp mà chỉ có 12 giờ làm việc mỗi ngày nên:

- $x + 2y \leq 12$
  Vậy ta được :
- $P = 20x + 30y$
- $x + y \leq 7$
- $x + 2y \leq 12$
  Biểu diễn trên đồ thị ta được:
- 

Ở trên đồ thị chúng ta có 5 điểm để xét là (0, 0), (0, 6), (2, 5), (5, 2), và (6, 0).

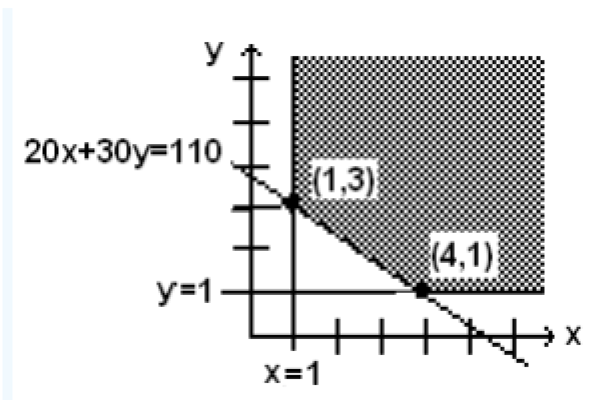
Điểm	Thu nhập : P = 20x + 30y
(0, 0)	20(0) + 30(0) = $0
(0, 6)	20(0) + 30(6) = $180
(2, 5)	20(2) + 30(5) = $190
(5, 2)	20(5) + 30(2) = $160
(6, 0)	20(6) + 30(0) = $120

Chúng tôi kết luận rằng chúng ta nên sản xuất 2 dụng cụ thường và 5 dụng cụ cao cấp mỗi ngày để đạt được lợi nhuận tối đa là 190 đô la.

4.

Đặt x = Số giờ làm việc mỗi tuần của John.

Đặt y = Số giờ làm việc mỗi tuần của Mary. ($x \geq 0$, $y \geq 0$)
Chúng ta có phương trình sau:

- $C = 15x + 25y$
  Thực tế là mỗi người phải làm việc ít nhất một giờ mỗi tuần dẫn đến hai ràng buộc sau:
- $x \geq 1$, $y \geq 1$
  Vì John có thể chấm 20 bài mỗi giờ và Mary chấm 30 bài mỗi giờ, và có ít nhất 110 bài cần chấm mỗi tuần, chúng ta có:
- $20x + 30y \geq 110$
  Vậy ta được :
- $C = 15x + 25y$
- $x \geq 1$, $y \geq 1$
- $20x + 30y \geq 110$
  Chúng ta có đồ thị sau:
- 

Điểm	Thu nhập: C = 15x + 25y
(1, 3)	15(1) + 25(3) = \$90
(4, 1)	15(4) + 25(1) = \$85

Do đó, chúng tôi kết luận rằng để giảm thiểu chi phí chấm điểm, Giáo sư Symons nên thuê John 4 giờ một tuần và Mary 1 giờ một tuần với chi phí là 85 đô la một tuần.

5.

Cân bằng phương trình ta có:

- 6 mol NH_3 cần 3 mol N_2 và 9mol H_2

- $$N_2 + 3H_2 \rightarrow 2NH_3$$
- 12 mol NO2 cần 6 mol NH3 và 15 mol O2
- $$2NH_3 + 5/2O_2 \rightarrow 2NO_2 + 3H_2O$$
- 8 mol HNO3 cần 12 mol NO2 và 4 mol H2O
- $$3NO_2 + H_2O \rightarrow 2HNO_3 + NO$$

Vậy 8 mol axit nitric, cần 3 mol nitơ, 9 mol hydrogen và 15 mol oxygen.

6.

Theo đề bài ta được ma trận A = $\begin{bmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{bmatrix}$

Là thể hiện của các phần tử ở hàng đầu tiên của A sẽ là tỷ lệ phần trăm phụ nữ đã kết hôn và độc thân, tương ứng, những người sẽ kết hôn sau một năm. Các mục ở hàng thứ hai sẽ là tỷ lệ phần trăm phụ nữ độc thân sau một năm. Nếu ta cho ma trận x = $\begin{bmatrix} 8000 \\ 2000 \end{bmatrix}$ thì số người đã lập gia đình và độc thân phụ nữ sau một năm có thể được tính bằng cách nhân Ax:

Ax = $\begin{bmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8000 \\ 2000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6000 \\ 4000 \end{bmatrix}$

Sau một năm, sẽ có 6000 phụ nữ đã kết hôn và 4000 phụ nữ độc thân. Để tìm số người kết hôn và phụ nữ độc thân sau hai năm:

A^2x =A(Ax) = $\begin{bmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6000 \\ 4000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 \\ 5000 \end{bmatrix}$

Sau hai năm, một nửa số phụ nữ sẽ kết hôn và một nửa sẽ độc thân. Nhìn chung, số lượng người kết hôn và phụ nữ độc thân sau n năm có thể được xác định bởi $A^n x$.

7.

a) Chúng ta có ma trận kề:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hàng đầu tiên của A^2 biểu thị số bước đi có độ dài 2 bắt đầu từ V_1. Cụ thể:

- 2 bước đi có chiều dài 2 từ V_1 đến V_2
- 1 bước đi có chiều dài 2 từ V_1 đến V_3
- 1 bước đi có chiều dài 2 từ V_1 đến V_4
- 1 bước đi có chiều dài 2 từ V_1 đến V_5.

c) $$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Số bước đi có độ dài 3 từ V_2 đến V_4. Thông tin này được tìm thấy trong mục A^3[2][4] = 2. Vì vậy, có 2 bước đi có độ dài 3 từ V_2 đến V_4. Để tính số bước đi có độ dài nhỏ hơn hoặc bằng 3 từ V_2 đến V_4, chúng ta có thể kiểm tra các mục tương ứng trong A, A^2 và A^3:

- A[2][4] = 1 (1 bước đi có độ dài 1)
- A^2[2][4] = 1 (1 bước đi có chiều dài 2)
- A^3[2][4] = 2 (2 bước đi có chiều dài 3)

Tổng số bước đi có độ dài nhỏ hơn hoặc bằng 3 từ V_2 đến V_4 là 1 + 1 + 2 = 4 lần.

9.

Đặt ma trận $A = \begin{bmatrix} 0.94 & 0.02 \\ 0.06 & 0.98 \end{bmatrix}$ số người di chuyển mỗi năm qua lại giữa thành phố

Đặt ma trận $X = \begin{bmatrix} 0.30 \\ 0.70 \end{bmatrix}$ là phần trăm người dân ban đầu sống ở thành phố và ngoại ô.

Như vậy ta có thể nhận thấy tỉ lệ người dân sống ở thành phố và ngoại ô sau 1 năm là Ax.

Tỷ lệ người dân sống ở thành phố và ngoại ô sau 2 năm là A^2x.

Hay theo quy nạp ta có thể nói tỷ lệ người dân sống ở thành phố và ngoại ô sau n năm sẽ là A^nx.

Đặt $X_n = A^nx$ => ta có $X_0 = \begin{bmatrix} 0.30 \\ 0.70 \end{bmatrix}$. với n = 10, 30, 50 ta có lần lượt X_{10}, X_{30}, X_{50} là

$X_{10} = \begin{bmatrix} 0.27 \\ 0.73 \end{bmatrix}$, $X_{30} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{bmatrix}$, $X_{50} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{bmatrix}$

Hay ta có thể nói khi n tiệm cận với ∞ thì dãy Xn hội tụ đến một giới hạn $X = (0.25, 0.75)^T$

Để hiểu vì sao ta có thể nói Xn hội tụ tới X thì ta có thể viết Vectơ ban đầu X_0 có thể được viết dưới dạng tuyến tính

sự kết hợp của các vectơ cơ sở mới:

$X_0 = \begin{bmatrix} 0.30 \\ 0.70 \end{bmatrix} = 0.25\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 0.05\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.25u_1 - 0.05u_2$

Dẫn đến $Xn = A^nx = 0.25u_1 - 0.05(0.92)^nu_2$

Vì khi dần tới vô cùng ta có thể nói 0.92 tiệm cận dầu tới 0 nên $Xn = 0.25u_1 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{bmatrix}$

Ứng dụng này là một ví dụ về một loại toán học mô hình được gọi là quá trình Markov. Chuỗi vectơ x_1, x_2, … được gọi là Markov chain. Ma trận A có cấu trúc đặt biệt trong đó các giá trị trong ma trận không âm và các cột của nó có tổng bằng một và các ma trận như vậy được gọi là ma trận ngẫu nhiên