ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

TRẦN THỊ VIẾT THỦY

MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ ĐA THỨC QUA CÁC KỲ THI OLYMPIC

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - NĂM 2017

Mục lục

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

TRẦN THỊ VIẾT THỦY

MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ ĐA THỨC QUA CÁC KỲ THI OLYMPIC

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC
Mã số: 60.46.01.13

Người hướng dẫn khoa học
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

HÀ NỘI - NĂM 2017

MỞ ĐẦU

Một chuyên đề cơ bản và quan trọng trong đại số, trong toán học nói chung là chuyên đề đa thức. Đa thức có vị trí quan trọng trong kiến thức toán nói chung, trong chương trình phổ thông, và đặc biệt đối với các lớp chuyên toán nói riêng. Trong các kì thi chọn học sinh giỏi toán, vô địch Quốc gia, Quốc tế và Olympic sinh viên, các dạng toán về đa thức thường xuất hiện với mức độ khó và rất khó. Nhiều đề thi cùng đáp án đã được đăngtải ở tạp chí toán học và tuổi trẻ, ở nhiều sách tham khảo nhưng chưa thật đầy đủ. Với mong muốn có một chuyên đề giúp nâng cao kiến thức về đa thức và bồi dưỡng học sinh giỏi toán, luận văn "Một số dạng toán về đa thức qua các đề thi Olympic" nhằm tìm hiểu, thu thập các tài liệu biên soạn gồm các đề thi học sinh giỏi toán THPT Quốc gia, đề thi toán Quốc tế, đề thi Olympic sinh viên.

Các dạng toán về đa thức rất phong phú, đa dạng về thể loại và phương pháp, thường rất rất phức tạp nên khó phân loại và hệ thống thành các chuyên đề riêng biệt .Tuy vậy, để đáp ứng nhu cầu về giảng dạy, học tập, luận văn "Một số dạng toán về đa thức qua các đề thi Olympic" cũng cố gắng tối đa sắp xếp theo trình tự hợp lí nhằm giúp tiếp cận từng bước , từng mức độ kiến thức và luyện tập kĩ năng giải toán.

Luận văn được chia làm 3 chương.

Chương 1. Xác định và tồn tại đa thức.

Chương 2. Ước lượng đa thức

Chương 3. Một số dạng toán liên quan đến đa thức

Để hoàn thành luận văn này, tác giả xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc tới GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu đã dành thời gian hướng dẫn, chỉ bảo tận tình, giúp đỡ trong suốt quá trình xây dựng đề cương cũng như hoàn thành luận văn. Tác giả xin gửi lời cảm ơn chân thành tới các quý thầy cô đã đọc, kiểm tra, đánh giá và đưa ra những ý kiến quý báu để luận văn được đầy đủ và phong phú hơn.Qua đây, tác giả xin cảm ơn Ban Giám Hiệu, phòng sau Đại học, khoa Toán Tin trường Đại Học Khoa học Tự Nhiên Hà Nội đã giảng dạy, tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập.

Tuy bản thân đã có nhiều cố gắng, nỗ lực nghiên cứu, song do điều kiện và trình độ còn hạn chế nên luận văn khó tránh khỏi những sai sót. Tác giả kính mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô để bản luận văn được hoàn thiện hơn! Tác giả xin chân thành cảm ơn!

Hà Nội, tháng 10 năm 2016

Tác giả

Trần Thị Viết Thủy

Chương 1

Xác định đa thức

1.1 Một số tính chất cơ bản của đa thức

Định nghĩa 1.1 (xem [2]). Cho vành A là một vành giao hoán có đơn vị. Ta gọi đa thức bậc n biến x là một biểu thức có dạng

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 (a_n \neq 0),$$

trong đó các $a_i \in A$ được gọi là hệ số, a_n là hệ số bậc cao nhất và a_0 là hệ số tự do của đa thức.

Nếu $a_i = 0, i = 0, \cdots, n-1$ và $a_0 \neq 0$ thì ta có bậc của đa thức là 0.

Nếu $a_i = 0\ \forall i = 0, \cdots, n-1$ thì ta coi bậc của đa thức là $-\infty$ và gọi là đa thức không.

Tập hợp tất cả các đa thức với hệ số lấy trong vành A được kí hiệu là $A[x]$.

Khi $A = K$ là một trường thì vành $K[x]$ là một vành giao hoán có đơn vị. Ta thường xét $A = \mathbb{Z}$,hoặc $A = \mathbb{Q}$ hoặc $A = \mathbb{R}$. Khi đó ta có các vành đa thức tương ứng là $\mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x]$.

Tính chất 1.1 (xem [2]). Nếu các đa thức $f(x)$ và $g(x)$ nguyên tố cùng nhau và các đa thức $f(x)$ và $h(x)$ nguyên tố cùng nhau thì các đa thức $f(x)$ và $g(x)h(x)$ cũng nguyên tố cùng nhau.

Tính chất 1.2 (xem [2]). Nếu các đa thức $f(x), g(x), h(x)$ thỏa mãn điều kiện $f(x)h(x)$ chia hết cho $g(x), g(x)$ và $h(x)$ nguyên tố cùng nhau thì $f(x)$ chia hết cho $g(x)$.

Tính chất 1.3 (xem [2]). Nếu đa thức $f(x)$ chia hết cho các đa thức $g(x)$ và $h(x)$ với $g(x)$ nguyên tố cùng nhau thì $f(x)$ chia hết cho $g(x)h(x)$.

Tính chất 1.4 (xem [2]). Nếu các đa thức $f(x)$ và $g(x)$ nguyên tố cùng nhau thì $[f(x)]^m$ và $[g(x)]^n$ cũng nguyên tố cùng nhau với mọi m, n nguyên dương.

Định lý 1.1 (xem [7]). *[Định lí về nghiệm của đa thức]*

Nếu một đa thức bậc n và có hệ số của số hạng có bậc cao nhất khác 0 thì nó có không quá n nghiệm.

Định lý 1.2 (xem [7]). *[Định lí Bezout]*

Cho đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ và số thực α, khi đó α là nghiệm của $P(x)$ khi và chỉ khi $P(x) \vdots (x-\alpha)$. Điều này có nghĩa là tồn tại đa thức $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho $P(x) = (x-\alpha).Q(x)$.

Định lý 1.3 (Công thức khai triển Abel). Cho bộ số đôi một khác nhau $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Khi đó mọi đa thức P(x) với degP(x) < n+1 đều viết được dưới dạng

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1(x-x_1) + a_2(x-x_1)(x-x_2) \\ &\quad + \cdots + a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n). \end{aligned}$$

Định lý 1.4 (Định lí Viet thuận). Cho đa thức

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n (a_0 \neq 0)$$

có n nghiệm là $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + \ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_2}{a_0} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_n = x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n\dfrac{a_n}{a_0}. \end{cases}$$

Định lý 1.5 (Định lí Viet đảo). Ngược lại nếu có các số $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S_1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + \ldots + x_{n-1}x_n = S_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1x_2\ldots x_n = S_n. \end{cases}$$

thì $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ là các nghiệm của đa thức

$$P(x) = x^n - S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} + \ldots + (-1)^n S_n.$$

Định lý 1.6 (Định lí Lagrange)**.** Nếu $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi trên khoảng (a, b) thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Một hệ quả rất quan trọng, được áp dụng nhiều trong giải toán của định lí Lagrange, đó là định lí Rolle:

Định lý 1.7 (Định lí Rolle)**.** Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi trên khoảng (a, b) và $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$f'(c) = 0.$$

Định lý 1.8 (Bất đẳng thức Schur)**.** Cho các số không âm a, b, c. Khi đó với mọi $r > 0$ ta có bất đẳng thức

$$a^r(a - b)(a - c) + b^r(b - c)(b - a) + c^r(c - a)(c - b) \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ và các hoán vị tương ứng.

Các trường hợp thường được dùng để giải toán là $r = 1, r = 2$.

1.2 Xác định đa thức theo các đặc trưng số học

Trong phần này ta khảo sát các bài toán về xác định đa thức với hệ số nguyên và đa thức nhận giá trị nguyên trên tập số tự nhiên dựa vào các đặc trưng số học như: tính chia hết, đồng dư, nguyên tố cùng nhau, ...

Bài toán 1.1 (Mathemmatical Reflection issue 4, 2015)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ bậc ≥ 1 với hệ số nguyên và thỏa mãn điều kiện

$$a^2 + b^2 - c^2 \mid P(a) + P(b) - P(c), \forall a, b, c \in \mathbb{Z}, (a^2 + b^2 - c^2 \neq 0).$$

Lời giải. Ta có

$$a^2 + b^2 - c^2 \mid P(a) + P(b) - P(c), \forall a, b, c \in \mathbb{Z}. \tag{1.1}$$

Chọn $b = c$, trong (1.1) ta có

$$P(a) \vdots a^2, \forall a \in \mathbb{Z}.$$

Suy ra

$$P(a) = ma^2, \forall a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}. \tag{1.2}$$

Chọn $b = 0$, trong (1.1) ta được

$$a^2 - c^2 \mid P(a) + P(0) - P(c), \forall a, b, c \in \mathbb{Z}. \tag{1.3}$$

Theo định lý về phương trình Pythagoras, luôn tồn tại vô số các cặp số nguyên (a, b) sao cho $a^2 + b^2 = m^2, m \in \mathbb{Z}$. Gọi tập hợp gồm các cặp số nguyên (a, b) như thế là S. Theo (1.3) ta có

$$a^2 + b^2 - c^2 \mid P(\sqrt{a^2 + b^2}) + P(0) - P(c), \forall a, b \in S, c \in \mathbb{Z}. \tag{1.4}$$

Từ (1.1) và (1.4), ta suy ra

$$a^2 + b^2 - c^2 \mid P(\sqrt{a^2 + b^2}) + P(0) - P(a) - P(b), \forall a, b \in S, c \in \mathbb{Z}.$$

Hay

$$a^2 + b^2 - c^2 \mid P(\sqrt{a^2 + b^2}) - P(a) - P(b), \forall a, b \in S, c \in \mathbb{Z} \text{ do } (1.2).$$

Cho $c \to +\infty$ ta thu được $P(\sqrt{a^2 + b^2}) = P(a) + P(b), \forall a, b \in S$.

Vậy $P(\sqrt{a^2 + b^2}) = P(a) + P(b)$.

Chọn $a = b = x$ ta được $P(x\sqrt{2}) = 2P(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Giả sử rằng $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{Z}, \forall i = \overline{0, n}$, sau đó so sánh hệ số bậc cao nhất tương ứng ở hai vế ta được

$$a_n(\sqrt{2})^n = 2a_n \Rightarrow n = 2.$$

Suy ra $P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, do $P(0) = 0$ nên $a_0 = 0$.

Lại từ $P(x) \vdots x^2, \forall x \in \mathbb{Z}$ nên $a_1 = 0$.

Vậy đa thức cần tìm là $P(x) = kx^2, k \in \mathbb{Z}$ tùy ý khác 0.

Bài toán 1.2 (Olympic SV, 1996)**.** Cho $P_n(x)$ là đa thức bậc n và cho $m \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng

Nếu $P_n(x^m)$ chia hết cho $(x-a)^k$ thì nó chia hết cho $(x^m-a^m)^k$ $(a \neq 0)$.

Lời giải.

Giả sử,

$$P_n(x) = a_n(x-a^m)^n + \cdots + a_2(x-a^m)^2 + a_1(x-a^m) + a_0.$$

Khi đó

$$P_n(x^m) = a_n(x^m-a^m)^n + \cdots + a_2(x^m-a^m)^2 + a_1(x^m-a^m) + a_0.$$

Ta chứng minh

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$$

bằng phương pháp phản chứng.

Thật vậy, giả sử a_i là số khác không đầu tiên, trong đó $0 \leqslant a_i \leqslant k-1$.
Dễ thấy rằng $P_n(x^m)$ không chia hết cho $(x-a)i+1$, với $i+1 \geqslant k$.
Suy ra $P_n(x^m)$ không chia hết cho $(x-a)^k$, mâu thuẫn.
Suy ra điều phải chứng minh.

Đặc biệt khi $k=a=1$, ta có $P_n(x^m)$ chia hết cho $x-1$ thì nó chia hết cho x^m-1.

Bài toán 1.3 (Olympic SV, 2002)**.** Tồn tại hay không tồn tại một đa thức $P(x)$ bậc 2002 sao cho $P(x^2-2001)$ chia hết cho $P(x)$?

Lời giải. Ta giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ với $\deg P(x) = 2002$.

Xét đa thức $P(x) = (x+a)^{2002}$. Ta có

$$P(x^2-2001) = (x^2-2001+a)^{2002}$$
$$= \left[(x+a)^2 - 2a(x+a) + a^2 + a - 2001\right]^{2002}.$$

Nếu ta chọn được a, sao cho $a^2+a-2001=0$ hay $a = \dfrac{-1+\sqrt{8005}}{2}$ hoặc $a = \dfrac{-1-\sqrt{8005}}{2}$, thì đa thức $P(x^2-2001) = (x^2-a^2)^{2002} = (x+a)^{2002}(x-a)^{2002}$ chia hết cho $P(x)$. Vậy, đa thức

$$P(x) = \Big(x + \frac{-1+\sqrt{8005}}{2}\Big)^{2002}$$

hoặc đa thức

$$P(x) = \Big(x + \frac{-1 - \sqrt{8005}}{2}\Big)^{2002}$$

thoả mãn điều kiện bài toán.

Lời bàn: Vì sao lại xét đa thức $P(x) = (x+a)^{2002}$ như vây? Ta xét từ bài toán đơn giản trước "Tồn tại hay không tồn tại một đa thức $P(x)$ bậc 2 sao cho $P(x^2-1)$ chia hết cho $P(x)$? "

Xét đa thức $P(x) = (x+a)^2$ và chỉ ra được tồn tại đa thức, do đó bài toán trên xét $P(x) = (x+a)^{2002}$.

Từ đó có thể nâng bài toán với bậc của đa thức $P(x)$ cao hơn :

Tồn tại hay không tồn tại một đa thức $P(x)$ bậc 2018 sao cho $P(x^2 - 2017)$ chia hết cho $P(x)$? "

Phát triển thành bài toán tổng quát hơn:

Có tồn tại hay không tồn tại một đa thức $P(x)$ bậc k sao cho $P(x^2-k)$ chia hết cho $P(x)$ (k là số nguyên dương.)

Bài toán 1.4 (HSGQG, 2015)**.** Cho $f_n(x)$ là dãy đa thức xác định bởi

$f_0(x) = 2, f_1(x) = 3x, \ldots, f_n(x) = 3xf_{n-1}(x)+(1-x-2x^2)f_{n-2}(x)\ \forall n \geq 2.$

Tìm tất cả các số nguyên dương n để $f_n(x) \,\vdots\, (x^3 - x^2 + x)$.

Lời giải. Từ công thức truy hồi ta có

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= 3x \cdot f_{n-1}(x) - (x+1)(2x-1)f_{n-2}(x) \\
&= (x+1+2x-1)f_{n-1}(x) - (x+1)(2x-1)f_{n-2}(x) \\
&= (x+1)f_{n-1}(x) + (2x-1)[f_{n-1}(x) - (x+1)f_{n-2}(x)].
\end{aligned}$$

Nên

$$\begin{aligned}
&f_n(x) - (x+1)f_{n-1}(x) = (2x-1)[f_{n-1}(x) - (x+1)f_{n-2}(x)] \\
&f_{n-1}(x) - (x+1)f_{n-2}(x) = (2x-1)[f_{n-2}(x) - (x+1)f_{n-3}(x)] \\
&f_{n-2}(x) - (x+1)f_{n-3}(x) = (2x-1)[f_{n-3}(x) - (x+1)f_{n-4}(x)] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&f_2(x) - (x+1)f_1(x) = (2x-1)[f_1(x) - (x+1)f_0(x)].
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} f_n(x) - (x+1)f_{n-1}(x) &= (2x-1)^{n-1}[f_1(x) - (x+1)f_0(x)] \\ &= (2x-1)^{n-1}(x-2). \end{aligned}$$

Do đó

$$f_n(x) - (2x-1)^n = (x+1)f_{n-1}(x) + (2x-1)^{n-1}(x-2) - (2x-1)^n.$$

Vì vậy,

$$\begin{aligned} f_n(x) - (2x-1)^n &= (x+1)f_{n-1}(x) + (2x-1)^{n-1}(x-2-2x+1) \\ &= (x+1)[f_{n-1}(x) - (2x-1)^{n-1}] \\ &= (x+1)^n[f_0(x) - (2x-1)^0] = (x+1)^n. \end{aligned}$$

Vậy $f_n(x) = (2x-1)^n + (x+1)^n$. Đặt $Q(x) = x^3 - x^2 + x = x(x^2 - x + 1)$.

Vì $f_n(x) \vdots Q(x)$ nên $f_n(0) = 0$ hay $1^n + (-1)^n = 0$ nên n lẻ.

$f_n(-2) = (-5)^n + (-1)^n = -(5^n + 1)$ (do n lẻ) chia hết cho

$Q(-2) = -2[(-2)^2 - (-2) + 1] = (-2)7$. Vì $f_n(-2) = -(5^n + 1)$ lại là số chẵn nên $f_n(-2) \vdots 7$. Do $125 \equiv -1 \pmod 7$ nên xét các trường hợp sau

- $n = 3k, k$ lẻ ta có $5^n + 1 = 5^{3k} + 1 \equiv (-1)^k + 1 \equiv 0 \pmod 7$,
- $n = 3k + 1, k$ chẵn ta có $5^n + 1 = 5 \cdot 5^{3k} + 1 \equiv 6 \pmod 7$,
- $n = 3k + 2, k$ lẻ ta có $5^n + 1 = 25 \cdot 5^{3k} + 1 \equiv -24 \equiv 3 \pmod 7$.

Suy ra điều kiện cần của n là $n = 3k$ với k lẻ. Khi đó $f_n(x) = (x+1)^{3k} + (2x-1)^{3k}$ chia hết cho $(x+1)^3 + (2x-1)^3, \forall k$.

Nhận thấy $(x+1)^3 + (2x-1)^3 = (9x^3 - 9x^2 + 9x) \vdots g(x)$ nên ta có $x = 3k$ với k là số tự nhiên lẻ thỏa mãn, đặt $k = 2m + 1$ với m nguyên dương thì $n = 6n + 3$.

Vậy tất cả các số n cần tìm dạng $6m + 3$ với m là số nguyên dương.

Nhận xét: Ta có thể tìm ra được công thức tổng quát của dãy đa thức đã cho bằng cách coi x là hằng số và xây dựng số hạng của dãy số tương ứng, tức là xét dãy số

$$\begin{cases} u_0 = 2, u_1 = 3x, \\ u_n = 3xu_{n-1} + (1 - x - x^2)u_{n-2} \end{cases}$$

với x là tham số thực nào đó.

Xét phương trình đặc trưng $t^2 - 3xt + 2x^2 + x - 1 = 0$, suy ra $t = x + 1, t = 2x - 1$.

Do đó $u_n = \alpha(x + 1)^n + \beta(2x - 1)^n$.Dựa vào u_0, u_1 ta tìm được $\alpha = \beta = 1$.

Do vậy, $f_n(x) = (2x - 1)^n + (x + 1)^n$.

Bài toán thuộc dạng về tính chia hết của đa thức kết hợp với đa thức xác định bởi hệ thức truy hồi.

Dưới đây là một bài tương tự: Cho $f_n(x)$ là dãy đa thức xác định bởi công thức

$$\begin{cases} f_0(x) = 2, f_1(x) = 2x + 2, \\ f_{n+2}(x) = (2x + 2)f_{n+1}(x) - (x^2 + 2x - 3)f_n(x), n \geq 1 \end{cases}$$

Tìm tất cả các giá trị của n sao cho $f_n(x)$ chia hết cho $x^2 + 2x + 5$.

Bài toán 1.5 (IMO Shortlisted 2002)**.** Cho $m, n \in \mathbb{N} (m, n > 2)$ và các số nguyên $a_1, a_2, ..., a_n$ sao cho không có số nào trong chúng chia hết cho m^{n-1}. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên $e_1, e_2, ..., e_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho $|e_i| < m, \forall i$ và $e_1a_1 + e_2a_2 + \cdots + e_na_n$ chia hết cho m^n.

Lời giải. Giả sử không tồn tại các số nguyên $e_1, e_2, ..., e_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho $|e_i| < m, \forall i$ và $e_1a_1 + e_2a_2 + \cdots + e_na_n$ chia hết cho m^n. Xét tập A gồm các số có dạng $\sum\limits_{i=1}^{n} e_ia_i$, với $0 \leq e_i \leq m - 1, i = \overline{1, n}$.

Trong A có tất cả m^n số và do giả thiết phản chứng ta suy ra m^n số này lập thành hệ thặng dư đầy đủ $\pmod{m^n}$ (vì nếu không như vậy thì có hai số cùng số dư khi chia cho m^n và hiệu hai số này thỏa mãn đề bài. Vô lý).

Xét $f(x) = \sum\limits_{a \in A} x^a$, ta thấy

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=0}^{m-1} x^{ja_i} \Big) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - x^{ma_i}}{1 - x^{a_i}}. \tag{1.5}$$

Xét số phức $\varepsilon = \cos\left(\dfrac{2\pi}{m^n}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{m^n}\right)$. Do m^n phần tử của A lập thành hệ thặng dư đầy đủ $\pmod{m^n}$ nên ta phải có $f(\varepsilon) = 0$. Do đó từ (1.5)ta suy ra

$$\prod_{i=1}^{n}(1 - \varepsilon^{ma_i}) = 0.$$

Tuy nhiên điều này mâu thuẫn với giả thiết các số $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số nguyên sao cho không có số nào trong chúng chia hết cho m^{n-1}. Điều đó chứng tỏ phản chứng là sai. Vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 1.6 (Olympic SV, 2004)**.** Xác định đa thức

$f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + c$ biết rằng nó chia hết cho đa thức $(x-1)(x+1)(x-2)$.

Lời giải. Ta có $f(x)$ chia hết cho $(x-1)(x+1)(x-2)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}
&f(1) = a + b + c = 0,\\
&f(-1) = a - b + c - 6 = 0,\\
&f(2) = 4a + 2b + c = 0.
\end{aligned}$$

Giải hệ này ta thu được $a = 1, b = -3, c = 2$.

Vậy đa thức cần tìm là $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 3x + 2$.

Bài toán 1.7. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ bậc 5 thỏa mãn các điều kiện sau:

Đa thức $(P(x) + 1)$ chia hết cho $(x-1)^3$ và đa thức $(P(x) - 1)$ chia hết cho $(x+1)^3$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $\deg P'(x) = 4$ và $P'(x)$ chia hết cho $(x-1)^2$ và $(x+1)^2$.

Vậy nên

$$P'(x) = a(x-1)^2(x+1)^2 = a(x^4 - 2x^2 + 1)$$

và

$$P(x) = a\Big(\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3} + x + b\Big).$$

Kết hợp với điều kiện $P(1) = -1$ và $P(-1) = 1$ ta thu được

$$P(x) = -\frac{1}{8}(3x^5 - 10x^3 + 15).$$

Thử lại ta thấy nghiệm này không thỏa mãn. Vậy không tồn tại đa thưc bậc 5 thỏa mãn điều kiện bài ra.

Bài toán 1.8. Tìm đa thức bậc 3 dạng

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

sao cho $f(x)$ chia hết cho $(x-2)$ và $f(x)$ chia cho $x^2 - 1$ thì dư $2x$.

Lời giải. Vì $f(x)$ chia hết cho $x - 2$ nên

$$f(2) = 8 + 4a + 2b + c = 0.$$

Do $f(x)$ chia cho $x^2 - 1$ thì dư $2x$ nên $g(x) = f(x) - 2x$ chia hết cho $x^2 - 1$.

Suy ra

$$g(1) = 1 + a + (b-2) + c = 0$$

hay

$$a + b + c = 1$$

và

$$g(-1) = -1 + a - b + 2 + c = 0$$

hay $a - b + c = -1$.

Từ đó ta nhận được $a = -10, c = -10, b = -19$.

Vậy đa thức cần tìm có dạng

$$f(x) = x^3 - 10x^2 - 19x - 10.$$

Bài toán 1.9. Xác định đa thức bậc n dạng

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

biết rằng khi chia $f(x)$ cho $(x - b_1), (x - b_2), \cdots, (x - b_n)(b_i \in \mathbb{Z}, b_i \neq b_j$ nếu $i \neq j)$đều có chung số dư là $m(m \in \mathbb{Z})$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $f(b_i) = m(i = 1, 2, \cdots, n)$.

Đặt $f(x) - m = g(x)$ thì $\deg g = n$ và hệ số cao nhất của $g(x)$ bằng 1 và $g(x)$ có n nghiệm phân biệt là $b_1, b_2, \cdots, b_n$.

Xét đa thức

$$h(x) = g(x) - (x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_n).$$

Khi đó

$$h(x) = (a_{n-1} - A_1)x^{n-1} + (a_{n-2} - A_2)x^{n-2} + \cdots + (a_0 - A_{n-m}),$$

trong đó $A_1, A_2, \cdots, A_n$ được xác định như sau

$$\begin{cases} A_1 = (-1)^1(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\ A_2 = (-1)^2(b_1b_2 + b_1b_3 + \cdots + b_{n-1}b_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n. \end{cases}$$

1.3 Xác định đa thức theo các đặc trưng nghiệm

Bài toán 1.10 (Kì thi chọn đội tuyển HSG TPHCM, 2012 - 2013)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn điều kiện

$$P(x) \cdot P(x - 3) = P(x^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Lời giải. TH1: $P(x) \equiv C$ (C là hằng số thực) thỏa mãn (1.6). Suy ra $c^2 = c$ nên $c = 0$ hoặc $c = 1$. Do đó $P(x) = 0$ hoặc $P(x) = 1$.

TH2: $\deg P(x) \geq 1$.

Gọi α là một nghiệm phức tùy ý của $P(x)$. Từ (1.6) thay $x = \alpha$ ta có $P(\alpha^2) = 0$, suy ra $x = \alpha^2$ cũng là một nghiệm của $P(x)$. Từ đó có $\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \ldots, \alpha^{2^n}$ cũng các nghiệm của $P(x)$ mà $P(x)$ chỉ có hữu hạn nghiệm (do đang xét $P(x)$ khác đa thức không), suy ra

$$\left[\begin{array}{l} |\alpha| = 0 \\ |\alpha| = 1. \end{array}\right. \tag{I}$$

Từ (1.6) lại thay $x = \alpha + 3$, ta có $P((\alpha + 3)^2) = 0$, suy ra $x = (\alpha + 3)^2$ là nghiệm của $P(x)$. Từ $x = (\alpha + 3)^2$ là nghiệm của $P(x)$, tương tự phần trên có $(\alpha+3)^2, (\alpha+3)^4, (\alpha+3)^8, (\alpha+3)^{16}, \ldots$ là các nghiệm của $P(x)$ mà $P(x)$ chỉ có hữu hạn nghiệm, suy ra

$$\left[\begin{array}{l} |(\alpha+3)|^2 = 0 \\ |\alpha+3|^2 = 1. \end{array}\right.$$

Hay

$$\left[\begin{array}{l} |(\alpha+3)| = 0 \\ |\alpha+3| = 1. \end{array}\right. \tag{II}$$

Như vậy, nếu α là nghiệm của $P(x)$ thì ta có α thỏa mãn hệ (I) và (II).

Từ biểu diễn số phức α thỏa mãn (I) và (II) trên mặt phẳng phức ta thấy hệ trên không có nghiệm. Suy ra không tồn tại đa thức hệ số thực $P(x)$ bậc lớn hơn hoặc bằng 1 thỏa mãn (1.6).

Kết luận. Các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn (1.6) là $P(x) = 0$ hoặc $P(x) = 1$.

Bài toán 1.11 (Moldova MO 2004)**.** Tìm đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn điều kiện $(x^3+3x^2+3x+2)P(x-1) = (x^3-3x^2+3x-2)P(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Trước hết ta tìm nghiệm của $P(x)$. Từ giả thiết, ta có

$$(x+2)(x^2+x+1)P(x-1) = (x-2)(x^2-x+1)P(x). \tag{1.7}$$

Từ đây, ta chọn $x = -2$ sẽ được $P(-2) = 0$. Chọn $x = -1$ được $P(-1) = 0$, chọn $x = 0$ được $P(0) = 0$ và khi $x = 1$ thì được $P(1) = 0$. Suy ra $P(x) = x(x-1)(x+1)(x+2)Q(x)$, với $Q(x)$ là đa thức hệ số thực. Thay $P(x)$ vào (1.7), ta được

$$\begin{aligned}
&(x^2+x+1)Q(x-1) = (x^2-x+1)Q(x), \forall x \neq \{0, \pm1, \pm2\} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{Q(x-1)}{x^2-x+1} = \frac{Q(x)}{(x^2+x+1)}, \forall x \neq \{0, \pm1, \pm2\} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{Q(x-1)}{(x-1)^2+(x-1)+1} = \frac{Q(x)}{(x^2+x+1)}, \forall x \neq \{0, \pm1, \pm2\}.
\end{aligned}$$

Đặt $R(x) = \dfrac{Q(x)}{(x^2+x+1)}$, ta có $R(x) = R(x-1)$ với mọi $\forall x \neq \{0, \pm1, \pm2\}$. Suy ra $R(x) \equiv C$ hằng số nên $Q(x) = C(x^2+x+1)$.

Do đó $P(x) = Cx(x-1)(x+1)(x+2)$. Thử lại ta thấy thỏa mãn.

Vậy $P(x) = Cx(x-1)(x+1)(x+2)$.

Bài toán 1.12 (Bulgary MO, 2004)**.** Tìm tất cả các cặp đa thức $P(x), Q(x)$ thuộc$\mathbb{R}[x]$ bậc ≥ 1 và thỏa mãn điều kiện

$$P(x)Q(x+1) \equiv P(x+2017)Q(x).$$

Lời giải. Đặt $R(x) = P(x)P(x+1)\cdots P(x+2016)$, ta có

$$P(x)\cdot Q(x+1) \equiv P(x+2017)Q(x)$$

Suy ra $\dfrac{Q(x)}{Q(x+1)} = \dfrac{P(x)}{P(x+2017)}$

$$= \frac{P(x)P(x+1)\cdots P(x+2016))}{P(x+1)P(x+2)\cdots P(x+2017)} = \frac{R(x)}{R(x+1)}.$$

Nếu x lớn hơn nghiệm lớn nhất của $P(x)$ thì

$$\frac{Q(x)}{R(x)} = \frac{Q(x+1)}{R(x+1)}.$$

Suy ra, với mọi số tự nhiên n, ta có

$$\frac{Q(x)}{R(x)} = \frac{Q(x+n)}{R(x+n)}.$$

Cho $n \to +\infty$ thì $\dfrac{Q(x+n)}{R(x+n)} \to c \neq 0.$

Do đó $\dfrac{Q(x)}{R(x)} = c$ hay $Q(x) = c.R(x)$.

Vậy $Q(x) = c.P(x).P(x+1)\cdots P(x+2016)$.

Bài toán 1.13 (Poland MO)**.** Cho đa thức $P(x)$ có bậc $n > 1$ có n nghiệm thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ phân biệt. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{P'(x_1)} + \frac{1}{P'(x_2)} + \ldots + \frac{1}{P'(x_n)} = 0.$$

Lời giải. Đặt $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n), a \neq 0,$ suy ra

$$P'(x) = P_1(x) + P_2(x) + \ldots + P_n(x) \text{ với } P_i(x) = \prod_{j=1}^{n}(x-x_j).$$

P) = — P
i=1

$i >$ $P_i(x_j$ $-$? .... $(x_j - x_i)$

Ta thấy $P_i(x_j) = 0, \forall i \neq j$. Suy ra $P'(x_j) = P_j(x_j) \neq 0, \forall j = \overline{1, n}$.

Xét đa thức $F(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{P_i(x_i)}{P'(x_i)} - 1 = 0$ có bậc không quá $n - 1$.

Với $i = \overline{1, n}$, ta có $F(x_i) = \dfrac{P_i(x_i)}{P'(x_i)} - 1 = 0$, suy ra $F(x)$ có n nghiệm phân biệt. Vậy nên $F(x) \equiv 0$.

Lại có hệ số của $F(x)$ ứng với x^{n-1} bằng 0 nên

$$\frac{a}{P'(x_1)} + \frac{a}{P'(x_2)} + \ldots + \frac{a}{P'(x_n)} = 0.$$

Suy ra

$$\frac{1}{P'(x_1)} + \frac{1}{P'(x_2)} + \ldots + \frac{1}{P'(x_n)} = 0.$$

Tiếp theo xét bài toán sử dụng khá nhiều kĩ thuật: sử dụng định lí Vi-et nhưng khéo léo trong việc đổi dấu các nghiệm nên không còn xuất hiện $(-1)^n$, sử dụng đánh giá bất đẳng thức

$$\forall x, y \geq 1 \text{ ta luôn có } xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{xy} + x + y.$$

và sử dụng phương pháp quy nạp toán học.

Bài toán 1.14 (Moscow MO, 2011)**.** Cho $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, (a_n \neq 0)$ có n nghiệm không lớn hơn -1 và thỏa mãn điều kiện

$$a_0^2 + a_1 a_n = a_n^2 + a_0 a_{n-1}.$$

Lời giải. Vì $f(x)$ có n nghiệm không lớn hơn -1 nên

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = a_n(x + x_1)(x + x_2)\ldots(x + x_n).$$

Với mọi $x_i \geq 1, \forall i = \overline{1, n}$. Đặt

$$\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = \dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ S_2 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_n = x_1 x_2 x_3 \ldots x_n = \dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

Ta có
$$a_0^2 + a_1 a_n = a_n^2 + a_0 a_{n-1}$$
tương đương với $\left(\dfrac{a_0}{a_n}\right)^2 + \dfrac{a_1}{a_n} = 1 + \dfrac{a_0}{a_n}.\dfrac{a_{n-1}}{a_n}.$
$$S_n^2 + S_{n-1} = 1 + S_n S_1 \Leftrightarrow S_n + \frac{S_{n-1}}{S_n} = \frac{1}{S_n} + S_1.$$
Do đó
$$x_1 x_2 \dots x_n + \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} + x_1 + \dots + x_n.$$
mà
$$x_1 x_2 \dots x_n + \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \geq \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} + x_1 + \dots + x_n.\text{(chứng minh theo qui nạp)}$$
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi có $n-1$ số bằng 1.

Vậy đa thức cần tìm là $f(x) = a_n(x+1)^{n-1}(x+a)$ với a là hằng số lớn hơn hoặc bằng 1.

Bài toán 1.15 (Olympic SV, 2000)**.** Cho $a, b \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thoả mãn điều kiện
$$xP(x-a) = (x-b)P(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải.

i) Khi $a = 0, \ b = 0$ thì $P(x)$ tuỳ ý.
ii) Khi $a = 0, \ b \neq 0$ thì $P(x) = 0 \ \forall x$.
iii) Khi $a \neq 0, \ b = 0$ thì $P(x) =$const tuỳ ý.
iv) Khi $a \neq 0, \ b \neq 0$ thì:

a) Nếu $\dfrac{b}{a} \notin \mathbb{N}$, thì khi thay $x = b$ vào ta được $x = b - a$ là nghiệm. Tương tự khi thay $x = b - a$ thì sẽ có $x = b - 2a$ là nghiệm,... Suy ra $P(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Nếu $\dfrac{b}{a} \in \mathbb{N}$ thì $P(x)$ có $x = a, \ x = 2a, \dots, x = (n-1)a$ là nghiệm.
Suy ra $P(x) = (x-a)(x-2a)\dots(x-(n-1)a)Q(x)$.

Thế vào điều kiện bài ra, ta được

$$Q(x-a) = Q(x),\ \ \forall x \in \mathbb{R},$$

hay $Q(x) = \text{const}$.

Vậy nên

$$P(x) = (x-a)(x-2a)\dots[x-(n-1)a].$$

Bài toán 1.16 (Olympic 30-4, THPT chuyên Tiền Giang đề nghị)**.** Gọi $x_i, i = \overline{1, 2011}$ là các nghiệm của đa thức $P(x) = x^{2011} + 2011x^{2000} + a_{2009}x^{2009} + \cdots + a_0$. Biết rằng $x_1^{64} + x_2^{64} + \cdots + x_{2011}^{64} = 2011$.

Hãy xác định đa thức $P(x)$.

Lời giải. Áp dụng định lí Viet, ta có $\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i = -2011$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$2011^2 = \Big(\sum_{i=1}^{2011} x_i\Big)^2 \leq 2011\Big(\sum_{i=1}^{2011} x_i^2\Big),$$

suy ra $2011^4 \leq 2011^2\big(\sum\limits_{i=1}^{2011} x_i^2\big)^2$.

Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\big(\sum_{i=1}^{2011} x_i^2\big)^2 \leq 2011\big(\sum_{i=1}^{2011} x_i^4\big),$$

suy ra $2011^4 = \Big(\sum\limits_{i=1}^{2011} x_i\Big)^4 \leq 2011^3\Big(\sum\limits_{i=1}^{2011} x_i^4\Big)$.

Biến đổi tương tự, ta thu được

$$\Big(\sum_{i=1}^{2011} x_i\Big)^8 \leq 2011^7\Big(\sum_{i=1}^{2011} x_i^8\Big).$$

Vậy nên

$$\Big(\sum_{i=1}^{2011} x_i\Big)^{64} \leq 2011^{63}\Big(\sum_{i=1}^{2011} x_i^{64}\Big) = 2011^{64}. \tag{1.8}$$

Mặt khác, $\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i = -2011$, nên từ (1.8) suy ra bất đẳng thức Cauchy xảy ra dấu bằng. Chứng tỏ các nghiệm bằng nhau và bằng -1. Do đó đa thức cần tìm là $P(x) = (x+1)^{2011}$.

1.4 Xác định đa thức theo phép biến đổi vi phân hàm

Trong phần này ta khảo sát một số dạng toán về xác định đa thức theo phép biến đổi vi phân hàm.

Bài toán 1.17 (Olympic SV, 1993)**.** Cho $p(x)$ ($\neq$ const) là đa thức với hệ số thực. Chứng minh rằng nếu hệ phương trình

$$\begin{cases} \int\limits_0^x p(t)\sin t dt &= 0, \\ \int\limits_0^x p(t)\cos t dt &= 0. \end{cases}$$

có nghiệm thực thì số nghiệm thực chỉ có thể là hữu hạn.

Lời giải. Gọi $p^{(k)}(t)$ là đạo hàm cấp k của $p(t)$ $\quad (p^0(t) = p(t))$ và ký hiệu

$$U_k = \int\limits_0^x p^{(k)}(t)\sin t dt,$$

$$V_k = \int\limits_0^x p^{(k)}(t)\cos t dt.$$

Giả sử $\deg p = n$. Suy ra $U_k = 0,\ \ V_t = 0$ nếu $K > n$. Sử dụng công thức tích phân từng phần, ta thu được

$$\begin{cases} U_k = -p^{(k)}(t)\cos t\Big|_0^x + \int\limits_0^x p^{(k+1)}(t)\sin t dt \\ V_k = p^{(k)}(t)\sin t\Big|_0^x - \int\limits_0^x p^{(k+1)}(t)\sin t dt. \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} U_k = -p^{(k)}(t)\cos t\big|_0^x + V_{k+1} \\ V_k = p^{(k)}(t)\sin t\big|_0^x - U_{k+1} \end{cases}$$

Ta có tiếp

$$\begin{cases} U_k = -p^{(k)}(t)\cos t\big|_0^x + p^{(k+1)}(t)\sin t\big|_0^x - U_{k+2} \\ V_k = p^{(k)}(t)\sin t\big|_0^x + p^{(k+1)}(t)\cos t\big|_0^x - V_{k+2} \end{cases}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{cases} U_0 = & -\sum\limits_{k=0}^{2k\leqslant n} p^{(2k)}(t)\cos t\Big|_0^x + \sum\limits_{k=0}^{(2k+1)\leqslant n} p^{(2k+1)}(t)\sin t\Big|_0^x \\ V_0 = & \sum\limits_{k=0}^{2k\leqslant n} p^{(2k)}(t)\sin t\Big|_0^x + \sum\limits_{k=0}^{(2k+1)\leqslant n} p^{(2k+1)}(t)\cos t\Big|_0^x. \end{cases}$$

đặt

$$p_1(t) = \sum_{k=0}^{2k+1\leqslant n} p^{(2k)}(t)$$

Suy ra $\deg p_1 = n$.

$$p_2(t) = \sum_{k=0}^{2k+1\leqslant n} p^{(2k+1)}(t).$$

Suy ra $\deg p_2 = n-1$. Khi đó, (1) được viết dưới dạng

$$\begin{cases} U_0 = & -p_1(t)\cos t\Big|_0^x + p_2(t)\sin t\Big|_0^x \\ V_0 = & p_1(t)\sin t\Big|_0^x + p_2(t)\cos\Big|_0^x \end{cases}$$

Gọi X là tập nghiệm của hệ đã cho, tức hệ

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ V_0 = 0. \end{cases}$$

Với mọi $x \in X$ ta có

$$\begin{cases} -p_1(t)\cos t|_0^x + p_2\sin t|_0^x = 0 \\ p_1(t)\sin t|_0^x + p_2\cos t|_0^x = 0. \end{cases}$$

Đặt $P_1(0) = a, \quad P_2(0) = b$. Khi đó

$$\begin{cases} p_2(x)\sin x - p_1(x)\cos x = -a \\ p_2(x)\cos x + p_1(x)\sin x = b. \end{cases}$$

Suy ra

$$(p_2(x)\sin x - p_1(x)\cos x)^2 + (p_2(x)\cos x + p_1(x)\sin x)^2 = a^2 + b^2.$$

Do đó

$$p_1^2(x) + p_2^2(x) - (a^2 + b^2) = 0.$$

Gọi Y là tập nghiệm của đa thức

$$Q(x) = p_1^2(x) + p_2^2(x) - (a^2 + b^2).$$

Suy ra $X \subset Y$. Từ $\deg Q = 2n$ suy ra $|X| \leqslant |Y| \leqslant 2n$. Tức X chỉ có hữu hạn phần tử.

Cách khác.

Ta có thể sử dụng số phức để giải bài toán. Viết lại hệ dưới dạng

$$F(x) := \int\limits_0^x P(t)e^{it}dt = 0.$$

Ta có

$$F'(x) = P(x)e^{ix}$$

nên phương trình $F'(x) = 0$ chỉ có hữu hạn nghiệm. Suy ra phương trình $F(x) = 0$ có không quá hữu hạn nghiệm.

Bài toán 1.18 (Olympic SV,1994)**.** a) Cho hàm số $f : [a, b] \to [a, b]$, với $a < b$ và thỏa mãn điều kiện

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b] \quad \text{và} \quad x \neq y.$$

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ có duy nhất một nghiệm thuộc $[a, b]$.

b) Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên [a, b], có không điểm trên [a, b] và thỏa mãn $|f'(x)| < |f(x)|, \forall x \in [a, b]$.

Chứng minh rằng $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$.

Lời giải.

a) Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$. Ta thấy $g(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Do đó tồn tại $x_0 \in [a, b]$ sao cho

$$g(x_0) = \min_{x \in [a,b]} g(x). \tag{1.9}$$

Ta sẽ chứng minh rằng $g(x_0) = 0$. Thật vậy, giả sử $g(x_0) \neq 0$ và vì vậy, $f(x_0) \neq x_0$.

Từ bất đẳng thức đã cho, ta có

$$\big|f(f(x_0)) - f(x_0)\big| < |f(x_0) - x_0|.$$

Suy ra

$$f(x_0) < g(x_0)$$

Điều này mâu thuẫn với (1.9), nghĩa là $f(x_0) = x_0$. Giả sử phương trình $f(x) = x$ còn có nghiệm x_1 với $x_0 \neq x_1 \in [a, b]$. Ta có

$$\begin{cases} x_1 \neq x_0 \\ x_1 \in [a, b]. \end{cases}$$

Suy ra

$$|f(x_1) - f(x_0)| = |x_1 - x_0|,$$

Mâu thuẫn với bất đẳng thức đã cho.

Tóm lại, phương trình $f(x) = x$ có duy nhất nghiệm trên $[a, b]$.

b) Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ với $x_0 \in [a, b]$. Theo khai triển Taylor tại x_0, thì

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0) = f'(c)(x - x_0).$$

Xét khoảng đóng $G := \left[x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2}\right] \cap [a, b]$. Vì $f(x)$ khả vi trên $[a, b]$ nên $f(x)$ đạt cực đại trên đoạn đóng G. Giả sử

$$|f(x_m)| = \max_{x \in G} |f(x)|, \ \ x_m \in G.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} |f(x_m)| &= |f'(c_m)|\, |x_m - x_0| \leqslant |f(c_m)|\, |x_m - x_0| \\ &\leqslant \frac{1}{2}|f(c_m)| \leqslant \frac{1}{2}|f(x_m)|. \end{aligned}$$

Hay $f(x) = 0$ với mọi $x \in G$.

Như vậy, nếu tại một điểm trên $[a, b]$ mà $f(x) = 0$ thì $f(x) = 0$ trên toàn bộ lân cận với bán kính bằng $1/2$ của điểm đó. Bằng việc xét các điểm x_0 khác nhau (mà tại đó $f(x_0) = 0$) lan dần về hai phía của đoạn $[a, b]$ thì sau một số hữu hạn bước ta sẽ được $f(x) = 0$ với $\forall x \in [a, b]$.

Bài toán 1.19 (Olympic SV, 1995)**.** Xét đa thức

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}[x^2 - 1)^n]$$

Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là đa thức bậc m $(m < n)$ thì

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx = 0.$$

Lời giải. Sử dụng công thức tích phân từng phần

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{d^{(n)}(x^2-1)^n}{dx^n} f(x)dx =$$

$$= \frac{d^{(n-1)}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} f(x)|_{-1}^{1} - \int\limits_{-1}^{1} \frac{d^{(n-1)}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} f'(x)dx$$

$$= \cdots = \int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^n f^{(n)}(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} 0dx = 0.$$

Bài toán 1.20 (Olympic SV, 1996)**.** Cho $g(x)$ là một đa thức bậc 1996. Biết rằng, ứng với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta đều có

$$g(x+h) = g(x) + hg'(x+h)\theta(x,h),$$

trong đó $\theta(x,h)$ bị chặn và $g''(x) \neq 0$. Tính $\lim\limits_{h\to 0} \theta(x,h)$.

Lời giải.

Với x xác định, ta khai triển Taylor với đa thức $f(x) = g(x+h)$ tại $h = 0$:

$$g(x+h) = g(x) + g'(x)h + \frac{g''(x)}{2}h^2 + \frac{g'''(x)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{g^{1996}(x)h^{1996}}{1996!}$$

(do $f'(0) = g'(x), \ldots, f^{(1996)}(0) = g^{(1996)}(x)$).

Theo đề bài thì $g(x+h) = g(x) + hg'(x + h\theta(x,h))$. Do vậy

$$hg'(t + h\theta(x,h)) = hg'(x) + \frac{h^2}{2}g''(x) + \cdots + \frac{h^{1996}}{1996!}g^{(1996)}(x).$$

Khai triển Taylor bậc 2 với hàm $g'(x + h\theta(x,h))$ tại điểm $h = 0$.

$$g'(x + h\theta(x,h)) = g'(x) + g''(x)h\theta(x,h) + 0(h\theta(x,h)),$$

nên

$$hg'(x + h\theta(x,h)) = hg'(x) + h^2g''(x)\theta(x,h) + h0(h\theta(x,h)) =$$

$$= hg'(x) + \frac{h^2}{2}g''(x) + \cdots + \frac{h^{1996}}{1996!}g^{(1996)}(x).$$

Suy ra

$$g''(x)\theta(x,h) + \frac{0(h\theta(x,h))}{h} =$$

$$= \frac{12}{2}g''(x) + \frac{h}{3!}g'''(x) + \cdots + \frac{h^{1996}}{1996!}g^{(1996)}(x) = \lim_{h\to 0} g''(x)\theta(x,h) = \frac{1}{2}g''(x).$$

Do $g''(x) \neq 0$ và $\lim\limits_{n\to 0}\theta(x,h) = \frac{1}{2}$, nên

$$\lim_{n\to 0}\theta(x,h) = \frac{1}{2}.$$

Bài toán 1.21 (Olympic SV, 1997)**.** Chứng minh rằng, với mọi $t \geqslant 0$, phương trình $x^3 + tx - 8 = 0$ luôn có nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là $x(t)$. Tính tích phân

$$\int_0^t [x(t)]^2 dt.$$

Lời giải.

Xét $f(x) = x^3 + tx - 8$. Ta có

$$f'(x) \geqslant 0, \ \ \forall x \geqslant 0.$$

Mặt khác, ta có $f(0) = -8 < 0$ và $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Vậy nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm dương duy nhất.

Từ phương trình $x^3 + tx - 8 = 0$, ta có $t = x^2 - \dfrac{8}{x}$.

Khi $t = 0$ thì $x = 2$. Ta thu được $t = 7$ và $x^3 + tx - 8 = (x-1)(x^2 + x + t) = 0$.

Suy ra $x = 1$ và

$$\int_0^7 [x(t)]^2 dt = -\int_2^1 x^2 d\Big(x^2 - \frac{8}{x}\Big) = \int_1^2 x^2\Big(2x + \frac{8}{x^2}\Big)dx =$$

$$= \int_1^2 (2x^3 + 8)dx = \Big(\frac{x^4}{2}\Big|_1^2 + 8x\Big|_1^2\Big) = -\frac{31}{2}.$$

Bài toán 1.22 (Olympic SV, 1998)**.** Xét các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn các điều kiện

$$P(0) = P(1) = 0, \quad \int\limits_0^1 |P'(x)|dx = 1.$$

Chứng minh rằng

$$|P(x)| \leqslant \frac{1}{2}, \quad \forall x \in [0,1].$$

Lời giải. Ta sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng. Giả sử $\exists x_0 \in [0,1]$ sao cho $|P(x_0)| > \dfrac{1}{2}$.

Do $P(x)$ liên tục tại x_0, nên suy ra

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 |P'(x)|dx = \int\limits_0^{x_0} |P'(x)|dx + \int\limits_{x_0}^1 |P'(x)|dx \geqslant \Big|\int\limits_0^{x_0} P'(x)dx\Big| + \Big|\int\limits_{x_0}^1 P'(x)dx\Big|\\ =|P(x_0) - P(0)| + |P(1) - P(x_0)| \geqslant 2|P(x_0)| > 1,\end{aligned}$$

mâu thuẫn với giả thiết

$$\int\limits_0^1 |P'(x)|dx = 1.$$

Vậy điều giả sử là sai.

Vậy nên

$$|P(x)| \leqslant \frac{1}{2}, \qquad \forall x \in [0,1].$$

Bài toán 1.23 (Olympic SV, 1999)**.** Giả sử đa thức với hệ số thực

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

có n nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng

$$a_{k-1}a_{k+1} < a_k^2, \ \forall k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh rằng

$$[Q'(x)]^2 - Q(x)Q''(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1.10}$$

ứng với $Q(x) \in \mathbb{R}(x)$, $\deg Q(x) = m$ và $Q(x)$ có m nghiệm thực đơn.

Ta có

$$Q(x) = a\prod_{i=1}^{m}(x - \alpha_i), \quad \alpha_i \neq \alpha_j \ (i \neq j).$$

Suy ra

$$\frac{Q'(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{x - \alpha_i}$$

và

$$\frac{[Q'(x)]^2 - Q(x)Q''(x)}{Q^2(x)} = \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(x - \alpha_i)^2}. \tag{1.11}$$

a) Nếu với $t \in \mathbb{R}$ mà $Q(t) = 0$ thì

$$[Q'(t)]^2 - Q(t)Q''(t) = [Q'(t)]^2 > 0$$

(do $Q'(t) \neq 0$ và do t là nghiệm đơn).

b) Nếu với $t \in \mathbb{R}$ mà $Q(t) \neq 0$ thì từ (1.11) suy ra (1.10).

Bây giờ ta xét đa thức

$$Q(x) = P^{(k)}(x), k = 0, 1, \ldots, n - 1.$$

Các đa thức đó đều có nghiệm thực đơn (định lý Role). Suy ra

$$P^{(k-1)}(0)P^{(k+1)}(0) < [P^{(k)}]^2$$

hay

$$(k-1)!a_{k-1}(k+1)!a_{k+1} < (a_k k!)^2$$

nên

$$a_{k-1}a_{k+1} < (a_k)^2\frac{k}{k+1} < a_k^2.$$

Bài toán 1.24 (Olympic SV, 2001)**.** Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên đoạn $[a, b]$ và thoả mãn điều kiện

$$[f(x)]^2 + [f'(x)]^2 > 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

Chứng minh rằng số các nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trên đoạn $[a, b]$ là hữu hạn.

Lời giải. Giả sử ngược lại, phương trình $f(x) = 0$ có vô số nghiệm $\{x_n\} \in [a, b]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Khi đó, tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\} \to \alpha \in [a, b]$. Do $f(x)$ liên tục nên $f(\alpha) = 0$. Từ giả thiết $[f(x)]^2 + [f'(x)]^2 > 0, \ \forall x \in [a, b]$, suy ra $f'(\alpha) \neq 0$.

Mặt khác,

$$f'(\alpha) = \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \neq 0.$$

Điều này chứng tỏ $f(x) \neq 0$ trong một lân cận nào đó của điểm α, mâu thuẫn với giả thiết α là điểm tụ của dãy $\{x_n\}_{n=1,2,3,\ldots}$.

Chương 2

Ước lượng đa thức

2.1 Đa thức Chebyshev và các tính chất

Panuty Chebyshev là tên của một nhà toán học người Nga. Các kết qủa về dãy đa thức trực giao (orthogonal polynomials) có liên hệ sâu sắc đến công thức de Moivre (de Moivre's formula). Các dãy đa thức trực giao này hoàn toàn có thể xác định được bằng công thức truy hồi giống như dãy số Fibonacci và dãy số Lucas.

Đa thức này gồm có hai loại là:

Ta ký hiệu đa thức Chebyshev loại I là T_n. Chữ T được chọn làm ký hiệu vì tên của Chebyshev trong tiếng Pháp là Tchebycheff và trong tiếng Đức là Tschebyscheff.

Ta ký hiệu đa thức Chebyshev loại II là U_n.

Định nghĩa 2.1 (Đa thức Chebyshev loại I)**.** Các đa thức $T_n(x)$ được xác định bởi: $\begin{cases} T_0(x) = 1;\ T_1(x) = x \\ T_{n+1}(x) = 2x.T_n(x) - T_{n-1}(x),\ n \geq 1 \end{cases}$ được gọi là đa thức Chebyshev loại I.

Định nghĩa 2.2 (Đa thức Chebyshev loại II)**.** Các đa thức $U_n(x)$ được xác định bởi: $\begin{cases} U_0(x) = 1;\ U_1(x) = 2x \\ U_{n+1}(x) = 2x.U_n(x) - U_{n-1}(x),\ n \geq 1 \end{cases}$ được gọi là đa thức Chebyshev loại II.

Bằng phương pháp quy nạp toán học, ta dễ dàng chứng minh được:

$$T_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha, \forall\alpha \in \mathbb{R}; U_n(\cos\alpha) = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}, \forall\alpha \neq k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Tính chất 2.1. $T_n(x) = \cos(n \arccos x), \forall x \in [-1; 1];$

$$U_n(x) = \frac{\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in (-1;1).$$

Tính chất 2.2. $T_n(x), U_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ có bậc là n và hệ số cao nhất tương ứng là 2^{n-1} và 2^n.

Tính chất 2.3. $T_n(x), U(x)$ là các hàm số chẵn khi n chẵn và là các hàm số lẻ khi n lẻ.

Tính chất 2.4. $T_n(x), U_n(x)$ có đúng n nghiệm thực phân biệt tương ứng là: $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}, k=\overline{0;n-1}$ và $\cos\frac{k\pi}{n+1}, k=\overline{1,n}$.

Chứng minh. Do $x \in [-1;1]$ nên ta đặt $x = \cos\alpha$ với $\alpha \in [0;\pi]$. $T_n(x) = 0$ tương đương $T_n(\cos\alpha) = 0$ suy ra $\cos n\alpha = 0$ do đó $n\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ hay $\alpha = \frac{\pi}{2n} + \frac{k}{n}\pi$.

Do $\alpha \in [0;\pi]$ nên $0 \le \frac{\pi}{2n} + \frac{k}{n}\pi \le \pi \Leftrightarrow 0 \le \frac{1}{2n} + \frac{k}{n} \le 1$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le k \le \frac{2n-1}{2} = n - \frac{1}{2}.$$

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = \overline{0, n-1}$.

Vậy $T_n(x)$ có đúng n nghiệm thực phân biệt tương ứng là:

$\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}, k = \overline{0;n-1}$. Ta chứng minh tương tự cho trường hợp của $U_n(x)$.

Tính chất 2.5. $|T_n(x)| \le 1, \forall x \in [-1;1]$ và $|T_n(x)| = 1$ có đúng $n+1$ điểm $\overline{x_k} = \cos\frac{k\pi}{n}, k = \overline{0;n}$.

Chứng minh. Theo cách đặt trên thì

$|T_n(x)| = |T_n(\cos\alpha)| = |\cos n\alpha| \le 1, \forall x \in [-1;1]$.

$|T_n(x)| = 1 \Leftrightarrow |\cos n\alpha| = 1 \Leftrightarrow \sin n\alpha = 0 \Leftrightarrow n\alpha = k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{k\pi}{n}$.

Do $\alpha \in [0;\pi]$ nên $0 \le \frac{k\pi}{n} \le \pi \Leftrightarrow 0 \le k \le n$. Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = \overline{0;n}$.

Lưu ý. Các điểm $\cos\frac{k\pi}{n}, k = \overline{0;n}$ nói ở trên là các điểm luân phiên Chebyshev (gọi tắt là các luân điểm).

Nhận xét 2.1. $T_n\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right) = (-1)^k$.

Tính chất 2.6. $T_n\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right), \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \neq 0;$
$U_n\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] = \dfrac{x^{n+1}-\dfrac{1}{x^{n+1}}}{x-\dfrac{1}{x}}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \neq 0; \pm 1.$

Chứng minh. Với $n=0, n=1$ ta có

$T_0\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)=1; T_1\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$ luôn đúng.

Giả sử mệnh đề trên đúng đến n. Áp dụng công thức truy hồi của T_n ta có:

$$T_{n+1}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]=2.\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)T_n\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]-T_{n-1}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)-\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)$$

Ta chứng minh tương tự cho trường hợp của $U_n(x)$.

Hệ quả 2.1. $\forall n \in \mathbb{N}$ ta có:

$$T_n(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n}{2};$$
$$U_n(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n-\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n}{2\sqrt{x^2-1}}.$$

Tính chất 2.7. $(T_n(x); U_n(x))$ là cặp nghiệm của phương trình Pell đa thức:

$$P^2(x)-\left(x^2-1\right)Q^2(x)=1.$$

Tính chất 2.8. $T_n\left(1-2x^2\right)=(-1)^n T_{2n}; U_n\left(1-2x^2\right)x=(-1)^n U_{2n+1}(x)$

Tính chất 2.9. $U_n(x)=xU_{n-1}(x)+T_{n-1}(x), \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*.$

Tính chất 2.10. $T_{n+1}(x)=xT_n(x)-\left(1-x^2\right)U_n(x), \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$

Tính chất 2.11. $T_{n+m}(x)+T_{|n-m|}(x)=2T_n(x)T_m(x); \forall x \in \mathbb{R}, \forall n, m \in \mathbb{N}.$

Tính chất 2.12. $T_m(T_n(x))=T_{mn}(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall m, n \in \mathbb{N}.$

Tính chất 2.13. $U_n(x)=\frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x).$

Tính chất 2.14. $|U(x)| \le n \ \forall x \in [-1;1]$; $|T'_n(x)| \le n^2 \ \forall x \in [-1;1]$.

Tính chất 2.15. $\dfrac{dT_n}{dx} = nU_{n-1}$; $\dfrac{dU_n}{dx} = \dfrac{(n+1)\,T_{n+1} - xU_n}{x^2-1}$;
$\dfrac{d^2T_n}{dx^2} = n.\dfrac{nT_n - xU_{n-1}}{x^2-1} = n.\dfrac{(n+1)\,T_n - U_n}{x^2-1}$.

Tổng quát:

$$\left.\frac{d^pT_n}{dx^p}\right|_{x=\pm 1} = (\pm 1)^{n+p}\prod_{k=0}^{p-1}\frac{n^2-k^2}{2k+1}.$$

Nhận xét 2.2. $\left.\dfrac{d^2T_n}{dx^2}\right|_{x=1} = \dfrac{n^4-n^2}{3}$; $\left.\dfrac{d^2T_n}{dx^2}\right|_{x=-1} = (-1)^n\dfrac{n^4-n^2}{3}$.

Chứng minh. $T''(1) = \lim\limits_{x\to 1} n.\dfrac{nT_n - xU_{n-1}}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} n.\dfrac{\dfrac{nT_n - xU_{n-1}}{x-1}}{x+1} = n.\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{nT_n - xU_{n-1}}{x-1}}{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)} = \dfrac{n}{2}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{nT_n - xU_{n-1}}{x-1}$

Áp dụng quy tắc L'Hospital ta có:

$$\begin{aligned}
T''(1) &= \frac{n}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{d}{dx}(nT_n - xU_{n-1})}{\dfrac{d}{dx}(x-1)} = \frac{n}{2}\lim_{x\to 1}\frac{d}{dx}(nT_n - xU_{n-1}) \\
&= \frac{n}{2}\lim_{x\to 1}\left[n^2U_{n-1} - U_{n-1} - x\frac{d}{dx}(U_{n-1})\right] \\
&= \frac{n}{2}\left[n^2U_{n-1}(1) - U_{n-1}(1) - \lim_{x\to 1} d\frac{d}{dx}(U_{n-1})\right] \\
&= \frac{n^4}{2} - \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{d}{dx}(nU_{n-1}) \\
&= \frac{n^4}{2} - \frac{n^2}{2} - \frac{T''_n(1)}{2} = \frac{n^4-n^2}{3}.
\end{aligned}$$

Trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

Tính chất 2.16. $(1-x^2)\,T''_n(x) - xT'_n(x) + n^2T_n(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Tính chất 2.17. $\int U_n dx = \dfrac{T_{n+1}}{n+1} + C$;

$$\int T_n dx = \frac{1}{2}\left(\frac{T_{n+1}}{n+1} - \frac{T_{n-1}}{n-1}\right) + C = \frac{nT_{n+1}}{n^2-1} - \frac{xT_n}{n-1} + C.$$

Do dung lượng quy định của luận văn nên tác giả không say sưa vào việc chứng minh các tính chất trên mặc dù việc chứng minh này rất thú vị. Phần lớn các tính chất trên đều được chứng minh theo quy nạp kết hợp các công thức truy hồi.

2.2 Các dạng toán liên quan đến đa thức Chebyshev

Trong các dạng toán về ước lượng đa thức, đa thức Chebyshev đóng vai trò rất quan trọng. Nó vừa là trường hợp xảy ra dấu đẳng thức của nhiều bài toán ước lượng đa thức, vừa là đa thức bổ trợ trong các lời giải và chứng minh.Ta giải quyết một số bài toán liên quan đến đa thức Chebyshev.

Bài toán 2.1. *Cho đa thức* $f(x) = 4x^3 + (m+3)x^2 + mx$. *Tìm* $m \in \mathbb{R}$ *để* $|f(x)| \le 1, \forall x \in [-1;1]$

Lời giải. Do $f(x)$ là đa thức bậc 3 và kèm theo điều kiện $x \in [-1;1]$ nên ta có thể liên hệ đến các điểm là các luân điểm của đa thức Chebyshev bậc 3 là $\overline{x_k} = \cos\frac{k\pi}{3}$ $(k = 0;1;2;3)$. Cụ thể là $\overline{x_0} = \cos 0 = 1$; $\overline{x_1} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\overline{x_2} = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$; $\overline{x_3} = \cos\pi = -1$.

Ta có:

$$\begin{cases} |f(1)| \le 1 \\ |f(-1)| \le 1 \\ \left|f\left(-\frac{1}{2}\right)\right| \le 1 \\ \left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |2m+7| \le 1 \\ |-1| \le 1 \\ \left|-\frac{1}{2} + \frac{m+3}{4} - \frac{m}{2}\right| \le 1 \\ \left|\frac{1}{2} + \frac{m+3}{4} + \frac{m}{2}\right| \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |2m+7| \le 1 \\ \left|\frac{1-m}{4}\right| \le 1 \\ \left|\frac{3m+5}{4}\right| \le 1 \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} -1 \le 2m+7 \le 1 \\ -4 \le 1-m \le 4 \\ -4 \le 3m+5 \le 4 \end{cases}$

Do đó $\begin{cases} -4 \le m \le -3 \\ -3 \le m \le 5 \\ -3 \le m \le \dfrac{1}{3} \end{cases}$ nên $m = -3$

Đảo lại, khi $m = -3$ thì $f(x) = 4x^3 - 3x$.

Đặt $x = \cos\alpha$ với $\alpha \in [0; \pi]$.

Ta có $f(x) = \cos 3\alpha$. Suy ra $|f(x)| = |\cos 3\alpha| \le 1$.

Bài toán 2.2. Cho đa thức $f(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c$. Tìm $a, b, c \in \mathbb{R}$ để $|f(x)| \le 1, \forall x \in [-1; 1]$.

Lời giải. Đây là một bài khá hấp dẫn, tôi xin trình bày với nhiều lời giải khác nhau.

Cách 1. Bài toán này tương tự với cách ra đề và cách suy luận như bài toán trên. Tuy nhiên, bài toán này có đến 3 tham số đòi hỏi chúng ta phải có những đánh giá sâu sắc hơn. Dựa vào cách suy luận ở bài toán trên, ta để ý đến các luân điểm của đa thức Chebyshev bậc 3 là:

$\overline{x_0} = \cos 0 = 1$; $\overline{x_1} = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$; $\overline{x_2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$; $\overline{x_3} = \cos\pi = -1$.

Ta có đánh giá sau:

$$\begin{cases} |f(1)| \le 1 \\ |f(-1)| \le 1 \\ \left|f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right| \le 1 \\ \left|f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right| \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |4 + a + b + c| \le 1 \\ |-4 + a - b + c| \le 1 \\ \left|\dfrac{1}{2} + \dfrac{a}{4} + \dfrac{b}{2} + c\right| \le 1 \\ \left|-\dfrac{1}{2} + \dfrac{a}{4} - \dfrac{b}{2} + c\right| \le 1 \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} -5 \le a + b + c \le -3 & (1) \\ 3 \le a - b + c \le 5 & (2) \\ -6 \le a + 2b + 4c \le 2 & (3) \\ -2 \le a - 2b + 4c \le 6 & (4) \end{cases}$

Sử dụng (1) và (2) ta có: $\begin{cases} a + b + c \le -3 \\ a - b + c \ge 3 \end{cases} \Rightarrow b \le -3$.

Sử dụng (3) và (4) ta có: $\begin{cases} a + 2b + 4c \ge -6 \\ a - 2b + 4c \le 6 \end{cases} \Rightarrow b \ge -3$.

Từ hai đánh giá trên, ta suy ra $b = -3$.

Thay $b = -3$ vào hệ bất phương trình ở trên, ta được:

$$\begin{cases} -2 \le a + c \le 0 \\ 0 \le a + c \le 2 \\ -8 \le a + 4c \le 0 \\ 0 \le a + 4c \le 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ a + 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = c = 0.$$

Đảo lại, khi $a = 0; b = -3; c = 0$ thì $f(x) = 4x^3 - 3x$.

Đặt $x = \cos\alpha$ với $\alpha \in [0; \pi]$ ta có$f(x) = \cos 3\alpha$. Suy ra $|f(x)| = |\cos 3\alpha| \le 1$.

Cách 2. Để cho việc đánh giá và tìm các giá trị của $a; b; c$ được nhanh hơn ta cần quan tâm đến bất đẳng thức quen thuộc $|a_1 + a_2 + ... + a_n| \le |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$ và dấu đẳng thức có được khi các a_i cùng dấu. Ta dự đoán đích đến là $a = 0; b = -3; c = 0$.

Quay lại với bài toán.

Ta có:

$|8 + 2b| \le |4 + a + b + c| + |4 + b - a - c| \le 2$. Suy ra $|4 + b| \le 1$.

Lại có: $|-1 - b| \le \left|-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}a - \dfrac{1}{2}b - c\right| + \left|-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}a - \dfrac{1}{2}b + c\right| \le 2$.

Vấn đề ở đây là ta tìm được giá trị của b.

Bây giờ nhận thấy $3 \le |4 + b| + |-1 - b| \le 1 + 2 = 3$.

Vậy thì dấu bằng xảy ra ở tất cả các bất đẳng thức trên là

$$b = -3; a = c = 0.$$

Đảo lại, khi $a = 0; b = -3; c = 0$ thì $f(x) = 4x^3 - 3x$.

Đặt $x = \cos\alpha$ với $\alpha \in [0; \pi]$ ta có$f(x) = \cos 3\alpha$.

Suy ra $|f(x)| = |\cos 3\alpha| \le 1$.

Cách 3.

Do xem xét trên đoạn $[-1; 1]$ nên ta cần quan tâm đến giá trị lớn nhất của hàm số $|f(x)|$ để việc đánh giá dưới đây được thuận lợi.

Quay lại bài toán

Giả sử tồn tại các số a, b, c thỏa mãn giả thiết bài toán và đặt

$M = \max\limits_{x \in [-1;1]} |f(x)|$. Ta có

$|f(1)| = |4 + a + b + c|; |f(-1)| = |-4 + a - b + c|;$

$\left|f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right| = \left|\dfrac{1}{2} + \dfrac{a}{4} + \dfrac{b}{2} + c\right|; \left|f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right| = \left|-\dfrac{1}{2} + \dfrac{a}{4} - \dfrac{b}{2} + c\right|.$

Với cách đặt ở trên, ta suy ra

$$6M \geq |f(1)| + |f(-1)| + \left|2f\left(\frac{1}{2}\right)\right| + \left|2f\left(-\frac{1}{2}\right)\right|$$
$$\geq \left|f(1) - f(-1) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(-\frac{1}{2}\right)\right| = 6$$

Do đó $M \geq 1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$|f(1)| = |f(-1)| = \left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|f\left(-\frac{1}{2}\right)\right| = M = 1$ đồng thời $f(1); -f(-1); -f\left(\frac{1}{2}\right); f\left(-\frac{1}{2}\right)$ đôi một có tích không âm.

Bài toán 2.3 (Đề nghị Olympic 30/4 năm 2003)**.** Tìm $a, b, c \in \mathbb{R}$ để $\underset{x\in[-1;1]}{max} \left|x^3 + ax^2 + bx + c\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải. Xét các luân điểm của đa thức bậc 3 là:

$\overline{x_0} = \cos 0 = 1$; $\overline{x_1} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\overline{x_2} = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$;

$\overline{x_3} = \cos\pi = -1$.

Đặt $f(x) = \left|x^3 + ax^2 + bx + c\right|$ và $M = \underset{x\in[-1;1]}{max} f(x)$.

Ta có: $f(1) = |1 + a + b + c|$; $f(-1) = |1 - a + b - c|$;

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left|\frac{1}{8} + \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c\right|$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left|\frac{1}{8} - \frac{a}{4} + \frac{b}{2} - c\right|$.

Khi đó $f(1) + f(-1) \geq |2 + 2b|$; $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) \geq \left|\frac{1}{4} + b\right|$.

Suy ra $f(1) + f(-1) + 2\left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right)\right] \geq \frac{3}{2}$.

Theo cách đặt ở trên thì

$f(1) + f(-1) + 2\left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right)\right] \leq 6M \Rightarrow 6M \geq \frac{3}{2} \Rightarrow M \geq \frac{1}{4}$

. .

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{8} + \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{a}{4} + \frac{b}{2} - c\right) \geq 0 \\ (1 + a + b + c)(1 - a + b - c) \geq 0 \\ (2 + 2b)\left(-\frac{1}{2} - 2b\right) \geq 0 \\ f(1) = f(-1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = M = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{3}{4} \\ c = 0 \end{cases}.$$

Vậy $\max\limits_{x\in[-1;1]} \left|x^3 + ax^2 + bx + c\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\dfrac{1}{4}$ khi $a = 0; b = -\dfrac{3}{4}; c = 0.$

2.3 Ước lượng, giá trị cực trị của đa thức

Trong phần này ta xét một số bài toán cực trị đặc biệt sinh bởi lớp hàm $\sin x$ và $\cos x$.

Bài toán 2.4. Cho nhị thức $f(x) = ax + b$ thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{1 - x^2}|ax + b| \le 1, \forall x \in [-1, 1].$$

Chứng minh rằng khi đó ta luôn có $|a| \le 2$.

Lời giải. Thay $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ thì ta có

$$|a\frac{1}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}}| \le 1. \tag{2.1}$$

Lại thay $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ thì ta có $| - a\dfrac{1}{2} + \dfrac{b}{\sqrt{2}}| \le 1.$

Cộng hai bất đẳng thức này lại và sử dụng bất đẳng thức giá trị tuyệt đối ta thu được

$$|a| = |a\frac{1}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}}| - \big(- a\frac{1}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}}\big) \le |a\frac{1}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}}| + | - a\frac{1}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}}| \le 2,$$

điều phải chứng minh.

Bài toán 2.5. Cho nhị thức $f(x) = ax + b$ thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{1 - x^2}|ax + b| \le 1, \forall x \in [-1, 1].$$

Chứng minh rằng $|f(x)| \le 2, \forall x \in [-1, 1]$.

Lời giải. Nhận xét rằng, từ tính chất của giá trị tuyệt đối, không mất tính tổng quát ta có thể coi $b \ge 0$. Do $x \in [-1, 1]$ nên cũng có thể coi $a \ge 0$.

Từ giả thiết $x \in [-1, 1]$ và theo (2.1), ta được

$|f(x)| \le |a| + |b| = a + b \le a + b\sqrt{2} \le 2.$

Vậy $|f(x)| \le 2$, điều phải chứng minh

Bài toán 2.6. Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn

$$|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-1, 1].$$

1. Chứng minh rằng $|a| \leq 2$.
2. Chứng minh rằng $|2ax + b| \leq 4, \forall x \in [-1, 1]$.
3. Chứng minh rằng $|cx^2 + bx + a| \leq 2, \forall x \in [-1, 1]$.

Lời giải. Ta xét điều kiện $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-1, 1]$ ở các nút nội suy $-1, 0, 1$.

Ta có

$$\begin{aligned} &f(-1) = a - b + c, \\ &f(0) = c, \\ &f(1) = a + b + c, \end{aligned}$$

do đó $a = \dfrac{f(1) + f(-1) - 2f(0)}{2}, b = \dfrac{f(1) - f(-1)}{2}, c = f(0)$.

1. $|a| = |\dfrac{f(1) + f(-1) - 2f(0)}{2}| \leq \dfrac{|f(1)| + |f(-1)| + 2|f(0)|}{2} \leq 2.$
2.
$$\begin{aligned} &|2ax + b| = \left|(f(1) + f(-1) - 2f(0))x + \frac{f(1) - f(-1)}{2}\right| \\ &= \left|f(1)(x + \frac{1}{2}) + f(-1)(x - \frac{1}{2}) - 2f(0)x\right|, \\ &\leq |x + \frac{1}{2}| + |x - \frac{1}{2}| + 2|x| \leq 4, \forall x \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

3. Tương tự $|cx^2+bx+a| = |f(0)x^2+\dfrac{f(1) - f(-1)}{2}x+\dfrac{f(1) + f(-1) - 2f(0)}{2}|$

$$= \left|f(0)(x^2-1)+\frac{f(1)}{2}|x+1|+\frac{f(-1)}{2}|-x+1|\right| \leq |x^2-1|+\frac{1}{2}|x+1|+\frac{1}{2}|x-1|$$

$$= 1 - x^2 + \frac{1}{2}(x + 1) + \frac{1}{2}(1 - x) = 2 - x^2 \leq 2, \forall x \in [-1, 1].$$

Tiếp theo, ta phát biểu phương pháp chung, dựa vào nút nội suy Chebyshes, để chứng minh công thức ước lượng tổng quát.

Bài toán 2.7 (Tổng quát hóa)**.** 1. Cho đa thức $P_{n-1}(x)$ bậc $\leq n-1$ với hệ số bậc cao nhất a_0 thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{1-x^2}|P_{n-1}(x)| \leq 1, \forall x \in [-1,1].$$

Chứng minh rằng $|a_0| \leq 2^{n-1}$.

2. Cho đa thức $P_{n-1}(x)$ bậc $\leq n-1$ với hệ số bậc cao nhất a_0 thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{1-x^2}|P_{n-1}(x)| \leq 1, \forall x \in [-1,1].$$

Khi đó $|P_{n-1}(x)| \leq n, \forall x \in [-1,1]$.

Lời giải. 1. Ta viết đa thức đã cho dưới dạng nội suy Lagrange theo các nút nội suy $x_j = cos\dfrac{2j-1}{2n}\pi$ là các nghiệm của đa thức Chebyshevb $T_n(x)$.

Trong công thức nội suy, ta có thể chọn luôn $\omega(x) = T_n(x)$ (chỉ sai khác hằng số nhân). Do đó đa thức cơ sở ứng với nút x_j sẽ bằng

$$\begin{aligned}\frac{T_n(x)}{(x-x_j)T_n'(x_j)} &= \frac{T_n(x)\sqrt{1-x_j^2}}{(x-x_j)n\sin(n\arccos(x_j))}\\ &= \frac{1}{n}(-1)^{j-1}\sqrt{1-x_j^2}\frac{T_n(x)}{(x-x_j)}.\end{aligned}$$

Từ đó

$$P_{n-1}(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\sqrt{1-x_j^2}P_{n-1}(x_j)\frac{T_n(x)}{x-x_j}.$$

Suy ra

$$a_0 = \frac{2^{n-1}}{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\sqrt{1-x_j^2}P_{n-1}(x_j).$$

Vậy nên

$$|a_0| \leq \frac{2^{n-1}}{n}\sum_{j=1}^{n}|\sqrt{1-x_j^2}P_{n-1}(x_j)| \leq \frac{2^{n-1}}{n}.n = 2^{n-1}.$$

2. Với các x_j được chọn như ở bài toán trên thì do hàm số $\cos x$ nghịch biến trong $(0, \pi)$ nên ta có

$$-1 < x_n < x_{n-1} < \cdots < x_2 < x_1 < 1.$$

Nếu $x_1 < x < 1$ thì do $x - x_j > 0$ và $T_n(x)$ có dấu không đổi trên $(x_1, 1]$ nên

$$|P_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big|\sqrt{1-x_j^2}P_{n-1}(x_j)\Big|\frac{|T_n(x)|}{|x-x_j|} \leq \frac{1}{n}\Big|\sum_{j=1}^{n}\frac{T_n(x)}{(x-x_j)}\Big|. \quad (2.2)$$

Mặt khác

$$T_n(x) = 2^{n-1}\prod_{j=1}^{n}(x - x_j),$$

nên ta có

$$T_n'(x) = 2^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{j=1}^{n}(x-x_j)}{x - x_k} = \sum_{j=1}^{n}\frac{T_n(x)}{(x-x_j)}. \quad (2.3)$$

Mà $\dfrac{|T_n'(x)|}{n} = |U_n(x)| \leq n$, nên từ (2.2)và (2.3)suy ra

$$|P_{n-1}(x)| \leq n \ \ \forall x \in (x_1, 1].$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $|P_{n-1}(x)| \leq n \ \ \forall x \in [-1, x_n)$.

Xét $x_n \leq x \leq x_1$.

Khi đó $\sqrt{1-x^2} \geq \sqrt{1-x_1^2} = \sin(\arccos x_1) = \sin\dfrac{\pi}{2n}$.

Do $1 \geq \dfrac{\sin x}{x} \geq \dfrac{2}{\pi}$ với mọi $x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ nên

$$\sin\frac{\pi}{2n} \geq \frac{\pi}{2n}.\frac{2}{\pi} = \frac{1}{n},$$

và

$$\sqrt{1-x^2} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow |P_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{\frac{1}{n}} = n.$$

Tóm lại ta đã chứng minh được rằng $|P_{n-1}(x)| \leq n$ với mọi $x \in [-1, 1]$.

Bài toán 2.8. Cho đa thức lượng giác

$$P(t) = a_1 \sin t + a_2 \sin 2t + \cdots + a_n \sin(nt),$$

thỏa mãn điều kiện

$$|P(t)| \leq 1 \ \ \forall t \in \mathbb{R}\{\ldots, 2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots\}.$$

Chứng minh rằng

$$\left|\frac{P(t)}{\sin t}\right| \leq n \ \ \forall t \in \mathbb{R}\{\ldots, 2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots\}.$$

Lời giải. Nhận xét rằng $\left|\dfrac{P(t)}{\sin t}\right| = P_{n-1}(\cos t)$ với $P_{n-1}(x)$ là đa thức dạng

$$b_0 + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots. + b_n \sin nx, \qquad (b_n \neq 0).$$

Đặt $\cos t = x$. Khi đó $|x| \leq 1$ và

$$P(t) = \sin t P_{n-1}(\cos t) = \sqrt{1 - x^2} P_{n-1}(x).$$

Nhận xét rằng $P(x)$ thỏa mãn các điều kiện của bài toán trên, nên

$$|P_{n-1}(x)| \leq n \ \ \forall x \in [-1, 1].$$

Do đó

$$\left|\frac{P(t)}{\sin t}\right| \leq n, \ \ \forall t \in \mathbb{R}\{\ldots, 2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots\}.$$

Bài toán 2.9. Cho đa thức lượng giác

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} (a_j \cos jx + b_j \sin jx)$$

thỏa mãn điều kiện $|P(x) \leq 1|$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng $P'(x) \leq n$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Cho trước x_0 tùy ý. Do

$$\cos(x_0 - x) - \cos(x_0 + x) = 2 \sin x_0 \sin x,$$

$$\sin(x_0 + x) - \sin(x_0 - x) = 2 \cos x_0 \sin x,$$

nên,

$$g(x) = \frac{P(x_0 + x) - P(x_0 - x)}{2} = \sum_{j=0}^{n} \sin(jx).$$

Suy ra

$$g'(x) = \frac{P'(x_0 + x) + P'(x_0 - x)}{2},$$

và $g'(0) = P'(x_0)$. Ta chứng minh rằng $|g'(0)| \leq n$. Thật vậy, $g(x)$ là đa thức lượng giác chứa thuần hàm số sin như trong bài toán 2.8 và

$$|g(x)| = \Big|\frac{P(x_0 + x) - P(x_0 - x)}{2}\Big| \leq \frac{|P(x_0 + x)| + |P(x_0 - x)|}{2} \leq 1,$$

nên theo kết quả bài toán 2.8, thì

$$\Big|\frac{g(x)}{\sin x}\Big| \leq n \ \forall x \notin \{\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots\}.$$

Nhưng $g(0) = 0$ và

$$\Big|\frac{g(x) - g(0)}{x - 0}.\frac{x}{\sin x}\Big| \leq n,$$

nên khi $x \to 0$ thì do $\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} \to g'(0)$ và $\dfrac{x}{\sin x} \to 1$ ta thu được $|g'(0)| \leq n$.

Từ đó ta có $|P(x_0)| \leq n$. Nhưng x_0 được chọn tùy ý nên suy ra $|P(x)| \leq n$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.10 (Định lí Berstein - Markov). Cho đa thức $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, thỏa mãn điều kiện $|P_n(x)| \leq 1, \forall x \in [-1, 1]$.

Chứng minh rằng $|P_n'(x)| \leq n^2, \forall x \in [-1, 1]$.

Lời giải. . Đặt $x = \cos\alpha$. Khi đó theo giả thiết thì $|P_n(\cos\alpha)| \leq 1$. Mà $P_n(\cos\alpha)$ có dạng

$$P_n(\cos\alpha) = \sum_{j=0}^{n} (a_j \cos j\alpha + b_j \sin j\alpha),$$

nên ta có thể áp dụng kết quả bài toán 2.7. Ta được

$$|\sin\alpha.P_n'(\cos\alpha)| \leq n \Rightarrow \sqrt{1 - x^2}|\frac{P_n'(x)}{n}| \leq 1.$$

Cũng theo bài toán 2.7 thì ta có $|\dfrac{P_n'(x)}{n}| \leq n$. Suy ra $|P_n'(x)| \leq n^2$.

Bài toán 2.11 (Vô địch CHLB Đức, 1970)**.** Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{abc + bcd + cda + dab}{4}} \leq \sqrt{\frac{ab + bc + cd + da + ac + bd}{6}}.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $0 < a \leq b \leq c \leq d$. Xét đa thức

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)(x-a)(x-c)(x-d) \\ &= x^4 - (a+b+c+d)x^3 + (ab+bc+cd+da+ac+bd)x^2 \\ &\quad - (abc+bcd+cda+dab)x + abcd. \end{aligned}$$

Suy ra $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 0$.

Ta có $f(x)$ liên tục và có đạo hàm với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ nên theo định lí Lagrange tồn tại $x_1 \in (a, b), x_2 \in (b, c), x_3 \in (a, c)$ sao cho

$$f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}; f'(x_2) = \frac{f(c) - f(b)}{c - b}; f'(x_3) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

Suy ra

$$f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = 0$$

nên x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 3(a+b+c+d)x^2 + 2(ab+bc+cd+da+ac+bd)x \\ &\quad - (abc+bcd+cda+dab) \\ &= 4(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3). \end{aligned}$$

Theo định lí Viet, ta có

$$\begin{aligned} x_1x_2x_3 &= \frac{1}{4}(abc+bcd+cda+dab) \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= \frac{1}{2}(ab+bc+cd+da+ac+bd). \end{aligned}$$

Do $x_1 \in (a, b), x_2 \in (b, c), x_3 \in (a, c)$ mà a, b, c, d dương nên x_1, x_2, x_3 cũng dương.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{1}{2}(ab+bc+cd+da+ac+bd) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \geq 3\sqrt[3]{(x_1x_2x_3)^2}$$

$$= 3\sqrt[3]{\frac{(abc + bcd + cda + dab)^2}{16}}.$$

Suy ra

$$\sqrt[3]{\frac{abc + bcd + cda + dab}{4}} \leq \sqrt{\frac{ab + bc + cd + da + ac + bd}{6}}.$$

Bài HSGQG, 1996 cũng có cách giải tương tự:

Bài toán 2.12 (HSGQG, 1996)**.** Cho $a, b, c, d \geq 0$ thỏa mãn

$$2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + abc + abd + acd + bcd = 16.$$

Chứng minh rằng

$$a + b + c + d \geq \frac{2}{3}(ab + ac + ad + bc + bd + cd).$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $0 < a \leq b \leq c \leq d$. Xét đa thức

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)(x-a)(x-c)(x-d) \\ &= x^4 - (a+b+c+d)x^3 + (ab+bc+cd+da+ac+bd)x^2 \\ &\quad - (abc+bcd+cda+dab)x + abcd. \end{aligned}$$

Suy ra $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 0$.

Theo định lí Rolle thì tồn tại 3 số dương x, y, z sao cho

$$\begin{cases} a + b + c + d = \frac{4}{3}(x + y + z) \\ ab + ac + ad + bc + bd + cd = 2(xy + yz + zx) \\ abc + abd + acd + bcd = 4xyz. \end{cases}$$

Như vậy bất đẳng thức cần phải chứng minh trở thành bất đẳng thức theo ba biến x, y, z và cần chứng minh:$x + y + z \geq xy + yz + zx$. mọi x, y, z dương

Từ giả thiết ta suy ra $xy + yz + zx + xyz = 4$. Ta đặt

$$x = \frac{2p}{q+r}, y = \frac{2q}{r+p}, z = \frac{2r}{p+q}, (p, q, r > 0, (p+q)(q+r)(r+p) \neq 0).$$

Khi đó, ta cần chứng minh

$$\frac{p}{q+r}+\frac{q}{r+p}+\frac{r}{p+q}$$
$$\geq 2[\frac{pq}{(q+r)(r+p)}+\frac{qr}{(r+p)(p+q)}+\frac{rp}{(r+q)(p+q)}]$$

Tương đương với bất đẳng thức

$$p^3+q^3+r^3+3pqr \geq pq(p+q)+pr(q+r)+rp(r+p)$$

(đúng theo bất đẳng thức Schur).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$ hoặc $x=y=2, z=0$ và các hoán vị.

Bài toán 2.13 (Vô địch Czech-Polish-Slovak, 2002)**.** Cho n là số nguyên dương chẵn, xét các đa thức $P(x)$ với hệ số thực

$P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+1$ sao cho $P(x)$ có ít nhất một nghiệm thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2$.

Lời giải. Nếu $n=2$ thì $P(x)=x^2+a_1x+1$ có nghiệm $T=a_1^2\geq 4$.

Nếu $n>2$, gọi x_0 là nghiệm thực của $P(x)$ thì $x_0\neq 0$

và $-\sum_{i=1}^{n-1}a_ix_0^i=x_0^n+1>0$. Do đó các số $a_i, i=\overline{1,n-1}$ không đồng thời bằng 0 . Ta có

$$T=\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2\geq\frac{(\sum_{i=1}^{n-1}a_ix_0^i)^2}{\sum_{i=1}^{n-1}x_0^{2i}}=\frac{(x_0^n+1)^2}{\sum_{i=1}^{n-1}x_0^{2i}}.$$

Do $x_0^n+1\geq x_0^{n-2i}+x_0^{2i}$ với mọi $i=1,2,\ldots,\dfrac{n}{2}-1$ nên cộng các bất đẳng thức này, ta được

$$\frac{n-2}{4}(x_0^n+1)\geq\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}x_i^{2i}.$$

Suy ra

$$\frac{n-2}{4}(x_0^n+1)^2\geq\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}x_i^{2i}+\frac{1}{4}(x_0^n-1)^2,$$

hay

$$\frac{n-2}{4}(x_0^n+1)^2\geq\sum_{i=1}^{n-1}x_0^{2i}.$$

Do đó $T \geq \dfrac{4}{n-1}$.

Xét đa thức $P(x) = x^n - \dfrac{2}{n-1}(x^{n-1} + \ldots + x) + 1$ có một nghiệm bằng 1 và $T = \dfrac{4}{n-1}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $\dfrac{4}{n-1}$.

Bài toán 2.14 (HSGQG, 2013)**.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3y^4z^3}{(x^4+y^4)(xy+z^2)^3} + \frac{y^3z^4x^3}{(y^4+z^4)(yz+x^2)^3} + \frac{z^3x^4y^3}{(z^4+x^4)(zx+y^2)^3},$$

trong đó x, y, z là các số thực dương thay đổi tùy ý.

Lời giải. Trước hết ta chứng minh

$$\forall x, y > 0 \text{ thì } x^4 + y^4 \geq \frac{2}{3}xy(x^2+y^2+xy), \tag{2.4}$$

$$(x+y)^3 \geq 4xy(x+y). \tag{2.5}$$

Thật vậy,

$(2.4) \Leftrightarrow (x^2-y^2)^2 + 2(x^2-y^2)^2 + 2xy(2xy - x^2 - y^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x^2-y^2)^2 + 2(x-y)^2[(x+y)^2 - xy] \geq 0$

$\Leftrightarrow (x^2-y^2)^2 + 2(x-y)^2(x^2+y^2+xy) \geq 0$

(là bất đẳng thức đúng với mọi x, y > 0).

$(2.5) \Leftrightarrow (x+y)[(x+y)^2 - 4xy] \geq 0$

$\Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2 \geq 0$ (là bất đẳng thức đúng với mọi x, y > 0).

Áp dụng các bất đẳng thức (2.4) và (2.5) ta được

$$\frac{x^3y^4z^3}{(x^4+y^4)(xy+z^2)^3} \leq \frac{3x^3y^4z^3}{8xy(x^2+y^2+xy)xyz^2(xy+z^2)}$$

$$= \frac{3xy^2z}{8(x^2+y^2+xy)(xy+z^2)} = \frac{3xy^2z}{8[x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+xy(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\leq \frac{3xy^2z}{8}\frac{1}{4}\Big[\frac{1}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2} + \frac{1}{xy(x^2+y^2+z^2)}\Big]$$

$= \dfrac{3}{32}\Big(\dfrac{xy^2z}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2} + \dfrac{yz}{x^2+y^2+z^2}\Big).$
Đánh giá tương tự, ta thu được

$$P \le \frac{3}{32}\Big(\frac{xyz(x+y+z)}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2} + \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}\Big). \tag{2.6}$$

Mặt khác,
$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \ge xyz(x+y+z), \forall x,y,z>0;$
$x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx, \forall x,y,z>0.$
Do đó từ (2.6) suy ra $P \le \dfrac{3}{16}$.
Vậy $\max P = \dfrac{3}{16}$ khi $x=y=z$.

Chương 3

Một số dạng toán liên quan

Trong chương này ta xét các đề thi liên quan đến các dạng đa thức với hệ số nguyên, hệ số hữu tỷ và phân thức hữu tỷ.

3.1 Đa thức với hệ số nguyên và đa thức nhận giá trị nguyên

Định nghĩa 3.1. Đa thức $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ là đa thức hệ số nguyên (kí hiệu $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$) nếu tất cả các hệ số $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ đều là các số nguyên.

Định nghĩa 3.2. Đa thức

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

nhận giá trị nguyên với mọi x nguyên được gọi là đa thức nhận giá trị nguyên.

Hiển nhiên rằng mọi đa thức với hệ số nguyên là đa thức nhận giá trị nguyên. Tuy nhiên, điều ngược lại nói chung không đúng. Chẳng hạn, đa thức $P(x) = \dfrac{x(x+1)}{2}$ là đa thức nguyên vì tích của 2 số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho 2.

Định lý 3.1. Đa thức $P(x) = \binom{x}{n}$ là một đa thức nhận giá trị nguyên.

(trong đó $\binom{x}{n} = \dfrac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{n!}$.)

Lời giải. Ta có tích của n số nguyên liên tiếp thì chia hết cho $n!$. Giả sử $x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$ là tích của n số nguyên liên tiếp $(x \geq n)$.

Khi đó ta có $\dfrac{x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}{n!} = \binom{x}{n}$ là một số nguyên.

Do đó định lí 3.1 được giải quyết.

Định lý 3.2. Đa thức $P(x)$ bậc n nhận giá trị nguyên (tại mọi điểm nguyên) khi và chỉ khi $P(x)$ nhận giá trị nguyên tại $n+1$ điểm nguyên liên tiếp.

Lời giải. Điều kiện cần là hiển nhiên.

Điều kiện đủ. Sử dụng công thức khai triển Abel với

$$x_i = a + i(i = 1, 2, \dots, n),$$

ta được

$$P(x) = b_0+b_1(x-a-1)+b_2(x-a-1)(x-a-2)+\cdots+b_n(x-a-1)\cdots(x-a-n).$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&P(a+1) \in \mathbb{Z} \Rightarrow b_0 \in \mathbb{Z},\\
&P(a+2) \in \mathbb{Z} \Rightarrow b_0 + b_1 \in \mathbb{Z},\\
&P(a+3) \in \mathbb{Z} \Rightarrow b_0 + 2b_1 + 2! \cdot b_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow b_2! \cdot b_2 \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Tương tự

$$\begin{aligned}
&P(a+n) \in \mathbb{Z} \Rightarrow (n-1)!b_n \in \mathbb{Z},\\
&P(a) \in \mathbb{Z} \Rightarrow n! \cdot b_n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Từ đó ta có $k! \cdot b_k \in \mathbb{Z}(k = 0, 1, 2, \dots, n)$. Do đó ta có điều phải chứng minh (vì tích của n số nguyên liên tiếp thì chia hết cho $k!$).

Chú ý. Thực ra, ta chỉ cần điều kiện $P(x)$ là đa thức nhận giá trị nguyên khi $P(x)$ nhận các giá trị nguyên tại $x = 0, 1, 2, \dots, n$ là đủ.

Định lý 3.3. Chứng minh rằng

1) Mọi đa thức bậc n đều có thể biểu diễn được dưới dạng

$$P_n(x) = b_0 + b_1\binom{x}{1} + \dots + b_{n-1}\binom{x}{n-1} + b_n\binom{x}{1}. \qquad (3.1)$$

2) Đa thức $P_n(x)$ là đa thức nhận giá trị nguyên khi và chỉ khi tất cả các hệ số $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ là các số nguyên.

Lời giải. 1) Chứng minh bằng quy nạp. Giả sử rằng đa thức $P(x)$ bậc n có dạng

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Khi $n = 1$ thì $P_1(x) = a_1 x + a_0 = a_0 + a_1\binom{x}{1}$. Chọn $b_0 = a_0, b_1 = a_1$ ta nhận được (3.1)đúng.

Giả sử (3.1) đúng với mọi $n \leq k$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} P_{k+1}(x) &= a_{k+1}x^{k+1} + a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0 \\ &= a_{k+1}(k+1)!\binom{x}{k+1} + R_k(x), \quad \deg R_k(x) \leq k. \end{aligned}$$

Theo giả thiết quy nạp thì

$$R_k(x) = b_0 + b_1\binom{x}{1} + \ldots + b_{k-1}\binom{x}{k-1} + b_k\binom{x}{k}.$$

Do đó

$$P_{k+1}(x) = b_0 + b_1\binom{x}{1} + \ldots + b_k\binom{x}{k} + b_{k+1}\binom{x}{k+1},$$

với $b_{k+1} = a_{k+1}(k+1)!$. Do đó (3.1) đúng với $k+1$.

2) Điều kiện cần. Giả sử $P_n(x)$ là đa thức nhận giá trị nguyên với $x \in \mathbb{Z}$. Khi đó

$$\begin{aligned} &P(0) = b_0, \\ &P(1) = b_0 + b_1\binom{1}{1}, \\ &P(2) = b_0 + b_1\binom{2}{1} + b_2\binom{2}{2}, \\ &\vdots \\ &P(n) = b_0 + b_1\binom{n}{1} + b_2\binom{n}{2} + \ldots + b_n\binom{n}{n}. \end{aligned}$$

Vì $P(0), P(1), \ldots, P(n) \in \mathbb{Z}$ và các hệ số của khai triển nhị thức Newton đều nguyên nên $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{Z}$.

Điều kiện đủ. Giả sử $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ là các số nguyên.

Khi đó $P(0), P(1), \ldots, P(n)$ cũng là các số nguyên nên theo định lí 3.2 thì $P_n(x)$ là các đa thức nhận giá trị nguyên.

Định lý 3.4. Nếu đa thức $P(x)$ bậc n là đa thức nhận giá trị nguyên thì đa thức $Q(x) = n!P(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Lời giải. Theo định lí 3.3 $P(x)$ là đa thức bậc n nhận giá trị nguyên nên ta có biểu diễn

$$P_n(x) = b_0+b_1\binom{x}{1}+\ldots+b_{n-1}\binom{x}{n-1}+b_n\binom{n}{n}, b_j \in \mathbb{Z}(j = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Do đó

$$n!P(x) = n!b_0 + n!b_1\binom{x}{1} + \ldots + n!b_{n-1}\binom{x}{n-1} + n!b_n\binom{n}{n},$$

$$\text{với } b_j \in \mathbb{Z}\ (j = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Ta có

$$b_k k!\binom{x}{k} \in \mathbb{Z}.$$

Vì vậy $n!P(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Định lý 3.5. Cho đa thức $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ thuộc $\mathbb{Z}[x]$, $a_n \neq 0$, a, b là hai số nguyên khác nhau. Khi đó $f(a) - f(b) \vdots (a - b)$.

Chứng minh.Ta có

$$f(a) = a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_1 a + a_0,$$

$$f(b) = a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0,$$

$$f(a-b) = a_n(a^n - b^n) + a_{n-1}\left(a^{n-1} - b^{n-1}\right) + \cdots + a_1(a-b) \vdots (a-b).$$

Bài toán 3.1 (Đề thi HSGQG 2000, bảng A ngày thứ nhất)**.** Cho đa thức $P(x) = x^3 + 153x^2 - 111x + 38$.

a) Chứng minh rằng trong đoạn$[1; 3^{2000}]$ tồn tại ít nhất 9 số nguyên dương a sao cho $P(a)$ chia hết cho 3^{2000}.

b) Hỏi trong đoạn $[1; 3^{2000}]$ có tất cả bao nhiêu số nguyên dương a mà $P(a)$ chia hết cho 3^{2000}?

Lời giải. Ta chứng minh bổ đề dưới đây:

Bổ đề 3.1. Xét đa thức sau với a, b, c là các số nguyên

$$P(x) = x^3 + 9ax^2 + (9b - 3)x + c. \tag{3.2}$$

Nếu số nguyên t có dạng $t = u + 3^{n-2}v$ với các số nguyên u, v, n mà $u \equiv \pmod 9$ thì với mỗi $n \geq 5$ có

$$P(t) \equiv P(u) + 3^n v(2a + b) \pmod{3^{n+1}}. \tag{3.3}$$

Chứng minh. Ta có

$$t^2 = u^2 + 2 \cdot 3^{n-2}uv + 3^{2n-4}v^2$$
$$t^3 = u^3 + 3^{n-1}u^2v + 3^{2n-3}uv^2 + 3^{3n-6}v^3.$$

Với $n \geq 5$ thì $2n - 4 \geq n + 1$ và $3n - 6 > n + 1$ nên khi thay t^2, t^3 vào (3.2) được

$$P(t) \equiv P(u) + 3^{n-1}v(u^2 - 1) + 3^n v(2au + b) \pmod{3^{n+1}}.$$

Do $u^2 \equiv 1 \pmod 9$ nên có

$$P(t) \equiv P(u) + 3^n v(2a + b) \pmod{3^{n+1}}.$$

$x^3 + 9ax^2 + (9b-3)x + c.$ ■

Bổ đề 3.2. Xét đa thức $P(x)$ có dạng (3.2) với các số nguyên a, b, c thỏa mãn $2a + b \not\equiv 0 \pmod 3$. Nếu có số $u \equiv 1 \pmod 9$ sao cho $P(u) \equiv 0 \pmod{3^5}$ thì với mỗi $n \geq 5$ tồn tại số $t_n \equiv 1 \pmod 9$ thỏa mãn

$$P(t_n) \equiv 0 \pmod{3^n}. \tag{3.4}$$

Chứng minh. Bằng quy nạp theo n. Với $n = 5$ đúng.

Giả sử (3.4) đúng với n ($n \geq 5$), lúc đó tồn tại số $t_n \equiv 1 \pmod 9$ sao cho $P(t_n) = 3^n d$ với số nguyên d. Xét số $t_{n+1} = t_n + 3^{n-2}v$ với số nguyên v là nghiệm của phương trình đồng dư

$$(2a+b)v \equiv -d \pmod 3. \tag{3.5}$$

Theo giả thiết $2a + b \not\equiv 0 \pmod 3$ nên phương trình đồng dư này có nghiệm v duy nhất $\pmod 3$. Vì $t_n \equiv 1 \pmod 9$ nên $t_{n+1} \equiv 1 \pmod 3$. Theo bổ đề 3.1, ta có

$$P(t_{n+1}) \equiv P(t_n) + 3^n.v(2a+b) \pmod{3^{n+1}}$$

hay

$$P(t_{n+1}) \equiv 3^n(d + v(2a+b)) \pmod{3^{n+1}}.$$

Do (3.5) nên $P(t_{n+1}) \equiv 0 \pmod{3^{n+1}}$ nghĩa là (3.4) cũng đúng với $n+1$. Vậy bổ đề 3.2 được chứng minh. ■

Trở lại bài toán với

$$P(x) = x^3 + 153x^2 - 11x + 38. \tag{3.6}$$

Ta có $a = 17, b = -12, c = 38$ và $2a + b = 22 \equiv 1 \pmod 3$.

Với $n = 5$ ta chọn $t_5 = 19 \equiv 1 \pmod 9$ thì $P(19) = 19.13.3^5$ chia hết cho 3^5. Lúc đó các điều kiện của Bổ đề 3.1 và Bổ đề 3.2 đều thỏa mãn nên với $n = 1999$ thì tồn tại $t \equiv 1 \pmod 9$ hay $t = 1 + 9p$ để $P(t) = 3^{1999}d$ với p, d là các số nguyên.

Theo chứng minh của Bổ đề 3.2, ta lấy $t_v = 1 + 9p + 3^{1997}v$
với $v \equiv -d \pmod 3$ thì $P(t_v) \equiv 3^{1999}(d+v) \pmod{3^{2000}}$
$\Rightarrow P(t_v) \equiv 0 \pmod{3^{2000}}$.

Gọi $t_{v_0} = 1 + 9p + 3^{1997}v_0$ với $v_0 \equiv -d \pmod 3$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $P(t_{v_0} \equiv 0 \pmod{2000})$ thì $t_v = (t_{v_0} + 3^{1998}m$ với $m = 0, 1, \ldots, 8$ (trong đó $v_m = v_0 + 3m$) là tất cả các số thỏa mãn $v_m \equiv -d \pmod 3$ và $P(v_m) \equiv 0 \pmod{3^{2000}}$ mà $1 \leq t_{v_m} \leq 3^{2000}$.

Để tìm mọi nghiệm u thuộc $[1, 3^{2000}]$ mà $P(u) \equiv 0 \pmod{3^{2000}}$ ta cần bổ sung bổ đề sau.

Bổ đề 3.3. Với mọi số nguyên $n \geq 5$ và $P(x)$ có dạng (3.6), nếu t, u là hai nghiệm của phương trình $P(x) \equiv 0 \pmod{3^n}$ thì $t \equiv u \pmod{3^{n-2}}$.

Chứng minh. Bằng quy nạp theo n. Với $n = 5$ có tất cả 9 nghiệm $t_i (i = 1, 2, \ldots, 9) \pmod{3^3}$ là

$$19, 46, 73, 100, 127, 154, 181, 208, 235$$

thỏa mãn $P(t_i) \equiv 0 \pmod{3^5}$.

Giả sử Bổ đề 3.3 đúng với $n \geq 5$. Xét hai nghiệm t và u của phương trình $P(x) \equiv 0 \pmod{3^{n+1}}$. Theo giả thiết quy nạp thì $P(t) \equiv P(u) \equiv 0 \pmod{3^n}$ và $t = u + 3^{n-2}v$ với số nguyên v nào đó. Vì $P(u) \equiv 0 \pmod{3^5}$ nên $u \equiv 1 \pmod 9$. Theo Bổ đề 3.1 thì $P(t) \equiv P(u) + 3^n v \pmod{3^{n+1}}$. Vì $P(t)$ và $P(u)$ đều chia hết cho 3^{n+1} nên v phải chia hết cho 3 hay $v = 3v'$, do đó $t = u + 3^{n-1}v'$, nghĩa là Bổ đề 3.3 đúng với mọi $n \geq 5$. ■

Trở lại với bài toán trên. Theo kết quả phần trên, phương trình $P(x) \equiv 0 \pmod{3^{2000}}$ có 9 nghiệm nguyên dương $t_{v_m} (m = 0, 1, 2, \ldots, 8)$ mà $P(t_{v_m}) \equiv 0 \pmod{3^{2000}}$. Giả sử u là một nghiệm của $P(x) \equiv 0 \pmod{3^{2000}}$ thì theo Bổ đề 3.3, số u phải thỏa mãn $u \equiv t_{v_m} \pmod{3^{2000}}$ mà trong đoạn $[1, 3^{2000}]$ chỉ có đúng 9 số t_{v_m} như đã nêu trên thỏa mãn $P(t_{v_m}) \equiv 0 \pmod{3^{2000}}$.

Bài toán 3.2 (Kì thi chọn Đội tuyển HSG TP Hà Nội, 2011-2012)**.** Cho đa thức $P(x) = 4x^2 + 5x + 1 - a$ với $x \in \mathbb{R}$ và a là số nguyên cho trước. Ta định nghĩa $P_2(x) = P(P(x)) = 4(P(x))^2 + 5P(x) + 1 - a; P_{k+1}(x) = P(P_k(x))$ với k nguyên dương khác 1. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên n sao cho $n = P_{2011}(n)$ thì a là một số chính phương lẻ.

$P(x_{2011}) = x_1$

$P(P_{k+1}(x)) = P(\underbrace{P \ldots P}_{k}(x)))$

Lời giải. Giả sử n là số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán. Xét dãy (x_n) sao cho $x_1 = n, x_2 = P(x_1), x_3 = P(x_2), \ldots, x_{2011} = P(x_{2010})$. Từ giả thiết ta có $x_1 = P(x_{2011})$. Vì $P(x)$ là đa thức với hệ số nguyên mà $x_1 \in \mathbb{Z}$ suy ra $x_1, x_2, \ldots, x_{2011}$ là số nguyên. Giả sử $x_i \neq x_j$ $(\forall i \neq j, j = 1, \ldots, n)$, ta có

$$P(x_2) - P(x_1) \vdots (x_2 - x_1) \Leftrightarrow (x_3 - x_2) \vdots (x_2 - x_1).$$

Chứng minh tương tự

$$(x_4 - x_3) \vdots (x_3 - x_2),$$

$$
\begin{aligned}
&(x_{2011} - x_{2010}) \vdots (x_{2010} - x_{2009}),\\
&(x_1 - x_{2011}) \vdots (x_{2011} - x_{2010}),\\
&(x_2 - x_1) \vdots (x_1 - x_{2011}).
\end{aligned}
$$

Suy ra

$$|x_2 - x_1| = |x_3 - x_2| = \ldots = |x_1 - x_{2011}| = k.$$

Trong 2011 số $(x_2 - x_1), (x_3 - x_2), \ldots, (x_1 - x_{2011})$ sẽ có m số bằng k và $2011 - m$ số bằng $-k$. Nên

$$0 = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_1 - x_{2011}) = mk - (2011 - m)k,$$

suy ra

$$2m - 2011 = 0 \quad (k \neq 0) \text{ (vô lí)}.$$

Vậy $k = 0$ và $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2011}$ nên $x_1 = P(x_1)$ với $n = 4n^2+5n+1-a$ và $a = (2n+1)^2$. Ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.3. Chứng minh rằng đa thức

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{19}{6}x + 3$$

là một đa thức nhận giá trị nguyên.

Lời giải. Ta viết $f(x)$ dưới dạng

$$f(x) = 2\binom{x}{3} - 3\binom{x}{2} + \binom{x}{1} + 3.$$

Do đó theo định lí 3.3 thì $f(x)$ là đa thức nhận giá trị nguyên.

Bài toán 3.4. Xác định các số dương A, B, C sao cho đa thức

$$f(x) = Ax^5 + Bx^3 + Cx$$

là đa thức nhận giá trị nguyên với $f(3)$ là nhỏ nhất.

Lời giải. Do A, B, C dương và $f(x) \in \mathbb{Z}$ khi $x \in \mathbb{Z}$ nên $f(1), f(2), f(3)$ là những số nguyên dương. Ta có

$$f(1) = A + B + C,$$

$$f(2) = 32A + 8B + 2C,$$
$$f(3) = 243A + 27B + 3C.$$

Suy ra

$$f(2) - f(1) = 30A + 6B. \tag{1}$$

Giải hệ với ẩn là A, B, C ta thu được

$$A = f(3) - 4f(2) + 5f(1), \tag{2}$$
$$B = -f(3) + 8f(2) - 13f(1), \tag{3}$$
$$C = f(3) - 9f(2) + 45f(1). \tag{4}$$

Vì $f(1)$ nguyên dương nên $f(1) \geq 1$, từ (1) và do A, B dương, $f(2), f(1)$ là nguyên dương nên $f(2) - f(1) \geq 1$. Suy ra

$$f(2) \geq 2f(1) + 1 \geq 3. \qquad (5).$$

Từ (2) suy ra

$$f(3) = 120A + 4f(2) - 5f(1) = 120A + 4\big(f(2) - 2f(1)\big) + 3f(1).$$

Suy ra

$$f(3) > 4\Big(f(2) - 2f(1)\Big) + 3f(1) = 4 + 3 = 7$$

và vì vậy $f(3) \geq 8$.

Với $f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 8$ thì từ (1), (2), (3) ta thu được

$$A = \frac{1}{120}, B = \frac{1}{8}, C = \frac{13}{15}. \tag{6}$$

Ta chứng tỏ với các giá trị A, B, C ở (5) thì $f(x)$ nguyên khi x nguyên. Thật vậy, ta có

$$f(x) = \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{8}x^3 + \frac{13}{15}x = \binom{x+2}{5} + \binom{x+1}{3}$$

là một đa thức nhận giá trị nguyên.

Bài toán 3.5 (HSGQG năm 1994, bảng A ngày thứ hai)**.** Hỏi có tồn tại hay không các đa thức $P(x), Q(x), R(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

Có

1) Tất cả các hệ số của $P(x), Q(x), R(x)$ đều là các số nguyên dương?

2) $T(x) = \big(x^2 - 3x + 3\big)P(x) = \big(\frac{x^2}{20} - \frac{x}{15} + \frac{1}{12}\big)Q(x)$?

Lời giải. Viết lại đẳng thức của đề bài dưới dạng

$$60T(x) = 60\big(x^2 - 3x + 3\big)P(x)(3x^2 - 4x + 5)Q(x). \qquad (3.7)$$

Do các đa thức $60\big(x^2-3x+3\big)$ và $(3x^2-4x+5)$ vô nghiệm nên chúng nguyên tố cùng nhau. Vì vậy, từ (3.7) suy ra tồn tại các đa thức $P(x), Q(x), T(x)$ thỏa mãn điều kiện của đề bài khi và chỉ khi tồn tại đa thức $S(x)$ sao cho

$$(3x^2-4x+5)S(x), 60(x^2-3x+3)S(x),\ \text{và } (3x^2-4x+5)(x^2-3x+3)S(x)$$

đều là các đa thức với hệ số nguyên dương.

Có thể chọn $S(x)$ trong các đa thức dạng $(x+1)^n$ như sau.

1) Chọn n sao cho $P_1(x) = (3x^2 - 4x + 5)(x+1)^n$ là đa thức với hệ số nguyên dương. Ta có

$$\begin{aligned}P_1(x) &= 3x^n + 2 + (3C_n^1 - 4)x^n + 1+ \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1}(3C^k + 1_n - 4C_n^k + 5C_n^k - 1)x^n - k + 1 + (5C_n^n - 1 - 4)x + 5.\end{aligned}$$

Ta có $3C_n^1 - 4$ và $5C_n^n - 1 - 4$ nguyên dương với mọi $n \geq 2$; hệ số của $x^n - k + 1$ nguyên dương ($k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$) khi và chỉ khi $3C^k + 1_n - 4C_n^k + 5C_n^k - 1 > 0$ ($k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$). Từ đó ta có

$$12k^2 - 2(5n-1)k + 3n^2 - n - 4 > 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n-1). \qquad (3.8)$$

Điều kiện để có (3.8) là $\Delta_k = 11n^2 - 2n - 49 > 0$. Điều này xảy ra với mọi $n \geq 3$.

Như vậy, với mọi $n \geq 3$ thì $P_1(x)$ là đa thức với hệ số nguyên dương.

2) Bằng cách tương tự ta cũng có với mọi $n \geq 5$ thì $Q_1(x) = (x^2 - 3x + 3)(x+1)^n$ là đa thức với hệ sô nguyên dương. Từ các kết quả của 1) và 2), suy ra $S(x) = (x+1)^{18}$ thỏa mãn điều kiện đặt ra ở trên.

Vậy câu trả lời của bài toán là tồn tại các đa thức $P(x), Q(x), T(x)$. Chẳng hạn là

$$\begin{aligned}
P(x) &= (3x^2 - 4x + 5)(x+1)^{18}, \\
Q(x) &= 60(x^2 - 3x + 3)(x+1)^{18}, \\
T(x) &= (x^2 - 3x + 3)(3x^2 - 4x + 5)(x+1)^{18}.
\end{aligned}$$

Bài toán 3.6 (IMO, 1974)**.** Cho $P(x)$ là đa thức không phải hằng số, có hệ số nguyên, bậc d và cho n là số lượng tất cả các nghiệm nguyên khác 0 của phương trình $P^2(x) = 1$. Chứng minh rằng $n \leq d + 2$.

Lời giải.

Bổ đề 3.4. Cho đa thức $f(x)$ với hệ số nguyên. Chứng minh rằng nếu phương trình $f(x) = 1$ có nhiều hơn 3 nghiệm nguyên phân biệt thì phương trình $f(x) = -1$ không có nghiệm nguyên.

Chứng minh. Giả sử a là một nghiệm nguyên của phương trình $f(x) = -1$. Khi đó $f(a) = -1$.

Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là 4 nghiệm nguyên phân biệt của phương trình $f(x) = 1$ thì

$$f(x) - 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)g(x),$$

Suy ra $f(a) - 1 = -2 = (a - x_1)(a - x_2)(a - x_3)(a - x_4)g(a)$,

trong đó $a - x_1, a - x_2, a - x_3, a - x_4$ là 4 số nguyên phân biệt.

Nhưng -2 không thể phân tích được là tích của 4 số nguyên khác nhau. Vậy phương trình $f(x) = -1$ không thể có nghiệm nguyên.

■

Trở lại bài toán, giả sử $n > d + 2$. Với $d \geq 4$, ta nhận được $n \geq 7$.

Do $d \geq 4$ nên phương trình $P(x) = 1$ có ít nhất 4 nghiệm nguyên. Theo bổ đề 3.4 thì phương trình $P(x) = -1$ không thể có nghiệm nguyên và vì $P(x)$ có bậc d nên $n \leq d$, suy ra $d + 2 < n \leq d$ (vô lí).

Suy ra $d \leq 3$. Với $d = 1$ hoặc $d = 2$ ta có $n \leq 2d \leq d + 2$.

Với $d = 3$. Ta có $n \leq d < d + 2$.

Vậy ta được điều phải chứng minh.

3.2 Đa thức với hệ số hữu tỷ và phân thức hữu tỷ

Định nghĩa 3.3. Đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ được gọi là đa thức có hệ số hữu tỉ nếu các hệ số $a_i \in \mathbb{Q}$ (với mọi i = 0, 1, ..., n).

Bài toán 3.7. Cho đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ thỏa mãn điều kiện $P(x) \in \mathbb{Q}$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ (hay $a_k \in \mathbb{Q}$ với mọi $k \in 0, \cdots, n$).

Chứng minh. Khai triển Abel với đa thức P(x) ta được
$P(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x(x-1) + \cdots + b_n x(x-1)\ldots(x-n+1)$
Lần lượt cho x = 0, 1, 2, ..., n-1 ta được các $b_i \in \mathbb{Q}$ suy ra $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$.

Bài toán 3.8. Tìm đa thức có hệ số hữu tỉ có bậc nhỏ nhất và khác 0 nhận $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ là nghiệm.

Lời giải. Ta có: $Q(x) = x - \sqrt{2} - \sqrt[3]{3}$ nhận $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ làm nghiệm.
Xét đa thức $R(x) = Q(x)\left[\left(x-\sqrt{2}\right)^2 + \left(x-\sqrt{2}\right)\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right]$
$= \left(x - \sqrt{2} - \sqrt[3]{3}\right)\left[\left(x-\sqrt{2}\right)^2 + \left(x-\sqrt{2}\right)\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right]$
$\Leftrightarrow R(x) = \left(x-\sqrt{2}\right)^3 - 3 = \left(x^3+6x-3\right) - \sqrt{2}\left(3x^2+2\right)$.
Khi đó $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ làm nghiệm của R(x). Xét đa thức
$f(x) = R(x)\left[\left(x^3+6x-3\right) + \sqrt{2}\left(3x^2+2\right)\right] = \left(x^3+6x-3\right)^2 - 2\left(3x^2+2\right)^2$
$\Leftrightarrow f(x) = x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1$.
Bằng phương pháp hệ số bất định, ta dễ chứng minh f(x) bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$ và từ đó bất khả quy trên $\mathbb{Q}[x]$ nên f(x) xác định như trên là đa thức cần tìm.

Bài toán 3.9. Tìm đa thức f (x) không đồng nhất 0 với hệ số nguyên nhận số $\alpha = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ làm nghiệm.

Lời giải. Ta có $\alpha = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \Rightarrow \alpha^3 = \left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)^3 = 6 + 6\alpha \Leftrightarrow$ $\alpha^3 + 6\alpha + 6 = 0$. Rõ ràng α là nghiệm của đa thức $f(x) = x^3 + 6x + 6$. Vậy f (x) là đa thức cần tìm.

Bài toán 3.10. Cho đa thức f(x) thỏa mãn điều kiện:
$f\left(x^2+x+3\right) + 2f\left(x^2-3x+5\right) = 6x^2 - 10x + 17$. Tính f(2014).

Lời giải. Nhận xét $x^2+x+3=x^2-3x+5 \Leftrightarrow x=1-x$ nên thay x bởi 1 – x ta được $f\left(x^2-3x+5\right)+2f\left(x^2+x+3\right)=6x^2-2x+13$
$\Leftrightarrow -2f\left(x^2-3x+5\right)-4f\left(x^2+x+3\right)=-12x^2+4x-26$
Mà $f\left(x^2+x+3\right)+2f\left(x^2-3x+5\right)=6x^2-10x+17$ nên
$-3f\left(x^2+x+3\right)=-6x^2-6x-9 \Leftrightarrow f\left(x^2+x+3\right)=2x^2+2x+3=2\left(x^2+x+3\right)-3$
Ta có $x^2+x+3=2014 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{8045}{4} \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{8045}}{2}$
Với $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{8045}}{2}$ ta có f(2014) = 4025

Bài toán 3.11. Chứng minh rằng: Không tồn tại đa thức bậc 2 với hệ số nguyên nhận $\sqrt[3]{3}$ làm nghiệm.
Lời giải. Giả sử có đa thức bậc 2 với hệ số nguyên $P\left(x\right)=ax^2+bx+c$ nhận $\sqrt[3]{3}$ làm nghiệm. Như vậy a khác 0 và ta có:
$\mathrm{a}\sqrt[3]{9}+\mathrm{b}\sqrt[3]{3}+\mathrm{c}=0 \Rightarrow \left(\mathrm{a}\sqrt[3]{9}+\mathrm{b}\sqrt[3]{3}+\mathrm{c}\right)\left(\mathrm{a}\sqrt[3]{3}-\mathrm{b}\right)=0$
$\Rightarrow 3\mathrm{a}^2-\mathrm{bc}-\left(\mathrm{b}^2-\mathrm{ac}\right)\sqrt[3]{3}=0\,(1)$. Do a, b, c nguyên và $\sqrt[3]{3}$ là số vô tỷ nên từ (1) suy ra :

$$\begin{cases} 3\mathrm{a}^2-\mathrm{bc}=0\,(2) \\ \mathrm{b}^2-\mathrm{ac}=0\,(3) \end{cases}$$

Nhân hai vế của (2) với a va (3) với b rồi trừ từng vế, ta có :

$$3\mathrm{a}^3-\mathrm{b}^3=0 \Rightarrow \mathrm{b}=\mathrm{a}\sqrt[3]{3}\,(4)$$

Do b nguyên nên (4) chỉ xảy ra khi a = b = 0 (và do đó c = 0). Điều này mâu thuẫn với giả thiết: a khác 0

Bài toán 3.12 (HSGQG năm 1997, bảng A ngày thứ hai).
a) Tìm tất cả các đa thức $f(x)$ với hệ số hữu tỉ có bậc nhỏ nhất mà

$$f(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})=3+\sqrt[3]{3}.$$

b) Tồn tại hay không đa thức $f(x)$ với hệ số nguyên mà

$$f(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})=3+\sqrt[3]{3}?$$

Lời giải. Trước hết ta chứng minh nhận xét sau: Nếu $u, v \in \mathbb{Q}$ mà $s = u\sqrt[3]{3} + v\sqrt[3]{9} \in \mathbb{Q}$ thì $u = v = 0$.

Thật vậy, nếu $s = u\sqrt[3]{3} + v\sqrt[3]{9} \in \mathbb{Q}$ thì $s^2 \in \mathbb{Q}$ nên $vs^2 - u^2s - 6uv^2 = a \in \mathbb{Q}$. Từ đó

$$(3v^3 - u^3)\sqrt[3]{3} = vs^2 - u^2s - 6uv^2 = a \in \mathbb{Q}.$$

Nếu $3v^3 - u^3 = 0$ thì $\sqrt[3]{3} = \dfrac{u}{v} \in \mathbb{Q}$, mâu thuẫn, nên $3v^3 - u^3 \neq 0$. Do đó $\sqrt[3]{3} = \dfrac{a}{3v^3 - u^3} \in \mathbb{Q}$ cũng mâu thuẫn. Vậy nhận xét được chứng minh.

a) Xét $f(x) = ax + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$ thỏa mãn bài toán, từ nhận xét trên ta có

$$(a - 1)\sqrt[3]{3} + a\sqrt[3]{9} = 3 - b \in \mathbb{Q}$$

nên $a - 1 = 0$ và $a = 0$, mâu thuẫn.

Xét $f(x)$ là đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$. Khi đó nếu $f(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) = 3 + \sqrt[3]{3}$ thì $(a + b)\sqrt[3]{9} + (3a + b)\sqrt[3]{3} + 6a + c = 3 + \sqrt[3]{3}$. Theo nhận xét trên thì $a + b = 0, 3a + b = 1$, và $6a + c = 3$. Suy ra nghiệm duy nhất (a, b, c) là $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{2}, 0\right)$.

Vậy chỉ có duy nhất đa thức bậc hai thoả mãn là $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2}$. Đó là đa thức bậc nhỏ nhất thỏa mãn đề bài.

b) Đặt $\alpha = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$ ta có $\alpha^3 = 9\alpha + 12$. Vậy đa thức $g(x) = x^3 - 9x + 12$ nhận α là nghiệm. Nếu $f(x)$ là đa thức hệ số nguyên thỏa mãn đề bài thì $f(x) = g(x)h(x) + r(x)$, ở đó $h(x), r(x)$ là đa thức hệ số nguyên với bậc của $r(x)$ nhỏ hơn 3. Vì $g(\alpha) = 0$ nên $r(\alpha) = f(\alpha) = 3 + \sqrt[3]{3}$, theo câu a) điều này không xảy ra.

Vậy không tồn tại đa thức hệ số nguyên $f(x)$ mà $f(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}) = 3+\sqrt[3]{3}$.

Tương tự với hướng giải quyết bài trên đó là bài VMO 2017 sau:

Bài toán 3.13 (HSGQG, 2017)**.** Tồn tại hay không đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên thỏa mãn

$$P(1 + \sqrt[3]{2}) = 1 + \sqrt[3]{2} \text{ và } P(1 + \sqrt{5}) = 2 + 3\sqrt{5}.$$

$P(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$
$P(\sqrt{5}) = 1+3\sqrt{5}$

Lời giải. Giả sử đa thức $P(x)$ nói trên tồn tại.

Đặt $Q(x) = P(1+x) - 1$ thì $Q(x)$ cũng là đa thức với hệ số nguyên. Từ giả thiết, ta có $Q(\sqrt[3]{2}) = P(1+\sqrt[3]{2}) - 1 = \sqrt[3]{2}$ và

$$Q(\sqrt{5}) = P(1+\sqrt{5}) - 1 = 1 + 3\sqrt{5}.$$

Như vậy, đa thức $Q(x) - x$ có một nghiệm vô tỉ là $\sqrt[3]{2}$. Do $x^3 - 2$ là đa thức bậc nhỏ nhất có hệ số nguyên nhận $\sqrt[3]{2}$ làm nghiệm nên $Q(x) - x$ phải là bội của đa thức này. Nói cách khác , tồn tại đa thức $R(x)$ có các hệ số đều nguyên sao cho

$$Q(x) - x = (x^3 - 2)R(x).$$

Do $R(x)$ có các hệ số đều nguyên nên $R(\sqrt{5})$ có dạng $a + b\sqrt{5}$ với $a, b \in ZZ$. Thay $x = \sqrt{5}$ vào đẳng thức trên ta được,

$$1 + 3\sqrt{5} = (5\sqrt{5} - 2)(a + b\sqrt{5}) = 25b - 2a + (5a - 2b)\sqrt{5},$$

suy ra

$$\begin{cases} 5a - 2b = 3 \\ 25b - 2a = 1 \end{cases}$$

Tuy nhiên, không có cặp số nguyên nào thỏa mãn hệ phương trình trên.

Chứng tỏ không tồn tại đa thức $P(x)$.

Bài toán 3.14 (Đề thi HSGQG năm 1990, bảng A ngày thứ nhất)**.** Giả sử $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ là đa thức với các hệ số thực, có $a_0 \neq 0$ và thỏa mãn đẳng thức sau với mọi số thực x

$$f(x)f(2x^2) = f(2x^3 + x). \tag{3.9}$$

Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ không có nghiệm số thực.

Lời giải. Ta chứng tỏ rằng $x_0 = 0$ không là nghiệm của $f(x)$, nghĩa là $a_n = f(0) \neq 0$. Gọi k là chỉ số lớn nhất sao cho $a_k \neq 0$. Lúc đó vế trái của (3.9) có dạng

$$\begin{aligned} f(x)f(2x^2) &= (a_0x^n + \ldots + a_kx^{n-k})(a_0 2^n x^{2n} + \ldots + a_k 2^{n-k} x^{2(n-k)}) \\ &= a_0^2.2^n.x^{3n} + \ldots + a_k^2.2^{n-k}x^{3(n-k)}. \end{aligned}$$

Vế phải của (3.9) có dạng

$$\begin{aligned} f(2x^3+x) &= a_0(2x^3+x)^n + \ldots + a_k(2x^3+x)^{n-k} \\ &= a_0 2^n x^{3n} + \ldots + a_k x^{n-k}. \end{aligned}$$

So sánh hai vế của (3.9) ta có $a_k^2.2^{n-k}x^{3(n-k)} = a_k x^{n-k}$ với mọi x, suy ra $n = k$ hay $a_n = a_k \neq 0$.

Giả sử $f(x)$ có nghiệm thực là $x_0 \neq 0$. Xét dãy số

$$x_{n+1} = 2x_n^3 + x_n \text{ với mọi } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Nếu $x_0 > 0$ thì $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$. Nếu $x_0 < 0$ thì $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots$. Từ hệ thức (3.9) suy ra nếu $x_0 \neq 0$ mà $f(x_0) = 0$ thì $f(x_k) = 0$ với mọi k, nghĩa là $f(x)$ bậc n không đồng nhất bằng 0 mà có vô số nghiệm thực khác nhau, dẫn đến mâu thuẫn. Vậy đa thức $f(x)$ không có nghiệm thực.

Chú ý. Tồn tại đa thức $f(x) = x^2 + 1$ có tính chất trên.

Bài toán 3.15 (Đề thi HSGQG năm 1991, bảng B ngày thứ nhất)**.** Cho biết đa thức $P(x) = x^{10} - 10x^9 + 39x^8 + a_7x^7 + \ldots + a_1x + a_0$, với các giá trị nhất định của $a_0, a_1, \ldots, a_7$, có 10 nghiệm số thực. Chứng minh rằng tất cả các nghiệm của $P(x)$ đều nằm trong khoảng từ $-2,5$ đến $4,5$.

Lời giải. Giả sử $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}$ là 10 nghiệm của đa thức $P(x)$. Theo định lí Viet, ta có

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{10} x_i = 10, \quad \sum_{i,j=1}^{10} x_i x_j = 39. \tag{3.10}$$

Từ đó

$$100 = \Big(\sum_{i=1}^{10} x_i\Big)^2 = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 + 2.39 \quad \text{suy ra} \quad \Big(\sum_{i=1}^{10} x_i\Big)^2 = 22. \tag{3.11}$$

Mặt khác

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i-1)^2 = \sum_{i=1}^{10}(x_i^2 - 2x_i + 1) = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{10} x_i + 10.$$

Từ đó và (3.10), (3.11) cho ta đẳng thức

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i-1)^2 = 22-20+10 = 12.$$

Vậy với mỗi i $(1 \le i \le 10)$ thì $(x_i-1)^2 \le 12 < 12+\frac{1}{4} = (\frac{7}{2})^2$.

- Nếu $x_i - 1 \ge 0$ thì $x_i < 1+3,5 = 4,5$.
- Nếu $x_i - 1 < 0$ thì $1 - x_i < 3,5 \Rightarrow x_i > -2.5$.

Bài toán 3.16 (Đề thi HSGQG năm 1992, bảng A ngày thứ hai)**.** Cho đa thức $P(x) = 1+x^2+x^9+x^{n_1}+\ldots+x^{n_s}+x^{1992}$ với $n_1, n_2, ..., n_s$ là các số tự nhiên cho trước thỏa mãn $9 < n_1 < \ldots < n_s < 1992$. Chứng minh rằng nghiệm của đa thức $P(x)$ (nếu có) không thể lớn hơn $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải. Với mỗi $x \ge 0$ thì $P(x) \ge 1 > 0$.

Với mỗi $x < 0, x \ne -1$ ta có

$$\begin{aligned} P(x) &\ge 1+x+x^3+x^5+x^7+x^9+\ldots+x^{2k+1}+\ldots+x^{1991} \\ &= 1+\frac{x(x-x^{996})}{1-x^2} = \frac{1-x^2+x-x^{997}}{1-x^2}. \end{aligned}$$

Mà với $x \in \Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\Big)$ thì $1-x^2 > 0, -x^{997} > 0$ và $1-x^2+x > 0$, nên suy ra $P(x) > 0$ với $x \in \Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\Big)$. Vậy $P(x) > 0$ với mọi $x > \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Bài toán 3.17 (Đề thi HSGQG năm 1998, bảng A ngày thứ hai)**.** Tìm tất cả các số nguyên dương n để có đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn

$$P(x^{1998}-x^{-1998}) = x^n - x^{-n} \text{ với mọi số thực } x \ne 0.$$

Lời giải. Ta chứng minh cho trường hợp tổng quát khi thay 1998 bởi số nguyên dương k. Giả sử đa thức bậc m

$$P(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, \quad a_m \ne 0 \tag{3.12}$$

thỏa mãn $P(x^k - x^{-k}) = x^n - x^{-n}, (x \neq 0)$ hay

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{a_i(x^{2k}-1)^i}{x^{ki}} = \frac{x^{2n}-1}{x^n} \tag{3.13}$$

$i = n$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} a_i x^n (x^{2k}-1)^i x^{k(m-i)} = x^{km}(x^{2n}-1) \tag{3.14}$$

đúng với mọi số thực $x \neq 0$. Vế trái có bậc $n + 2km$, vế phải có bậc $2n + km$. Vậy $n = km$. Ta chứng tỏ m phải lẻ. Nếu m chẵn, đặt $y = x^k$, khi đó

$$(3.13) \Leftrightarrow P(y - \frac{1}{y}) = y^m - \frac{1}{y^m}. \tag{3.15}$$

Đẳng thức này đúng với mọi số thực $y \neq 0$. Ở (3.15) cho $y = 2$ thì $P(\frac{3}{2}) = 2^m - \frac{1}{2^m} > 0$, cho $y = \frac{-1}{2}$ thì $P(\frac{3}{2}) = 2^m - \frac{1}{2^m} < 0$ (mâu thuẫn). Vậy m lẻ.

$\frac{1}{2^n} - 2^n$

Đảo lại, ta sẽ chứng minh nếu $n = km$ và m lẻ thì tồn tại đa thức bậc m là $P_m(x)$ có dạng (3.12) thỏa mãn

$$P_m(y - \frac{1}{y}) = y^m - \frac{1}{y^m}; (y \neq 0) \tag{3.16}$$

(đặt $y = x^k$ thì (3.16) $\Rightarrow$ (3.13)). Chứng minh quy nạp theo m. Với $m = 1$ thì $P_1(y) = y$ thỏa mãn (3.16). Với $m = 3$thì $P_3(y) = y^3 + 3y$ thỏa mãn (3.16).

Giả sử đã có $P_1(x), P_3(x), \ldots, P_m(x)$ thỏa mãn (3.16). Đặt

$$P_{m+2}(x) = (x^2 + 2)P_m(x) - P_{m-2}(x).$$

Khi đó theo giả thiết quy nạp và $y \neq 0$ có

$$\begin{aligned} P_{m+2}(y - \frac{1}{y}) &= [(y - \frac{1}{y})^2 + 2]P_m(y - \frac{1}{y}) - P_{m-2}(y - \frac{1}{y}) \\ &= (y^2 + \frac{1}{y^2})(y^m - \frac{1}{y^m}) - (y^{m-2} - \frac{1}{y^{m-2}}) \\ &= y^{m+2} - \frac{1}{y^{m+2}}, \quad (y \neq 0). \end{aligned}$$

Đa thức $P(x)$ (theo cách đặt trên) thỏa mãn

$$P_m(x^k - \frac{1}{x^k}) = x^{km} - \frac{1}{x^{km}} = x^n - \frac{1}{x^n}, \quad (x \neq 0).$$

Vậy $n = 1998m$ với m lẻ.

Bài toán 3.18 (Đề thi HSGQG năm 2000, bảng A ngày thứ hai)**.** Với mỗi đa thức hệ số thực (x), kí hiệu A_p là tập hợp các số thực x sao cho $P(x) = 0$. Tìm số phần tử nhiều nhất có thể có của A_p khi $P(x)$ thuộc tập hợp các đa thức hệ số thực vơi bậc ít nhất là 1 và thỏa mãn đẳng thức

$$P(x^2 - 1) = P(x)P(-x) \text{với mọi giá trị thực } x. \tag{3.17}$$

Lời giải. Kí hiệu T là tập hợp các đa thức $P(x)$ hệ số thực với bậc ít nhất là 1 và thỏa mãn $P(x^2 - 1) = P(x)P(-x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta có các nhận xét sau

Nhận xét 3.1. Các đa thức $(\psi_1 - x); (\psi_2 - x)$ và $x(x+1)$ thuộc T, trong đó ψ_1 và ψ_2 $(\psi_1 < \psi_2)$ là các nghiệm của phương trình $t^2 - t - 1 = 0$.

Nhận xét 3.2. Nếu $P(x) = Q(x).G(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}; P(x), Q(x) \in T$ và $G(x)$ không phải là đa thức hằng thì $G(x) \in T$.

Chứng minh. Ta có $P(x)P(-x) = P(x^2 - 1) = Q(x^2 - 1)G(x^2 - 1) = Q(x)Q(-x)G(x^2-1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, và $P(x)P(-x) = Q(x)Q(-x)G(x)G(-x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Từ hai đẳng thức trên suy ra $G(x) \in T$. ■

Đặt $T^* = \{P(x) \in T | A_p \neq \emptyset\}$. Ta có

Nhận xét 3.3. Giả sử $P(x) \in T^*$. Khi đó, nếu $a \in A_p$ thì $a \in \{0, -1, \psi_1, \psi_2\}$.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo $\deg P$ (bậc của $P(x)$).

Với $P(x) \in T^*$ mà $\deg P = 1$, ta có $P(x) \in \{\psi_1 - x, \psi_2 - x\}$. Do đó, Nhận xét 3.3 đúng với mọi $P(x) \in T^*$ mà $\deg P = 1$.

Giả sử Nhận xét 3.3 đúng với mọi $P(x) \in T^*$ mà

$$\deg P < k \quad (k \geq 2). \tag{3.18}$$

Xét $P(x) \in T^*$ mà $\deg P = k$. Giả sử với mỗi $a \in A_p$ đều có $a \notin \{0, -1, \psi_1, \psi_2\}$. Khi đó $a^2 - 1 \in A_p$ (do (3.17)) và $a^2 - 1 > -1$. Gọi x_0 là số bé nhất thuộc tập $A_p \cap (-1; +\infty)$. Ta có

+ Nếu $x_0 > \psi_2$ thì $x_0^2 - x_0 - 1 > 0$. Suy ra $x_1 = x_0^2 - 1 > x_0 > \psi_2$ và $x_1 \in A_p$. Tiếp tục quá trình suy luận này sẽ có một dãy số tăng $(x_n), (n = 0, 1, 2, \ldots)$ được xác định bởi

$$x_{n+1} = x_n^2 - 1 \text{với mọi } n = 0, 1, 2, \ldots$$

mà mọi số hạng của dãy đều thuộc A_p.

$$\text{Điều này mâu thuẫn với tính hữu hạn của } A_p. \tag{3.19}$$

+ Nếu $\psi_2 > x_0 > \psi_1$ thì $x_0^2 - x_0 - 1 < 0$. Suy ra $-1 < x_1 = x_0^2 - 1 < x_0$ và $x_1 \in A_p$.

$$\text{Điều này mâu thuẫn với định nghĩa } x_0. \tag{3.20}$$

+ Nếu $x_0 < \psi_1$ thì $x_2 = x_1^2 - 1 = (x_0^2 - 1)^2 - 1 = x_0^4 - 2x_0^2 > -1$ và $x_2 \in A_p$ (do $x_1 \in A_p$). Suy ra $x_2 \geq x_0$ hay $x_0(x_0 + 1)(x_0^2 - x_0 - 1) \geq 0$. Tuy nhiên điều này không thể xảy ra do

$$-1 < x_0 < \psi_1 < 0 v x_0^2 - x_0 - 1 > 0. \tag{3.21}$$

Từ các kết luận (3.19), (3.20), (3.21) suy ra tồn tại $a_0 \in A_p$, mà $a_0 \in \{0, -1, \psi_1, \psi_2\}$. Ta sẽ chứng minh rằng nếu tồn tại $a \neq a_0$ và $a \in A_p$ thì $a \in \{0, -1, \psi_1, \psi_2\}$. Thật vậy, xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1: $a_0 \in \{0, -1\}$. Khi đó, do $(a_0^2 - 1) \in A_p$ nên $\{0, -1\} \subseteq A_p$. Suy ra, trong trường hợp này, $P(x)$ có dạng

$$P(x) = x(x + 1)Q(x) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}, \tag{3.22}$$

Nếu $\{0, -1\} = A_p$ thì hiển nhiên có điều phải chứng minh.
Nếu $\{0, -1\} \subset A_p$ thì $1 \leq \deg Q(x) < k$. Vì vậy, theo các Nhận xét 3.1, 3.2, có $Q(x) \in T$. Ta xét $a \in A_p \ \{0, -1\}$. Từ (3.22) có $Q(a) = 0$, và do đó $Q(x) \in T^*$, suy ra theo (3.18), $a \in \{0, -1, \psi_1, \psi_2\}$.

Trường hợp 2: $a_0 = \psi_1$ hoặc $(a_0 = \psi_2)$. Khi đó $P(x)$ sẽ có dạng

$$P(x) = (\psi_1 - x)Q(x) \text{ hoặc } (P(x) = (\psi_2 - x)Q(x)) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. \tag{3.23}$$

Nếu $\{\psi_1\} = A_p$ tương ứng ($\{\psi_2\} = A_p$) thì hiển nhiên ta có điều phải chứng minh.

Nếu $\{\psi_1\} \subset A_p$ tương ứng ($\{\psi_2\} \subset A_p$) thì $1 \leq \deg Q(x) < k$. Vì vậy, theo các Nhận xét 3.1, 3.2, ta có $Q(x) \in T$. Xét $a \in A_p$ $\{\psi_1\}$ tương ứng ($a \in A_p$ $\{\psi_2\}$.) Từ (3.23) ta có $Q(a) = 0$, và do đó $Q(x) \in T^*$. Theo (3.18), suy ra $a \in \{0, -1, \psi_1, \psi_2\}$.

Như vậy, Nhận xét 3.3 đúng với mọi $P(x) \in T^*$ mà $\deg P = k$. Theo nguyên lí quy nạp, Nhận xét 3.3 được chứng minh. ■

Từ Nhận xét 3.3 ta có

$$|A_p| \leq 4 \text{ với mọi } P(x) \in T^*. \tag{3.24}$$

Hiển nhiên $|A_p| = 0$ với mọi $P(x) \in T|T^*$. Kết hợp với (3.24) ta được $A_p \leq 4$ với mọi $P(x) \in T$. Hơn thế, có $P(x) = x(x+1)(x^2 - x - 1)$ thì $P(x) \in T$ và $|A_p| = 4$. Suy ra giá trị lớn nhất của $|A_p|$, với $P \in T$, bằng 4.

3.3 Ứng dụng tính chất nghiệm của đa thức

Nói đến nghiệm của đa thức, ta nhớ đến các công thức Cardano nổi tiếng để giải phương trình bậc ba, đến các kết quả về đa thức có nghiệm phức trong việc đơn giản hóa các biểu thức,...Tìm hiểu về nghiệm của đa thức, ta không chỉ dừng lại ở các bài toán đặc thù mà sẽ còn đi khai thác một số ứng dụng đặc biệt của nó vào giải các bài toán hệ phương trình, phương trình nghiệm nguyên, tính giá trị biểu thức, giải một số bài toán số học,...

Bài toán 3.19 (Đề thi HSGQG năm học 2011- 2012, ngày thứ nhất)**.** Cho các cấp số cộng $(a_n), (b_n)$ và các số nguyên $m > 2$. Xét m tam thức bậc hai

$$P_k(x) = x^2 + a_k x + b_k, k = 1, 2, 3, \ldots, m.$$

Chứng minh rằng nếu hai tam thức $P_1(x), P_m(x)$ đều không có nghiệm thực thì tất cả các đa thức còn lại cũng không có nghiệm thực.

Lời giải. Ta chứng minh kết quả sau: Nếu $a_1^2 - 4b_1 < 0, a_m^2 - 4b_m < 0$ thì

$$[\alpha a_1 + (1-\alpha)a_m]^2 - 4[\alpha b_1 + (1-\alpha)b_m] < 0 \text{ với mọi } \alpha \in [0,1].$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}&[\alpha a_1 + (1-\alpha)a_m]^2 - 4[\alpha b_1 + (1-\alpha)b_m]\\ &= \alpha^2(a_1^2 - 4b_1) + (1-\alpha)^2(a_m^2 - 4b_m) + \alpha(1-\alpha)(2a_1a_m - 4(b_1+b_m)).\end{aligned} \tag{3.25}$$

Do $a_1^2 - 4b_1 < 0, a_m^2 - 4b_m < 0$ và $2a_1a_m - 4(b_1+b_m) < 2a_1a_m - a_1^2 - a_m^2 = -(a_1 - a_m)^2 \leq 0$ nên vế phải của (3.25) < 0 và ta có điều phải chứng minh.

Trở lại bài toán, do $P_1(x)$ và $P_m(x)$ không có nghiệm thực nên ta có

$$\delta_1 = a_1^2 - 4b_1 < 0, \delta_m = a_m^2 - 4b_m < 0.$$

Công sai của cấp số cộng (a_n) bằng $\dfrac{a_m - a_1}{m-1}$, công sai của cấp số cộng (b_n) bằng $\dfrac{b_m - b_1}{m-1}$. Do đó với mọi $k = 1, 2, 3, \ldots, m$, ta có

$$a_k = a_1 + (k-1)\frac{a_m - a_1}{m-1} = \frac{m-k}{m-1}a_1 + \frac{k-1}{m-1}a_m.$$

Tương tự,

$$b_k = b_1 + (k-1)\frac{b_m - b_1}{m-1} + \frac{k-1}{m-1}b_m.$$

Bây giờ áp dụng kết quả đã chứng minh ở trên với $\alpha = \dfrac{m-k}{m-1}$, ta có $\delta_k = a_k^2 - 4b_k < 0$, với mọi $k = 1, 2, \ldots, m$, tức là tất cả các đa thức $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_m(x)$ đều không có nghiệm thực.

Bài toán 3.20. Giải hệ phương trình sau với $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là n số thực đôi một khác nhau

$$\begin{cases} a_1^{n-1}x_1 + a_1^{n-1}x_2 + \ldots + a_1^{n-n}x_n + a_1^n = 0\\ a_2^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \ldots + a_2^{n-n}x_n + a_2^n = 0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_n^{n-1}x_1 + a_n^{n-1}x_2 + \ldots + a_n^{n-n}x_n + a_n^n = 0.\end{cases}$$

Lời giải. Xét đa thức $f(u) = u^n + x_1u^{n-1} + \cdots + x_{n-1}u + x_n$, từ hệ trên ta có
$$f(a_1) = f(a_2) = \ldots = f(a_n) = 0.$$
Xét đa thức
$$\begin{aligned} g(u) &= (u - a_1)(u - a_2)(u - a_3)\ldots(u - a_n) \\ &= u^n + A_1u^{n-1} + \ldots + A_{n-1}u + A_n, \end{aligned}$$
trong đó do $g(u)$ có n nghiệm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $\deg g = n$ có hệ số bậc cao nhất bằng 1 nên theo định lý Viet ta có
$$\begin{cases} A_1 = (-1)^1(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \\ A_2 = (-1)^2(a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n = a_1a_2a_3\cdots a_n. \end{cases}$$
Xét đa thức $h(u) = f(u) - g(u) = (x_1 - A_1)u^{n-1} + (x_2 - A_2)u^{n-2} + \cdots + (x_n - A_n)$. Ta có $\deg h \leq n-1$ và $h(u)$ cũng có n nghiệm là $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ phân biệt nên $h(u) \equiv 0$. Do đó ta có các nghiệm của hệ là
$$x_1 = A_1, x_2 = A_2, \ldots x_n = A_n.$$
Vậy nghiệm của hệ là
$$\begin{cases} x_1 = (-1)^1(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \\ x_2 = (-1)^2(a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_1a_2a_3\cdots a_n. \end{cases}$$

Bài toán 3.21. Cho đa thức $P(x)$ bậc bốn có bốn nghiệm dương phân biệt. Chứng minh rằng phương trình sau cũng có bốn nghiệm dương phân biệt
$$\frac{1-4x}{x^2}P(x) + \Big(1 - \frac{1-4x}{x^2}\Big)P'(x) - P''(x) = 0.$$

Lời giải. Ta có $\dfrac{1-4x}{x^2}P(x) + \left(1 - \dfrac{1-4x}{x^2}\right)P'(x) - P''(x) = 0$ tương đương với
$$\frac{1-4x}{x^2}[P(x) - P'(x)] + [P'(x) - P''(x)] = 0.$$

Đặt $Q(x) = P(x) - P'(x)$, suy ra $Q'(x) = P'(x) - P''(x)$ nên ta có $\dfrac{1-4x}{x^2}Q(x) + Q'(x) = 0$.

Bổ đề 3.5. Nếu đa thức bậc bốn có 4 nghiệm dương phân biệt thì đa thức $Q(x) = P(x) - P'(x)$ cũng có 4 nghiệm dương phân biệt.

Chứng minh. Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử hệ số bậc cao nhất của $P(x)$ là 1 và ta có phân tích

$$P(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_3),$$

với $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ là các nghiệm dương của đa thức này. Theo định lý Viet thì $a, b, c, d > 0$ và ta cũng có

$$P'(x) = \sum (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Giả sử $Q(x) = x^4 - a_1x^3 + b_1x^2 - c_1x + c + d$ thì

$$Q(x_1) = P(x_1) - P'(x_1) = -(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)$$
$$Q(x_2) = P(x_2) - P'(x_2) = -(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4).$$

Suy ra $Q(x_1)Q(x_2) = (x_1-x_2)^2(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_3)(x_2-x_4) < 0$, tức là tồn tại $y_1 \in [x_1; x_2]$ là nghiệm dương của $Q(x)$.

Tương tự ta cũng thấy rằng $Q(x)$ có thêm hai nghiệm dương nữa là $y_2 \in [x_2, x_3], y_3 \in [x_3, x_4]$. Gọi nghiệm dương thứ tư là y_4 thì

$$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_4 = c + d > 0.$$

Do ta đã có $y_1, y_2, y_3, y_4 > 0$ nên $y_4 > 0$. Bổ đề được chứng minh. ■

Đặt $R(x) = t^4 Q\left(\frac{1}{t}\right)$ cũng là một đa thức bậc 4 và có 4 nghiệm dương phân biệt như $Q(x)$. Theo nhận xét trên thì đa thức sau cũng có 4 nghiệm dương phân biệt

$$R(t) - R'(t) = t^4Q(\frac{1}{t}) - 4t^3Q(\frac{1}{t}) - t^4(\frac{-1}{t^2})Q'(\frac{1}{t}) = (t^4 - 4t^3)Q(\frac{1}{t}) + t^2Q'(\frac{1}{t}).$$

Tức là phương trình sau có 4 nghiệm dương phân biệt

$$(t^4 - 4t^3)Q\left(\frac{1}{t}\right) + t^2Q'(\frac{1}{t}) = 0.$$

Đặt $\dfrac{1}{t} = x$ thì phương trình sau cũng có 4 nghiệm dương phân biệt

$$\frac{1-4x}{x^2}Q(x) + Q'(x) = 0.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 3.22 (HSGQG, 2009)**.** Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện: với mỗi số nguyên dương $n, a^n + b^n + c^n$ là một số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên p, q, r sao cho a, b, c là ba nghiệm của phương trình $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

Lời giải. Đặt $T_n = a^n + b^n + c^n \in Z, \forall n \geq 1$. Ta chứng minh rằng tồn tại các số nguyên $p = -(a+b+c), q = ab + bc + ca, r = -abc$ sao cho a, b, c là ba nghiệm của phương trình $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

Ta có

$$\begin{aligned}
&T_1 = -p,\\
&T_2 = a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = p^2 - 2q,\\
&T_3 = -p^3 + 3pq - 3r = -pT_2 - qT_1 - rT_0,\\
&\dots\\
&T_n = -pT_{n+2} - qT_{n+1} - rT_n.(1)
\end{aligned}$$

$p = -T_1 \in \mathbb{Z}, T_1, T_2 \in \mathbb{Z}$ suy ra $2q \in Z$.

$2T_3 = -2p(p^2 - 2q) + pq - 6r \in \mathbb{Z}$ nên $6r \in \mathbb{Z}$.

$T_4 = -pT_3 - qT_2 - rT_1 = -p(-p^3 + 3pq - 3r) - q(p^2 - 2q) + pr = p^4 - 4p^2q + 4pr + 2q^2$.

$3T_4 = 3p^4 - 12p^2q + 12pr + 6q^2 = 3p^4 - (6p^2.2q) + (2p.6r) + 6q^2 \in \mathbb{Z}$ suy ra $6q^2 \in \mathbb{Z}$.

Ta chứng minh kết quả sau đây: Nếu x là số thực sao cho $2x$ và $6x^2$ là các số nguyên thì x là số nguyên.

*Chứng minh.*Ta chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử $2x = k$ nguyên, nhưng x không nguyên. Khi đó k là số nguyên lẻ $k = 2m + 1, m \in \mathbb{Z}$.

Suy ra $x = m + \dfrac{1}{2}$, khi đó $6x^2 = 6(m + \dfrac{1}{2})^2 = 6m^2 + 3m + \dfrac{3}{2}$ không nguyên (mâu thuẫn).

Vậy điều giả sử là sai, tức x nguyên.

Trở lại bài toán trên ta có $2q, 6q^2$ nguyên nên q là số nguyên.

Từ $T_3 \in \mathbb{Z}$ suy ra $3r \in \mathbb{Z}$, đặt $r = \dfrac{m}{3}$.

Từ (1) suy ra $rT_n \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 1$ nên $\dfrac{m}{3}T_n \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 1$,

do đó $mT_n \vdots 3, \forall n \geq 1$.

- Nếu $(T_n, 3) = 1$ thì $m \vdots 3$ suy ra $r \in \mathbb{Z}$.
- Nếu $T_n \vdots 3 \forall n$ thì từ $p = -T_1 \vdots 3, T_3 = -p^3 + 3pq - m \in \mathbb{Z}$ mà $p \vdots 3, 3pq \vdots 3$ nên để $T_3 \in \mathbb{Z}$ thì $m \vdots 3$, suy ra $r \in \mathbb{Z}$.

■

KẾT LUẬN

Luận văn "Một số dạng toán về đa thức qua các đề thi Olympic” đã trình bày được những vấn đề sau:

1. Luận văn trình bày hệ thống các định nghĩa, tính chất, dạng toán về đa thức sử dụng giải các bài toán liên quan trong số học, đại số và giải tích.

2. Luận văn đã tập trung tìm hiểu, thu thập các tài liệu và phân loại các đề thi Olympic theo dạng và theo phương pháp giải chúng.

3. Luận văn đã xây dựng được hệ thống các dạng toán liên quan giúp nâng cao hiểu biết về sâu sắc hơn đa thức.

Tài liệu tham khảo

[1] Lê Hải Châu (2003), *Các bài thi Olympic Toán trung học phổ thông Việt Nam (1990-2003)*, NXB Giáo dục.

[2] Nguyễn Văn Mậu (1993), *Đa thức đại số và phân thức hữu tỷ*, NXB Giáo dục.

[3] Nguyễn Văn Mậu (2015), *Nội suy đa thức, định lý và áp dụng*, NXB Giáo dục.

[4] Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Văn Tiến (2010), *Một số chuyên đề đại số bồi dưỡng học sinh giỏi trung học phổ thông*, NXB Giáo dục.

[5] Nguyễn Văn Mậu, Lê Ngọc Lăng, Phạm thế Long, Nguyễn Minh Tuấn (2006), *Các đề thi Olympic Toán sinh viên toàn quốc*, NXB Giáo dục.

[6] Library of Mathematics and Youth Journal (2007), *The Vietnameses Mathematical Olympiad (1990-2006)*, Education Pub. House.

[7] Nguyễn Hữu Điển (2003),*Đa thức và ứng dụng*, NXB Giáo dục.

[8] Vũ Tiến Việt (2017),*Tài liệu ôn tập Olympic toán sinh viên* , NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[9] Tủ sách toán học và tuổi trẻ,*Các bài thi Olympic toán THPT Việt Nam (1990- 2006)*, NXB Giáo dục.