Chuyên đề. Ứng dụng đ.lý Halminton P2

Dạng 5. Tính vết của m.trận

13. Cho A, B là các ma trận vuông cấp 2 thỏa mãn $\det A = \det B = 1$. Chứng minh rằng: $tr(AB) - tr(A).tr(B) + tr(AB^{-1}) = 0$

* $P_B(x) = x^2 - tr(B).x + \det B = x^2 - tr(B).x + 1$

Thay $x = B \Rightarrow B^2 - tr(B).B + I = 0$

Nhân $AB^{-1} \Rightarrow AB^{-1}B^2 - tr(B).AB^{-1}B + AB^{-1} = 0$

$\Rightarrow AB - tr(B).A + AB^{-1} = 0$

* Lấy vết 2 vế $\Rightarrow tr(AB) - tr(B).tr(A) + tr(AB^{-1}) = 0$

14. Cho A, B là các ma trận vuông cấp 3. Chứng minh rằng: $\boxed{tr(AB) = tr(BA)}$

$$tr[(AB - BA)^3] = 3\det(AB - BA)$$

* Đặt $D = AB - BA \Rightarrow tr(D) = 0$
* $P_D(x) = -x^3 + tr(D)x^2 - C_2(D).x + \det D$

$= -x^3 - C_2(D).x + \det D$, với $C_2(D)$ = Tổng các đ.thức con chính cấp 2 của D

Thay $x = D \Rightarrow -D^3 - C_2(D).D + \det D.I = 0$

* Lấy vết 2 vế $\Rightarrow -tr(D^3) - C_2(D).\underline{tr(D)} + \det D.\underline{tr(I)} = 0$

$\Rightarrow -tr(D^3) + 3\det D = 0$

$\Rightarrow tr(D^3) = 3\det D$

Dạng 6. Giải phương trình ma trận

Đlý. Cho $f(x)$ là đa thức và $f(0) = 0$

Nếu λ là GTR của A thì $f(\lambda)$ là GTR của $f(A)$

15. Tìm ma trận cấp hai X thỏa mãn $\underbrace{X^2 + 2X}_{f(X)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. $= B$

* B1. Tìm GTR của $f(X) = B$

$P_B(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3; -1$ $\quad (\lambda - 3)(\lambda + 1)$

* B2. Tìm GTR của X

Gọi t là GTR của X $\Rightarrow f(t) = t^2 + 2t$ là GTR của $f(X) = X^2 + 2X = B$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 + 2t = 3 \\ t^2 + 2t = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1; -3 \\ t = -1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} X \text{ có GTR } t = 1, -1 \\ X \text{ có GTR } t = -3, -1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} P_X(t) = (t-1)(t+1) = t^2 - 1 \\ P_X(t) = (t+3)(t+1) = t^2 + 4t + 3 \end{array}\right.$

TH1. $P_X(t) = t^2 - 1$ $\quad \Rightarrow t^2 + 2t = (\underbrace{t^2 - 1}).1 + (2t + 1)$

$$\begin{array}{r|l} t^2 + 2t & t^2 - 1 \\ - \; t^2 - 1 & 1 \\ \hline 2t + 1 & \end{array}$$

Thay $t = X \Rightarrow X^2 + 2X = 2X + I = B \Rightarrow X = \dfrac{B - I}{2}$

$\Rightarrow X = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \dfrac{1}{2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

TH2. $P_X(t) = t^2 + 4t + 3$ $\quad \Rightarrow t^2 + 2t = (\underbrace{t^2 + 4t + 3}).1 + (-2t - 3)$

$$\begin{array}{r|l} t^2 + 2t & t^2 + 4t + 3 \\ - \; t^2 + 4t + 3 & 1 \\ \hline -2t - 3 & \end{array}$$

Thay $t = X \Rightarrow X^2 + 2X = -2X - 3I = B \Rightarrow X = \dfrac{-3I - B}{2}$

$\Rightarrow X = \dfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

16. Tìm các ma trận vuông cấp ba X thỏa mãn

$$\underbrace{X^3+X^2+X}_{f(x)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

NX $XB = BX$ (vì $X(X^3+X^2+X) = (X^3+X^2+X)X$)

* Gọi $X = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$

* $XB = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_1 & -a_2 & 0 \\ 3b_1 & -b_2 & 0 \\ 3c_1 & -c_2 & 0 \end{pmatrix}$

$BX = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_1 & 3a_2 & 3a_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Vì $XB = BX$

$\Rightarrow -a_2 = 3a_2 \Rightarrow a_2 = 0$

$a_3 = 0$

$3b_1 = -b_1 \Rightarrow b_1 = 0$

$b_3 = 0$

$c_1 = c_2 = 0$

$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$

* PT $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1^3+a_1^2+a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2^3+b_2^2+b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3^3+c_3^2+c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^3+a_1^2+a_1 = 3 \\ b_2^3+b_2^2+b_2 = -1 \\ c_3^3+c_3^2+c_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ b_2 = -1 \\ c_3 = 0 \end{cases}$

Vậy $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

17. Cho $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận vuông cấp hai X thỏa mãn $\underbrace{X^{2016} - X^{2010}}_{f(X)} = 6M$.

* B1. Tìm GTR của $f(X) = 6M = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P_{6M}(\lambda) = \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

* B2. Tìm GTR của X

Gọi t là GTR của $X \Rightarrow f(t) = t^{2016} - t^{2010}$ là GTR của $f(X) = X^{2016} - X^{2010}$

$\Rightarrow t^{2016} - t^{2010} = 0$

$\Rightarrow t^{2010}(t^6 - 1) = 0 \Rightarrow t = 0, 1, -1$

TH1 $t = 0 \Rightarrow P_X(t) = t^2 \Rightarrow t^{2016} - t^{2010} = t^2.(t^{2014} - t^{2008})$

$\Rightarrow$ Thay $t = X$: $X^{2016} - X^{2010} = 0$ (loại)

TH2 $t = 1 \Rightarrow P_X(t) = (t-1)^2 \Rightarrow t^{2016} - t^{2010} = (t-1)^2.Q(t) + at + b$

$2016t^{2015} - 2010t^{2009} = 2(t-1)Q(t) + (t-1)^2Q'(t) + a$

Thay $t = 1$ vào 2PT $\Rightarrow \begin{cases} 0 = a + b \\ 6 = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -6 \end{cases}$

Thay $t = X \Rightarrow X^{2016} - X^{2010} = 6X - 6I = 6M \Rightarrow X - I = M \Rightarrow X = I + M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

TH3 $t = -1 \Rightarrow P_X(t) = (t+1)^2 \Rightarrow t^{2016} - t^{2010} = (t+1)^2.Q(t) + at + b$

$2016t^{2015} - 2010t^{2009} = 2(t+1)Q(t) + (t+1)^2Q'(t) + a$

Thay $t = -1$ vào 2PT $\Rightarrow \begin{cases} 0 = -a + b \\ -6 = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = -6 \end{cases}$

Thay $t = X \Rightarrow X^{2016} - X^{2010} = -6X - 6I = 6M \Rightarrow X = -I - M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

THỰC CHIẾN

Câu 1 (3 điểm). Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

với $m \in \mathbb{R}$ là tham số.

(a) Tính A^2.

(b) Tính định thức của A theo m.

(c) Tìm điều kiện của m để tồn tại ma trận nghịch đảo A^{-1}.

Câu 2 (2 điểm). Tìm a để hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad - 3x_3 = -3 \\ 2x_1 + ax_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$$

(a) Có nghiệm duy nhất? (b) Có nhiều hơn một nghiệm?

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

Câu 3 (2 điểm). Tính B^{2021} với

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Câu 4 (3 điểm). Cho ma trận

$$C = \begin{bmatrix} c & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

với $b, c \in \mathbb{R}$ và $b \neq 0$.

(a) Chứng minh rằng C luôn có hai giá trị riêng thực λ_1, λ_2 khác nhau.

(b) Cho $bc = \sqrt{3}$. Chứng minh rằng $\lambda_1^4 + \lambda_2^4 \geq 48$.

a) $P_C(x) = x^2 - 2cx + (c^2 - b^2) = 0 \quad (*)$

$\Delta' = c^2 - (c^2 - b^2) = b^2 > 0$

$\Rightarrow$ PT có 2 no pb

$\Rightarrow$ C luôn có 2 gtr riêng pb

b) Dễ thấy $(*)$ có no $\lambda_1 = c - b$

$\lambda_2 = c + b$

* $\lambda_1^4 + \lambda_2^4 = (c-b)^4 + (c+b)^4$

$= 2c^4 + 12b^2c^2 + 2b^4$

$= 36 + 2c^4 + 2b^4$

$\underset{\text{Côsi}}{\geq} 36 + 2.2b^2c^2 = 48$

Câu 1 (3,0 điểm). Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} \quad (x \in \mathbb{R} \text{ là tham số}).$$

(a) Tính $\det(A)$ theo x;

(b) Tìm x sao cho A suy biến? (A suy biến tức là không tồn tại ma trận nghịch đảo của A);

(c) Tìm x để hạng của A bằng 3?

Câu 2 (2,0 điểm). Cho hệ phương trình với tham số m sau:

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + mx_3 = -3. \end{cases}$$

(a) Tìm m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất và tính nghiệm duy nhất đó?

(b) Tìm m để hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm?

Câu 3 (2,0 điểm). Cho ma trận

$$C = \begin{bmatrix} 11 & 9 & -3 \\ 24 & 17 & -6 \\ 108 & 81 & -28 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm ma trận P sao cho $P^{-1}CP$ là ma trận chéo và viết ma trận chéo đó?

(b) Đặt $S = I_3 + C + C^2 + \cdots + C^{2022}$, với I_3 là ma trận đơn vị cấp 3. Tính $\det(S)$.

Câu 4 (3,0 điểm).

(a) Cho A và B là hai ma trận vuông cấp n thỏa mãn $AB = BA$. Bằng phương pháp quy nạp toán học, hãy chứng minh rằng

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^k B^{p-k} \quad \text{với } p \in \mathbb{N}.$$

Ở đó ta quy ước $A^0 = B^0 = I_n$, với I_n là ma trận đơn vị cấp n;

(b) Cho $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Tính C^{2022}.

a) P = Mtrận làm chéo A = Mtrận có các cột là các VTR

B = $P^{-1}CP$ = Mtrận đchéo có đchéo chính chính là GTR

b) $B = P^{-1}CP \Rightarrow C = PBP^{-1}$

$\Rightarrow C^2 = PB\underline{P^{-1}.P}BP^{-1} = PB^2P^{-1}$

$\Rightarrow C^n = PB^nP^{-1}$

$\Rightarrow S = PIP^{-1} + PBP^{-1} + PB^2P^{-1} + \dots + PB^{2022}P^{-1}$

$\Rightarrow S = P(I + B + B^2 + \dots + B^{2022})P^{-1}$

$\Rightarrow \det S = \det P . \det(I + B + \dots + B^{2022}) . \det P^{-1}$

BTVN

7. Tìm ma trận vuông cấp hai X có lập phương bằng ma trận đơn vị.

8. Giải phương trình $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Giải phương trình $X^3 - 3X^2 = -2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Giải phương trình $X^{2017} + 2016X = \begin{pmatrix} 2017 & 0 & 0 \\ 0 & -2017 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Tìm ma trận nghịch đảo của $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

12. Cho 3 dãy số $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ thỏa mãn $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ và

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - 3y_n + 3z_n \\ y_{n+1} = 3x_n - 5y_n + 3z_n \\ z_{n+1} = 6x_n - 6y_n + 4z_n \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

Tính x_{2024}.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_{2024} \\ y_{2024} \\ z_{2024} \end{pmatrix} = A^{2024} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

13. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Tính hạng của họ véc tơ $B = \{A, A^2, A^3, \dots, A^{2024}\}$.

$$A^n = \underline{P_A(A).Q(A)} + \underline{aA + bI}$$