(b) Chứng minh rằng nếu

$$|f'(x)| \le \big(f(x)\big)^2 \quad \text{với mọi } x \in (0,1)$$

thì $f \equiv 0$ trên $[0,1]$.

(c) Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho

$$\big(f(c)\big)^2 \le |f'(c)|.$$

2.2 Bảng B

BÀI 1. Cho $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{4^k}\right) = \left(1+\frac{1}{4^1}\right)\left(1+\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{4^n}\right) \quad \forall n \ge 1.$$

(a) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $u_n > 5/4$.

(b) Chứng minh rằng $u_n \le 2023$ với mọi số nguyên dương n.

(c) Chứng minh rằng dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ.

BÀI 2. Cho $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ là hàm số được xác định bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} & \text{nếu } x \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}, \\ x & \text{nếu } x \in [-1,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Chứng minh rằng hàm f liên tục tại 0.

(b) Hàm f có khả vi tại 0 không?

(c) Hàm f có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1,1]$ không?

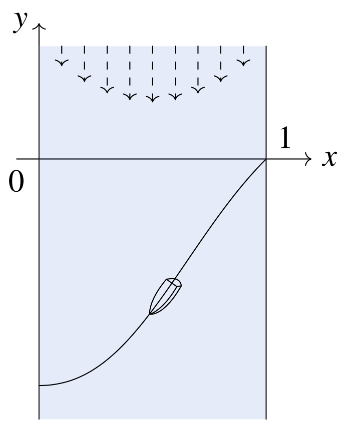
BÀI 3.

Hình vẽ bên cạnh mô tả một phần dòng sông với bờ trái được cho bởi đường thẳng $x = 0$ và bờ phải được cho bởi đường thẳng $x = 1$. Một con thuyền xuất phát từ điểm $(1,0)$ và muốn vượt sông để đến điểm dự kiến $(0,0)$.

Do dòng chảy của sông nên đường đi thực tế của con thuyền trùng khớp phần đồ thị của hàm số

$$y = \frac{x^2-1}{x^3+2}$$

với $0 \le x \le 1$.



(a) Con thuyền có đến được điểm $(0,0)$ như dự kiến không?

(b) Trong trường hợp không đến được điểm $(0,0)$ như dự kiến, con thuyền có cập được bờ trái hay không?

(c) Hãy xác định vị trí của con thuyền khi khoảng cách từ nó đến điểm đích $(0,0)$ là ngắn nhất trong cả quá trình chuyển động.

BÀI 4. Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục.

(a) Chứng minh rằng nếu

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0$$

với mọi hàm số liên tục $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$g(0) = g(1) = 0$$

thì $f \equiv 0$ trên $[0,1]$.

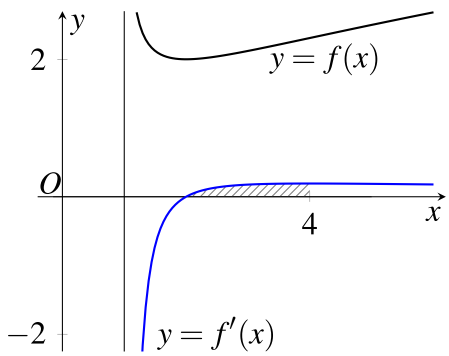
(b) Kết luận ở ý (a) còn đúng không nếu ta thêm điều kiện $g(\frac{1}{2}) = 0$?

BÀI 5.

Hình vẽ bên cạnh thể hiện một phần đồ thị của hàm f được cho bởi

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

và đồ thị của hàm f' (đạo hàm của hàm f).



(b) Không tính f' và không dùng hình vẽ, hãy chứng tỏ rằng phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm trên $(1,+\infty)$.

(c) Tìm công thức tính $f'(x)$ theo x.

(c) Tính diện tích phần mặt phẳng (phần được gạch chéo trên hình) được giới hạn bởi trục Ox, đồ thị hàm f', và đường thẳng $x = 4$.

2.2 Bảng B

BÀI 1. (a) Khẳng định (u_n) đơn điệu tăng. Từ định nghĩa

$$u_{n+1} = \left(1+\frac{1}{4^1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{4^{n+1}}\right) > \left(1+\frac{1}{4^1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{4^n}\right) = u_n$$

với mọi $n \geq 1$. Vậy ta suy ra $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \geq 1$.
Khẳng định $u_n > 5/4$ với mọi $n \geq 2$. Do $u_1 = 5/4$ nên từ tính đơn điệu của (u_n) ta suy ra $u_n > 5/4$ khi và chỉ khi $n \geq 2$.
(b) Khẳng định $\ln u_n < 1$ với mọi $n \geq 1$. Trước tiên ta nhắc lại bất đẳng thức cơ bản sau $\ln(1+x) < x$ với mọi $x > 0$. Sử dụng bất đẳng thức trên ta thu được

$$\ln\left(1+\frac{1}{4^k}\right) < \frac{1}{4^k} \quad \forall k \geq 1.$$

Vậy ta có đánh giá

$$\ln u_n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) < 1 \quad \forall n \geq 1.$$

Khẳng định $u_n \leq 2023$ với mọi $n \geq 1$. Ở bước trên ta đã có $\ln u_n < 1$ với mọi $n \geq 1$. Vậy $u_n < e < 2023$ với mọi $n \geq 1$.
(c) Dãy (u_n) đơn điệu tăng và bị chặn trên nên hội tụ. Ký hiệu L là giới hạn của dãy (u_n).
Ta nhắc lại bất đẳng thức cơ bản sau $x - x^2/2 < \ln(1+x) \quad \forall x > 0$. Sử dụng bất đẳng thức trên và bất đẳng thức cơ bản trong ý trước ta thu được

$$\frac{1}{4^k} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^k}\right)^2 < \ln\left(1+\frac{1}{4^k}\right) < \frac{1}{4^k} \quad \forall k \geq 1.$$

Từ đó ta có

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{4^k} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^k}\right)^2\right] < \ln u_n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k} \quad \forall n \geq 1.$$

Chuyển qua giới hạn khi $n \to +\infty$ ta thu được

$$\frac{3}{10} = \frac{1/4}{1-1/4} - \frac{1}{2}\frac{1/16}{1-1/16} \leq \ln L \leq \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}.$$

Vậy $e^{3/10} \leq L \leq e^{1/3}$. Tính gần đúng ta thu được đáp số $1,3$.

Ghi chú. Thí sinh có thể dùng máy tính bỏ túi hoặc xấp xỉ Padé $e^x \approx \dfrac{(x+3)^2+3}{(x-3)^2+3}$ với $|x| \leq 1/2$ để tính gần đúng $e^{3/10} \approx 1,349$ và $e^{1/3} \approx 1,395$.

BÀI 2. (a) Tính giới hạn của f tại 0. Từ định nghĩa của f ta có

$$|f(x)| = \begin{cases} \dfrac{|x|}{2} & \text{nếu } x \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}, \\ |x| & \text{nếu } x \in [-1,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Do đó ta luôn có $0 \le |f(x)| \le |x|\ \forall x \in [-1,1]$. Theo nguyên lý kẹp $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
Khẳng định tính liên tục của f tại 0. Ở bước trước ta đã có $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Dễ thấy $f(0) = 0$ nên f liên tục tại 0.
(b) Chuyển về khảo sát giới hạn của $f(x)/x$ khi $x \to 0$. Xét sự tồn tại của giới hạn

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x+0) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Chỉ ra rằng giới hạn của $f(x)/x$ khi $x \to 0$ là không tồn tại. Từ định nghĩa của f ta thấy

$$\lim_{\mathbb{Q}\ni x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\mathbb{Q}\ni x\to 0} \frac{-x/2}{x} = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{\mathbb{Q}\not\ni x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\mathbb{Q}\not\ni x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Vậy giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ là không tồn tại. Từ đó ta kết luận hàm f không khả vi tại 0.
(c) Hàm f không có giá trị lớn nhất trên $[-1,1]$. Phản chứng giả sử f đạt giá trị lớn nhất M tại điểm $x_0 \in [-1,1]$. Nếu $x_0 \notin \mathbb{Q}$ thì $M = f(x_0) = x_0 \le 1$. Nếu $x_0 \in \mathbb{Q}$ thì $|M| = |f(x_0)| = |x_0|/2 \le 1/2$. Vậy ta phải có $M \le 1$. Nếu $M < 1$ thì khi đó bằng cách lấy bất kỳ một số vô tỉ y nằm giữa M và 1 ta thu được $f(y) = y > M$. Điều này trái với giả sử M là giá trị lớn nhất của f trên $[-1,1]$. Vậy ta phải có $M = 1$. Tuy nhiên điều này là không xảy ra vì từ lý luận trên ta phải có $x_0 \notin \mathbb{Q}$, và do đó $x_0 = 1$. Nhưng $1 \in \mathbb{Q}$.
Hàm f không có giá trị nhỏ nhất trên $[-1,1]$. Phản chứng giả sử f đạt giá trị nhỏ nhất m tại điểm $x_0 \in [-1,1]$. Nếu $x_0 \notin \mathbb{Q}$ thì $m = f(x_0) = x_0 \ge -1$. Nếu $x_0 \in \mathbb{Q}$ thì $|m| = |f(x_0)| = |x_0|/2 \le 1/2$. Vậy ta phải có $m \ge -1$. Nếu $m > -1$ thì khi đó bằng cách lấy bất kỳ một số vô tỉ y nằm giữa -1 và m ta thu được $f(y) = y < m$. Điều này trái với giả sử m là giá trị bé nhất của f trên $[-1,1]$. Vậy ta phải có $m = -1$. Tuy nhiên điều này là không xảy ra vì từ lý luận trên ta phải có $x_0 \notin \mathbb{Q}$, và do đó $x_0 = -1$. Nhưng $-1 \in \mathbb{Q}$.
Ghi chú. Thí sinh có thể chứng minh trực tiếp rằng 1 (tương ứng, -1) là cận trên đúng (tương ứng, cận dưới đúng) trên đoạn $[-1,1]$ của hàm số f, nhưng "cận” này không phải là một giá trị của hàm f.

BÀI 3.
(a) Con thuyền đến được điểm $(0,0)$ khi và chỉ khi điểm $(0,0)$ thuộc đồ thị của hàm

số

$$y(x) = \frac{x^2-1}{x^3+2}.$$

Dễ thấy điều này là không xảy ra.

(b) Con thuyền cập được bờ trái khi và chỉ khi hàm số y xác định (với giá trị hữu hạn) tại 0. Dễ thấy

$$y(0) = -\frac{1}{2}$$

và do đó con thuyền cập được bờ trái tại vị trí $(0, -\frac{1}{2})$.

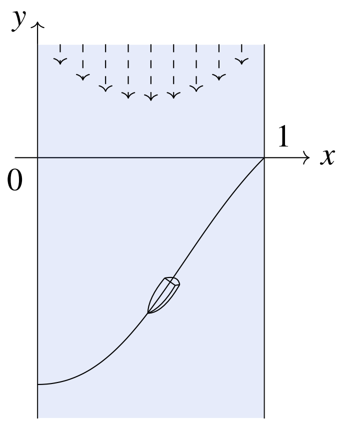
(c)

Trong suốt quá trình chuyển động, vị trí của con thuyền được xác định bởi điểm (x, y) trong đó

$$y = \frac{x^2-1}{x^3+2}$$

với $0 \le x \le 1$. Khoảng cách từ điểm $(0,0)$ đến điểm (x, y) là

$$\sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2-1}{x^3+2}\right)^2}.$$



Xét hàm số f được xác định bởi

$$f(x) = x^2 + \left(\frac{x^2-1}{x^3+2}\right)^2$$

với $0 \le x \le 1$. Trên $[0, 1]$ ta có

$$f'(x) = \frac{2x(x^9+6x^6-x^5+16x^3+4x^2-3x+4)}{(x^3+2)^3}.$$

Để ý rằng

$$\begin{aligned} &x^9+6x^6-x^5+16x^3+4x^2-3x+4 \\ &\qquad = x^9+6x^6+x^3(1-x^2)+15x^3+4x^2+3(1-x)+1 > 0 \end{aligned}$$

nên f đồng biến trên $[0, 1]$. Vậy f đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = 0$ và khoảng cách ngắn nhất cần tìm là $1/2$ tương ứng với vị trí của con thuyền khi nó cập bờ trái.

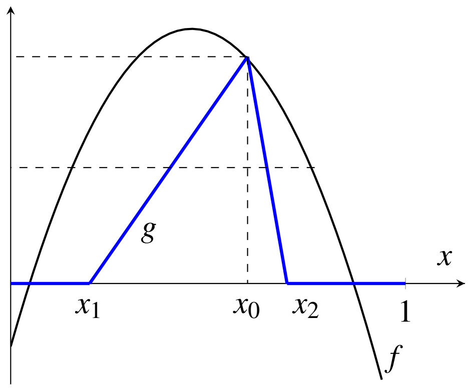
BÀI 4.

(a) Từ tính liên tục của f ta chỉ cần chứng minh $f \equiv 0$ trên $(0,1)$. Giả sử tồn tại $x_0 \in (0,1)$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Ta có thể giả thiết $f(x_0) > 0$. Khi đó ta tìm được

$$0 < x_1 < x_0 < x_2 < 1$$

sao cho

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} \quad \forall x \in [x_1, x_2].$$



Xét hàm g trên $[0,1]$ được xác định bởi

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } 0 \le x \le x_1, \\ \dfrac{f(x_0)}{x_0 - x_1}(x - x_1) & \text{nếu } x_1 \le x \le x_0, \\ \dfrac{f(x_0)}{x_2 - x_0}(x_2 - x) & \text{nếu } x_0 \le x \le x_2, \\ 0 & \text{nếu } x_2 \le x \le 1. \end{cases}$$

Khi đó $g \ge 0$, liên tục trên $[0,1]$, và có $g(0) = g(1) = 0$. Với hàm g đó, ta có

$$\begin{aligned} 0 = \int_0^1 f(x)g(x)dx &= \Big(\int_0^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^1\Big) f(x)g(x)dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(x)g(x)dx \\ &\ge \frac{f(x_0)}{2}\int_{x_1}^{x_2} g(x)dx \\ &= \frac{f(x_0)}{2}\,\frac{f(x_0)(x_2 - x_1)}{2} > 0. \end{aligned}$$

Đây là điều vô lý.

(b) Kết luận ở ý (b) vẫn đúng vì lần lượt áp dụng các hàm trong lời giải ý (b) cho đoạn $[0, \frac{1}{2}]$ và cho đoạn $[\frac{1}{2}, 1]$ ta thu được

$$f \equiv 0 \text{ trên } [0, \tfrac{1}{2}] \text{ và trên } [\tfrac{1}{2}, 1].$$

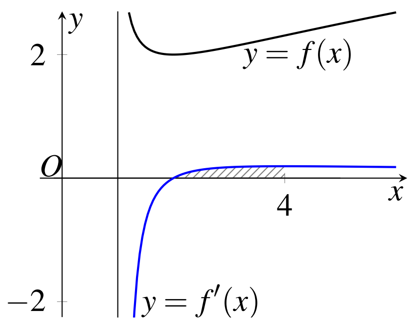
Vậy $f \equiv 0$ trên $[0,1]$.

BÀI 5.

(a) Dễ thấy

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} \geq 2$$

với mọi $x > 1$, và dấu bằng đạt được khi $x = 2$. Vậy hàm f đạt được giá trị nhỏ nhất trên $(1, +\infty)$ tại $x = 2$.



Từ đó ta kết luận phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm $x = 2$ trên $(1, +\infty)$.
(b) Tính toán trực tiếp thu được

$$f'(x) = \frac{x-2}{2(x-1)^{3/2}}.$$

(c) Thiết lập công thức tính $\int_2^4 f'(x)dx$. Hoành độ giao điểm giữa đồ thị của hàm f' và đường thẳng $y = 0$ là $x = 2$. Do f đơn điệu tăng (ngặt) trên $(2, +\infty)$ nên $f' \geq 0$ trên $[2, 4]$. Vậy ta có công thức tính diện tích cần tìm

$$\int_2^4 f'(x)dx.$$

Tính tích phân $\int_2^4 f'(x)dx$. Theo công thức Newton–Leibniz ta có

$$\int_2^4 f'(x)dx = f(4) - f(2) = \frac{4}{\sqrt{3}} - 2,$$

và đây là diện tích cần tìm.