Chọn Tuyển Olympic Toán SV - Sư phạm HN.

Môn: Giải tích.

Câu 1:

a, Chứng minh rằng, với mọi n nguyên dương, phương trình $x + \ln x = n$ có nghiệm duy nhất $x_n \in (0, \infty)$.

b, Chứng minh

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = 1 \quad \text{và} \quad \lim_{n\to\infty} (x_n - n + \ln n) = 0$$

Câu 2:

a, Chứng minh rằng mọi hàm liên tục và tuần hoàn trên $\mathbb{R}$ đều bị chặn trên $\mathbb{R}$.

b, Tồn tại hay không đa thức $f(x)$ với hệ số thực và có bậc lớn hơn 1 thoả mãn:

$$\sin f(x) + \cos f(x) = f(\sin x + \cos x) \quad , \forall x \in \mathbb{R}.$$

Câu 3:

Gọi $C^k[0,1]$ là tập hợp tất cả các hàm khả vi đến cấp k trên $[0,1]$ sao cho $f^{(k)}(x)$ liên tục trên $[0,1]$.

a, Tìm một hàm $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ sao cho $g(\sqrt{x}) \in C^1[0,1]$, nhưng $\notin C^2[0,1]$.

b, Giả sử $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ sao cho $f(\sqrt{x}) \in C^2[0,1]$. Chứng minh rằng $\exists\, c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ và hàm $h \in C^2[0,1]$ sao cho

$$f(x) = c_0 + c_1 x^2 + c_2 x^4 + h(x)$$

với $h(0) = h'(0) = h''(0) = 0$ và $\lim_{x\to 0^+} \frac{h''(x)}{x^2} = 0$

Câu 4: Cho hàm liên tục $f: [a,b] \to (0; +\infty)$

a, Cmr: Với mỗi $n \geq 2$, Tồn tại các số $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ với $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ sao cho

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt = \frac{1}{n} \int_a^b f(t)\,dt \quad , \quad k = \overline{0, n-1}$$

b, Cmr:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \frac{\int_a^b f^2(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}.$$