ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN OLYMPIC TOÁN VÒNG 2- 2024

Câu 1.

a) Cho dãy số $\{u_n\}$ được xác định như sau $u_1 = 1$, $u_{n+1} = u_n + \frac{u_n^2}{2024}$

$$\text{Tìm } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_1}{u_2}+\frac{u_2}{u_3}+....+\frac{u_n}{u_{n+1}}\right).$$

b) Tính $\lim_{n\to\infty}\ln x_n$, trong đó $x_n = (1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})(1+\frac{3}{n^2})...(1+\frac{n}{n^2})$.

Câu 2. Cho hàm $f:[0,1]\to \mathrm{R}$ là hàm tăng và khả vi với f' là hàm giảm.

Cho dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ được xác định bởi $x_n = \frac{1}{1^2}f'(\frac{1}{1}) + \frac{1}{2^2}f'(\frac{1}{2}) + ... + \frac{1}{n^2}f'(\frac{1}{n}), n\in N.$

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ là dỹ hội tụ.

Câu 3. Cho $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+...+\frac{a_n}{n+1} = a_0+a_1+\frac{2^2a_2}{3}+\frac{2^3a_2}{4}+...+\frac{2^na_n}{n+1}=0.$$

Chứng minh rằng phương trình $a_1+2a_2x+3a_3x^2+...+na_nx^{n-1}=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0,2)$.

Câu 4. Cho hàm số $f(\mathrm{x})$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ và khả vi trong khoảng (a,b).

Chứng minh rằng tồn tại số $\mathrm{c}\in(\mathrm{a},\mathrm{b})$ sao cho: $\frac{2}{a-c} < f'(\mathrm{c}) < \frac{2}{b-c}$.

Câu 5. Cho hàm số $f:[0,1]\to\mathrm{R}$ là hàm khả vi liên tục trên đoạn $[0,1]$ và $f(0)=0$.

Chứng minh rằng $\int_0^1 |f(\mathrm{x})f'(\mathrm{x})|dx \le \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(\mathrm{x})|^2\,dx$.

Câu 6. Tính các tích phân sau:

a) $I=\int_1^e \frac{1+\mathrm{x}^2\ln\mathrm{x}}{x+x^2\ln x}dx$ b) $I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

Câu 7. Tìm tất cả các hàm $f(x)$ liên tục trên R thỏa mãn điều kiện

$$f(\mathrm{x}) = 2024(1+\mathrm{x}^2)\left(1+\int_0^x\frac{f(\mathrm{t})}{1+t^2}dt\right)$$

Câu 8. Tìm hàm $f(x)$, $g(x)$ biết

$$\begin{cases} f(x+1)+xg(x+1)=2x \\ f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+g\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=x-1 \end{cases}.$$