Chuyên đề 3

Ma trận và Hệ phương trình tuyến tính

1. Cho ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ sao cho $A^2 = A$. Chứng minh rằng để $AX - XA = O_n$ thì điều kiện cần và đủ là tồn tại ma trận $X_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ sao cho $X = AX_0 + X_0A - X_0$.

   Solution. +) Giả sử tồn tại X_0 sao cho $X = AX_0 + X_0A - X_0$. Khi đó ta có

   $$\begin{aligned} AX &= A(AX_0 + X_0A - X_0) = A^2X_0 + AX_0A - AX_0 = AX_0A, \\ XA &= (AX_0 + X_0A - X_0)A = AX_0A + X_0A^2 - X_0A = AX_0A. \end{aligned}$$

   Từ đó ta được khẳng định $AX - XA = O$.

   +) Giả sử có X thoả mãn $AX - XA = O$. Khi đó ta đặt $X_0 = 2AX - X$ thì được

   $$AX_0 + X_0A - X_0 = A(2AX - X) + (2AX - X)A - (2AX - X) = X.$$

2. Cho ma trận A cấp 4×2 và ma trận B cấp 2×4 sao cho

   $$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \quad \text{Hãy tính } BA?$$

   Solution. Ta gọi A_1, A_2, B_1, B_2 là các ma trận vuông cấp 2 sao cho $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}$. Khi đó

   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \end{bmatrix} = AB = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 \\ A_2B_1 & A_2B_2 \end{bmatrix}$$

   Suy ra $A_1B_1 = I_2,\ A_1B_2 = -2I_2,\ A_2B_1 = -3I_2,\ A_2B_2 = 4I_2$.

   Từ $A_1B_1 = I_2$ ta có $B_1 = A_1^{-1}$ và $B_1A_1 = A_1^{-1}A_1 = I_2$.

   Từ $A_2B_2 = 4I_2$ ta có $A_2(\frac{1}{4}B_2) = I_2$, nên $A_2^{-1} = \frac{1}{4}B_2$ và $\frac{1}{4}B_2A_2 = A_2^{-1}A_2 = I_2$, hay $B_2A_2 = 4I_2$.

   Lúc đó $BA = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1A_1 + B_2A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 + 4I_2 \end{bmatrix} = 5I_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

3. Cho ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ có $\text{rank}(A) = r \leq n$.

   Chứng minh rằng tồn tại số $m \in \mathbb{N}$

   sao cho $\text{rank}(A^k) = \text{rank}(A^{k+1}), \forall k \geq m$.

   Solution. Ta có $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$. Từ đó

$$n \geq \text{rank}(A) \geq \text{rank}(A^2) \geq \text{rank}(A^3) \geq ... \geq \text{rank}(A^k) \geq \text{rank}(A^{k+1}) \geq ... \geq 0$$

   Chú ý rằng $\text{rank}(A^k) = s \in \mathbb{N}$, nên cho $k \to \infty$ trong bất đẳng thức trên ta suy ra phải tồn tại $m \in \mathbb{N}$ sao cho $\text{rank}(A^k) = \text{rank}(A^{k+1}), \forall k \geq m$.

4. Cho các ma trận liên quan dưới đây khả nghịch. Chứng minh

$$\begin{aligned}
&1) \quad (I_n + A)^{-1} = I_n - (A^{-1} + I_n)^{-1} \\
&2) \quad (A - B)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}(B^{-1} - A^{-1})^{-1}A^{-1}
\end{aligned}$$

   Solution. Ta có

$$\begin{aligned}
(I_n + A)[I_n - (A^{-1} + I_n)^{-1}] &= (I_n + A)[(A^{-1} + I_n)(A^{-1} + I_n)^{-1} - (A^{-1} + I_n)^{-1}] \\
&= (I_n + A)A^{-1}(A^{-1} + I_n)^{-1} \\
&= A^{-1}(A^{-1} + I_n)^{-1} + (A^{-1} + I_n)^{-1} \\
&= (A^{-1} + I_n)(A^{-1} + I_n)^{-1} = I_n
\end{aligned}$$

   Ta lại có

$$\begin{aligned}
(A - B)[A^{-1} + A^{-1}(B^{-1} - A^{-1})^{-1}A^{-1}] &= (A - B)A^{-1}[I_n + (B^{-1} - A^{-1})^{-1}A^{-1}] \\
&= (A - B)A^{-1}[(B^{-1} - A^{-1})^{-1}(B^{-1} - A^{-1}) + (B^{-1} - A^{-1})^{-1}A^{-1}] \\
&= (A - B)A^{-1}(B^{-1} - A^{-1})^{-1}B^{-1} \\
&= (I_n - BA^{-1}(B^{-1} - A^{-1})^{-1}B^{-1} \\
&= (BB^{-1} - BA^{-1})(B^{-1} - A^{-1})^{-1}B^{-1} \\
&= B(B^{-1} - A^{-1})(B^{-1} - A^{-1})^{-1}B^{-1} = I_n
\end{aligned}$$

5. Cho trước các số $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$.

   Hãy xác định tất cả các số $x_n, y_n, z_n \in \mathbb{R}$ thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases}
x_{n+1} = -x_n + y_n + z_n \\
y_{n+1} = x_n - y_n + z_n \\
z_{n+1} = x_n + y_n - z_n
\end{cases}, \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$

   Solution. *Cách 1*. Cộng ba phương trình ta được $x_{n+1} + y_{n+1} + z_{n+1} = x_n + y_n + z_n$.

Như thế $x_{n+1} + y_{n+1} + z_{n+1} = x_n + y_n + z_n = ... = x_0 + y_0 + z_0$.

Từ đó $y_n + z_n = x_0 + y_0 + z_0 - x_n$, thay vào phương trình thứ nhất ta được

$x_{n+1} = -2x_n + (x_0 + y_0 + z_0) = -2x_n + \alpha\ (\alpha = x_0 + y_0 + z_0)$.

Đến đây bằng cách truy hồi ta có $x_n = -2x_{n-1} + \alpha$ và

$$\begin{array}{lll} x_{n-1} = -2x_{n-2} + \alpha & \text{hay} & -2x_{n-1} = (-2)^2 x_{n-2} + (-2)\alpha \\ x_{n-2} = -2x_{n-2} + \alpha & \text{hay} & (-2)^2 x_{n-2} = (-2)^3 x_{n-3} + (-2)^2\alpha \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ x_2 = -2x_1 + \alpha & \text{hay} & (-2)^{n-2} x_2 = (-2)^{n-1} x_1 + (-2)^{n-2}\alpha \\ x_1 = -2x_0 + \alpha & \text{hay} & (-2)^{n-1} x_1 = (-2)^n x_0 + (-2)^{n-1}\alpha \end{array}$$

Cộng tất cả các đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} x_n &= (-2)^n x_0 + \alpha[1 + (-2) + (-2)^2 + ... + (-2)^{n-2} + (-2)^{n-1}] \\ &= (-2)^n x_0 + \alpha\frac{(-2)^n - 1}{-3} = (-2)^n (x_0 - \frac{\alpha}{3}) + \frac{\alpha}{3} \\ &= \frac{(-2)^n}{3}(2x_0 - y_0 - z_0) + \frac{1}{3}(x_0 + y_0 + z_0) \end{aligned}$$

Tương tự ta tìm được

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{(-2)^n}{3}(2y_0 - z_0 - x_0) + \frac{1}{3}(x_0 + y_0 + z_0) \\ z_n &= \frac{(-2)^n}{3}(2z_0 - x_0 - y_0) + \frac{1}{3}(x_0 + y_0 + z_0) \end{aligned}$$

Cách 2. Xét các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix},\ (n = 0, 1, 2, ...)$$

ta có $A = B - 2I_3$ và $B^n = 3^{n-1}B$.

Do đó suy ra $X_{n+1} = AX_n = A^2 X_{n-1} = ... = A^{n+1} X_0$ và

$$X_n = A^n X_0 = (B - 2I_3)^n X_0 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-2)^{n-k} B^k X_0 = ...?$$

6. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$.

Đặt $A^n = \begin{bmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) & a_{13}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) & a_{23}(n) \\ a_{31}(n) & a_{32}(n) & a_{33}(n) \end{bmatrix}$. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} a_{ij}(n),\ (i, j = 1, 2, 3)$.

<u>*Solution*</u>. Ta có thể thấy rằng

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 15 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 6 & 21 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 15 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6^n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 6 & 21 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Từ đây dễ dàng thu được kết quả cần tìm...?

7. Cho các ma trận $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng

$$(AB - BA)^{2k}C = C(AB - BA)^{2k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

<u>*Solution*</u>. Ta thấy $\mathrm{trace}(AB - BA) = 0$, nên đặt $AB - BA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$. Khi đó

$$(AB - BA)^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{bmatrix} = (a^2 + bc)I_2$$

$$(AB - BA)^{2k} = [(a^2 + bc)I_2]^k = (a^2 + bc)^k I_2$$

Từ đây ta được diều phải chứng minh.

8. Ma trận $A = (a_{ij})$ vuông cấp n được gọi là ma trận phản đối xứng nếu $A^t = -A$, hay là $a_{ij} + a_{ji} = 0,\ \forall i, j\ (1 \leq i, j \leq n)$. Chứng minh rằng tích của hai ma trận phản đối xứng A, B là một ma trận phản đối xứng khi và chỉ khi $AB = -BA$.

<u>*Solution*</u>. Ta gọi $AB = C$ với $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, trong đó $B = (b_{ij})$.

Lại gọi $BA = C'$ với $c'_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$. Lúc đó $AB = -BA$ khi và chỉ khi $c_{ij} = -c'_{ij}$.

Thế mà $-c'_{ij} = -\sum\limits_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} = -\sum\limits_{k=1}^{n}(-b_{ki})(-a_{jk}) = -\sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki} = -c_{ji}$.

Vậy ta được điều phải chứng minh.

9. Cho B là ma trận con tạo thành bằng cách bỏ đi s hàng và t cột của ma trận A.

Chứng minh rằng $\mathrm{rank}(A) \leq s + t + \mathrm{rank}(B)$.

Solution. Gọi B_s là ma trận con tạo thành bằng cách bỏ đi s hàng của ma trận A. Do nhiều nhất là cả s hàng này độc lập tuyến tính, nên $\operatorname{rank}(B_s) \geq \operatorname{rank}(A) - s$.

Bây giờ lại bỏ đi t cột của B_s thì được ma trận B. Do nhiều nhất là cả t cột này độc lập tuyến tính, nên $\operatorname{rank}(B) \geq \operatorname{rank}(B_s) - t$.

Cộng 2 bất đẳng thức này suy ra điều cần chứng minh.

10. Cho A là ma trận vuông cấp n khả nghịch, thoả mãn $A^{-1} = 3A$.

    Hãy tính $\det(A^{2024} - A^4)$.

    Solution. Ta có $I_n = A^{-1}A = 3A^2,\ A^2 = \frac{1}{3}I_n,\ A^4 = \frac{1}{3^2}I_n,\ A^{2020} = \frac{1}{3^{1010}}I_n$. Do đó

$$\det(A^4) = [\det(A)]^4 = \frac{1}{3^{2n}}\det(I_n) = \frac{1}{3^{2n}},\ \det(A) = \frac{1}{\sqrt{3^n}},$$
$$\begin{aligned}\det(A^{2024} - A^4) &= \det[A^4(A^{2020} - I_n)] = \det[A^4(\frac{1}{3^{1010}}I_n - I_n)]\\ &= \det[A^4(\frac{1}{3^{1010}} - 1)I_n] = \det(A^4)\det[(\frac{1}{3^{1010}} - 1)I_n]\\ &= \frac{1}{3^{2n}}(\frac{1}{3^{1010}} - 1)^n.\end{aligned}$$

11. Cho A là ma trận thực, vuông, cấp $2n$ có các phần tử trên đường chéo chính bằng 0, còn các phần tử khác là 1 hoặc -1. Chứng minh $\det(A) \neq 0$.

    Solution. Ta xét ma trận vuông cấp $2n+1$ như sau

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

Khai triển định thức theo hàng (hoặc cột) đầu tiên ta được $\det(B) = \det(A)$.

Cộng hàng đầu tiên lần lượt vào các hàng từ thứ hai đến thứ $2n+1$ ta được

$$\det(B) = \det(B_1)\ ,\ B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & C & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$$

trong đó C là ma trận vuông cấp $2n$ với các phần tử trên đường chéo chính bằng 1, còn các phần tử khác bằng 0 hoặc 2.

Khi khai triển định thức của ma trận B_1, ta giữ nguyên cột đầu tiên, còn với mỗi cột từ thứ hai đến thứ $2n+1$, nếu có cột nào chứa phần tử bằng 2 thì ta tách thành tổng của 2 cột trong đó cột thứ nhất gồm các phần tử bằng 0 hoặc 2 và cột thứ hai gồm các phần tử bằng 0 hoặc 1. Như thế ta suy ra $\det(B_1) \equiv \det(B_2) (\text{mod } 2)$, với ma trận B_2 là

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & I_{2n} & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$$

Đến đây bằng cách nhân lần lượt các hàng từ thứ hai đến thứ $2n+1$ của B_2 với -1 rồi cộng vào hàng đầu tiên ta được

$$\det(B_2) = \det(B_3),\ B_3 = \begin{bmatrix} -2n+1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & & & \\ \vdots & & I_{2n} & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$$

Rõ ràng là $\det(B_3) = -2n + 1 \equiv 1 (\text{mod } 2)$, do đó $\det(A) \neq 0$.

12. Cho các số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ thoả mãn điều kiện

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n = 0.$$

Tính $\det(A)$ với

$$A = \begin{bmatrix} 1 + a_1b_1 & a_1b_2 & \ldots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1 + a_2b_2 & \ldots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \ldots & 1 + a_nb_n \end{bmatrix}$$

Solution. Ta có

$$\det(A) = D_n = \det \begin{bmatrix} 1 + a_1b_1 & a_1b_2 & \ldots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1 + ab_2 & \ldots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \ldots & 1 + a_nb_n \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 + a_1b_1 & a_1b_2 & \ldots & 0 \\ a_2b_1 & 1 + a_2b_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \ldots & 1 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 + a_1b_1 & a_1b_2 & \ldots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1 + a_2b_2 & \ldots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \ldots & a_nb_n \end{bmatrix}$$

$$= D_{n-1} + \Delta_n$$

Mặt khác

$$\Delta_n = \det\begin{bmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & ... & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & ... & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & ... & a_nb_n \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} 1 & a_1b_2 & ... & a_1b_n \\ 0 & 1+a_2b_2 & ... & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_nb_2 & ... & a_nb_n \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & ... & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & ... & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & ... & a_nb_n \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} 1+a_2b_2 & a_2b_3 & ... & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & ... & a_nb_n \end{bmatrix} = ... = a_nb_n$$

Vậy ta có công thức truy hồi $D_n = D_{n-1} + a_nb_n$. Từ đó suy ra

$$D_n = D_1 + \sum_{k=2}^{n} a_kb_k = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_kb_k = 1.$$

13. Cho A là ma trận thực cấp $(n+1)\times n$ và B là ma trận thực cấp $n\times(n+1)$. Chứng minh rằng

$$\det(AB - I_{n+1}) + \det(BA - I_n) = 0.$$

Solution. Bổ sung vào ma trận A một cột đứng ở vị trí cuối cùng gồm toàn các phần tử bằng 0 được ma trận vuông A' cấp $n+1$.

Bổ sung vào ma trận B một hàng nằm ở vị trí cuối cùng gồm toàn các phần tử bằng 0 được ma trận vuông B' cấp $n+1$.

Dễ dàng thấy rằng (*giải thích?*) $A'B' = AB$ và

$$B'A' = \begin{bmatrix} & 0 \\ BA & \vdots \\ & \\ 0\dots0 & 0 \end{bmatrix}, \ I_{n+1} - B'A' = \begin{bmatrix} & 0 \\ I_n - BA & \vdots \\ & \\ 0\dots0 & 1 \end{bmatrix} = C.$$

Khi đó $\det(I_{n+1} - A'B') = \det(I_{n+1} - AB) = (-1)^{n+1}\det(AB - I_{n+1})$

và $\det(I_{n+1} - B'A') = \det(C) = \det(I_n - BA) = (-1)^n \det(BA - I_n)$

(lưu ý rằng ta khai triển Laplace $\det(C)$ theo hàng cuối cùng hoặc cột cuối cùng).

Theo ví dụ (3.4.6) chương 3 ta có $\det(I_{n+1} - A'B') = \det(I_{n+1} - B'A')$, nên

$$\begin{aligned}(-1)^{n+1}\det(AB - I_{n+1}) &= (-1)^n \det(BA - I_n)\\ (-1)^{2n}\det(AB - I_{n+1}) &= (-1)^{2n-1}\det(BA - I_n)\\ \det(AB - I_{n+1}) &= -\det(BA - I_n)\end{aligned}$$

Vậy ta có $\quad \det(AB - I_{n+1}) + \det(BA - I_n) = 0.$

14. Cho A là ma trận thực, vuông, cấp $2n$ có các phần tử trên đường chéo chính bằng 0, còn các phần tử khác là 2023 hoặc 1. Chứng minh rằng $\det(A) \neq 0$.

    Solution. Từ định nghĩa tổng quát của định thức, ta dễ dàng thấy (*giải thích?*) rằng $\det(A)$ là số nguyên và nếu thêm vào (hoặc bớt đi) phần tử a_{ij} bất kỳ của ma trận A một số nguyên chẵn thì tính chẵn lẻ của $\det(A)$ không thay đổi. Do đó suy ra

$$\det(A) \equiv \det(B) (\text{mod } 2), \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Tính $\det(B)$ như sau: lấy tất cả các cột từ thứ hai đến thứ $2n$ cộng vào cột đầu thì

$$\det(B) = \det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 2n-1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ 2n-1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1\\ 2n-1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 2n-1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1\\ 2n-1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0\end{bmatrix}$$

lấy hàng đầu $\times(-1)$ rồi cộng vào tất cả các hàng từ thứ hai đến thứ $2n$ thì được

$$\det\begin{bmatrix} 2n-1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ 2n-1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1\\ 2n-1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 2n-1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1\\ 2n-1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 2n-1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1\end{bmatrix} = 1 - 2n$$

Vậy $\det(B) = 1 - 2n \equiv 1 (\text{mod } 2)$, do đó $\det(A) \equiv 1 (\text{mod } 2)$, suy ra $\det(A) \neq 0$.

15. Cho các ma trận $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ thoả mãn $A^2 + B^2 = AB$.

Chứng minh rằng nếu $AB - BA$ khả nghịch thì n chia hết cho 3.

Solution. Trước tiên ta gọi $\overline{M}$ là ma trận liên hợp của ma trận M theo nghĩa sau:

$$\text{với} \quad M = (m_{ij}),\ m_{ij} \in \mathbb{C} \quad \text{thì} \quad \overline{M} = (\overline{m}_{ij}),\ \ \overline{m}_{ij} \ \text{ là liên hợp của } \ m_{ij}.$$

Dễ dàng kiểm tra được rằng $\det(\overline{M}) = \overline{\det(M)}$, từ đó

$$\det(M\overline{M}) = \det(M)\det(\overline{M}) = |\det(M)|^2 \quad \text{là số thực.}$$

Bây giờ lấy ma trận $S = A + \omega B$, trong đó $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(i^2 = -1)$.

Khi đó do $1 + \overline{\omega} = -\omega$, ta có

$$\begin{aligned} S\overline{S} &= (A + \omega B)(A + \overline{\omega} B) = A^2 + \omega BA + \overline{\omega} AB + B^2 \\ &= \omega BA + (1 + \overline{\omega})AB = \omega(BA - AB). \end{aligned}$$

Do $\det(S\overline{S})$ là số thực và $\det(\omega(BA - AB)) = \omega^n.(-1)^n.\det(AB - BA)$, đồng thời $\det(AB - BA) \neq 0$ vì $AB - BA$ khả nghịch, nên ta suy ra ω^n là số thực.

Thế mà

$$\omega^n = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^n = (\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})^n = \cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}$$

nên ta suy ra phải có n chia hết cho 3.

16. Let A and B be real $n \times n$ matrices. Show that if $AB - BA$ is invertible and $A^2 + B^2 = \sqrt{3}(AB - BA)$, then n is multiple of 6.

Solution. Let $M = A + iB$. Then, since A and B are real matrices,

$$\begin{aligned} M\overline{M} &= (A + iB)\overline{(A + iB)} = (A + iB)(A - iB) = (A^2 + B^2) - i(AB - BA) \\ &= (A^2 + B^2) - \frac{i}{\sqrt{3}}(A^2 + B^2) = \Big(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\Big)(A^2 + B^2) \end{aligned}$$

Now, let $\alpha = (1 - \frac{i}{\sqrt{3}})$ and take the determinant of both sides. Since $AB - BA$ is assumed to be invertible, $A^2 + B^2$ is also invertible (being a nonzero multiple of $AB - BA$), and

$$\det(M\overline{M}) = \det[\alpha(A^2 + B^2)] = \alpha^n \det(A^2 + B^2)$$

so

$$\alpha^n = \frac{\det(M\overline{M})}{\det(A^2 + B^2)} = \frac{\det(M)\overline{\det(M)}}{\det(A^2 + B^2)} = \frac{|\det(M)|^2}{\det(A^2 + B^2)}$$

is a real number, since $\det(A^2 + B^2) \neq 0$.

Now note that $\alpha^n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\pi/6}\right)^n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{-ni\pi/6}$, and this number is real iff $-n\pi/6$ is an integral multiple of π.

Thus, n must be a multiple of 6.

17. Cho ma trận thực $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ thoả mãn $a_{ii} \geq 1, \forall i = \overline{1,n}$ và $\sum\limits_{i \neq j} a_{ij}^2 < 1$. Chứng minh $AX = \theta$ chỉ có nghiệm tầm thường.

    Solution. Lấy bất kỳ vector $x = [x_1, x_2, ..., x_n]^t \neq \theta$. Ta có

$$Ax = (\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j, ..., \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j)$$

$$\begin{aligned} < Ax, x > &= \sum_{j=1}^n a_{1j}x_1x_j + \sum_{j=1}^n a_{2j}x_2x_j + ... + \sum_{j=1}^n a_{nj}x_nx_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{i\neq j} a_{ij}x_ix_j \\ &\geq \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i\neq j} a_{ij}x_ix_j \geq \sum_{i=1}^n x_i^2 - \Big|\sum_{i\neq j} a_{ij}x_ix_j\Big| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{i\neq j} a_{ij}x_ix_j\Big| &\leq \sum_{i\neq j} |a_{ij}||x_ix_j| \leq \Big(\sum_{i\neq j} a_{ij}^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i\neq j} x_i^2x_j^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \Big(\sum_{i\neq j} x_i^2x_j^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \Big(\sum_{i,j=1}^n x_i^2x_j^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big[\Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^n x_j^2\Big)\Big]^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^n x_i^2. \end{aligned}$$

    Do đó suy ra $< Ax, x > > 0,\ x \neq \theta$. Dẫn đến $Ax \neq \theta,\ \forall x \neq \theta$. Tức là phương trình $Ax = \theta$ chỉ có nghiệm tầm thường.

18. Cho ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ phản đối xứng ($A^t = -A$). Chứng minh rằng các ma trận $A \pm I_n$ khả nghịch.

    Solution. Giả sử có vector $v = (v_1, v_2, ..., v_n)^t$ sao cho $(A+I_n)v = \theta$, tức là $Av = -v$. Khi đó $(Av)^t = (-v)^t$, hay $v^tA^t = -v^t$, tức là $v^tA = v^t$. Suy ra

$$v^tAv = (v^tA)v = v^tv, \quad v^tAv = v^t(Av) = -v^tv.$$

    Do đó $v^tv = 0$, nên $v = \theta$. Vậy $\ker(A + I_n) = \{\theta\}, \det(A + I_n) \neq 0$, nên ma trận $A + I_n$ khả nghịch. Với ma trận $A - I_n$ chứng minh tương tự.

19. Cho các ma trận $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ thoả mãn $AB = BA$.

    Chứng minh rằng $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

    Nếu bỏ điều kiện $AB = BA$ thì kết luận còn đúng không?

    Solution. Với đơn vị ảo $i = \sqrt{-1}$ ta có $A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$.

    Lưu ý rằng $\det(\overline{M}) = \overline{\det(M)}$ (*giải thích?*) ta có

$$\begin{aligned} \det(A^2 + B^2) &= \det[(A + iB)(A - iB)] \\ &= \det(A + iB)\det(A - iB) = |\det(A + iB)|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Nếu bỏ điều kiện giao hoán thì khẳng định trên không còn đúng nữa.

Chẳng hạn lấy (*giải thích?*)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

20. Cho $X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ với $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ giao hoán từng đôi một. Chứng minh rằng X khả nghịch khi và chỉ khi $AD - BC$ khả nghịch.

<u>*Solution*</u>. +) Đặt $Y = AD - BC$. Ta có

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AD - BC & -AB + BA \\ CD - DC & -CB + DA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y & O \\ O & Y \end{bmatrix}.$$

Giả sử Y khả nghịch, tức là tồn tại Y^{-1}, lúc đó

$$\begin{bmatrix} Y & O \\ O & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y^{-1} & O \\ O & Y^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & O \\ O & I_n \end{bmatrix} = I_{2n}.$$

Như thế $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y^{-1} & O \\ O & Y^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & O \\ O & I_n \end{bmatrix} = I_{2n}$, tức là X khả nghịch và nghịch đảo của nó là

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y^{-1} & O \\ O & Y^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} DY^{-1} & -BY^{-1} \\ -CY^{-1} & AY^{-1} \end{bmatrix}.$$

+) Ngược lại, giả sử X khả nghịch.

Xét vector $v \in \operatorname{Ker}(Y)$, tức là $Yv = (AD - BC)v = \theta$. Ta thấy

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Bv \\ Av \end{bmatrix} = \theta, \ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Dv \\ -Cv \end{bmatrix} = \theta$$

Nhân bên trái 2 đẳng thức này với X^{-1} ta được $Av = Bv = Cv = Dv = \theta$, từ đó dẫn đến

$$X \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix} = \theta$$

Lại nhân bên trái đẳng thức này với X^{-1} ta suy ra $v = \theta$, hay $\operatorname{Ker}(Y) = \{\theta\}$.

Do đó $Y = AD - BC$ khả nghịch.

21. Cho các ma trận $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ giao hoán từng đôi một sao cho $ABC = O_n$. Chứng minh rằng

$$\det(A+B+C)\det(A^3+B^3+C^3) \geq 0.$$

<u>*Solution*</u>. Xét số phức $\omega = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ i^2 = -1.$

Ta thấy

$$\begin{aligned}
&\omega^2 = (\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{\omega}\\
&\omega^3 = (\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})^3 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1\\
&\omega^4 = \omega^3\omega = \omega, \quad \omega + \omega^2 = \omega + \overline{\omega} = -1, \quad \omega = \overline{\omega^2}
\end{aligned}$$

Vì A, B, C giao hoán từng đôi một và $ABC = O_n$ nên từ kết quả trên ta có

$$\begin{aligned}
A^3+B^3+C^3 &= A^3+B^3+C^3 - 3ABC\\
&= (A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)\\
&= (A+B+C)(A+\omega B+\omega^2 C)(A+\omega^2 B+\omega C)\\
&= (A+B+C)(A+\omega B+\omega^2 C)(A+\overline{\omega} B+\overline{\omega^2} C)\\
&= (A+B+C)(A+\omega B+\omega^2 C)\overline{(A+\omega B+\omega^2 C)}\\
(A+B+C)(A^3+B^3+C^3) &= (A+B+C)^2(A+\omega B+\omega^2 C)\overline{(A+\omega B+\omega^2 C)}\\
(A+B+C)(A^3+B^3+C^3) &= (A+B+C)^2 X\overline{X}, \quad X = A+\omega B+\omega^2 C.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
\det[(A+B+C)(A^3+B^3+C^3)] &= \det[(A+B+C)^2 X\overline{X}]\\
\det(A+B+C)\det(A^3+B^3+C^3) &= \det[(A+B+C)^2]\det(X)\det(\overline{X})\\
&= [\det(A+B+C)]^2\det(X)\overline{\det(X)}\\
&= [\det(A+B+C)]^2|\det(X)|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Lưu ý rằng $\det(\overline{X}) = \overline{\det(X)}$ (*giải thích?*)

22. 1) Cho ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Chứng tỏ rằng $\det(I_n + A^2) \geq 0$.

2) Cho các ma trận $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ thoả mãn $AB = O_n$.

Chứng minh rằng $\det(I_n + A^{2p} + B^{2q}) \geq 0$, với $p, q \in \mathbb{N}$.

<u>*Solution*</u>. a) Ta có $I_n + A^2 = (A - iI_n)(A + iI_n)$, với $i^2 = -1$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\det(I_n + A^2) &= \det[(A-iI_n)(A+iI_n)] = \det(A-iI_n)\det(A+iI_n)\\
&= \det(\overline{A+iI_n})\det(A+iI_n) = \overline{\det(A+iI_n)}\det(A+iI_n)\\
&= |\det(A+iI_n)|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

b) Đặt $C = A^p, D = B^q$ thì $C^2 = A^{2p}, D^2 = B^{2q}$.

Ta có $CD = A^pB^q = \underbrace{AA...A}_{p}.\underbrace{BB...B}_{q} = A.A...(AB)B...B = O_n$.

Dẫn tới $C^2D^2 = CCDD = C(CD)D = O_n$.

Theo chứng minh trên thì $\det(I_n + C^2) \geq 0$, $\det(I_n + D^2) \geq 0$. Do đó

$$\begin{aligned} 0 &\leq \det(I_n + C^2)\det(I_n + D^2) = \det[(I_n + C^2)(I_n + D^2)] \\ &= \det(I_n + C^2 + D^2 + C^2D^2) = \det(I_n + C^2 + D^2) = \det(I_n + A^{2p} + B^{2q}). \end{aligned}$$

23. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} \lambda x_1 + ax_2 + bx_3 + cx_4 = 0 \\ -ax_1 + \lambda x_2 + dx_3 - ex_4 = 0 \\ -bx_1 - dx_2 + \lambda x_3 + fx_4 = 0 \\ -cx_1 + ex_2 - fx_3 + \lambda x_4 = 0 \end{cases}$$

Hãy tìm điều kiện cần và đủ đối với các hệ số thực $\lambda, a, b, c, d, e, f$ để hệ phương trình có nghiệm không tầm thường.

<u>*Solution*</u>. Giả sử hệ phương trình đã cho có nghiệm $[x_1, x_2, x_3, x_4]^t \neq \theta$.

Nhân phương trình thứ nhất với λx_1 , phương trình thứ hai với λx_2, phương trình thứ ba với λx_3, phương trình thứ tư với λx_4 rồi cộng các phương trình lại ta được

$$\begin{aligned} &\lambda x_1(\lambda x_1 - ax_2 - bx_3 - cx_4) + \lambda x_2(ax_1 + \lambda x_2 - dx_3 + ex_4) + \\ &+ \lambda x_3(bx_1 + dx_2 + \lambda x_3 - fx_4) + \lambda x_4(cx_2 - ex_2 + fx_3 + \lambda x_4) = 0 \end{aligned}$$

Hay là $2\lambda^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) = 0$. Suy ra $\lambda = 0$.

Khi đó hệ phương trình thuần nhất đã cho có ma trận hệ số là

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & -e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & e & -f & 0 \end{bmatrix}$$

Điều kiện cần và đủ để hệ phương trình thuần nhất $Ax = \theta$ có nghiệm không tầm thường $x \neq \theta$ là $\det(A) = 0$.

Tính trực tiếp bằng khai triển Laplace (*gải thích?*) ta được $\det(A) = (af + be + cd)^2$.

Vậy điều kiện cần và đủ để hệ phương trình đã cho có nghiệm không tầm thường $[x_1, x_2, x_3, x_4] \neq \theta$ là $\lambda = af + be + cd = 0$.

24. Cho các số thực $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ khác nhau

    và khác các giá trị $0, -1, -2, ..., -(n-1)$.

    Chứng minh rằng

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\lambda_1} & \dfrac{1}{\lambda_2} & \cdots & \dfrac{1}{\lambda_n} \\ \dfrac{1}{\lambda_1+1} & \dfrac{1}{\lambda_2+1} & \cdots & \dfrac{1}{\lambda_n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{\lambda_1+n-1} & \dfrac{1}{\lambda_2+n-1} & \cdots & \dfrac{1}{\lambda_n+n-1} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Solution. Gọi $X = [x_1, x_2, ..., x_n]^t$. Ta sẽ chứng minh hệ phương trình $AX = \theta \quad (*)$ chỉ có nghiệm tầm thường $X = \theta$, tức là $\det(A) \neq 0$. Xét đa thức

$$\begin{aligned} P(x) =& x_1(x+\lambda_2)(x+\lambda_3)...(x+\lambda_n) \\ &+ x_2(x+\lambda_1)(x+\lambda_3)...(x+\lambda_n) \\ &+ ... \\ &+ x_n(x+\lambda_1)(x+\lambda_2)...(x+\lambda_{n-1}) \end{aligned}$$

Ta thấy phương trình thứ nhất của hệ $(*)$ chính là

$$\frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{x_2}{\lambda_2} + ... + \frac{x_n}{\lambda_n} = 0$$

hay $\quad x_1\lambda_2\lambda_3...\lambda_n + x_2\lambda_1\lambda_3...\lambda_n + ... + x_n\lambda_1\lambda_2...\lambda_{n-1} = P(0) = 0.$

Phương trình thứ hai của hệ $(*)$ chính là

$$\frac{x_1}{\lambda_1+1} + \frac{x_2}{\lambda_2+1} + ... + \frac{x_n}{\lambda_n+1} = 0$$

hay $\quad x_1(\lambda_2+1)(\lambda_3+1)...(\lambda_n+1) + x_2(\lambda_1+1)(\lambda_3+1)...(\lambda_n+1) + ...$

$$+x_n(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)...(\lambda_{n-1}+1) = P(1) = 0.$$

v.v... Phương trình thứ n của hệ $(*)$ chính là

$$\frac{x_1}{\lambda_1+n-1} + \frac{x_2}{\lambda_2+n-1} + ... + \frac{x_n}{\lambda_n+n-1} = 0$$

hay $x_1(\lambda_2+n-1)(\lambda_3+n-1)...(\lambda_n+n-1)+x_2(\lambda_1+n-1)(\lambda_3+n-1)...(\lambda_n+n-1)+...$

$$+x_n(\lambda_1+n-1)(\lambda_2+n-1)...(\lambda_{n-1}+n-1) = P(n-1) = 0.$$

Khi đó hệ $(*)$ tương đương với $P(0) = P(1) = ... = P(n-1) = 0 \quad (**)$.

Đa thức $P(x)$ có bậc là $n-1$. Thế mà $(**)$ lại chứng tỏ rằng $P(x) = 0$ có n nghiệm phân biệt. Do đó suy ra phải có $P(x) \equiv 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bây giờ lấy $x = -\lambda_1$ ta được $P(-\lambda_1) = x_1(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)...(\lambda_n - \lambda_1) = 0$, hay $x_1 = 0$ (vì $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$).

Tiếp tục lấy $x = -\lambda_2$ ta được $P(-\lambda_2) = x_2(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)...(\lambda_n - \lambda_2) = 0$, hay $x_2 = 0$ (vì $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$).

v.v... Cuối cùng lấy $x = -\lambda_n$ ta được $P(-\lambda_n) = x_n(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_3 - \lambda_n)...(\lambda_{n-1} - \lambda_n) = 0$, hay $x_n = 0$ (vì $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$).

Vậy hệ $(*)$ chỉ có nghiệm tầm thường $X = \theta$, tức là $\det(A) \neq 0$.

25. Cho các số $a_i \neq b_j$ với $i, j = \overline{1, n}$ và $a_i \neq a_j, b_i \neq b_j\ \forall i \neq j$.

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{a_1 - b_1} + \dfrac{x_2}{a_1 - b_2} + \dfrac{x_3}{a_1 - b_3} + \cdots + \dfrac{x_n}{a_1 - b_n} = 0 \\[2ex] \dfrac{x_1}{a_2 - b_1} + \dfrac{x_2}{a_2 - b_2} + \dfrac{x_3}{a_2 - b_3} + \cdots + \dfrac{x_n}{a_2 - b_n} = 0 \\[2ex] \dotfill \\[2ex] \dfrac{x_1}{a_n - b_1} + \dfrac{x_2}{a_n - b_2} + \dfrac{x_3}{a_n - b_3} + \cdots + \dfrac{x_n}{a_n - b_n} = 0 \end{cases}$$

<u>*Solution*</u>. Xét hàm số

$$f(x) = \frac{x_1}{x - b_1} + \frac{x_2}{x - b_2} + ... + \frac{x_n}{x - b_n} = \frac{P(x)}{\prod_{i=1}^n (x - b_i)}$$

trong đó

$$\begin{aligned} P(x) = x_1&(x - b_2)(x - b_3)...(x - b_n) \\ &+ x_2(x - b_1)(x - b_3)...(x - b_n) \\ &+ ... \\ &+ x_n(x - b_1)(x - b_2)...(x - b_{n-1}) \end{aligned}$$

là đa thức bậc $n - 1$.

Phương trình thứ nhất của hệ là $f(a_1) = \dfrac{P(a_1)}{\prod_{i=1}^n (a_1 - b_i)} = 0$, hay $P(a_1) = 0$.

Phương trình thứ hai của hệ là $f(a_2) = \dfrac{P(a_2)}{\prod_{i=1}^n (a_2 - b_i)} = 0$, hay $P(a_2) = 0$.

v.v... Phương trình thứ n của hệ là $f(a_n) = \dfrac{P(a_n)}{\prod_{i=1}^n (a_n - b_i)} = 0$, hay $P(a_n) = 0$.

Như vậy đa thức $P(x)$ có bậc $n - 1$ mà có n nghiệm phân biệt $a_1, a_2, ..., a_n$.

Do đó $P(x) \equiv 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Lấy $x = b_1$ ta được $P(b_1) = x_1(b_1 - b_2)(b_1 - b_3)...(b_1 - b_n) = 0$, suy ra $x_1 = 0$.

Lấy $x = b_2$ ta được $P(b_1) = x_2(b_2 - b_1)(b_2 - b_3)...(b_2 - b_n) = 0$, suy ra $x_2 = 0$.

v.v... Lấy $x = b_n$ ta được $P(b_n) = x_n(b_n - b_1)(b_n - b_2)...(b_n - b_{n-1}) = 0$, suy ra $x_n = 0$.

Vậy hệ phương trình đã cho chỉ có nghiệm tầm thường $[x_1, x_2, ..., x_n]^t = \theta$.

26. Cho các ma trận $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ thoả mãn

$$A^{2024} = O_n,\ AB = A + \alpha.B\ (\alpha \neq 0).$$

Chứng minh rằng $\det(B) = 0$.

<u>*Solution*</u>. Ta có $0 = \det(O_n) = \det(A^{2024}) = [\det(A)]^{2024}$, nên $\det(A) = 0$.

Khi đó từ $AB = A + \alpha.B$, ta suy ra $\alpha.B = AB - A = A(B - I)$,

nên $\det(\alpha.B) = \det(A(B - I)) = \det(A)\det(B - I) = 0$.

Mặt khác $\det(\alpha.B) = \alpha^n.\det(B)$ và $\alpha^n \neq 0$. Do đó $\det(B) = 0$.

27. (OLP-2014) 1) Cho ma trận $X = \begin{bmatrix} I_m & B \\ C & I_n \end{bmatrix}$ với $B_{m\times n}$ và $C_{n\times m}$.

Chứng minh rằng $\det(X) = \det(I_m - BC) = \det(I_n - CB)$.

2) Cho ma trận $X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ với A, D là các ma trận vuông và A khả nghịch.

Chứng minh rằng $\det(X) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$.

<u>*Solution*</u>. Ta chứng minh câu 2) từ đó suy ra câu 1).

Vì A khả nghịch, nên

$$\begin{bmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{bmatrix},$$

do đó

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} = \det(A)\det(D - CA^{-1}B).$$

Lấy $A = I_m, D = I_n$ ta có ngay $\det \begin{bmatrix} I_m & B \\ C & I_n \end{bmatrix} = \det(I_n - CB)$.

Mặt khác $\det \begin{bmatrix} I_m & B \\ C & I_n \end{bmatrix} = \det \left(\begin{bmatrix} I_m & B \\ C & I_n \end{bmatrix}^t \right) = \det \begin{bmatrix} I_n & C \\ B & I_m \end{bmatrix} = \det(I_m - BC)$.

28. Let A, B, C be $n \times n$ matrices such that $AC = CA$. Prove that

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - CB)$$

Solution. First assume that A is invertible. Then

$$\begin{bmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

so that

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$$
$$= \det(AD - ACA^{-1}B) = \det(AD - CB)$$

(We used the fact that A and C commute).

Now we need to get rid of the invertibility assumption. Let $A_t = A - tI$. Since $AC = CA$, we get $A_tC = CA_t$ for all t. It follows that

$$\det \begin{bmatrix} A_t & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A_tD - CB)$$

whenever t is not an eigenvalue of A. But this is a polynomial equation in t, which hold for all but finitely many t's, and hence it must hold for all t. In particular, setting $t = 0$ gives the desired result.

29. Cho $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 + a_1^2 & -a_2 & -a_3 & a_4 \\ a_2 & 1 + a_1^2 & a_4 & a_3 \\ a_3 & -a_4 & 1 + a_1^2 & -a_2 \\ -a_4 & -a_3 & a_2 & 1 + a_1^2 \end{bmatrix}$$

khả nghịch. Tính $\det(A^{-1})$.

Solution. *Cách 1*. Tính trực tiếp một cách thủ công.

Cách 2. Ta thấy $A^tA = \alpha I_4$, với $\alpha = (1 + a_1^2)^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 > 0$. Từ đó

$$[\det(A)]^2 = \det(A^tA) = \det(\alpha I_4) = \alpha^4$$
$$\Rightarrow \det(A) = \alpha^2 \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\alpha^2}.$$

30. Cho $f_1, f_2, ..., f_n$ là các hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$. Chứng minh rằng hệ hàm $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ là phụ thuộc tuyến tính (tức là tồn tại các số $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{R}$ không đồng nhất bằng 0 sao cho $k_1f_1(x) + k_2f_2(x) + ... + k_nf_n(x) \equiv 0, \forall x \in [a, b]$) khi và chỉ khi

$$\det\Big(\int_a^b f_i(x)f_j(x)dx\Big) = 0.$$

Solution. Xét ma trận $A = (a_{ij})$ với các phần tử là

$$a_{ij} = \int_a^b f_i(x)f_j(x)dx;\ i, j = 1, 2, ..., n$$

Ta thấy A là ma trận đối xứng ($A = A^t$, với A^t là ma trận chuyển vị của A).

+) Nếu $\det(A) = 0$, thì phương trình $Av = 0$ có nghiệm không tầm thường

$v = (v_1, v_2, ..., v_n)^t \neq (0, 0, ..., 0)^t$. Khi ấy

$$0 = v^tAv = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \int_a^b v_if_i(x)v_jf_j(x)dx = \int_a^b \Big(\sum_{i=1}^n v_if_i(x)\Big)^2 dx$$

Do đó dẫn đến $\displaystyle\sum_{i=1}^n v_if_i(x) \equiv 0$, $\forall x \in [a, b]$.

Vậy hệ hàm $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ là phụ thuộc tuyến tính trên đoạn $[a, b]$.

+) Ngược lại, nếu hệ hàm $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ là phụ thuộc tuyến tính trên đoạn $[a, b]$, thì trong hệ hàm ấy có một hàm nào đó được biểu diễn bằng một tổ hợp tuyến tính theo các hàm còn lại. Suy ra ma trận A có một hàng (hoặc cột) được biểu diễn bằng một tổ hợp tuyến tính theo các hàng (hoặc cột) còn lại. Do đó phải có $\det(A) = 0$.

31. Cho $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Tính định thức của ma trận vuông cấp n sau

$$\begin{bmatrix} a+b & ab & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & a+b \end{bmatrix}$$

Solution. Ký hiệu

$$A_n = \begin{bmatrix} a+b & ab & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & a+b \end{bmatrix}$$

Khi $n = 1$ thì $\det(A_1) = a + b$. Khi $n = 2$ thì $\det(A_2) = a^2 + ab + b^2$.

Khi $n \geq 3$, khai triển theo hàng đầu tiên ta được

$$\det(A_n) = (a+b)\det(A_{n-1})$$
$$- ab\det\begin{bmatrix} 1 & ab & ... & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a+b & ab \\ 0 & 0 & ... & 1 & a+b \end{bmatrix} = (a+b)\det(A_{n-1}) - ab\det(A_{n-2})$$

Từ công thức truy hồi này, bằng quy nạp ta chứng minh được

$$\det(A_n) = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b},\ \forall n \geq 3$$

hoặc $\det(A_n) = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + ... + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n,\ \forall n \geq 1$.

32. Cho ma trận vuông A cấp n có các phần tử trên đường chéo chính bằng 0, các phần tử còn lại bằng 1 hoặc 2024. Chứng minh rằng $\text{rank}(A)$ bằng n hoặc $n-1$.

    Solution. Xét ma trận B vuông cấp n có tất cả các phần tử $b_{ij} = -1$. Khi đó ma trận $A + B$ sẽ có các phần tử trên đường chéo chính bằng -1, các phần tử còn lại bằng 0 hoặc 2023.

    Suy ra $\det(A+B) = (-1)^n + 0 (\text{mod } 2023) = (-1)^n (\text{mod } 2023)$, nên $\det(A+B) \neq 0$.

    Từ đó chú ý rằng $\text{rank}(B) = 1$ ta được

$$n = \text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) = \text{rank}(A) + 1 \leq n+1.$$

    Vậy suy ra phải có $\text{rank}(A)$ bằng n hoặc $n-1$.

33. Cho các số thực $x, a \neq b$ và $A = [a_{ij}]$ là ma trận vuông cấp 6 có các phần tử được xác định như sau

$$a_{ij} = \begin{cases} x & \text{khi } i = j \\ a & \text{khi } i \neq j\ ,\ i + j = 2n \\ b & \text{khi } i \neq j\ ,\ i + j = 2n+1 \end{cases}$$

    Giả sử $\det(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{6} \alpha_k (x-a)^k$. Tính α_4.

Solution. Ta khai triển định thức

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} x & b & a & b & a & b \\ b & x & b & a & b & a \\ a & b & x & b & a & b \\ b & a & b & x & b & a \\ a & b & a & b & x & b \\ b & a & b & a & b & x \end{bmatrix} \begin{matrix} C1 - C3 \to C1 \\ \left(\begin{matrix} C2 - C4 \to C2 \\ C3 - C5 \to C3 \end{matrix}\right) \\ C4 - C6 \to C4 \end{matrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} x-a & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & x-a & 0 & 0 & b & a \\ a-x & 0 & x-a & 0 & a & b \\ 0 & a-x & 0 & x-a & b & a \\ 0 & 0 & a-x & 0 & x & b \\ 0 & 0 & 0 & a-x & b & x \end{bmatrix} \begin{matrix} R1 - R5 \to R1 \\ \left(\begin{matrix} R3 - R5 \to R3 \\ R2 - R6 \to R2 \end{matrix}\right) \\ R4 - R6 \to R4 \end{matrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} x-a & 0 & x-a & 0 & a-x & 0 \\ 0 & x-a & 0 & x-a & 0 & a-x \\ a-x & 0 & 2(x-a) & 0 & a-x & 0 \\ 0 & a-x & 0 & 2(x-a) & 0 & a-x \\ 0 & 0 & a-x & 0 & x & b \\ 0 & 0 & 0 & a-x & b & x \end{bmatrix}$$

$$= (x-a)^4 \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a-x & 0 & x & b \\ 0 & 0 & 0 & a-x & b & x \end{bmatrix} \left(\begin{matrix} R1 + R3 \to R3 \\ R2 + R4 \to R4 \end{matrix}\right)$$

$$= (x-a)^4 \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & a-x & 0 & x & b \\ 0 & 0 & 0 & a-x & b & x \end{bmatrix}$$

$$= (x-a)^4 \det\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ a-x & 0 & x & b \\ 0 & a-x & b & x \end{bmatrix} \left(\begin{matrix} C3 + C1 \to C1 \\ C4 + C2 \to C2 \end{matrix}\right)$$

$$= (x-a)^4 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ a & b & x & b \\ b & a & b & x \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2C1 + C3 \to C3 \\ 2C2 + C4 \to C4 \end{pmatrix}$$

$$= (x-a)^4 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & 2a+x & 3b \\ b & a & 3b & 2a+x \end{bmatrix}$$

$$= (x-a)^4 \det \begin{bmatrix} 2a+x & 3b \\ 3b & 2a+x \end{bmatrix}$$

$$= (x-a)^4[(2a+x)^2 - 9b^2] = (x-a)^4([(x-a)+3a]^2 - 9b^2)$$

$$= (x-a)^4[(x-a)^2 + 6a(x-a) + 9(a^2-b^2)]$$

$$= (x-a)^6 + 6a(x-a)^5 + 9(a^2-b^2)(x-a)^4 = \sum_{k=0}^{6} \alpha_k (x-a)^k.$$

Vậy ta được $\alpha_4 = 9(a^2 - b^2)$.

34. Cho ma trận $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $\det(B - \alpha I_n) = 0$.

Chứng minh rằng $\forall a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ ta có $\det \left[\sum_{k=0}^{n} a_k B^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k I_n \right] = 0$.

<u>*Solution*</u>. Ta thấy với mỗi $k = 1, 2, ..., n$ thì

$$\begin{aligned} B^k - \alpha^k I_n &= B^k - (\alpha I_n)^k \\ &= (B - \alpha I_n)(B^{k-1} + \alpha B^{k-2} + ... + \alpha^{k-1} I_n) = (B - \alpha I_n) M_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a_k B^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k I_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k (B^k - \alpha^k I_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k (B^k - \alpha^k I_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k (B - \alpha I_n) M_k = (B - \alpha I_n) \sum_{k=1}^{n} a_k M_k = (B - \alpha I_n) M. \end{aligned}$$

Vậy suy ra

$$\det \left(\sum_{k=0}^{n} a_k B^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k I_n \right) = \det \Big[(B - \alpha I_n) M \Big] = \det(B - \alpha I_n) \det(M) = 0.$$

35. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau

$$M = \begin{bmatrix} C_0^0 & 2C_1^0 & 2^2 C_2^0 & \dots & 2^n C_n^0 \\ 0 & C_1^1 & 2C_2^1 & \dots & 2^{n-1} C_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_n^n \end{bmatrix}$$

<u>*Solution*</u>. Đặt $X = [1, x, x^2, ..., x^{n-1}, x^n]$ và

$Y = [1, (x+2), (x+2)^2, ..., (x+2)^{n-1}, (x+2)^n]$ thì ta có thể viết $Y = XM$.

Rõ ràng $\det(M) = \prod_{k=0}^{n} C_k^k = 1$, nên M khả nghịch. Khi đó $YM^{-1} = X \quad (*)$.

Chọn $x = t-2$ thì ta được

$X = [1, (t-2), (t-2)^2, ..., (t-2)^{n-1}, (t-2)^n]$ và $Y = [1, t, t^2, ..., t^{n-1}, t^n]$.

Gọi $M^{-1} = [m_{ij}]$, khai triển hệ $(*)$ (chẳng hạn lấy Y nhân với cột thứ j của M^{-1}) thì với mỗi $j = 1, 2, ..., n, n+1$ ta được

$$\begin{aligned} &m_{1j} + m_{2j}t + m_{3j}t^2 + ... + m_{jj}t^{j-1} + ... + m_{nj}t^{n-1} + m_{n+1j}t^n = (t-2)^{j-1} \\ =&(-2)^{j-1}C_{j-1}^0 + (-2)^{j-2}C_{j-1}^1 t + (-2)^{j-3}C_{j-1}^2 t^2 + ... + (-2)C_{j-1}^{j-2}t^{j-2} + C_{j-1}^{j-1}t^{j-1} \end{aligned}$$

Vì các hệ thức trên đây đúng $\forall t \in \mathbb{R}$ nên suy ra với mỗi $j = 1, 2, ..., n, n+1$ thì

$$\begin{aligned} &m_{1j} = (-2)^{j-1}C_{j-1}^0,\ m_{2j} = (-2)^{j-2}C_{j-1}^1,\ m_{3j} = (-2)^{j-3}C_{j-1}^2,\ ..., \\ &m_{jj} = C_{j-1}^{j-1},\ m_{j+1j} = m_{j+2j} = ... = m_{nj} = m_{n+1j} = 0 \end{aligned}$$

Vậy ta được

$$m_{ij} = \begin{cases} (-2)^{j-i}C_{j-1}^{i-1} & \text{khi } \ i \le j \\ 0 & \text{khi } \ i > j \end{cases}$$

với mỗi $j = 1, 2, ..., n, n+1$ và ma trận nghịch đảo tìm được là

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} C_0^0 & (-2)C_1^0 & (-2)^2C_2^0 & \dots & (-2)^nC_n^0 \\ 0 & C_1^1 & (-2)C_2^1 & \dots & (-2)^{n-1}C_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_n^n \end{bmatrix}.$$

36. Cho ma trận $(n+1)$ hàng và $(n+2)$ cột sau

$$A = \begin{bmatrix} C_0^0 & C_1^0 & C_2^0 & \dots & C_n^0 & C_{n+1}^0 \\ 0 & C_1^1 & C_2^1 & \dots & C_n^1 & C_{n+1}^1 \\ 0 & 0 & C_2^2 & \dots & C_n^2 & C_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_n^n & C_{n+1}^n \end{bmatrix}$$

Gọi D_k là định thức của ma trận nhận được từ A bằng cách bỏ đi cột thứ k .

Chứng tỏ rằng $D_k = C_{n+1}^{k-1}$ $(k = 1, 2, ..., n+2)$.

Solution. Xét ma trận cấp $n+2$ sau (bổ sung cho A một hàng nữa với x tuỳ ý)

$$A' = \begin{bmatrix} C_0^0 & C_1^0 & C_2^0 & \dots & C_n^0 & C_{n+1}^0 \\ 0 & C_1^1 & C_2^1 & \dots & C_n^1 & C_{n+1}^1 \\ 0 & 0 & C_2^2 & \dots & C_n^2 & C_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_n^n & C_{n+1}^n \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^n & x^{n+1} \end{bmatrix}$$

Lấy cột thứ k nhân -1 rồi cộng vào cột thứ $k+1$ (với lần lượt $k = n+1, n, ..., 3, 2, 1$) và chú ý rằng $C_{k+1}^m - C_k^m = C_k^{m-1}$ $(m = 1, 2, ..., k)$ ta được

$$\Delta_{n+2} = \det(A') = \det \begin{bmatrix} C_0^0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & C_1^1 & C_1^0 & \dots & C_{n-1}^0 & C_n^0 \\ 0 & 0 & C_2^2 & \dots & C_{n-1}^1 & C_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_n^n & C_n^{n-1} \\ 1 & x-1 & x^2-x & \dots & x^n - x^{n-1} & x^{n+1} - x^n \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & C_0^0 & C_1^0 & \dots & C_{n-1}^0 & C_n^0 \\ 0 & 0 & C_1^1 & \dots & C_{n-1}^1 & C_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-1}^{n-1} & C_n^{n-1} \\ 1 & x-1 & x(x-1) & \dots & x^{n-1}(x-1) & x^n(x-1) \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} C_0^0 & C_1^0 & \dots & C_{n-1}^0 & C_n^0 \\ 0 & C_1^1 & \dots & C_{n-1}^1 & C_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{n-1}^{n-1} & C_n^{n-1} \\ x-1 & x(x-1) & \dots & x^{n-1}(x-1) & x^n(x-1) \end{bmatrix}$$

$$= (x-1) \det \begin{bmatrix} C_0^0 & C_1^0 & \dots & C_{n-1}^0 & C_n^0 \\ 0 & C_1^1 & \dots & C_{n-1}^1 & C_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{n-1}^{n-1} & C_n^{n-1} \\ 1 & x & \dots & x^{n-1} & x^n \end{bmatrix}$$

$$= (x-1)\Delta_{n+1} = ... = (x-1)^n \Delta_2 = (x-1)^n \det \begin{bmatrix} C_0^0 & C_1^0 \\ 1 & x \end{bmatrix} = (x-1)^{n+1}$$

$$= [x + (-1)]^{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m x^m (-1)^{n+1-m} = \sum_{k=1}^{n+2} C_{n+1}^{k-1} x^{k-1} (-1)^{n+2-k} \quad (1)$$

Mặt khác, khai triển $\det(A')$ theo hàng cuối cùng ta có

$$\begin{aligned}\Delta_{n+2} = \det(A') &= (-1)^{n+3}D_1 + (-1)^{n+4}xD_2 + ... + (-1)^{2n+3}x^nD_{n+1} + (-1)^{2n+4}D_{n+2} \\ &= \sum_{k=1}^{n+2} D_k x^{k-1}(-1)^{n+2+k} = \sum_{k=1}^{n+2} D_k x^{k-1}(-1)^{n+2-k} \quad (2)\end{aligned}$$

So sánh (1) và (2) như là đa thức của x ta được $D_k = C_{n+1}^{k-1}$ $(k = 1, 2, ..., n+2)$.

37. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_{2023} + bx_{2024} = 1 \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 + \cdots + bx_{2023} + bx_{2024} = 2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + ax_{2023} + bx_{2024} = 2023 \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_{2023} + ax_{2024} = 2024 \end{cases}$$

Tìm điều kiện của a và b để hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

<u>*Solution*</u>. Xét định thức của ma trận liên kết của hệ đã cho

$$D = \det \begin{bmatrix} a & b & b & \ldots & b & b \\ b & a & b & \ldots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \ldots & a & b \\ b & b & b & \ldots & b & a \end{bmatrix}$$

Cộng tất cả các cột còn lại vào cột đầu tiên ta được

$$D = \det \begin{bmatrix} a+2023b & b & b & \ldots & b & b \\ a+2023b & a & b & \ldots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a+2023b & b & b & \ldots & a & b \\ a+2023b & b & b & \ldots & b & a \end{bmatrix} = (a+2023b)\det \begin{bmatrix} 1 & b & b & \ldots & b & b \\ 1 & a & b & \ldots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & b & b & \ldots & a & b \\ 1 & b & b & \ldots & b & a \end{bmatrix}$$

Nhân hàng đầu với -1 rồi cộng vào tất cả các hàng còn lại ta được

$$D = (a+2023b)\det \begin{bmatrix} 1 & b & b & ... & b & b \\ 0 & a-b & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a-b \end{bmatrix} = (a+2023b)(a-b)^{2023}.$$

Điều kiện cần và đủ để hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $D \neq 0$, do đó ta suy ra điều kiện của a và b là: $a + 2023b \neq 0$ và $a \neq b$.

38. Chứng minh rằng nếu $a \neq 0$ thì hệ sau luôn có nghiệm $\forall b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} ax + (1-b)y + cz + (1-d)t &= a \\ (b-1)x + ay + (d-1)z + ct &= b \\ -cx + (1-d)y + az + (b-1)t &= c \\ (d-1)x - cy + (1-b)z + at &= d \end{cases}$$

<u>*Solution*</u>. Gọi A là ma trận hệ số ở vế phải của hệ phương trình đã cho

$$A = \begin{bmatrix} a & 1-b & c & 1-d \\ b-1 & a & d-1 & c \\ -c & 1-d & a & b-1 \\ d-1 & -c & 1-b & a \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad AA^t = mI_4,$$

với $m = a^2 + (b-1)^2 + c^2 + (d-1)^2 \neq 0$ (do $a \neq 0$).

Do đó $[\det(A)]^2 = \det(A)\det(A^t) = \det(AA^t) = \det(mI_4) = m^4$.

Suy ra $\det(A) = m^2 \neq 0$. Vậy hệ đã cho luôn có nghiệm $\forall b, c, d \in \mathbb{R}$.

39. Cho các ma trận $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ thoả mãn

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2k & k(2k+1) \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng tồn tại ma trận $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ sao cho $BA = C^k$.

<u>*Solution*</u>. Ta thấy rằng (*giải thích?*) $\det(A), \det(B)$ và tất cả các định thức con của A, B là những số nguyên. Hơn nữa

$$\det(A)\det(B) = \det(AB) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2k & k(2k+1) \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,$$

nên $\det(A) = \det(B) = \pm 1$. Suy ra tồn tại $A^{-1}, B^{-1} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ (*giải thích?*).

Bằng quy nạp ta chứng minh được

$$M^k = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 1 & 2k & k(2k+1) \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = AB, \ k \in \mathbb{N}$$

Do đó

$$BA = (A^{-1}A)BA = A^{-1}(AB)A = A^{-1}M^kA = ...? = (A^{-1}MA)^k = C^k.$$

40. Cho ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ với $\operatorname{rank}(A) = 1$.

Chứng tỏ rằng $\det(I_n + A) = 1 + \operatorname{trace}(A)$.

<u>*Solution*</u>. Vì $\operatorname{rank}(A) = 1$, nên A phải có dạng

$$A = \begin{bmatrix} k_1a_1 & k_2a_1 & \dots & k_ia_1 & \dots & k_na_1 \\ k_1a_2 & k_2a_2 & \dots & k_ia_2 & \dots & k_na_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_1a_i & k_2a_i & \dots & k_ia_i & \dots & k_na_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1a_n & k_2a_n & \dots & k_ia_n & \dots & k_na_n \end{bmatrix},$$

với $(a_1, a_2, ..., a_n) \neq (0, 0, ..., 0)$ và $(k_1, k_2, ..., k_n) \neq (0, 0, ..., 0)$.

Khi đó

$$I_n + A = \begin{bmatrix} 1+k_1a_1 & k_2a_1 & \dots & k_ia_1 & \dots & k_na_1 \\ k_1a_2 & 1+k_2a_2 & \dots & k_ia_2 & \dots & k_na_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_1a_i & k_2a_i & \dots & 1+k_ia_i & \dots & k_na_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1a_n & k_2a_n & \dots & k_ia_n & \dots & 1+k_na_n \end{bmatrix}.$$

Nếu $\exists k_ia_i = 0$ (tức là $k_i = 0$ hoặc $a_i = 0$) thì

$$I_n + A = \begin{bmatrix} 1+k_1a_1 & k_2a_1 & \dots & 0 & \dots & k_na_1 \\ k_1a_2 & 1+k_2a_2 & \dots & 0 & \dots & k_na_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_1a_i & k_2a_i & \dots & 1 & \dots & k_na_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1a_n & k_2a_n & \dots & 0 & \dots & 1+k_na_n \end{bmatrix},$$

hoặc

$$I_n + A = \begin{bmatrix} 1+k_1a_1 & k_2a_1 & \dots & k_ia_1 & \dots & k_na_1 \\ k_1a_2 & 1+k_2a_2 & \dots & k_ia_2 & \dots & k_na_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1a_n & k_2a_n & \dots & k_ia_n & \dots & 1+k_na_n \end{bmatrix},$$

nên khai triển Laplace cho $\det(I_n + A)$ theo cột thứ i hoặc theo hàng thứ i ta được $\det(I_n + A) = \det(I_{n-1} + B)$ với B là ma trận cấp $(n-1)$ có dạng như ma trận A.

Do đó giả sử $\forall a_i \neq 0$ và $\forall k_i \neq 0$. Rút thừa số chung của các hàng và các cột ta có

$$\det(I_n + A) = (k_1a_1k_2a_2...k_na_n)\det\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{k_1a_1} & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+\frac{1}{k_2a_2} & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1+\frac{1}{k_ia_i} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1+\frac{1}{k_na_n} \end{bmatrix}.$$

Nhân hàng đầu với (-1) rồi cộng vào các hàng từ thứ 2 đến hàng thứ n ta được

$$\det(I_n + A) = (k_1a_1k_2a_2...k_na_n)\det\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{k_1a_1} & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ -\frac{1}{k_1a_1} & \frac{1}{k_2a_2} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{k_1a_1} & 0 & \dots & \frac{1}{k_ia_i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{k_1a_1} & 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{1}{k_na_n} \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} 1+k_1a_1 & k_2a_2 & \dots & k_ia_i & \dots & k_na_n \\ -1 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Cộng tất cả các cột từ thứ 2 đến thứ n vào cột đầu tiên ta được

$$\det(I_n + A) = \det\begin{bmatrix} 1+\sum_{i=1}^n k_ia_i & k_2a_2 & \dots & k_ia_i & \dots & k_na_n \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^n k_ia_i = 1 + \operatorname{tr}(A).$$

41. _Bài 33, Chương 4_. Cho ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ thoả mãn $A^2 + I_n = O_n$. Chứng minh rằng A không có giá trị riêng thực. Từ đó suy ra rằng không tồn tại ma trận $B \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ sao cho $B^2 + I_{2n+1} = O_{2n+1}$.

Solution. Giá trị riêng λ của ma trận A là nghiệm của đa thức đặc trưng $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$. Giả sử ma trận A đã cho có giá trị riêng thực là λ_0, thế thì $P(\lambda_0) = \det(A - \lambda_0 I_n) = 0$. Suy ra

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda_0 I_n) = \det(A - \lambda_0 I_n)\det(A + \lambda_0 I_n) = \det[(A - \lambda_0 I_n)(A + \lambda_0 I_n)] \\ &= \det(A^2 - \lambda_0^2 I_n) = \det(-I_n - \lambda_0^2 I_n) = \det[-(1 + \lambda_0^2) I_n] = (-1)^n (1 + \lambda_0^2)^n. \end{aligned}$$

Đây là điều vô lý! Vậy A không có giá trị riêng thực.

Đa thức đặc trưng của ma trận $B \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ là $P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_{2n+1})$ có bậc $2n + 1$. Đa thức bậc lẻ luôn có ít nhất một nghiệm thực. Do đó, từ kết quả trên ta suy ra không tồn tại ma trận $B \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ thoả mãn $B^2 + I_{2n+1} = O_{2n+1}$.

Hoặc là: Giả sử có ma trận $B \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ sao cho $B^2 + I_{2n+1} = O_{2n+1}$, thế thì $B^2 = -I_{2n+1}$, nên suy ra $\det(B^2) = \det(-I_{2n+1})$, hay $[\det(B)]^2 = (-1)^{2n+1} = -1$, là điều vô lý!

42. Tìm tất cả các ma trận thực X, vuông, cấp 2 thoả mãn

$$X^3 - 3X^2 + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = O_2.$$

Solution. Ta có

$$X^3 - 3X^2 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{hay} \quad X^2(X - 3I_2) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

Tính định thức hai vế thì $[\det(X)]^2 \det(X - 3I_2) = 0$. Suy ra có hai trường hợp:

1) $\det(X) = 0$. Ta gọi vết của ma trận $A = (a_{ij})$ là $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (trace=vết).

Ta chứng tỏ được (*giải thích?*) với mọi cặp ma trận A, B và với mọi số thực α thì

$$\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B),\ \mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{tr}(A),\ \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

Giả sử $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Thế thì $ad - bc = 0$ và $\mathrm{tr}(X) = a + d$.

Đa thức đặc trưng $P_X(\lambda) = \det(X - \lambda I) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(X)\lambda$.

Để cho gọn, đặt $\mathrm{tr}(X) = t$. Theo định lý Cayley-Hamilton thì $X^2 - \mathrm{tr}(X)X = O_2$ hay $X^2 = tX$. Thay vào $(*)$ ta được

$$t(X^2 - 3X) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{hay} \quad t(t - 3)X = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Lấy vết của ma trận ở cả hai vế (1) ta được

$$t^2(t - 3) = -4 \quad \text{hay} \quad t^3 - 3t^2 + 4 = (t + 1)(t - 2)^2 = 0,\ \text{hay}\ t_1 = -1,\ t_2 = 2.$$

Với $t_1 = -1$, thay trở lại (1) ta được $4X = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$, nên $X_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Với $t_2 = 2$, thay trở lại (1) ta được $-2X = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$, nên $X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2) $\det(X - 3I_2) = 0$. Suy ra X có một giá trị riêng là $\lambda = 3$. Để tìm nốt giá trị riêng còn lại ta cộng cả hai vế của $(*)$ với $4I_2$ thì được

$$X^3 - 3X^2 + 4I_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{hay} \quad (X + I_2)(X - 2I_2)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tính định thức cả hai vế ta được $\det(X + I_2)[\det(X - 2I_2)]^2 = 0$. Do đó có hai khả năng: $\det(X + I_2) = 0$ hoặc $\det(X - 2I_2) = 0$.

+) Nếu $\det(X + I_2) = 0$, thì giá trị riêng còn lại của X là $\lambda = -1$. Đa thức đặc trưng $P_X(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 3) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$. Theo định lý Cayley-Hamilton $X^2 - 2X - 3I_2 = O_2$, suy ra $X^3 - 2X^2 - 3X = O_2$.

Từ đó phối hợp với $(*)$ ta tìm được (*giải thích?*) $X_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

+) Nếu $\det(X - 2I_2) = 0$, thì giá trị riêng còn lại của X là $\lambda = 2$. Đa thức đặc trưng $P_X(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$. Theo định lý Cayley-Hamilton $X^2 - 5X + 6I_2 = O_2$, suy ra $X^3 - 5X^2 + 6X = O_2$.

Từ đó phối hợp với $(*)$ ta tìm được (*giải thích?*) $X_4 = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$.

43. Cho $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ \frac{1}{2}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ \frac{1}{2}x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \end{cases}$$

__Solution__. Hệ đã cho có thể viết lại

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \frac{1}{2} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \frac{1}{2} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

Xét ma trận $A = [a_{ij}]$ có đa thức đặc trưng

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + c_1\lambda + c_0$$

Vì $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ nên $c_0, c_1, ..., c_{n-1} \in \mathbb{Z}$, nói riêng $c_0 = \det(A)$.

Ta thấy rằng

$$\begin{aligned} P(\frac{1}{2}) &= \det(A - \frac{1}{2}I_n) = (-1)^n \frac{1}{2^n} + c_{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} + ... + c_1\frac{1}{2} + c_0 \\ &= \frac{1}{2^n}[(-1)^n + 2c_{n-1} + ... + 2^{n-1}c_1 + 2^n c_0] = \frac{1}{2^n}.M \end{aligned}$$

Rõ ràng là $M \equiv 1(\text{mod}2)$, nên $M \neq 0$, suy ra $P(\frac{1}{2}) = \det(A - \frac{1}{2}I_n) \neq 0$.

Điều này dẫn tới hệ $(*)$ chỉ có nghiệm tầm thường $[x_1, x_2, ..., x_n]^t = \theta$.

Note. Trong hệ đã cho, nếu thay $\frac{1}{2}$ ở vế trái bởi $\frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0, \pm 1$ thì bài toán vẫn được giải hoàn toàn tương tự.

44. Cho đa thức $f(x) = x^{2024} + x^2 - 1$. Tính $\det f(B)$ với ma trận

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

<u>Solution</u>. Ta chứng tỏ rằng: *nếu λ là giá trị riêng của ma trận A thì $q(\lambda)$ là giá trị riêng của ma trận $q(A)$ với bất kỳ đa thức $q(x)$*. Thật vậy, λ là nghiệm của đa thức đặc trưng $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$, hay $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Khi đó giả sử $q(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0$ là đa thức tuỳ ý, ta có

$$\begin{aligned} \det[q(A) - q(\lambda)E] &= \det[(a_m A^m + ... + a_1 A + a_0 I_n) - (a_m \lambda^m + ... + a_1\lambda + a_0)I_n] \\ &= \det[a_m(A^m - \lambda^m I_n) + ... + a_2(A^2 - \lambda^2 I_n) + a_1(A - \lambda I_n)] \end{aligned}$$
$$= \det\left[(A - \lambda I_n)\Big(a_m(A^{m-1} + ... + A\lambda^{m-2}I_n + \lambda^{m-1}I_n) + ... + a_2(A + \lambda I_n) + a_1 I_n\Big)\right]$$
$$= \det(A - \lambda I_n)\det[a_m(A^{m-1} + ... + A\lambda^{m-2}I_n + \lambda^{m-1}I_n) + ... + a_2(A + \lambda I_n) + a_1 I_n] = 0$$

điều này chứng tỏ $q(\lambda)$ là giá trị riêng của $q(A)$.

Tiếp theo ta thấy rằng $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (-1)^n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + c_1\lambda + c_0$. Do đó $P(0) = \det(A) = c_0$. Lại giả sử A có các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ (không nhất thiết phân biệt và có thể bao gồm các số phức). Khi đó ta có biểu diễn

$P(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)...(\lambda - \lambda_n)$. Do đó $c_0 = \det(A) = P(0) = \lambda_1\lambda_2...\lambda_n$.

Trở lại bài toán đã cho ta có

$$\det(B - \lambda I_n) = \det\begin{bmatrix} 4-\lambda & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 9 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1)\det\begin{bmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda + 1)[(4 - \lambda)(3 - \lambda) - 6] = (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 6),$$

nên B có các giá trị riêng $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2,\ \lambda_4 = 6$.

Từ đó suy ra ma trận $f(B) = B^{2024} + B^2 - I_4$ có các giá trị riêng là

$$f(\lambda_1) = 1,\ f(\lambda_2) = 1,\ f(\lambda_3) = 2^{2024} + 3,\ f(\lambda_4) = 6^{2024} + 35.$$

Do đó $\det[f(B)] = f(\lambda_1)f(\lambda_2)f(\lambda_3)f(\lambda_4) = (2^{2024} + 3)(6^{2024} + 35)$.

45. Cho A là ma trận vuông cấp n có tất cả các phần tử là những số nguyên chẵn.

Chứng minh rằng A không thể có giá trị riêng là số nguyên lẻ.

Solution. Xét đa thức đặc trưng của ma trận $A = [a_{ij}]$ đã cho

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (-1)^n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + c_1\lambda + c_0$$

Rõ ràng là $P(0) = \det(A) = c_0$ và $c_1, ..., c_{n-1}$ là những số nguyên chẵn (vì a_{ij} là các số nguyên chẵn). Giả sử A có một giá trị riêng λ_0 nào đó là số nguyên lẻ.

Khi đó $0 = P(\lambda_0) = (-1)^n\lambda_0^n + c_{n-1}\lambda_0^{n-1} + ... + c_1\lambda_0 + c_0$.

Suy ra $(-1)^{n+1}\lambda_0^n = c_{n-1}\lambda_0^{n-1} + ... + c_1\lambda_0 + c_0$.

Vế trái là số nguyên lẻ, còn vế phải là số nguyên chẵn, mâu thuẫn!

Vậy ma trận A đã cho không thể có giá trị riêng là số nguyên lẻ.

46. Cho A là ma trận vuông cấp n với các phần tử a_{ij} là những số nguyên.

1) Giả sử số nguyên m là một giá trị riêng của A.

Chứng minh rằng m là một ước số của $\det(A)$.

2) Giả sử $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = k,\ \forall i = 1, 2, ..., n$.

Chứng minh rằng k là một ước số của $\det(A)$.

Solution. 1) Ta viết đa thức đặc trưng của A dưới dạng

$$\det(A - \lambda I_n) = p(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + ... + c_{n-1}\lambda + c_n.$$

Vì các phần tử a_{ij} là số nguyên, nên $c_1, c_2, ..., c_n$ là những số nguyên và nói riêng cho $\lambda = 0$ ta có $c_n = \det(A)$.

Với số nguyên m là một giá trị riêng của A ta có $p(m) = 0$, nên suy ra

$$-\det(A) = (-1)^n m^n + c_1 m^{n-1} + c_2 m^{n-2} + ... + c_{n-1}m,$$

do đó m là một ước số của $\det(A)$.

2) Với số nguyên k thoả mãn giả thiết của bài toán, ta dễ dàng thấy rằng $Av = kv$, trong đó $v = (1, 1, ..., 1)^t$.

Như thế số nguyên k là một giá trị riêng của A, do đó theo kết quả phần a) ta suy ra k là một ước số của $\det(A)$.

47. Biết rằng mọi ma trận thực đối xứng đều có giá trị riêng là các số thực. Chứng minh rằng nếu α, β, γ là các số thực khác 0 và a, b, c, d, p, q là các số thực tuỳ ý thì ma trận

$$B = \begin{bmatrix} a & b\frac{\alpha}{\beta} & c\frac{\alpha}{\gamma} \\ b\frac{\beta}{\alpha} & d & p\frac{\beta}{\gamma} \\ c\frac{\gamma}{\alpha} & p\frac{\gamma}{\beta} & q \end{bmatrix}$$

cũng có các giá trị riêng là các số thực.

Solution. Ta xét đa thức đặc trưng của ma trận B đã cho

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) &= \det \begin{bmatrix} a-\lambda & b\frac{\alpha}{\beta} & c\frac{\alpha}{\gamma} \\ b\frac{\beta}{\alpha} & d-\lambda & p\frac{\beta}{\gamma} \\ c\frac{\gamma}{\alpha} & p\frac{\gamma}{\beta} & q-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (a-\lambda)(d-\lambda)(q-\lambda) + b\frac{\alpha}{\beta}p\frac{\beta}{\gamma}c\frac{\gamma}{\alpha} + b\frac{\beta}{\alpha}p\frac{\gamma}{\beta}c\frac{\alpha}{\gamma} - \\ &\quad - c\frac{\alpha}{\gamma}(d-\lambda)c\frac{\gamma}{\alpha} - b\frac{\alpha}{\beta}b\frac{\beta}{\alpha}(q-\lambda) - p\frac{\beta}{\gamma}p\frac{\gamma}{\beta}(a-\lambda) \\ &= (a-\lambda)(d-\lambda)(q-\lambda) + 2bcp - c^2(d-\lambda) - b^2(q-\lambda) - p^2(a-\lambda). \end{aligned}$$

Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & p \\ c & p & q \end{bmatrix}$, là ma trận thực đối xứng có đa thức đặc trưng là

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{bmatrix} a-\lambda & b & c \\ b & d-\lambda & p \\ c & p & q-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (a-\lambda)(d-\lambda)(q-\lambda) + 2bcp - c^2(d-\lambda) - b^2(q-\lambda) - p^2(a-\lambda). \end{aligned}$$

Ta thấy $P_A(\lambda) \equiv P_B(\lambda)$, mà nghiệm của đa thức đặc trưng của một ma trận chính là giá trị riêng của ma trận đó, nên các giá trị riêng của hai ma trận A và B là như nhau. Thế mà đề bài cho biết mọi ma trận thực đối xứng đều có giá trị riêng là các số thực, nên các giá trị riêng của ma trận A cũng là của ma trận B là các số thực.

to be continued