Trường Đại học Ngân hàng TP Hồ Chí Minh
Bộ môn Toán Kinh tế

Hướng dẫn ôn thi
Olympic Toán sinh viên
Phần Giải tích

TS. Lê Phương (chủ biên)
ThS. Bùi Thị Thiện Mỹ

Tài liệu tham khảo - Lưu hành nội bộ

www.mathvn.com

www.mathvn.com

Lời nói đầu

Olympic Toán sinh viên là cuộc thi học thuật thường niên được phối hợp tổ chức bởi Hội toán học Việt Nam và Bộ Giáo dục đào tạo dành cho sinh viên các trường đại học và cao đẳng trong cả nước. Kể từ lần đầu được tổ chức vào năm 1993, cuộc thi đã trải qua chặng đường hơn 25 năm. Cuộc thi đã góp phần quan trọng trong việc thúc đẩy phong trào dạy và học toán trong các trường đại học, cao đẳng trong cả nước với một tỉ lệ không nhỏ các sinh viên đạt giải đến từ các trường không có chuyên ngành toán.

Đã có khá nhiều sách và giáo trình được biên soạn nhằm phục vụ cho cuộc thi. Có thể kể đến các cuốn "Toán Olympic cho sinh viên" của Trần Lưu Cường [2, 3], "Những bài toán giải tích chọn lọc" của Tô Văn Ban [4], "Bài tập giải tích" của Kaczkor - Nowak [5, 6],... cùng với đó là các cuốn kỷ yếu chính thức từ Ban tổ chức cuộc thi [8]. Tuy nhiên nhìn chung các tài liệu này chỉ phù hợp với đối tượng là các sinh viên học ngành toán hoặc đã kinh qua các cuộc thi học sinh giỏi ở phổ thông. Khi đọc lời giải của các bài toán trong những tài liệu trên, phần đông sinh viên sẽ không hiểu vì sao tác giả lại tìm được những lời giải như vậy. Do đó rất khó để sinh viên có thể tự đọc các tài liệu trên mà không có sự phân tích, giảng giải từ phía các giảng viên có kinh nghiệm.

Tài liệu tham khảo này được đúc kết từ kinh nghiệm thực tế của các tác giả với tư cách là người từng tham gia dự thi và tham gia huấn luyện đội tuyển Olympic Toán của trường Đại học Ngân hàng thành phố Hồ Chí Minh. Tài liệu ra đời với hi vọng giúp sinh viên có thể tự học, tự ôn luyện để nắm bắt được phương pháp giải các bài toán giải tích. Thông qua các ví dụ cụ thể, sinh viên sẽ được tiếp cận với các dạng toán thường xuất hiện trong cuộc thi. Với mỗi bài toán, chúng tôi không chỉ cung cấp lời giải chi tiết mà còn phân tích ý tưởng cũng như cách thức suy nghĩ để tìm ra lời giải một cách tự nhiên nhất. Từ đó giúp sinh viên rèn luyện được phương pháp suy nghĩ logic và tư duy sáng tạo vốn rất cần thiết cho sinh viên không chỉ trong phạm vi cuộc thi mà còn trong học tập và trong công việc tương lai.

TP. Hồ Chí Minh, tháng 6 năm 2019
Các tác giả

www.mathvn.com

www.mathvn.com

Mục lục

www.mathvn.com

www.mathvn.com

Chương 1

Kiến thức cơ sở

1.1 Giải bài toán olympic như thế nào

Phân tích bài toán

Giải một bài toán là thông qua các suy luận logic, ta biến đổi các giả thiết ban đầu thành kết luận của bài toán. Do đó, định hướng chính khi giải toán là biến đổi bài toán P ban đầu lần lượt thành các *bài toán đơn giản hơn* P_1, P_2, ..., P_n để từ đó thu được kết luận của bài toán P.

$$\boxed{\text{Bài toán } P} \to \boxed{\text{Bài toán } P_1} \to \cdots \to \boxed{\text{Bài toán } P_n} \to \boxed{\text{Kết luận}}$$

Các bài toán trung gian, ví dụ bài toán (P_1), có 1 trong 2 dạng:

1. Tương đương với bài toán P ban đầu ($P_1 \Leftrightarrow P$): khi đó bài toán P chỉ giải được khi và chỉ khi bài toán P_1 giải được. Ta có thể tự tin tập trung vào việc giải bài toán P_1 đơn giản hơn bài toán ban đầu.

2. Bài toán ban đầu là hệ quả của bài toán P_1 ($P_1 \Rightarrow P$): trong trường hợp này ta cần dự phòng tình huống bài toán P_1 này là sai (không thể giải được), khi đó ta phải đi tìm một cách tiếp cận khác.

Trong quá trình tìm lời giải bài toán, ta có thể vận dụng linh hoạt 3 phương pháp suy luận cơ bản sau:

1. *Phương pháp phản chứng:* Để chứng minh mệnh đề P đúng, ta hãy giả sử rằng P sai và từ đó suy ra một điều vô lí.

2. *Phương pháp qui nạp:* Để chứng minh mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên n, ta có thể chứng minh rằng: $P(0)$ đúng và nếu $P(n)$ đúng thì $P(n+1)$ đúng.

www.mathvn.com

3. *Phương pháp chia trường hợp:* Để chứng minh mệnh đề P đúng, ta có thể viết mệnh đề P thành tích của các mệnh đề đơn giản hơn: $P = P_1P_2\cdots P_n$ rồi chứng minh tất cả các mệnh đề P_1, P_2, ..., P_n đều đúng.

Mục tiêu chính của tài liệu tham khảo này là hướng dẫn sinh viên cách suy luận để tìm ra lời giải của các bài toán giải tích thường xuất hiện trong cuộc thi Olympic Toán sinh viên.

Trình bày lời giải

Quá trình *phân tích* bài toán để tìm lời giải thường không phải là một quá trình suy luận logic chặt chẽ, mà còn dựa nhiều trên kinh nghiệm và trực giác. Do đó ta sẽ không ghi những gì ta phân tích vào trong lời giải mà ta chỉ ghi những suy luận chặt chẽ về mặt logic mà thôi.

1. Ta viết ra một lời giải đúng chứ ta không cần viết ra lí do tại sao ta lại tìm được lời giải như vậy. Ví dụ: để giải bài toán tìm công thức tổng quát của một dãy số truy hồi, ta có thể tính toán thử một số phần tử đầu tiên của dãy để dự đoán công thức tổng quát, sau đó sẽ cố gắng chứng minh dự đoán đó bằng qui nạp toán học. Bước tính toán thực nghiệm để dự đoán công thức tổng quát là bước phân tích được tiến hành ngoài nháp, không đưa vào bài giải. Trong bài giải ta chỉ cần ghi "Bằng phương pháp qui nạp ta sẽ chứng minh công thức ..." và sau đó ghi ra phần chứng minh mà không cần lí giải bằng cách nào ta tìm được công thức đó.

2. Một lời giải tốt cần cô đọng, súc tích nhưng đầy đủ các bước suy luận. Để lời giải đỡ nặng nề và dễ đọc, ta không nên quá lạm dụng các kí hiệu $\forall, \exists, \Leftrightarrow$ mà nên sử dụng các mệnh đề logic thay thế như "với mọi", "tồn tại", "khi và chỉ khi"...

1.2 Hằng đẳng thức

Cho các số thực a, b và số tự nhiên n, ta có các hằng đẳng thức sau:

1. Khai triển nhị thức Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

www.mathvn.com

2. Hiệu của 2 lũy thừa cùng bậc:

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

3. Tổng các lũy thừa cùng bậc của n số tự nhiên đầu tiên:

   (a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

   (b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   (c) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

1.3 Bất đẳng thức

Dưới đây là các bất đẳng thức cơ bản có thể sử dụng trong cuộc thi.

Định nghĩa 1.1. *Hàm số $f : D \to \mathbb{R}$ được gọi là lồi trên D nếu với mọi $x, y \in D$ và với mọi $\alpha \in (0,1)$ ta có*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

Nếu dấu bằng chỉ xảy ra khi $x = y$ thì f được gọi là lồi chặt trên (a, b).
Hàm số f được gọi là lõm (chặt) trên D nếu $-f$ là lồi (chặt) trên khoảng đó.

Định lí 1.1. *Cho f là một hàm số khả vi hai lần trên (a, b) thì f lồi (chặt) trên (a, b) khi và chỉ khi $f''(x) \geq 0$ (tương ứng $f''(x) > 0$) với mọi $x \in (a, b)$.*

Định lí 1.2. *Nếu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là một hàm lồi thì nó liên tục trên (a, b).*

Định lí 1.3 (Bất đẳng thức Jensen)**.** *Cho hàm số lồi f, các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và các số thực dương $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ thỏa mãn $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. Ta có bất đẳng thức*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(a_k).$$

Nếu f là lồi chặt thì dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Áp dụng bất đẳng thức Jensen với hàm lồi $f(x) = -\ln x$, ta có:

Định lí 1.4 (Bất đẳng thức trung bình tổng quát)**.** *Cho các số thực dương* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *và các số thực dương* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *thỏa mãn* $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$*. Ta có bất đẳng thức*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k \geq \prod_{k=1}^{n} a_k^{\lambda_k}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$*.*

Đặt biệt khi $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ hoặc $n = 2$ ta có các bất đẳng thức quen thuộc sau:

Định lí 1.5 (Bất đẳng thức AM–GM)**.** *Trung bình cộng của các số thực không âm* $a_1, \cdots, a_n$ *không bé hơn trung bình nhân của các số đó, nghĩa là*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$*.*

Bất đẳng thức AM–GM còn được gọi là bất đẳng thức Cauchy.

Định lí 1.6 (Bất đẳng thức Young)**.** *Cho các số thực dương* a, b, p *và* q *thỏa mãn* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Ta có*

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a^p = b^q$*.*

Định lí 1.7 (Bất đẳng thức Hölder)**.** *Cho các số thực không âm* $a_1, a_2, \ldots, a_n$*,* $b_1, b_2, \ldots, b_n$*, và các số thực dương* p *và* q *thỏa* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, ta có*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi các bộ số a_k *và* b_k *tỉ lệ với nhau.*

Chứng minh. Nếu vế phải của bất đẳng thức bằng không thì $a_k = b_k = 0$ với mọi $k = 1, \ldots, n$ và bất đẳng thức trở thành đẳng thức. Do đó ta chỉ cần xét trường hợp vế phải của bất đẳng thức khác không. Đặt

$$c_k = \frac{a_k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p}}, \quad d_k = \frac{b_k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Young ta có

$$\sum_{k=1}^{n} c_k d_k \le \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{c_k^p}{p} + \frac{d_k^q}{q} \right) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} c_k^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n} d_k^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Đặc biệt khi $p = q = \frac{1}{2}$ ta có bất đẳng thức quen thuộc

Định lí 1.8 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz)**.** *Cho các số thực* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$, *ta có*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi các bộ số a_k và b_k tỉ lệ với nhau.

Ngoài cách chứng minh tổng quát như trên, ta có thể chứng minh bất đẳng thức Cauchy–Schwarz một cách đơn giản hơn bằng cách sử dụng đồng nhất thức Lagrange:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 = \sum_{1 \le i < j \le n} (a_i a_j - a_j a_i)^2.$$

Định lí 1.9 (Bất đẳng thức Minkovski)**.** *Cho $p \ge 1$ và các số thực không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$, ta có*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Hölder với chú ý $q = \frac{p}{p-1}$ ta có:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p &= \sum_{k=1}^{n} a_k (a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} b_k (a_k + b_k)^{p-1} \\
&\le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{q(p-1)} \right)^{1/q} \\
&\qquad + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{q(p-1)} \right)^{1/q} \\
&= \left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p \right)^{1/p} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \right)^{(p-1)/p}.
\end{aligned}$$

www.mathvn.com

Suy ra

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Định lí 1.10 (Bất đẳng thức Chebyshev)**.** *Cho các số thực* a_k *và* b_k *thỏa mãn* $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ *và* $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$*, ta có*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k b_{n+1-k} \le \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k\right) \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k b_k.$$

Chứng minh. Ta có

$$0 \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_i-a_k)(b_i-b_k) = 2n\sum_{k=1}^{n}a_k b_k - 2\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}b_k.$$

Do đó

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k\right) \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k b_k.$$

Vế còn lại chứng minh tương tự bằng cách xét khai triển của

$$0 \ge \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_i-a_k)(b_{n+1-i}-b_{n+1-k}).$$

□

www.mathvn.com

Chương 2

Dãy số

2.1 Tóm tắt lí thuyết

2.1.1 Dãy số và tính chất

Định nghĩa 2.1 (Dãy số). *Dãy số là một tập hợp vô hạn đếm được các số thực được sắp thứ tự. Dãy số được kí hiệu là (u_n) hoặc $\{u_n\}$ trong đó u_n là phần tử thứ n của dãy. Phần tử thứ n của dãy số (u_n) có thể được cho bởi công thức tường minh*

$$u_n = f(n),$$

hoặc một công thức truy hồi

$$u_n = f(n, u_{n-1}, u_{n-2}, \dots).$$

Định nghĩa 2.2 (Dãy đơn điệu). *Dãy số (u_n) được gọi là*

- *tăng (tăng chặt) nếu $u_n \le u_{n+1}$ ($u_n < u_{n+1}$) với mọi $n \in \mathbb{N}$,*
- *giảm (giảm chặt) nếu $u_n \ge u_{n+1}$ ($u_n > u_{n+1}$) với mọi $n \in \mathbb{N}$.*

Dãy tăng hoặc giảm được gọi chung là dãy đơn điệu.

Định nghĩa 2.3 (Dãy bị chặn). *Dãy số (u_n) được gọi là*

- *bị chặn trên nếu tồn tại $C \in \mathbb{R}$ sao cho $u_n \le C$ với mọi $n \in \mathbb{N}$,*
- *bị chặn dưới nếu tồn tại $C \in \mathbb{R}$ sao cho $u_n \ge C$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.*

Dãy bị chặn trên và bị chặn dưới được gọi là dãy bị chặn.

Định nghĩa 2.4 (Dãy Cauchy). *Dãy số (u_n) được gọi là dãy Cauchy nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|u_m - u_n| < \varepsilon$ với mọi $m, n > n(\varepsilon)$.*

Định nghĩa 2.5 (Dãy con). *Cho dãy số (u_n) và dãy các số tự nhiên n_k thỏa $1 \le n_1 \le n_2 \le \cdots$. Khi đó dãy số (u_{n_k}) được gọi là một dãy con của dãy (u_n).*

2.1.2 Giới hạn của dãy số

Định nghĩa 2.6 (Giới hạn). *Dãy (u_n) được gọi là hội tụ đến l (hay có giới hạn là l) nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|u_n - l| < \varepsilon$ với mọi $n > n(\varepsilon)$. Kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ hay $u_n \to l$ khi $n \to \infty$.*

Dãy (u_n) được gọi là dãy hội tụ nếu tồn tại $l \in \mathbb{R}$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$, ngược lại (u_n) được gọi là dãy phân kì.

Định nghĩa 2.7 (Giới hạn vô cùng). *Dãy (u_n) được gọi là*

- *tiến đến $+\infty$ (hay có giới hạn là $+\infty$) nếu với mọi $M > 0$, tồn tại $n(M) \in \mathbb{N}$ sao cho $u_n > M$ với mọi $n > n(M)$.*

  Kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n \to \infty$.

- *tiến đến $-\infty$ (hay có giới hạn là $-\infty$) nếu $(-u_n)$ tiến đến $+\infty$.*

  Kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n \to \infty$.

- *tiến đến ∞ (hay có giới hạn là ∞) nếu $(|u_n|)$ tiến đến $+\infty$.*

  Kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$ hay $u_n \to \infty$ khi $n \to \infty$.

Định nghĩa 2.8 (Giới hạn trên, giới hạn dưới). *Giá trị $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, -\infty\}$ được gọi là*

- *giới hạn trên của dãy (u_n) nếu tồn tại dãy con (u_{n_k}) của dãy (u_n) thỏa mãn $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k} = l$ và với dãy con (u_{m_k}) bất kì ta có $\lim\limits_{k\to\infty} u_{m_k} \geq l$ nếu $\lim\limits_{k\to\infty} u_{m_k}$ tồn tại. Kí hiệu $\limsup\limits_{n\to\infty} u_n = l$.*

- *giới hạn dưới của dãy (u_n) nếu $-l$ là giới hạn trên của dãy $(-u_n)$. Kí hiệu $\liminf\limits_{n\to\infty} u_n = l$.*

Định nghĩa 2.9 (Vô cùng bé). *Cho hai dãy số (a_n) và (b_n). Dãy (a_n) được gọi là*

- *vô cùng bé so với dãy (b_n) nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Kí hiệu $a_n = o(b_n)$.*

- *cùng bậc so với dãy (b_n) nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Kí hiệu $a_n = O(b_n)$.*

- *tương đương với dãy (b_n) nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Kí hiệu $a_n \sim b_n$.*

Định lí 2.1 (Tính chất của giới hạn).

1. *(Thông qua hàm số) Nếu các dãy số* (u_n^i) $(1 \leq i \leq k)$ *có giới hạn tương ứng là* u^i *và* $(u^1, u^2, \cdots, u^k)$ *thuộc tập xác định của một hàm sơ cấp* $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *thì* $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n^1, u_n^2, \cdots, u_n^k) = f(u^1, u^2, \cdots, u^k)$,

2. *(Thứ tự và nguyên lí kẹp) Nếu* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v$ *và* $u_n \leq v_n$ *thì* $u \leq v$. *Hệ quả là, nếu* $u_n \leq v_n \leq w_n$ *và* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = l$ *thì* $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = l$.

3. *(Dãy đơn điệu, bị chặn) Dãy tăng (giảm) và bị chặn trên (dưới) thì hội tụ. Dãy tăng (giảm) và không bị chặn trên (dưới) thì tiến đến* $+\infty$ $(-\infty)$.

4. *(Tiêu chuẩn Cauchy) Dãy* (u_n) *là hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy.*

5. *(Dãy con) Dãy số* (u_n) *có giới hạn là* l *khi và chỉ khi mọi dãy con cũng có giới hạn là* l. *Nếu* (u_{2n}) *và* (u_{2n+1}) *có cùng giới hạn là* l *thì* (u_n) *cũng có giới hạn là* l. *Tổng quát nếu* k *dãy con của* (u_n) *có cùng giới hạn là* l *và hội các chỉ số của các dãy con đó bằng* $\mathbb{N}$ *thì* (u_n) *có giới hạn là* l.

6. *(Bolzano-Weierstrass) Mọi dãy bị chặn đều có một dãy con hội tụ.*

Định lí 2.2 (Tính chất của giới hạn trên, giới hạn dưới)**.**

1. $\limsup\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{u_k : k \geq n\}$, $\liminf\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{u_k : k \geq n\}$.

2. *Nếu* (u_n) *bị chặn trên bởi* M *thì* $\limsup\limits_{n\to\infty} u_n \leq M$. *Nếu* (u_n) *không bị chặn trên thì* $\limsup\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

   Nếu (u_n) *bị chặn dưới bởi* M *thì* $\liminf\limits_{n\to\infty} u_n \geq M$. *Nếu* (u_n) *không bị chặn dưới thì* $\liminf\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l \Leftrightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} u_n = \liminf\limits_{n\to\infty} u_n = l$.

2.1.3 Sai phân của dãy số

Định nghĩa 2.10 (Sai phân)**.** *Cho số tự nhiên* $k \geq 1$. *Sai phân cấp* k *của một dãy số* (u_n) *là dãy số* $(\Delta^k u_n)$ *được xác định bởi công thức*

$$\Delta^k u_n = \Delta(\Delta^{k-1} u_n),$$

trong đó $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$ *và* $\Delta^0 u_n = u_n$.

www.mathvn.com

Bằng qui nạp ta có thể chứng minh được

$$\Delta^k u_n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i u_{n+i}.$$

Định nghĩa 2.11 (Phương trình sai phân). *Phương trình có dạng*

$$G(n, u_n, \Delta u_n, \cdots, \Delta^k u_n) = 0,$$

trong đó $G : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$ *là một hàm số cho trước và* (u_n) *là dãy số cần tìm được gọi là một phương trình sai phân cấp* k.

Phương trình sai phân cấp k *có thể được viết dưới dạng*

$$F(n, u_n, u_{n+1}, \cdots, u_{n+k}) = 0.$$

Phương trình sai phân có thể được nhìn nhận ở 2 góc độ:

1. Phương trình sai phân là *phương trình hàm* một biến số trên tập hợp $\mathbb{N}$. Giải một phương trình sai phân sẽ giúp ta xác định được số hạng tổng quát của dãy số cho bởi một công thức truy hồi.

2. Khái niệm sai phân mô phỏng khái niệm đạo hàm còn khái niệm phương trình sai phân mô phỏng khái niệm *phương trình vi phân* của hàm số thực.

2.2 Các dạng toán về dãy số

2.2.1 Số hạng tổng quát của dãy số

Dạng toán tìm số hạng tổng quát của dãy số thường được giải theo định hướng sau:

1. Đưa công thức truy hồi có cấp vô hạn về công thức truy hồi có cấp hữu hạn.

2. Đổi biến (lập dãy mới) để giảm dần cấp của công thức truy hồi cho đến khi tìm được công thức của dãy mới.

3. Truy ngược lại công thức của dãy số ban đầu.

Trong quá trình biến đổi cần linh hoạt thay đổi chỉ số n bởi $n+1, n+2, \ldots$ để thấy được mối liên hệ giữa các số hạng của dãy.

Trong đa số các trường hợp, việc tìm được công thức tổng quát cũng giúp ta khảo sát được các tính chất khác như giới hạn, tính đơn điệu... của dãy số.

www.mathvn.com

Bài 2.1 (Đề thi 2006)**.** Cho dãy số (x_n) xác định theo hệ thức sau

$$x_1 = 2, \quad x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = n^2 x_n, \forall n \geq 2.$$

Tính x_{2006}.

Hướng dẫn. Hiển nhiên 2006 không có vai trò gì đặc biệt, ta cần phải tìm được công thức của số hạng tổng quát nếu muốn giải được bài toán. Theo công thức truy hồi ở đề bài, để tính được x_n ta cần biết tất cả $n-1$ số hạng đầu tiên của dãy. Nói cách khác đây là công thức truy hồi có cấp vô hạn, ta cần đưa nó về dạng đơn giản hơn (có cấp hữu hạn) để xử lí dễ hơn. Ta nhận xét rằng nếu thay n bởi $n+1$ ở công thức của đề bài thì vế trái sẽ có thêm số hạng x_{n+1}, trong khi vế phải được thay đổi thành $(n+1)^2 x_{n+1}$. Do đó ta phải có $x_{n+1} = (n+1)^2 x_{n+1} - n^2 x_n$ hay $x_{n+1} = \frac{n}{n+2} x_n$.

Ta đã nhận được công thức truy hồi cấp hữu hạn. Do số cấp chỉ là 1 nên chỉ cần vận dụng công thức trên liên tiếp ta sẽ tìm ra công thức tổng quát của (x_n). Từ lập luận trên, ta có thể trình bày bài giải như sau:

Giải. Thay n bởi $n+1$ trong công thức truy hồi đã cho ta có

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n+1} = x_{n+1} = (n+1)^2 x_{n+1}.$$

Suy ra $x_{n+1} = (n+1)^2 x_{n+1} - n^2 x_n$ hay $x_{n+1} = \frac{n}{n+2} x_n$. Áp dụng công thức này liên tiếp n lần ta được

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{n}{n+2} x_n = \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)} x_{n-1} = \cdots \\ &= \frac{n!}{(n+2)!/(1\cdot 2)} x_1 = \frac{4}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Thay $n = 2005$ ta được $x_{2006} = \frac{4}{2006 \cdot 2007}$. □

Bài 2.2 (Đề thi 2008)**.** Dãy số (a_n) được xác định bởi $a_1 = a_2 = 1$ và $a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + a_n$ với $n \geq 1$. Tính a_{2008}.

Hướng dẫn. Để đơn giản hóa công thức truy hồi, ta nghĩ tới việc quy đồng mẫu số 2 vế để được

$$a_{n+2} a_{n+1} = a_{n+1} a_n + 1.$$

Từ đây thấy ngay $a_{n+1} a_n + 1$ là dãy truy hồi tuyến tính cấp 1 và ta có lời giải như bên dưới.

Giải. Nhân 2 vế của công thức truy hồi với a_{n+1} ta được

$$a_{n+2}a_{n+1} = a_{n+1}a_n + 1$$

với mọi $n \geq 1$. Áp dụng liên tiếp n lần ta được

$$a_{n+2}a_{n+1} = a_{n+1}a_n + 1 = a_na_{n-1} + 2 = \cdots = a_2a_1 + n = n + 1.$$

Do đó với mọi $n \geq 1$,

$$a_{n+2} = \frac{n+1}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{n}a_n.$$

Áp dụng liên tiếp công thức này ta suy ra

$$a_{2008} = \frac{2007}{2006}a_{2006} = \frac{2007 \cdot 2005}{2006 \cdot 2004}a_{2004} = \cdots = \frac{2007 \cdot 2005 \cdots 3}{2006 \cdot 2004 \cdots 2}a_2 = \frac{2007!!}{2006!!}.$$

□

Bài 2.3 (Đề thi 2009)**.** Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_1 = x_2 = 1$ và $x_n = (n-1)(x_{n-1} + x_{n-2})$ với $n \geq 3$. Tính x_{2009}.

Hướng dẫn. Để đơn giản hóa công thức truy hồi, ta tìm cách đưa 1 phần của x_{n-1} sang vế trái để được biểu diễn dạng

$$x_n - f(n)x_{n-1} = -(x_{n-1} - f(n-1)x_{n-2}).$$

Nếu làm được như vậy thì $x_n - f(n)x_{n-1}$ là dãy truy hồi tuyến tính bậc nhất và ta có thể giải tiếp bài toán. Bằng tính toán trực tiếp, ta thấy có thể chọn $f(n) = n$.

Giải. Từ điều kiện đã cho, ta có

$$x_n - nx_{n-1} = -(x_{n-1} - (n-1)x_{n-2}).$$

Áp dụng liên tiếp $n-2$ lần ta có

$$\begin{aligned} x_n - nx_{n-1} &= -(x_{n-1} - (n-1)x_{n-2}) = (-1)^2(x_{n-2} - (n-2)x_{n-3}) = \cdots \\ &= (-1)^{n-2}(x_2 - 2x_1). \end{aligned}$$

Vậy $x_n - nx_{n-1} = (-1)^{n+1}$. Suy ra $\frac{x_n}{n!} = \frac{x_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$. Lại áp dụng công thức này liên tiếp $n-1$ lần ta được

$$\frac{x_n}{n!} = \sum_{i=2}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i!} + \frac{x_1}{1!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i!}$$

Do đó $x_{2009} = \sum\limits_{i=1}^{2009} \frac{(-1)^{i+1}}{i!}$. □

Bài 2.4 (Đề thi 2014)**.** Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + a^n}$ với mọi $n \geq 1$, trong đó $a \geq 0$. Tìm a sao cho (u_n) hội tụ và tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn. Để đơn giản hóa công thức truy hồi, ta khử căn bậc 2 để được

$$u_n^2 = a^{n-1} + u_{n-1}^2.$$

Do đó u_n^2 là dãy truy hồi tuyến tính cấp 1.

Giải. Với mọi $n \geq 2$ ta có $u_n > 0$ và $u_n^2 = a^{n-1} + u_{n-1}^2$. Áp dụng liên tiếp ta được

$$u_n^2 = a^{n-1} + u_{n-1}^2 = a^{n-1} + a^{n-2} + u_{n-2}^2 = \cdots = a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^1 + 1.$$

Do đó

$$u_n^2 = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{nếu } a = 1 \\ \sqrt{\frac{1-a^n}{1-a}} & \text{nếu } 0 \leq a \neq 1 \end{cases}$$

Suy ra (u_n) hội tụ khi và chỉ khi $0 \leq a < 1$, khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{\sqrt{1-a}}$. □

Bài 2.5. Tìm công thức số hạng tổng quát và giới hạn của dãy số (u_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} u_0 = 5,\ u_1 = 1, \\ u_{n+2} = \frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{1}{3}u_n, \text{ với mọi } n \geq 0. \end{cases}$$

Hướng dẫn. Để đơn giản hóa công thức truy hồi, ta sẽ chuyển một phần của u_{n+1} sang vế trái để được biểu diễn dạng

$$u_{n+2} - au_{n+1} = -\frac{1}{3a}(u_{n+1} - au_n).$$

Nếu làm được như vậy thì $u_{n+1} - au_n$ là dãy truy hồi tuyến tính bậc nhất và ta có thể giải tiếp bài toán. Bằng tính toán trực tiếp, ta có $a = 1$.

Giải. Theo giả thiết ta có $u_{n+2} - u_{n+1} = -\frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n)$. Áp dụng hệ thức này liên tiếp $n + 1$ lần ta được

$$u_{n+2} - u_{n+1} = -\frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n) = \cdots = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}(u_1 - u_0) = -4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}.$$

Do đó

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1}) + u_0 = -4\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} + 5 = 2 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$. □

Bài 2.6. Cho số thực a, tìm công thức số hạng tổng quát và giới hạn của dãy số (u_n) sau

$$\begin{cases} u_1 = a, \\ u_{n+1} = \sqrt[2n+3]{3u_n^{2n+1}}, \text{ với mọi } n \geq 0. \end{cases}$$

Hướng dẫn. Cùng ý tưởng như các bài trên, ta đơn giản hóa công thức truy hồi bằng cách phá bỏ căn thức

$$u_{n+1}^{2n+3} = 3u_n^{2n+1}.$$

Tiếp theo, một phần của hệ số 3 cần chuyển sang vế trái để công thức truy hồi có dạng bậc nhất như sau

$$(au_{n+1})^{2(n+1)+1} = (au_n)^{2n+1}.$$

Tính toán trực tiếp, ta thấy $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Giải. Ta có $\left(\frac{u_{n+1}}{\sqrt{3}}\right)^{2(n+1)+1} = \left(\frac{u_n}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}$ với mọi $n \geq 0$.

Do đó $\left(\frac{u_n}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1} = \left(\frac{u_{n-1}}{\sqrt{3}}\right)^{2n-1} = \cdots = \left(\frac{u_1}{\sqrt{3}}\right)^{3} = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^{3}$. Suy ra $u_n = \sqrt[2n+1]{3^{n-1}a^3}$.

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} \sqrt{3} & \text{nếu } a > 0, \\ -\sqrt{3} & \text{nếu } a < 0, \\ 0 & \text{nếu } a = 0. \end{cases}$ □

Bài 2.7 (Đề thi 2009)**.** Cho hai dãy số (x_n) và (y_n) xác định bởi công thức

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}, x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2}, y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}}, n \geq 1.$$

Chứng minh rằng $x_n y_n \in (2, 3)$ với $n \geq 2$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Hướng dẫn. Từ các công thức lượng giác ta nghĩ tới việc đặt $x_n = \cot a_n$ và $y_n = \tan b_n$. Xem xét mối quan hệ của (a_n) và (b_n) để tìm được $a_n = \frac{\pi}{3\cdot 2^n}$ và $b_n = \frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}$. Từ đó ta có thể trình bày lời giải một cách ngắn gọn bằng qui nạp như sau:

Giải. Bằng qui nạp ta chứng minh được $x_n = \cot\frac{\pi}{3\cdot 2^n}$ và $y_n = \tan\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}$ với mọi $n \geq 1$. Do đó

$$x_n y_n = \cot\frac{\pi}{3\cdot 2^n}\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}} = \cot\frac{\pi}{3\cdot 2^n}\frac{2\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^n}}{1 - \tan^2\frac{\pi}{3\cdot 2^n}} = \frac{2}{1 - \tan^2\frac{\pi}{3\cdot 2^n}}.$$

Vì $0 < \tan^2 \frac{\pi}{3\cdot 2^n} < \tan^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}$ nên từ đó suy ra $2 < x_n y_n < 3$. Ta cũng có $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \tan \frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}} = \tan 0 = 0$. □

Bài 2.8 (Đề thi 2012). Cho dãy số (a_n) thỏa mãn điều kiện $a_1 = \alpha$ và $a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n - \frac{2}{n}$ với $n \geq 1$. Tìm α để dãy (a_n) hội tụ.

Hướng dẫn. Tách riêng 2 yếu tố n và $n+1$ bằng cách chia 2 vế cho $n+1$

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} - \frac{2}{n(n+1)}.$$

Ta lại tiếp tục viết $-\frac{2}{n(n+1)}$ thành dạng sai phân $f(n+1) - f(n)$, tìm được $f(n) = \frac{2}{n}$. Cuối cùng ta được

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{2}{n+1} = \frac{a_n}{n} - \frac{2}{n}.$$

Áp dụng liên tiếp ta được $\frac{a_n}{n} - \frac{2}{n} = \frac{a_1}{1} - \frac{2}{1} = \alpha - 2$. Suy ra $a_n = (\alpha - 2)n + 2$. Dãy này hội tụ khi và chỉ khi $\alpha = 2$.

Bài 2.9 (Đề thi 2013). Cho $x_1 = a \in \mathbb{R}$ và dãy (x_n) xác định bởi $(n+1)^2 x_{n+1} = n^2 x_n + 2n + 1$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Hướng dẫn. Quan sát dạng của công thức truy hồi ta nhận thấy cần phải biểu diễn được $2n+1$ dưới dạng sai phân $f(n+1) - f(n)$. Thử tìm f ở dạng tam thức bậc 2 ta được

$$2n + 1 = (n+1)^2 - n^2.$$

Vậy

$$(n+1)^2 x_{n+1} - (n+1)^2 = n^2 x_n - n^2.$$

Áp dụng liên tiếp ta được $n^2 x_n - n^2 = x_1 - 1 = a - 1$. Vậy $x_n = 1 + \frac{a-1}{n^2}$. Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

2.2.2 Giới hạn của dãy số

Trong mục này ta xem xét bài toán chứng minh và tìm giới hạn của các dãy số truy hồi trong trường hợp không thể tìm được công thức số hạng tổng quát ở dạng tường minh.

www.mathvn.com

Phương pháp ánh xạ co

Phương pháp ánh xạ co được áp dụng với các dãy số (a_n) thỏa mãn

$$|a_{n+1} - a_n| \leq C|a_n - a_{n-1}|$$

với $0 < C < 1$. Cơ sở của phương pháp ánh xạ co là định lí sau:

Định lí 2.3. *Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_{n+1} = f(a_n)$ trong đó f là ánh xạ co, nghĩa là $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ với $C < 1$. Khi đó (a_n) sẽ hội tụ về điểm bất động duy nhất của f.*

Hướng dẫn. Ta sẽ vân dụng tiêu chuẩn Cauchy để chứng minh định lý trên.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh rằng (a_n) là dãy Cauchy. Thật vậy, xét $m > n > 1$, ta có

$$|a_m - a_n| = |f(a_{m-1}) - f(a_{n-1})| \leq C|a_{m-1} - a_{n-1}|.$$

Áp dụng liên tiếp ta được

$$|a_m - a_n| \leq C|a_{m-1} - a_{n-1}| \leq C^2|a_{m-2} - a_{n-2}| \leq C^{n-1}|a_{m-n+1} - a_1|.$$

Mặt khác $|a_{m-n+1} - a_1| \leq |a_{m-n+1} - a_{m-n}| + |a_{m-n} - a_{m-n-1}| + \cdots + |a_2 - a_1| \leq (C^{m-n+1} + C^{m-n} + \cdots + C + 1)|a_2 - a_1| = \frac{1-C^{m-n+1}}{1-C}|a_2 - a_1|$ nên

$$|a_m - a_n| \leq \frac{(1 - C^{m-n+1})C^{n-1}}{1 - C}|a_2 - a_1| \leq \frac{C^{n-1}}{1 - C}|a_2 - a_1|.$$

Với mọi $\varepsilon > 0$, nếu ta chọn $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sao cho $\frac{C^{n_0-1}}{1-C}|a_2 - a_1| < \varepsilon$ thì $|a_m - a_n| < \varepsilon$ khi $m \geq n \geq n_0$. Vậy (a_n) là dãy Cauchy. Do đó (a_n) hội tụ đến x_0.

Hiển nhiên ánh xạ co là ánh xạ liên tục. Lấy giới hạn 2 vế trong đẳng thức truy hồi ta được $x_0 = f(x_0)$, nghĩa là x_0 là điểm bất động của f. Nếu x_1 là một điểm bất động bất kì của f thì ta có $|x_0 - x_1| \leq |f(x_0) - f(x_1)| \leq C|x_0 - x_1|$. Do $C < 1$ nên ta phải có $x_0 = x_1$, nghĩa là điểm bất động của f là duy nhất. □

Nếu f là hàm số khả vi thỏa $|f'(x)| \leq C, \forall x \in \mathbb{R}$ trong đó $C < 1$ thì từ định lí Lagrange suy ra với x, y bất kì ta tìm được z nằm giữa a và b sao cho $|f(x) - f(y)| = |f'(z)(x - y)| \leq C|(x - y)|$ nên f là ánh xạ co. Do đó theo định lí trên ta có kết quả sau:

Bài 2.10 (Đề thi 2006)**.** Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_{n+1} = f(a_n)$ trong đó $f(x)$ khả vi trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $|f'(x)| \leq C, \forall x \in \mathbb{R}$ với $C < 1$. Khi đó (a_n) sẽ hội tụ về điểm bất động duy nhất của f.

Ta có thể vận dụng hai kết quả trên trong việc chứng minh dãy số có giới hạn với một số lưu ý sau:

1. Để trình bày lời giải ngắn gọn, có thể tìm trước điểm bất động l của f rồi đưa ra đánh giá
$$|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \le C|u_n - l| \le \cdots \le C^n|u_1 - l| \to 0.$$
2. Để chứng minh f là ánh xạ co, có thể chỉ ra $|f'(x)| \le C < 1$ rồi sử dụng định lí Lagrange.
3. Nếu chỉ có $|f'(x)| \le 1$, hãy thử kiểm tra xem $f \circ f$ có phải ánh xạ co không, nếu có hãy xét 2 dãy con (a_{2n}) và (a_{2n+1}).

Bài 2.11 (Đề thi 2019)**.** Cho (x_n) là dãy số được xác định bởi các điều kiện
$$x_1 = 2019, \quad x_{n+1} = \ln(1 + x_n) - \frac{2x_n}{2 + x_n} \quad \forall n \ge 1.$$

1. Chứng minh rằng (x_n) là một dãy số không âm.
2. Chứng minh rằng tồn tại số thực $c \in (0, 1)$ sao cho
$$|x_{n+1} - x_n| \le c|x_n - x_{n-1}| \quad \forall n \ge 2.$$
3. Chứng minh rằng (x_n) có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó.

Giải. Dãy số có dạng $u_{n+1} = f(u_n)$ với $f(x) = \ln(1 + x) - \frac{2x}{2+x}$.

1. Ta có
$$f'(x) = \frac{x^2}{(1 + x)(2 + x)^2} \ge 0 \quad \forall x \ge 0.$$
Vậy $f(x) \ge f(0) = 0$ với mọi $x \ge 0$. Mà $x_1 > 0$ nên bằng qui nạp ta có $x_n \ge 0$.
2. Với $x \ge 0$, ta có
$$|f'(x)| = \frac{x^2}{(1 + x)(2 + x)^2} < \frac{x^2}{x(4x)} = \frac{1}{4}.$$
Do đó theo định lí Lagrange
$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \le \frac{1}{4}|x_n - x_{n-1}|.$$

www.mathvn.com

3. Ta có $|u_{n+1}| = |f(u_n) - f(0)| \leq \frac{1}{4}|u_n - 0| = \frac{1}{4}|u_n|$.

   Áp dụng liên tiếp n lần ta có

$$|u_n| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0|.$$

   Do đó (u_n) hội tụ đến 0.

□

Bài 2.12 (Đề thi 2002)**.** Cho dãy số (u_n) được xác định bởi

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\ln(1 + u_n^2) - 2002.$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn.

Giải. Dãy số có dạng $u_{n+1} = f(u_n)$ với $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) - 2002$. Ta có

$$|f'(x)| = \frac{|x|}{1 + x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = -\infty$ nên tồn tại $l \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(l) = l$. Do đó

$$|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \leq \frac{1}{2}|u_n - l|.$$

Áp dụng liên tiếp n lần ta có

$$|u_n - l| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - l|.$$

Do đó (u_n) hội tụ đến l. □

Bài 2.13. Cho dãy số (a_n) được xác định bởi $a_1 \geq 0$ và $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 1}$. Chứng minh rằng dãy số (a_n) có giới hạn.

Giải. Hiển nhiên $a_n \geq 1$ với $n \geq 2$. Dãy số có dạng $a_{n+1} = f(a_n)$ với $f(x) = \sqrt{2x + 1}$. Ta có

$$|f'(x)| = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{với } x \geq 1.$$

Vì $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+}(f(x)-x)=\frac{1}{2}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-\infty$ nên tồn tại $l\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(l)=l$. Do đó

$$|a_{n+1}-l|=|f(a_n)-f(l)|\leq\frac{1}{\sqrt{3}}|a_n-l|.$$

Áp dụng liên tiếp n lần ta có

$$|a_n-l|\leq\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n|a_0-l|.$$

Do đó (a_n) hội tụ đến l. □

Bài 2.14. Cho dãy số (a_n) được xác định bởi $a_1\geq 0$ và $a_{n+1}=\frac{1}{a_n+1}$. Chứng minh rằng dãy số (a_n) có giới hạn.

Hướng dẫn. Rõ ràng $a_n>0$, do đó $f'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}$ chỉ mới thỏa $|f'(x)|<1$ với $x>0$ nên chưa phải là ánh xạ co. Ta thử kiểm tra xem $f\circ f$ có phải ánh xạ co hay không. Thật vậy $(f\circ f)'(x)=\left(\frac{x+1}{x+2}\right)'=\frac{1}{(x+2)^2}<\frac{1}{4}$ với $x>0$ nên là ánh xạ co.

Giải. Ta có $a_n>0$. Dãy số có dạng $a_{n+1}=f(a_n)$ với $f(x)=\frac{1}{x+1}$ thỏa

$$(f\circ f)'(x)=\left(\frac{x+1}{x+2}\right)'=\frac{1}{(x+2)^2}.$$

Do đó

$$|(f\circ f)'(x)|<\frac{1}{4}\quad\text{với } x>0.$$

Vì $\lim\limits_{x\to 0^+}(f(x)-x)=1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-\infty$ nên tồn tại $l\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(l)=l$. Do đó

$$|a_{n+2}-l|=|f\circ f(a_n)-f\circ f(l)|<\frac{1}{4}|a_n-l|.$$

Áp dụng liên tiếp n lần ta có

$$|a_{2n}-l|\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n|a_0-l|\quad\text{và}\quad|a_{2n+1}-l|\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n|a_1-l|$$

Do đó (a_n) hội tụ đến l. □

www.mathvn.com

Dãy đơn điệu bị chặn

Phương pháp dãy đơn điệu bị chặn được áp dụng với các dãy số thỏa mãn một trong 2 điều kiện

- tăng và bị chặn trên,
- giảm và bị chặn dưới.

Các dãy số như vậy sẽ hội tụ về một số thực l có thể tìm được từ công thức truy hồi. Xét trường hợp thường gặp: dãy (u_n) cho bởi công thức truy hồi $u_{n+1} = f(u_n, n)$.

- Các kĩ thuật thường dùng để chứng minh dãy (u_n) là dãy đơn điệu
  1. Chứng minh $f(u_n, n) - u_n \geq 0$ (hoặc $f(u_n, n) - u_n \leq 0$).
  2. Nếu $u_n > 0$, có thể chứng minh $\frac{f(u_n,n)}{u_n} \geq 1$ (hoặc $\frac{f(u_n,n)}{u_n} \leq 1$).
  3. Nếu $u_{n+1} = f(u_n)$, có thể chứng minh $f'(x) \geq 0$.
- Các kĩ thuật thường dùng để chứng minh dãy (u_n) là dãy bị chặn
  1. Hàm f bị chặn dưới (hoặc bị chặn trên).
  2. Chứng minh $f(u_n, n) \geq a$ nếu $u_n \geq a$ (hoặc $f(u_n, n) \leq b$ nếu $u_n \leq b$).
  3. Chặn trên hoặc chặn dưới có thể chọn là giới hạn khả dĩ của dãy (nếu có) từ công thức truy hồi.

Từ lập luận trên, với trường hợp $u_{n+1} = f(u_n)$, ta có định lí sau

Định lí 2.4. *Xét dãy (u_n) cho bởi công thức $u_{n+1} = f(u_n)$ và l là một điểm bất động của f.*

1. *Nếu $u_1 < u_2 < l$ và f đồng biến trên $[u_1, l]$ thì (u_n) tăng và bị chặn trên bởi l nên hội tụ. Nếu f không có điểm bất động trong $[u_1, l)$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$.*
2. *Nếu $u_1 > u_2 > l$ và f đồng biến trên $[l, u_1]$ thì (u_n) giảm và bị chặn dưới bởi l nên hội tụ. Nếu f không có điểm bất động trong $(l, u_1]$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$.*

Như vậy để tìm giới hạn của dãy có dạng $u_{n+1} = f(u_n)$ có thể tiến hành theo các bước

1. Tìm miền giá trị $D = f(\mathbb{R})$ của f, các bước tiếp theo chỉ cần khảo sát f trên D.

2. Kiểm tra nếu f hoặc $f \circ f$ là ánh xạ co thì làm theo phương pháp ánh xạ co (xem lại phần trước). Nếu không, thực hiện tiếp bước 3.

3. Khảo sát các khoảng đơn điệu của hàm số f.

4. Tìm các điểm bất động của f và khảo sát dấu của $f(x) - x$.

5. Nếu f nghịch biến thì $f \circ f$ đồng biến, khi đó ta sẽ xét các dãy $u_{2n+2} = f(f(u_{2n}))$ và $u_{2n+1} = f(f(u_{2n-1}))$ rồi vận dụng phương pháp của định lí trên.

Bài 2.15. Khảo sát sự hội tụ của dãy số (a_n) thỏa $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n^2+1}$.

Giải. Dãy số có dạng $a_{n+1} = f(a_n)$ với $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Do $a_n > 0$ nên theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$0 < a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n^2 + 1} \leq \frac{1}{2}.$$

Mặt khác $a_2 = \frac{1}{2} < a_1$ và $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} > 0$ trên $(0, \frac{1}{2}]$ nên (a_n) là dãy giảm. Do (a_n) giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên hội tụ đến $l \in (0, \frac{1}{2})$ thỏa $f(l) = l \Leftrightarrow l = 0$.

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Bài 2.16. Khảo sát sự hội tụ của dãy số (a_n) thỏa $0 < a_n < 1$ và $a_n(1 - a_{n+1}) > \frac{1}{4}$.

Giải. Từ giả thiết và bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a_n(1 - a_{n+1}) > \frac{1}{4} \geq a_{n+1}(1 - a_{n+1}).$$

Do đó (a_n) là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên hội tụ đến $l \in [0, a_0)$ thỏa $l(1 - l) \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow l = \frac{1}{2}$.

Suy ra dãy số đã cho phải thỏa mãn $a_0 > \frac{1}{2}$ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$. □

Bài 2.17. Tìm tất cả các số thực a để dãy số (u_n) xác định như sau hội tụ

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = u_n^2 + \frac{u_n}{2}, \text{ với mọi } n \geq 0. \end{cases}$$

www.mathvn.com

Giải. Đặt $v_n = u_n + \frac{1}{4}$ ta có

$$\begin{cases} v_0 = a + \frac{1}{4}, \\ v_{n+1} = v_n^2 + \frac{3}{16}, \text{ với mọi } n \geq 0. \end{cases}$$

Hiển nhiên (u_n) hội tụ khi và chỉ khi (v_n) hội tụ. Ta cũng có $v_n > 0$ với mọi $n \geq 1$.

Đặt $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$ thì $v_{n+1} = f(v_n)$.

Ta có $f'(x) = 2x$ nên f tăng trên $(0, +\infty)$.

Mặt khác $f(x) = x \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$; $f(x) < x$ trên $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ và $f(x) > x$ trên $\left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$.

Bảng biến thiên của f:

x	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
							$+\infty$
						$\nearrow$	
					$\frac{3}{4}$		
$f(x)$				$\nearrow$			
			$\frac{1}{4}$				
		$\nearrow$					
	$\frac{3}{16}$						

Xét các trường hợp sau

1. $v_0 > \frac{3}{4}$: khi đó $v_1 = f(v_0) > v_0$ nên theo qui nạp (v_n) là dãy tăng. Nếu (v_n) hội tụ đến $l \in \mathbb{R}$ thì $l > \frac{3}{4}$ và l là điểm bất động của f, vô lí. Vậy (v_n) không hội tụ.

2. $v_0 = \frac{3}{4}$: khi đó $v_n = \frac{3}{4}$ với mọi n nên (v_n) hội tụ.

3. $\frac{1}{4} \leq v_0 < \frac{3}{4}$: khi đó $\frac{1}{4} \leq v_1 = f(v_0) \leq v_0$ nên theo qui nạp (v_n) là dãy giảm và bị chặn dưới bởi $\frac{1}{4}$ nên hội tụ.

4. $0 \leq v_0 < \frac{1}{4}$: khi đó $\frac{1}{4} \geq v_1 = f(v_0) > v_0$ nên theo qui nạp (v_n) là dãy tăng và bị chặn trên bởi $\frac{1}{4}$ nên hội tụ.

5. $v_0 < 0$: trong trường hợp này $v_1 > 0$ nên theo lập luận trên (v_n) sẽ hội tụ khi và chỉ khi $v_1 \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow v_0^2 + \frac{3}{16} \leq \frac{3}{4}$, kết hợp với $v_0 < 0$ ta được $-\frac{3}{4} \leq v_0 < 0$.

Kết luận: Dãy số (u_n) hội tụ $\Leftrightarrow -\frac{3}{4} \le v_0 \le \frac{3}{4} \Leftrightarrow -1 \le a \le \frac{1}{2}$. □

Bài 2.18 (Đề thi 2011)**.** Cho $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\beta+n}$ với mọi $n \ge 1$. Tìm $\min|\alpha-\beta|$.

Hướng dẫn. Rút ra α, β ta được

$$\alpha < \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n < \beta.$$

Do đó cần khảo sát dãy số $x_n = \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n$. Do hàm số $f(x) = \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} - x$ là hàm số tăng và $x_1 < x_2$ nên (x_n) là dãy số tăng. Mặt khác $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{t}\right) = \lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{t-\ln(1+t)}{t\ln(1+t)}\right) = \frac{1}{2}$ theo qui tắc L'Hôpital. Do đó

$$\min|\alpha-\beta| = \frac{1}{2} - x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{\ln 2}.$$

Bài 2.19 (Đề thi 2011)**.** Cho hai dãy số (x_n) và (y_n) thỏa mãn $x_{n+1} \ge \frac{x_n+y_n}{2}$ và $y_{n+1} \ge \sqrt{\frac{x_n^2+y_n^2}{2}}$ với mọi $n \ge 1$.

a) Chứng minh rằng các dãy (x_n+y_n) và (x_ny_n) là những dãy đơn điệu tăng.

b) Giả sử rằng (x_n) và (y_n) bị chặn. Chứng minh rằng chúng cùng hội tụ về một điểm.

Hướng dẫn. Rõ ràng các dãy (x_n) và (y_n) là không âm với $n \ge 2$.

a) Ta cần chứng minh rằng $x_{n+1} + y_{n+1} \ge x_n + y_n$. Muốn vậy chỉ cần chứng minh

$$\frac{x_n+y_n}{2} + \sqrt{\frac{x_n^2+y_n^2}{2}} \ge x_n + y_n \Leftrightarrow (x_n-y_n)^2 \ge 0.$$

Tương tự ta cần chứng minh rằng $x_{n+1}y_{n+1} \ge x_ny_n$. Muốn vậy chỉ cần chỉ ra

$$\frac{x_n+y_n}{2}\sqrt{\frac{x_n^2+y_n^2}{2}} \ge x_ny_n.$$

Bất đẳng thức này dễ dàng suy ra từ bất đẳng thức AM–GM $\frac{x_n+y_n}{2} \ge \sqrt{x_ny_n}$ và $\frac{x_n^2+y_n^2}{2} \ge x_ny_n$.

b) Vì các dãy (x_n) và (y_n) bị chặn nên (x_n+y_n) và (x_ny_n) cũng bị chặn, mà đây là những dãy đơn điệu tăng nên hội tụ về các giới hạn s và p tương ứng. Do

x_n và y_n là các nghiệm của phương trình $t^2-(x_n+y_n)t+x_ny_n=0$ nên để chứng minh (x_n) và (y_n) có cùng giới hạn, ta chỉ cần chỉ ra $\lim\limits_{n\to\infty}((x_n+y_n)^2-4x_ny_n)=0$, nghĩa là $s^2=4p$. Theo bất đẳng thức AM–GM ta có:

$$x_n+y_n \geq 2\sqrt{x_ny_n}.$$

Do đó $s^2 \geq 4p$. Mặt khác

$$x_{n+1}y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}\sqrt{\frac{x_n^2+y_n^2}{2}} \geq \left(\frac{x_n+y_n}{2}\right)^2.$$

Do đó $s^2 \leq 4p$. Ta có điều phải chứng minh.

Định lí Cesàro-Stolz

Phương pháp Cesàro-Stolz được áp dụng để tìm giới hạn của các dãy số có dạng $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

1. Nếu $u_n=f(n)$ và $v_n=g(n)$ với f, g là các hàm số thực khả vi cho trước ta có qui tắc L'Hôpital
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
2. Khi không thể xác định được các hàm thực f và g, ta có thể sử dụng định lí Cesàro-Stolz. Định lí Cesàro-Stolz là một dạng tương tự của qui tắc L'Hôpital dùng để tìm giới hạn của dãy số có dạng $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ trong trường hợp $u_{n+1}-u_n$ và $v_{n+1}-v_n$ là những biểu thức tương đối đơn giản.

Định lí 2.5 (Dạng $\frac{\infty}{\infty}$)**.** *Nếu (u_n) và (v_n) là hai dãy thỏa mãn $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=+\infty$ và $\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n}$ hội tụ thì $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n}$.*

Định lí 2.6 (Dạng $\frac{0}{0}$)**.** *Nếu (u_n) và (v_n) là hai dãy thỏa mãn $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$, dãy (v_n) giảm thực sự và $\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n}$ hội tụ thì $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n}$.*

Bài 2.20 (Đề thi 2015)**.** Cho dãy số (a_n) được xác định bởi công thức truy hồi

$$2a_{n+1}-2a_n+a_n^2=0$$

với mọi $n\geq 0$.

www.mathvn.com

a) Chứng minh rằng (a_n) là một dãy đơn điệu.

b) Biết $a_0 = 1$. Hãy tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

c) Tìm điều kiện của a_0 để dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn. Trong trường hợp này hãy tính $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$.

Giải.

a) Ta có $0 = 2a_{n+1} - 2a_n + a_n^2 \geq 2a_{n+1} - 2a_n$. Do đó (a_n) là dãy giảm.

b) Ta có $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}a_n^2$. Nếu $a_0 = 1$. Bằng qui nạp ta có $0 < a_n \leq 1$ với mọi n. Mà (a_n) giảm nên (a_n) hội tụ về 0.

c) Khi dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn thì giới hạn đó phải là 0.

- Nếu $a_0 < 0$ thì vì (a_n) giảm nên dãy không có giới hạn.
- Nếu $a_0 > 2$ thì $a_1 < 0$ nên tương tự trường hợp trên (a_n) cũng không có giới hạn.
- Nếu $0 \leq a_0 \leq 2$ thì $a_n \geq 0$ với mọi n nên dãy có giới hạn là 0.

Nếu $a_0 = 0$ hoặc $a_0 = 2$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

Xét trường hợp $0 < a_0 < 2$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{a_n}{2}\right) = 1$, nên theo định lí Cesàro-Stolz ta có

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}}{(n+1) - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2a_{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

□

Bài 2.21. Cho dãy số (u_n) hội tụ về a. Tìm giới hạn của các dãy số sau

1. $\frac{\sum_{k=1}^n ku_k}{n(n+1)}$,
2. $\frac{\sum_{k=1}^n k^2u_k}{n(n+1)(2n+1)}$,
3. $\frac{\sum_{k=1}^n k^3u_k}{n^2(n+1)^2}$,
4. $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{\sqrt{k}}$,
5. $\frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k}$.

www.mathvn.com

Giải. Vận dụng định lí Cesàro-Stolz, ta có

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} ku_k}{n(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{nu_n}{2n} = \frac{a}{2}$,

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2u_k}{n(n+1)(2n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2u_n}{6n^2} = \frac{a}{6}$,

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^3u_k}{n^2(n+1)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3u_n}{4n^3} = \frac{a}{4}$,

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{\sqrt{k}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n/\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{n-\sqrt{n(n-1)}} = \infty$,

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n/n}{\ln n - \ln(n-1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = a$.

□

Thu gọn tổng bằng sai phân

Phương pháp này được áp dụng để tìm giới hạn của các dãy số có dạng $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i$. Để tìm giới hạn của các dãy số dạng này, ta có thể thu gọn tổng bằng cách tìm dãy số (v_n) sao cho

$$u_n = v_{n+1} - v_n.$$

Khi đó $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i = \sum\limits_{i=1}^{n}(v_{i+1} - v_i) = v_{n+1} - v_1$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} u_i = \lim\limits_{n\to\infty} v_n - v_1$.

Bài 2.22 (Đề thi 2007)**.** Cho a, b, c, α là các số thực thỏa $\alpha \neq c - b$. Dãy số (u_n), (v_n) được xác định bởi công thức $u_1 = a, u_{n+1} = \frac{u_n^2 + bu_n}{c}, v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{u_k}{u_{k+1}+b-c}, n \geq 1$. Biết rằng $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \alpha$. Tính giới hạn của $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

Hướng dẫn. Biểu thức $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{u_k}{u_{k+1}+b-c}$ khá phức tạp nên muốn tìm được giới hạn nhất thiết ta phải thu gọn được tổng này. Muốn vậy ta phải tìm được hàm số f thỏa

$$\frac{u_k}{u_{k+1} + b - c} = f(u_{k+1}) - f(u_k).$$

Thay $u_{k+1} = \frac{u_k^2 + bu_k}{c}$ thì đẳng thức trên được đơn giản hóa về dạng

$$\frac{u_k}{\frac{u_k^2+bu_k}{c} + b - c} = f\left(\frac{u_k^2 + bu_k}{c}\right) - f(u_k).$$

Để đơn giản, đặt $u_k = x$, ta nhận được phương trình hàm

$$f\left(\frac{x^2+bx}{c}\right) - f(x) = \frac{cx}{x^2+bx+bc-c^2} = \frac{cx}{(x+c)(x+b-c)}.$$

Do sự xuất hiện của mẫu thức ở vế phải, ta có thể dự đoán f có thể có dạng $f(x) = \frac{d}{x+b-c}$ hoặc $f(x) = \frac{d}{x+c}$ với hằng số d nào đó. Tính toán trực tiếp thấy $f(x) = \frac{-c}{x+b-c}$ thỏa mãn phương trình hàm trên. Ta có bài giải đầy đủ như sau:

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{u_k}{u_{k+1}+b-c} &= \frac{u_k(u_k+b-c)}{(u_{k+1}+b-c)(u_k+b-c)}\\ &= \frac{(u_k^2+bu_k)-cu_k}{(u_{k+1}+b-c)(u_k+b-c)}\\ &= \frac{c(u_{k+1}-u_k)}{(u_{k+1}+b-c)(u_k+b-c)}\\ &= \frac{c}{u_k+b-c} - \frac{c}{u_{k+1}+b-c}\end{aligned}$$

với mọi $k \geq 1$. Do đó

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{u_{k+1}+b-c} = \frac{c}{u_1+b-c} - \frac{c}{u_{n+1}+b-c}.$$

Do $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \alpha \neq c-b$ và $u_1 = a$ nên ta được

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \frac{c}{a+b-c} - \frac{c}{\alpha+b-c} = \frac{c(\alpha-a)}{(a+b-c)(\alpha+b-c)}.$$

□

Bài 2.23. Cho số thực $a \neq 0$ và dãy số (u_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_n = 2u_{n-1} + n - 2. \end{cases}$$

Tính giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k+k}.$$

www.mathvn.com

Giải. Ta có

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k + k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{u_{k-1} + (k-1)} - \frac{1}{u_k + k} \right) = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_n + n}.$$

Mặt khác $u_n + n = 2(u_{n-1} + (n-1)) = \cdots = 2^n(u_0 + 0) = 2^n a$. Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k + k} = \frac{1}{a}.$$

□

Bài 2.24. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} u_0 = a \neq 0, \\ u_{n+1} = u_n^2 + (2n+1)u_n + (n^2 - 1). \end{cases}$$

Tính giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k + k}{u_{k+1} + k + 1}.$$

Giải. Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k + k}{u_{k+1} + k + 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_k + k} - \frac{1}{u_{k+1} + (k+1)} \right) = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_n + n}.$$

Mặt khác $u_{n+1} + (n+1) + \frac{1}{2} = \left(u_n + n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$. Do đó $u_n + n + \frac{1}{2} > \frac{5}{4}$ với mọi $n \geq 1$. Từ đó ta có

$$u_{n+1} + (n+1) + \frac{1}{2} > \left(u_n + n + \frac{1}{2}\right)^2 > \cdots > \left(u_1 + \frac{3}{2}\right)^{2^n} > \left(\frac{5}{4}\right)^{2^n}.$$

Hệ quả là $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + n) = +\infty$. Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k + k}{u_{k+1} + k + 1} = \frac{1}{a}.$$

□

Bài 2.25 (Đề thi 2010)**.** Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_1 = 1$ và $x_{n+1} = x_n(1 + x_n^{2010})$ với $n \geq 1$. Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_1^{2010}}{x_2} + \frac{x_2^{2010}}{x_3} + \cdots + \frac{x_n^{2010}}{x_{n+1}} \right)$.

Giải. Trước hết, ta thấy dãy này tăng thực sự và nếu dãy này bị chặn thì tồn tại giới hạn, đặt giới hạn đó là $L > 0$. Chuyển công thức xác định của dãy qua giới hạn, ta có $L = L(1 + L^{2010}) \Leftrightarrow L = 0$, mâu thuẫn.

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Với mỗi $k \geq 1$, ta có

$$\frac{x_k^{2010}}{x_{k+1}} = \frac{x_k^{2011}}{x_k x_{k+1}} = \frac{x_k - x_{k+1}}{x_k x_{k+1}} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}}.$$

Suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1^{2010}}{x_2} + \frac{x_2^{2010}}{x_3} + \cdots + \frac{x_n^{2010}}{x_{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{n+1}}\right) = 1.$$

□

Nguyên lí kẹp

Phương pháp này dựa trên cơ sở định lí sau:

Định lí 2.7 (Nguyên lí kẹp)**.** *Cho các dãy số (a_n), (b_n), (c_n) thỏa mãn $a_n \leq b_n \leq c_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$.*

1. Phương pháp này thường được sử dụng khi dãy (b_n) khá thô. Các dãy (a_n) và (c_n) thường được chọn là các dãy đơn giản hơn (b_n), dễ tính giới hạn.

2. Có thể kẹp các hàm vô tỉ bằng cách sử dụng đa thức Taylor (xem bài 4.1).

3. Để tính giới hạn của dãy số có dạng $\sum_{k=1}^n f(k)$ với f giảm, ta có thể kẹp hạng tử $f(k)$ bằng các tích phân xác định

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x)\,dx.$$

Khi đó

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(x)\,dx.$$

Bài 2.26 (Đề thi 2013)**.** Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx^n}{2013+x^n}\,dx$.

www.mathvn.com

Hướng dẫn. Vì x^n xuất hiện 2 lần nên có cơ sở đổi biến $t = x^n$ để đơn giản hóa tích phân

$$\int_0^1 \frac{nx^n}{2013 + x^n}\,dx = \int_0^1 \frac{nt}{2013+t}\,d\left(t^{1/n}\right) = \int_0^1 \frac{t^{1/n}}{2013+t}\,dt.$$

Đến đây thử lấy lim dưới dấy tích phân, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} t^{1/n} = 1$ với $x \in (0, 1]$ nên bằng trực giác ta thấy

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{t^{1/n}}{2013+t}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{2013+t}\,dt = \ln(2013+t)\Big|_0^1 = \ln\frac{2014}{2013}.$$

Tuy nhiên lập luận trên là sai do không có tính chất $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$ (ví dụ $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 nx^n\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$ nhưng $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to\infty} nx^n\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$). Ta phải ước lượng $t^{1/n}$ chặt chẽ hơn bằng cách kẹp nó bởi các đa thức Taylor như lời giải dưới đây.

Giải. Theo công thức khai triển Taylor của $f(t) = t^{1/n}$ tại $t = 1$ ta có

$$f(t) = f(1) + f'(1)(t-1) + \frac{f''(\xi)}{2}(t-1)^2.$$

Suy ra $1 + \frac{t-1}{n} \le t^{1/n} \le 1$. Do đó

$$\int_0^1 \frac{1}{2013+t}\,dt - \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{1-t}{2013+t}\,dt \le \int_0^1 \frac{t^{1/n}}{2013+t}\,dt \le \int_0^1 \frac{1}{2013+t}\,dt.$$

Mặt khác $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{2013+t}\,dt < \int_0^1 \frac{1}{2013}\,dt = \frac{1}{2013}$ nên theo nguyên lí kẹp ta có

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{t^{1/n}}{2013+t}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{2013+t}\,dt = \ln\frac{2014}{2013}.$$

Do đó

$$\int_0^1 \frac{nx^n}{2013+x^n}\,dx = \int_0^1 \frac{nt}{2013+t}\,d\left(t^{1/n}\right) = \int_0^1 \frac{t^{1/n}}{2013+t}\,dt = \ln\frac{2014}{2013}.$$

□

www.mathvn.com

Bài 2.27. Cho số thực $s \geq -1$. Tính giới hạn sau

$$\lim_{x \to 0^+} \left(x^{s+1} \sum_{k=1}^{[1/x]} k^s \right),$$

trong đó $[1/x]$ là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng $1/x$.

Giải. Trước hết ta có nhận xét sau

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^s}{n^{s+1}} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^s = \int_0^1 x^s dx = \frac{1}{s+1}, \text{ nếu } s > -1$$

và

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^s}{n^{s+1}} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty, \text{ nếu } s = -1.$$

Ta có

$$x^{s+1} \sum_{k=1}^{[1/x]} k^s = (x[1/x])^{s+1} \frac{\sum_{k=1}^{[1/x]} k^s}{[1/x]^{s+1}}.$$

Mặt khác theo định nghĩa phần nguyên $1 \leq (x[1/x])^{s+1} \leq (x+1)^{s+1}$ nên từ định lí kẹp ta có $\lim\limits_{x \to 0^+} (x[1/x])^{s+1} = 1$.

Kết hợp các lập luận trên ta có

$$\lim_{x \to 0^+} x^{s+1} \sum_{k=1}^{[1/x]} k^s = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sum_{k=1}^{[1/x]} k^s}{[1/x]^{s+1}} = \begin{cases} \frac{1}{s+1}, & \text{nếu } s > -1. \\ +\infty, & \text{nếu } s = -1. \end{cases}$$

□

Bài 2.28. Tính giới hạn sau

$$\lim_{n \to \infty} \left(n - \sum_{k=1}^n \cos \frac{1}{\sqrt{n+k}} \right).$$

Hướng dẫn. Biểu thức cần lấy tổng khá phức tạp nên ta không thể hi vọng có thể rút gọn tổng được. Vì vậy ta sẽ ước lượng biểu thức trong tổng bằng cách so sánh với các đa thức Taylor

Từ khai triển Taylor, ta có $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ với mọi $x \geq 0$. Từ đó có thể giải bài toán như sau.

www.mathvn.com

Giải. Áp dụng bất đẳng thức $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \leq 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$ với $x = \frac{1}{\sqrt{n+k}}$ ta có

$$\frac{1}{2}\frac{1}{n+k} - \frac{1}{24}\frac{1}{(n+k)^2} \leq 1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n+k}} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{n+k}.$$

Cho $k = 1, 2, \cdots, n$ rồi lấy tổng ta được

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} - \frac{1}{24}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2} \leq n - \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{1}{\sqrt{n+k}} \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \quad (1).$$

Ta có

$$0 < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2}$$

nên theo nguyên lí kẹp

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2} = 0 \quad (2).$$

Mặt khác ta có

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+k/n} = \int_0^1\frac{dx}{1+x} = \ln 2 \quad (3).$$

Từ (1), (2), (3) và theo nguyên lí kẹp ta nhận được giới hạn cần tìm là $\frac{\ln 2}{2}$. □

Bài 2.29. Cho dãy số

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}.$$

1. Chứng minh rằng nếu $\alpha \leq 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$,
2. Chứng minh rằng nếu $\alpha > 1$ thì dãy (a_n) hội tụ,
3. Tính $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n} - a_n)$.

Giải. Ta có

$$\int_k^{k+1}\frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x^\alpha}.$$

www.mathvn.com

Lấy tổng theo k ta được

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln(n+1) & \text{nếu } \alpha = 1, \\ \frac{(n+1)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{nếu } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

và

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} 1 + \ln n & \text{nếu } \alpha = 1, \\ 1 + \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{nếu } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Từ đó suy ra nếu $\alpha \leq 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Nếu $\alpha > 1$ thì dãy (a_n) tăng và bị chặn trên nên hội tụ.

Tương tự như vậy, lấy tổng của bất đẳng thức đầu tiên với k từ n đến $2n$, ta được

$$\int_n^{2n+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n-1}^{2n} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Do đó

$$\ln \frac{2n+1}{n} \leq a_{2n} - a_n \leq \ln \frac{2n}{n-1}, \quad \text{nếu } \alpha = 1$$

và

$$\frac{(2n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq a_{2n} - a_n \leq \frac{(2n-1)^{1-\alpha} - (n-1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad \text{nếu } \alpha \neq 1.$$

Theo nguyên lí kẹp ta có

$$\lim_{n\to\infty} (a_{2n} - a_n) = \begin{cases} \infty & \text{nếu } \alpha < 1, \\ \ln 2 & \text{nếu } \alpha = 1, \\ 0 & \text{nếu } \alpha > 1. \end{cases}$$

$\square$

Tổng tích phân

Cho hàm số f khả tích trên $[a, b]$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$ chọn các điểm chia $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{1\leq i\leq n} |x_i - x_{i-1}| = 0$ và các điểm trung gian $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Khi đó

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)|x_i - x_{i-1}| = \int_a^b f(x)\, dx.$$

www.mathvn.com

Đặc biệt khi $a = 0$, $b = 1$, bằng cách chọn $\xi_i = x_i = \frac{i}{n}$, ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Phương pháp tổng tích phân thường được dùng kết hợp với nguyên lí kẹp để tìm giới hạn dạng $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$.

Bài 2.30 (Đề thi 2008)**.** Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^{2008}+2^{2008}+3^{2008}+\cdots+n^{2008}}{n^{2009}}$.

Hướng dẫn. Biểu thức cần tính giới hạn là trung bình cộng của n số có dạng $\frac{i^{2008}}{n^{2008}} = \left(\frac{i}{n}\right)^{2008}$. Do đó biểu thức cần tính giới hạn là một tổng tích phân của hàm số $f(x) = x^{2008}$.

Giải. Xét hàm số $f(x) = x^{2008}$ trên $[0, 1]$. Chia đoạn $[0, 1]$ thành các đoạn con bởi các điểm $x_i = \frac{i}{n}$ và chọn $\xi_i = \frac{i}{n} \in [x_{i-1}, x_i]$ ta được

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1^{2008}+2^{2008}+3^{2008}+\cdots+n^{2008}}{n^{2009}} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \\ &= \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2009}.\end{aligned}$$

□

Bài 2.31. Tính giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - i^2}}.$$

Giải. Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ trên $[0, 1]$. Chia đoạn $[0, 1]$ thành các đoạn con bởi các điểm $x_i = \frac{i}{n}$ và chọn $\xi_i = \frac{i}{n} \in [x_{i-1}, x_i]$ ta được

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - i^2}} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{4 - (i/n)^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

□

2.3 Bài tập tự luyện

Bài 2.32 (Đề thi 2006)**.** Xác định các dãy số (x_n) biết rằng $x_{2n+1} = 3x_n + 2$ với $n = 0, 1, 2, \dots$

Hướng dẫn. Ta khử số hạng tự do trong công thức truy hồi bằng cách đặt $y_n = x_n + a$. Thay vào ta được

$$y_{2n+1} - a = 3(y_n - a) + 2 \Leftrightarrow y_{2n+1} = 3y_n + 2 - 2a.$$

Vậy cần chọn $a = 1$ và ta được $y_{2n+1} = 3y_n$. Tương tự ta khử hệ số tự do 1 trong chỉ số $2n+1$ bằng cách đặt $z_n = y_{n-1}$ thì ta được $z_{2n} = 3z_n$. Cuối cùng ta khử hệ số 3 bằng cách đặt $t_n = n^b z_n$ thì ta được $b = \log_2 3$, $t_n = n^{\log_2 3} z_n$ và $t_{2n} = t_n$ trong đó (t_n) là dãy số tuần hoàn nhân tính chu kì 2 bất kì.

Bài 2.33 (Đề thi 2007)**.** Cho dãy số (x_n) được xác định bởi: $x_0 = 2007$ và

$$x_n = -2007\left(\frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n}\right)$$

với $n \geq 1$. Tìm liên hệ giữa x_n và x_{n-1}. Từ đó, tính tổng $S = x_0 + 2x_1 + 4x_2 + \cdots + 2^{2007}x_{2007}$.

Bài 2.34. Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{5}{2}, \\ u_n = 5 - \dfrac{6}{u_{n-1}}, \text{ với mọi } n \geq 1. \end{cases}$$

Bài 2.35. Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi

$$x_1 = 1, \quad x_n = \frac{2n}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n-1} x_i, \forall n \geq 2.$$

Với mỗi số nguyên dương n, đặt $y_n = x_{n+1} - x_n$. Chứng minh rằng dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$.

Bài 2.36. Khảo sát sự hội tụ của các dãy số sau

1. $a_1 \geq 1$ và $a_{n+1} = \frac{1}{a_n+2}$,

2. $u_1 > 0$ và $u_{n+1} = \frac{u_n^2+3}{2(u_n+1)}$,

www.mathvn.com

3. $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}$,

4. $u_{n+1} = \sqrt{3 - v_n}$, $v_{n+1} = \sqrt{3 + u_n}$ và $u_0 = v_0 = 0$,

5. $\frac{a_n}{b_n}$ biết rằng $a_{n+1} = a_n + 2b_n$, $b_{n+1} = a_n + b_n$ với $a_1 = 3$ và $b_1 = 2$.

Hướng dẫn.

1. $a_n > 0$ và $|f'(x)| = \frac{1}{(x+2)^2} < \frac{1}{4}$ với $x > 0$.

2. $f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{2(x^2+2x+1)}$, để f co cần $x \geq 1$. Ta có $f(x) = \frac{x+1}{2} + \frac{1}{x+1}$ nên $u_2 \geq 1$, suy ra $u_n \geq 1$.

3. $u_n \geq 2$ và $f'(x) = \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{4}$ với $x \geq 2$.

4. Nhận xét $u_n \leq \sqrt{3}$. Biến đổi $u_{n+2} = \sqrt{3 - \sqrt{3 + u_n}}$. Có $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{(3+x)(3-\sqrt{3+x})}}$ là ánh xạ co với $x \leq \sqrt{3}$.

5. Đặt $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ thì $c_{n+1} = \frac{c_n+2}{c_n+1}$ và $c_n > 1$ có $|f'(x)| = \frac{1}{(1+x)^2} < \frac{1}{2}$ với $x > 1$.

Bài 2.37. Khảo sát sự hội tụ của các dãy số dạng $u_{n+1} = f(u_n)$ như sau

1. $a_{n+1} = a_n + \int_0^1 |t - a_n| dt$.

2. $a_1 = 0$ và $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$ với $a \geq 0$.

3. $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = \frac{2(2a_n+1)}{a_n+3}$.

4. $0 < a_1 < b$ và $a_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2+a_n^2}{a+1}}$.

5. $a_1 = 2$ và $a_{n+1} = 2 + \frac{1}{3+\frac{1}{a_n}}$.

6. $a_1 > 0$ và $a_{n+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)a_n + \frac{a^2}{a_n^{p-1}}\right)$ với $a > 0$ và $p > 0$,

7. $u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n^2 + 8)$,

8. $u_{n+1} = \frac{u_n}{\ln u_n}$ với $u_1 > 1$,

9. $u_{n+1} = \sqrt{a + \sqrt{u_n}}$ với $u_1 \geq 0$,

10. $a_{n+1} = a_n \frac{a_n^2+3a}{3a_n^2+a}$ với $a_1 > 0$,

11. $a_{n+1} = a_n^2 + (1-2a)a_n + a^2$ (Bài 4 năm 2000),

12. $a_{n+1} = \cos a_n$ với $a_1 \in (0, 1)$,
13. $a_1 > 0$ và $a_{n+1} = \arctan a_n$.
14. $a_{n+1} = \frac{\pi}{3} \sin a_n$ với $a_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$,
15. $a_{n+1} = \sin a_n$.
16. $a_{n+1} = 2^{1-a_n}$,
17. $a_{n+1} = a^{a_n}$ với $a_1 = 1$,
18. $a_{n+1} = \sqrt{1 - a_n}$ với $a_1 \in (0, 1)$,
19. $a_{n+1} = \left(a_n^{-7/3} + 1\right)^{-3/13}$,
20. $\frac{u_{n+1}}{\prod_{k=1}^{n} u_k}$ cho biết $u_{n+1} = u_n^2 - 2$ và $u_1 = 5$ (Bài 1 năm 2005).

Bài 2.38 (Đề thi 2011)**.** Cho hàm số $f(x) = \frac{e^x}{(x+1)^2}$.

a) Chứng minh rằng $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất trong $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ và $f'(x)$ đồng biến.

b) Chứng minh rằng dãy u_n xác định bởi $u_1 = 1$, $u_{n+1} = f(a_n)$ thỏa mãn $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ với mọi $n \geq 1$.

Bài 2.39. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{2011}{3} \ln(x_n^2 + 2011^2) - 2011^2.$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn.

Bài 2.40. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \ln(3 + \cos x_n + \sin x_n) - 2008.$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn.

Bài 2.41 (Đề thi 2014)**.** Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n}$ với mọi $n \geq 0$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ với điều kiện $x_0 \geq 4$ và $x_1 \geq 4$.

Bài 2.42. Cho hai dãy số (x_n) và (y_n) thỏa mãn $x_1, y_1 > 0$ và $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ và $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng hai dãy đã cho hội tụ về cùng một giới hạn.

www.mathvn.com

Bài 2.43. Cho hai dãy số (x_n) và (y_n) thỏa mãn $x_1, y_1 > 0$ và $x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$ và $y_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{x_n}+\frac{1}{y_n}}$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng hai dãy đã cho hội tụ về cùng một giới hạn.

Bài 2.44. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 3, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n + 4}{5}, \forall n \geq 1.$$

Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k+3}$.

Bài 2.45. Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_1 = \frac{1}{2}$ và $x_{n+1} = \frac{\sqrt{x_n^2+4x_n}+x_n}{2}$ với $n \geq 1$.

a) Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2}$.

b) Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = 1$.

Bài 2.46 (Đề thi 2005)**.** Cho dãy số (x_n) được xác định bởi công thức truy hồi sau: $x_1 = 5, x_{n+1} = x_n^2 - 2$. Tìm giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \cdots x_n}\right)^2.$$

Bài 2.47. Chứng minh rằng

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1) = \ln a$ với $a > 0$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{n}-1) = +\infty$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^b} = +\infty$ với $a > 1$,
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^b} = 0$ với $b > 0$,
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Bài 2.48. Chứng minh các mệnh đề sau

1. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n u_k}{n} = a$.
2. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} (u_{n+1} - u_n) = a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = a$.
3. Nếu $u_n \geq 0$ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n u_k} = a$.
4. Nếu $u_n \geq 0$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = a$.

5. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = q$ thì

   - $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ nếu $q < 1$,
   - $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ nếu $q > 1$.

6. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = q$ thì

   - $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ nếu $q < 1$,
   - $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ nếu $q > 1$.

Bài 2.49. Tìm giới hạn của các dãy số sau

1. $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$,
2. $\frac{1}{n^{k+1}}\sum_{i=0}^{n}\frac{(k+i)!}{n!}$,
3. $\frac{1}{n^{k+1}}\sum_{i=1}^{n} i^k$,
4. $\frac{1}{n^k}\sum_{i=1}^{n} i^k - \frac{n}{n+k}$,
5. $\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$.

Bài 2.50. Các dãy số sau hội tụ hay phân kì?

1. $\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{4^k}$,
2. $\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)^2}$,
3. $\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{k^3-2k^2+5k}$,
4. $\sum_{k=0}^{n}\frac{P(k)}{a^k}$ trong đó $P(k)$ là một đa thức và $a > 1$,
5. $\sum_{k=0}^{n}\frac{P(k)}{Q(k)}$ trong đó $P(k)$ và $Q(k)$ và các đa thức có hệ số bậc cao nhất là số dương.

Bài 2.51. Cho các số thực dương $a_1, \cdots, a_k$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$. Chứng minh rằng

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i a_i^n\right)^{1/n} = \max\limits_{1\le i\le k}\{a_i\}$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i a_i^{-n}\right)^{-1/n} = \min\limits_{1\le i\le k}\{a_i\}$.

Bài 2.52. Tìm giới hạn của các dãy số sau

www.mathvn.com

1. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$,
2. $\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$,
3. $\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k[kx]$ với $x \in \mathbb{R}$,
4. $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right)$,
5. $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{k}{n^2}\right)$,
6. $\frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^{n} k^k$,
7. $\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{\pi}{n+k}$.

Bài 2.53. Tìm giới hạn của các dãy số sau

1. $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$,
2. $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$,
3. $\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k^2}{n^3+k^3}$,
4. $\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$,
5. $\sum_{k=1}^{n} e^{1/(n+k)} - n$,
6. $\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k/n}}{n+\frac{k}{n}}$,
7. $\prod_{k=1}^{n} (kn)^{\frac{1}{(n+k)\ln n}}$,
8. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{kn}}$,
9. $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\sin \frac{k\pi}{2n}}$,

www.mathvn.com

Chương 3

Hàm số

3.1 Tóm tắt lí thuyết

3.1.1 Hàm số

Định nghĩa 3.1 (Hàm số)**.** *Cho tập hợp $A \subset \mathbb{R}$. Hàm số là một ánh xạ $f : A \to \mathbb{R}$. Tập hợp $D_f = A$ được gọi là tập xác định của hàm số. Tập hợp $f(A) = \{f(x) \,|\, x \in A\}$ được gọi là tập giá trị của hàm số.*

Định nghĩa 3.2 (Hàm số sơ cấp)**.** *Các hàm số sau đây được gọi là các hàm số sơ cấp cơ bản:*

1. *hàm hằng,*
2. *hàm lũy thừa $f(x) = x^a$ trong đó $a \in \mathbb{R}$,*
3. *hàm mũ $f(x) = a^x$ trong đó $0 < a \neq 1$,*
4. *hàm logarit $f(x) = \log_a x$ trong đó $0 < a \neq 1$,*
5. *các hàm lượng giác* sin, cos, tan,
6. *các hàm lượng giác ngược* arcsin, arccos, arctan.

Hàm số sơ cấp là hàm số thu được từ các hàm sơ cấp cơ bản bằng cách sử dụng hữu hạn các phép toán: cộng, trừ, nhân, chia và phép hợp.

Định nghĩa 3.3 (Hàm số chẵn, hàm số lẻ)**.**

1. *Hàm số f được gọi là hàm số chẵn trên $M \subset D_f$ nếu với mọi $x \in M$ ta có $-x \in M$ và $f(-x) = f(x)$.*

www.mathvn.com

2. *Hàm số f được gọi là hàm số lẻ trên $M \subset D_f$ nếu với mọi $x \in M$ ta có $-x \in M$ và $f(-x) = -f(x)$.*

Định nghĩa 3.4 (Hàm số tuần hoàn)**.**

1. *Hàm số f được gọi là hàm tuần hoàn (cộng tính) chu kì $a > 0$ trên $M \subset D_f$ nếu với mọi $x \in M$ ta có $x \pm a \in M$ và $f(x+a) = f(x)$. Giá trị a nhỏ nhất (nếu có) thỏa mãn điều kiện trên được gọi là chu kì cơ sở của f.*

2. *Hàm số f được gọi là hàm tuần hoàn nhân tính chu kì $a \notin \{0, -1, 1\}$ trên $M \subset D_f$ nếu với mọi $x \in M$ ta có $a^{\pm 1}x \in M$ và $f(ax) = f(x)$.*

3.1.2 Giới hạn của hàm số

Định nghĩa 3.5 (Lân cận và điểm tụ)**.** *Cho $\varepsilon > 0$. Tập hợp $V_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ được gọi là một lân cận bán kính ε của số thực x_0.*

Cho $D \subset \mathbb{R}$. Số thực x_0 được gọi là một điểm tụ của D nếu mọi lân cận của x_0 đều chứa ít nhất một số thực khác x_0 trong D, nghĩa là với mọi $\varepsilon > 0$ ta có $D \cap V_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$.

Định nghĩa 3.6 (Giới hạn)**.** *Cho hàm số $f : D_f \to \mathbb{R}$ và x_0 là điểm tụ của D_f. Ta nói f có giới hạn là a khi x tiến đến x_0, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, nếu*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in D_f : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Định nghĩa 3.7 (Giới hạn ở dương vô cùng)**.** *Cho hàm số $f : D_f \to \mathbb{R}$ và tồn tại $M_0 > 0$ sao cho $(M_0, +\infty) \subset D_f$. Ta nói f có giới hạn là a khi x tiến đến $+\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$, nếu*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \in D_f : x > M \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Định nghĩa 3.8 (Giới hạn ở âm vô cùng)**.** *Cho hàm số $f : D_f \to \mathbb{R}$ và tồn tại $M_0 < 0$ sao cho $(-\infty, M_0) \subset D_f$. Ta nói f có giới hạn là a khi x tiến đến $-\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$, nếu*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists M < 0, \forall x \in D_f : x < M \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Định nghĩa 3.9 (Giới hạn bằng dương vô cùng)**.** *Cho hàm số $f : D_f \to \mathbb{R}$ và x_0 là điểm tụ của D_f. Ta nói f có giới hạn là $+\infty$ khi x tiến đến x_0, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, nếu*

$$\forall M > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in D_f : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Định nghĩa 3.10 (Giới hạn bằng âm vô cùng)**.** *Cho hàm số $f : D_f \to \mathbb{R}$ và x_0 là điểm tụ của D_f. Ta nói f có giới hạn là $-\infty$ khi x tiến đến x_0, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, nếu*

$$\forall M < 0, \exists \delta < 0, \forall x \in D_f : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < M.$$

Định lí 3.1. *Ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ nếu: với mọi dãy số (x_n) mà $x_n \in D_f \setminus \{x_0\}$ và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.*

Định lí 3.2 (Tính chất của giới hạn)**.** *Cho các hàm số f và g có giới hạn khi $x \to x_0$.*

1. $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x) = c \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *với* $c \in \mathbb{R}$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
3. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ *nếu* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.
5. *Nếu* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ *thì* $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.
6. *Nếu f là hàm số sơ cấp và $x_0 \in D_f$ thì* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
7. *Nguyên lý kẹp:*

$$\text{Nếu} \quad \begin{cases} f(x) \le h(x) \le g(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a \end{cases} \quad \text{thì} \quad \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a.$$

Định nghĩa 3.11 (Giới hạn một phía)**.**

1. *Số a được gọi là giới hạn trái của f tại x_0, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = a$, nếu*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f : 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

2. *Số a được gọi là giới hạn phải của f tại x_0, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = a$, nếu*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Định lí 3.3. *Giới hạn* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *tồn tại khi và chỉ khi* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ *và* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ *tồn tại và bằng nhau. Khi đó* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

Định nghĩa 3.12 (Vô cùng bé, vô cùng lớn)**.**

1. *Hàm số* f *được gọi là một vô cùng bé (VCB) khi* $x \to x_0$ *nếu* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.
2. *Hàm số* f *được gọi là một vô cùng lớn (VCL) khi* $x \to x_0$ *nếu* $\frac{1}{f(x)}$ *là một VCB.*

Định lí 3.4 (Tính chất của vô cùng bé)**.**

1. *Tổng của hai VCB là một VCB.*
2. *Tích của hai VCB là một VCB.*
3. *Tích của một VCB và một hàm bị chặn là một VCB.*

Định nghĩa 3.13 (So sánh bậc của các vô cùng bé)**.** *Cho* f *và* g *là hai vô cùng bé khi* $x \to x_0$*. Giả sử* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

1. *Nếu* $k = 0$ *thì* f *được gọi là VCB bậc cao hơn* g*. Kí hiệu* $f(x) = o(g(x))$.
2. *Nếu* $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *thì* f *và* g *là hai VCB cùng cấp.*

   Đặc biệt: Nếu $k = 1$ *thì* f *và* g *là hai VCB tương đương. Kí hiệu* $f(x) \sim g(x)$.
3. *Nếu* $k = \pm\infty$ *thì* g *là VCB bậc cao hơn* f*. Kí hiệu* $g(x) = o(f(x))$.

3.1.3 Tính liên tục của hàm số

Định nghĩa 3.14 (Hàm số liên tục)**.** *Hàm số* f *được gọi là liên tục tại* x_0 *nếu* f *xác định tại* x_0 *và* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$*. Hàm số* f *được gọi là liên tục nếu nó liên tục tại mọi điểm* x_0 *thuộc tập xác định.*

Định lí 3.5 (Tính chất của hàm số liên tục)**.** *Cho* f *và* g *là hai hàm số liên tục tại* x_0*, khi đó*

1. af, $f + g$ *và* fg *liên tục tại* x_0*, với* $a \in \mathbb{R}$.
2. *Nếu* $g(x_0) \neq 0$ *thì* $\frac{f}{g}$ *liên tục tại* x_0.

Định lí 3.6. *Các hàm số sơ cấp liên tục trên miền xác định của nó.*

Một trong những tính chất quan trọng nhất của hàm số liên tục được phát biểu trong định lí giá trị trung gian (còn gọi là định lí Bolzano – Cauchy):

Định lí 3.7 (Định lí giá trị trung gian)**.** *Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì nó có thể nhận mọi giá trị trung gian giữa $f(a)$ và $f(b)$.*

Một hàm số liên tục trên một đoạn thì luôn có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn đó. Từ định lí trên ta suy ra nếu f liên tục trên đoạn $[a, b]$ và nếu m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của f trên đoạn $[a, b]$ thì với mọi $c \in [m, M]$. Phương trình $f(x) = c$ luôn có nghiệm trong $[a, b]$.

Từ định lí giá trị trung gian ta suy ra

Định lí 3.8. *Cho f là hàm số liên tục trên $[a, b]$.*

1. *Nếu phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm trên $[a, b]$ thì $f(x) > 0, \forall x \in [a, b]$ hoặc $f(x) < 0, \forall x \in [a, b]$.*

2. *Nếu f là đơn ánh thì f là hàm số đơn điệu (tăng chặt hoặc giảm chặt).*

3.2 Các dạng toán về hàm số

3.2.1 Tính chất của hàm số

Đây là các dạng bài yêu cầu vận dụng linh hoạt các tính chất cơ bản của hàm số như đơn điệu, bị chặn, tuần hoàn...

Bài 3.1. Cho hàm số $f : [0, 1] \to [0, 1]$ là hàm số tăng. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ có nghiệm trong $[0, 1]$.

Giải. Đặt $A = \{x \in [0, 1] : f(x) \geq x\}$. Ta có $A \neq \emptyset$ vì $0 \in A$. Đặt $x_0 = \sup A$. Ta sẽ chứng minh rằng $f(x_0) = x_0$.

- Giả sử $f(x_0) > x_0$. Vì f tăng nên ta có $f(f(x_0)) \geq f(x_0)$. Do đó $f(x_0) \in A$, mâu thuẫn vì ta có $f(x_0) > x_0 = \sup A$.

- Giả sử $f(x_0) < x_0$. Vì f tăng nên với mọi $x \in (f(x_0), x_0]$ ta có $f(x) \leq f(x_0) < x$, mâu thuẫn với định nghĩa $x_0 = \sup A$.

Vậy chỉ có thể xảy ra $f(x_0) = x_0$.

Lưu ý: f không phải là hàm số liên tục nên không thể dùng định lí giá trị trung gian để giải bài này. □

Bài 3.2. Tìm tất cả các số thực a sao cho $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2+\sin(ax)}{2+\sin x}$ tồn tại.

Giải. Giả sử $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2+\sin(ax)}{2+\sin x} = l$. Hiển nhiên $a = 0$ không thỏa mãn đề bài.

Đặt $f(x) = 2 + \sin ax$ và $g(x) = 2 + \sin x$ thì f và g là các hàm tuần hoàn với chu kì lần lượt là $T_1 = \frac{2\pi}{|a|}$ và $T_2 = 2\pi$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. Thay x bởi $x + T_1$ ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x+T_1)}{g(x+T_1)} = l$. Chia đẳng thức sau cho đẳng thức trước theo từng vế ta được $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{g(x+T_1)} = 1$. Mặt khác $h(x) = \frac{g(x)}{g(x+T_1)}$ là hàm tuần hoàn nên chỉ hội tụ về 1 khi và chỉ khi $h \equiv 1$.

Vậy $g(x) = g(x + T_1)$ với mọi x. Chứng minh tương tự ta có $f(x) = f(x+T_2)$ với mọi x. Vậy 2 hàm f và g có cùng chu kì nên ta phải có $T_1 = T_2$, nghĩa là $|a| = 1$.

- Trường hợp $a = 1$: thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- Trường hợp $a = -1$: bằng cách xét các dãy $(n\pi)$ và $(\frac{\pi}{2} + n\pi)$ ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2+\sin(-x)}{2+\sin x}$ không tồn tại.

Vậy $a = 1$ là giá trị duy nhất thỏa yêu cầu đề bài. □

3.2.2 Định lí giá trị trung gian

Cách giải bài toán chứng minh tồn tại số thực x thỏa mãn một đẳng thức nào đó liên quan đến các hàm số liên tục:

1. Biến đổi đẳng thức về dạng $g(x) = c$ với g là một hàm số liên tục.
2. Chứng minh $\min\limits_{x\in[a,b]} g(x) \leq c \leq \max\limits_{x\in[a,b]} g(x)$.
3. Khi đó sự tồn tại của $x \in [a, b]$ thỏa $g(x) = c$ được đảm bảo bởi định lí giá trị trung gian.

Bài 3.3. Cho hàm số liên tục $f : [a, b] \to [a, b]$. Chứng minh rằng f có điểm bất động. (Ta định nghĩa điểm bất động của hàm số f là nghiệm của phương trình $f(x) = x$).

Hướng dẫn. Phương trình điểm bất động là $f(x) = x$, ta sẽ đưa về dạng $g(x) = 0$ với $g(x) = f(x) - x$.

Giải. Đặt $g(x) = f(x) - x$. Ta có $g(a) = f(a) - a \geq 0$ và $g(b) = f(b) - b \leq 0$ nên tồn tại $c \in [a, b]$ thỏa mãn $g(c) = 0$. Đó chính là điểm bất động của f. □

Bài 3.4. Cho $f : [a, b] \to (a, b)$ là hàm số liên tục. Chứng minh rằng tồn tại $\alpha > 0$ và $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) + f(c + \alpha) + f(c + 2\alpha) = 3(c + \alpha)$.

Hướng dẫn. Nhận xét là $(c) + (c + \alpha) + (c + 2\alpha) = 3(c + \alpha)$. Do đó nếu đặt $g(x) = f(x) - x$ thì phương trình đã cho được đưa về dạng $g(c) + g(c + \alpha) + g(c + 2\alpha) = 0$. Nhận thấy $g(a) > 0$ và $g(b) < 0$ nên ta chỉ cần xê dịch c và α một chút từ 2 đầu mút là đẳng thức $g(c) + g(c + \alpha) + g(c + 2\alpha) = 0$ sẽ được thỏa mãn.

Giải. Đặt $g(x) = f(x) - x$ thì g liên tục trên $[a, b]$. Ta có $g(a) = f(a) - a > 0$ và $g(b) = f(b) - b < 0$ nên từ tính liên tục của g suy ra tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $g(x) > 0$ với mọi $x \in [a, a + \varepsilon]$ và $g(x) < 0$ với mọi $x \in [b - \varepsilon, b]$.

Chọn $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$ và đặt $h(x) = g(x) + g(x + \alpha) + g(x + 2\alpha)$ ta có $h(a) > 0 > h(b - 2\alpha)$ và h liên tục trên $[a, b]$ nên tồn tại $c \in (a, b - 2\alpha)$ sao cho $h(c) = 0$, nghĩa là $g(c) + g(c + \alpha) + g(c + 2\alpha) = 0$, hay nói cách khác

$$f(c) + f(c + \alpha) + f(c + 2\alpha) = 3(c + \alpha).$$

□

Bài 3.5. Cho hàm số f xác định và liên tục trên $[0, n]$ với n là một số tự nhiên cho trước. Chứng minh rằng tồn tại $x_1, x_2 \in [0, n]$ sao cho $x_2 - x_1 = 1$ và $2f(x_2) - f(x_1) = \frac{2^n f(n) - f(0)}{2^n - 1}$.

Giải. Đặt $g(x) = 2f(x + 1) - f(x)$ với $x \in [0, n - 1]$. Ta có

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k g(k)}{2^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{k+1} f(k + 1) - 2^k f(k)}{2^n - 1} = \frac{2^n f(n) - f(0)}{2^n - 1}.$$

Do g liên tục nên đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $[0, n - 1]$. Giả sử $g(a) = \min\limits_{x \in [0, n-1]} g(x)$ và $g(b) = \max\limits_{x \in [0, n-1]} g(x)$. Ta có

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k g(k)}{2^n - 1} \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k g(a)}{2^n - 1} = g(a)$$

và

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k g(k)}{2^n - 1} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k g(b)}{2^n - 1} = g(b).$$

Do đó theo định lí giá trị trung gian tồn tại $x_1 \in [0, n - 1]$ sao cho $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k g(k)}{2^n - 1} = g(x_1)$.

Đặt $x_2 = x_1 + 1$ ta có điều phải chứng minh. □

Bài 3.6 (Đề thi 2007)**.** Chứng minh rằng nếu tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$ có hai nghiệm thực phân biệt thì có ít nhất một nguyên hàm của nó là đa thức bậc ba có các nghiệm đều là số thực.

Giải. Xét hàm số $F(x) = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx$ thì $F'(x) = f(x)$. Theo đề bài $f(x)$ có hai nghiệm thực $x_1 < x_2$ nên đó cũng là 2 điểm cực trị của $F(x)$ (1 cực đại và 1 cực tiểu). Do đó với các giá trị m nằm giữa $F(x_1)$ và $F(x_2)$ thì đường thẳng $y = m$ sẽ cắt đường cong $y = F(x)$ tại 3 điểm và phương trình $F(x) = m$ có đúng 3 nghiệm.

Vậy $F(x) - m$ là nguyên hàm của $f(x)$ cần tìm. □

Bài 3.7 (Đề thi 2009)**.** Giả sử f và g là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(g(x)) = g(f(x))$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu phương trình $f(x) = g(x)$ không có nghiệm thực thì phương trình $f(f(x)) = g(g(x))$ cũng không có nghiệm thực.

Giải. Đặt $h(x) = f(x) - g(x)$. Theo đề bài phương trình $h(x) = 0$ không có nghiệm thực nên $h(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $h(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $h(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ hay $f(x) > g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Thay x bởi $f(x)$, ta có $f(f(x)) > g(f(x)) = f(g(x)) > g(g(x))$ với mọi x. Từ đó suy ra phương trình $f(f(x)) = g(g(x))$ không có nghiệm thực. □

Bài 3.8. Cho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{4}{9}$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in (0, 1)$ thỏa mãn

$$x_0^2 < f(x_0) < x_0.$$

Hướng dẫn. Ta chỉ cần tìm được 1 "hàm mẫu" f_0 thỏa đề bài với mọi x_0 rồi so sánh hàm f tổng quát với f_0 để đi đến kết luận. Do đó ta tìm f_0 thỏa

$$\int_0^1 f_0(x)\,dx = \frac{4}{9} \quad (1)$$

và

$$x^2 < f_0(x) < x. \quad (2)$$

với mọi $x \in (0, 1)$. Nếu tìm được f_0 như vậy thì bài toán sẽ được giải. Thật vậy, giả sử đã tìm được hàm số f_0 như vậy thì ta có $\displaystyle\int_0^1 f(x) - f_0(x)\,dx = 0$. Do đó hàm số liên tục $f(x) - f_0(x)$ nhận giá trị không âm và giá trị không dương nên phương trình $f(x) - f_0(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in (0, 1)$. Theo cách xác định f_0, nghiệm đó hiển nhiên thỏa mãn

$$x_0^2 < f(x_0) < x_0.$$

Ta cần chỉ ra 1 cách chọn f_0 thỏa (1) và (2). Để thỏa (2) cách đơn giản nhất là chọn f_0 là trung bình gia quyền của 2 đầu mút $f_0(x) = \alpha x^2 + (1-\alpha)x$ với $\alpha \in (0, 1)$. Để thỏa (1) ta cần có $\displaystyle\int_0^1 \alpha x^2 + (1-\alpha)x\, dx = \frac{4}{9}$, nghĩa là $\alpha = \frac{1}{3}$. Ta có thể trình bày bài giải như sau

Giải. Đặt $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x$ ta có

$$\int_0^1 g(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx - \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x\right) dx = \frac{4}{9} - \frac{4}{9} = 0.$$

Do đó hàm số liên tục g nhận cả giá trị không âm và không dương trên $(0, 1)$ nên tồn tại $x_0 \in (0, 1)$ thỏa mãn $g(x_0) = 0$, nghĩa là $f(x_0) = \frac{1}{3}x_0^2 + \frac{2}{3}x_0$. Hiển nhiên

$$x_0^2 < f(x_0) < x_0.$$

□

Bài 3.9 (Đề thi 2015)**.** Cho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục. Chứng minh rằng tồn tại các số $x_1, x_2, x_3 \in (0, 1)$ sao cho

$$\frac{f(x_1)}{4x_1} + \frac{f(x_2)}{6x_2^2} = f(x_3).$$

Hướng dẫn. Chỉ cần chọn x_1 và x_2 thỏa $4x_1 = 6x_2^2 = 2$ thì vế trái là trung bình cộng của $f(x_1)$ và $f(x_2)$ nên theo định lí giá trị trung gian, tồn tại x_3 thỏa bài toán.

Bài 3.10 (Đề thi 2005)**.** Cho số dương a và hàm số f có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $f'(x) \geq a$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết rằng

$$0 < \int_0^{\pi/2} f(x) \sin x\, dx < a.$$

Chứng minh rằng khi đó trên đoạn $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, phương trình $f(x) = 0$ có duy nhất nghiệm.

www.mathvn.com

Hướng dẫn. Do giả thiết $f'(x) \geq a > 0$ nên f đồng biến. Do đó chỉ cần chứng minh $f(0) \leq 0$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 0$ là xong. Tích phân từng phần để làm cho f' xuất hiện dưới dấu tích phân

$$\begin{aligned} a &> \int_0^{\pi/2} f(x) \sin x \, dx \\ &= -f(x) \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} f'(x) \cos x \, dx \\ &\geq f(0) + a \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx \\ &= f(0) + a. \end{aligned}$$

Vậy $f(0) < 0$. Chỉ còn phải chứng minh $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 0$. Thật vậy, nếu $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ thì ta có $f(x) < 0$ với mọi $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, dẫn đến $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x) \sin x \, dx < 0$, mâu thuẫn với giả thiết đã cho.

Bài 3.11. Cho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 f(x) \, dx = \frac{\pi}{4}$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in (0, 1)$ thỏa mãn

$$\frac{1}{1 + x_0} < f(x_0) < \frac{1}{2x_0}.$$

Hướng dẫn. Tương tự bài trên ta chỉ cần tìm được hàm số f_0 thỏa $\displaystyle\int_0^1 f_0(x) \, dx = \frac{\pi}{4}$ và

$$\frac{1}{1 + x} < f_0(x) < \frac{1}{2x}$$

với mọi $x \in (0, 1)$ thì bài toán sẽ được giải. Trong bài toán này do $1 \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \, dx = \ln 2$ và $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{2x} \, dx = +\infty$ nên không thể chọn ngay f_0 là bình quân gia quyền của 2 đầu mút

$$f_0(x) = \frac{\alpha}{1 + x} + \frac{1 - \alpha}{2x}$$

(vì lúc này $\displaystyle\int_0^1 f_0(x) \, dx = +\infty$) mà cần khéo léo "cắt xén" bớt thành phần

$\frac{1-\alpha}{2x}$ của f_0 ở gần 0 để làm cho $\displaystyle\int_0^1 f_0(x) < +\infty$, chẳng hạn tìm f_0 ở dạng

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{1+x} + \frac{1-\alpha}{2x}, & x \in (\varepsilon, 1] \\ \frac{\beta}{1+x}, & x \in (0, \varepsilon) \end{cases}$$

Trước hết xác định β để f_0 liên tục: $\beta = \alpha + \frac{(1-\alpha)(1+\varepsilon)}{2\varepsilon}$. Sau đó cố định $\alpha = \frac{1}{2}$. Vậy

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{4x}, & x \in (\varepsilon, 1] \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{1+\varepsilon}{4\varepsilon}\right)\frac{1}{1+x}, & x \in (0, \varepsilon) \end{cases}$$

Cuối cùng xác định ε để $\displaystyle\int_0^1 f_0(x)\,dx = \frac{\pi}{4}$. Tính toán cụ thể dành cho bạn đọc.
Ngoài ra bài này còn nhiều cách chọn khác, ví dụ có thể chọn $f_0(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Với cách chọn này thì lời giải sẽ gọn nhẹ hơn nhưng thiếu tự nhiên hơn.

3.2.3 Phương trình hàm

Đây là các bài toán yêu cầu tìm các hàm số thỏa một phương trình hoặc bất phương trình cho trước.

Thử giá trị và đổi biến

Ý tưởng chung trong việc giải một phương trình và bất phương trình hàm

1. Thử cho các biến nhận các giá trị đặc biệt (0, 1, giá trị đối, giá trị nguyên, giá trị biên, đảo biến, lặp biến ...) để rút dần ra các tính chất của hàm số cần tìm,

2. Dùng các phép đổi biến để đưa phương trình đã cho về dạng đơn giản hơn,

3. Nếu dự đoán phương trình đã cho chỉ có nghiệm duy nhất $f_0(x)$ thì thử đặt $g(x) = f(x) - f_0(x)$ (hoặc $g(x) = f(x)/f_0(x)$) để được 1 phương trình hàm đơn giản hơn theo g rồi cố gắng chứng minh $g(x) \equiv 0$ (tương ứng $g(x) \equiv 1$).

Bài 3.12 (Đề thi 2006)**.** Tồn tại hay không hàm số $f : [a, b] \to [a, b]$ với $a < b$ và thỏa mãn bất đẳng thức

$$|f(x) - f(y)| > |x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b] \text{ và } x \neq y.$$

www.mathvn.com

Hướng dẫn. Số gia của hàm số lớn hơn số gia của biến số trong khi giá trị của hàm số lại "bị nhốt" trong tập xác định $[a, b]$ nên ta nghĩ tới việc thay x và y bởi 2 đầu mút của tập xác định để có mâu thuẫn.

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn bài toán. Chọn $x = a, y = b$ ta có $|f(a)-f(b)| > |a-b|$. Mặt khác do $f(a), f(b) \in [a, b]$ nên $|f(a)-f(b)| \leq |a-b|$. Ta có mâu thuẫn.

Vậy không tồn tại hàm số f thỏa mãn bài toán. □

Bài 3.13. Tìm tất cả các hàm số $f : [0, 1] \to [0, 1]$ thỏa mãn

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y|,$$

với mọi $x, y \in [0, 1]$.

Giải. Chọn $x = 1$, $y = 0$, theo giả thiết ta có

$$|f(1) - f(0)| \geq |1 - 0| = 1.$$

Mặt khác do $0 \leq f(0), f(1) \leq 1$ nên ta phải có

$$|f(1) - f(0)| \leq 1.$$

Do đó dấu bằng trong các bất đẳng thức trên phải xảy ra. Ta có 2 trường hợp sau:

- *Trường hợp 1:* $f(0) = 0$ và $f(1) = 1$. Do $f(x) \in [0, 1]$ với $x \in [0, 1]$ nên một mặt ta có

  $$f(x) = |f(x) - f(0)| \geq |x - 0| = x.$$

  Mặt khác ta có

  $$f(x) = 1 - |f(1) - f(x)| \leq 1 - |1 - x| = x.$$

  Do đó $f(x) = x$ với mọi $x \in [0, 1]$.

- *Trường hợp 2:* $f(0) = 1$ và $f(1) = 0$. Do $f(x) \in [0, 1]$ với $x \in [0, 1]$ nên một mặt ta có

  $$f(x) = |f(x) - f(1)| \geq |x - 1| = 1 - x.$$

  Mặt khác ta có

  $$f(x) = 1 - |f(0) - f(x)| \leq 1 - |0 - x| = 1 - x.$$

  Do đó $f(x) = 1 - x$ với mọi $x \in [0, 1]$.

Tóm lại có 2 hàm số thỏa mãn bài toán là $f(x) = x$ và $f(x) = 1 - x$ với mọi $x \in [0, 1]$. □

Bài 3.14 (Đề thi 2009)**.** Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} f(x) \le 4 + 2009x, \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x+y) \le f(x) + f(y) - 4, \forall x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Hướng dẫn. Khử số hạng tự do -4 ở bất phương trình 2 bằng cách đặt $g(x) = f(x) - 4$ ta được bài toán đơn giản hơn

$$\begin{cases} g(x) \le 2009x, \forall x \in \mathbb{R} & (1) \\ g(x+y) \le g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R} & (2) \end{cases}$$

Dự đoán $g(x) = 2009x$ là nghiệm duy nhất.

Thử thay giá trị đặc biệt $x = 0$ vào (1) được $g(0) \le 0$ nhưng nếu thay $x = y = 0$ vào (2) thì được $g(0) \ge 0$ nên $g(0) = 0$.

Ta phải tận dụng giá trị $g(0) = 0$ mà ta vừa tìm được bằng cách thay $y = -x$ vào (2) để được $0 \le g(x) + g(-x)$. Mặt khác theo (1) thì $g(x) \le 2009x$ và $g(-x) \le -2009x$ (do thay x bởi $-x$) nên ta được $0 \le g(x) + g(-x) \le 0$. Do đó các bất đẳng thức trên đều phải trở thành đẳng thức nghĩa là $g(x) = 2009x$. Vậy ta tìm được $f(x) = 2009x + 4$ là hàm số duy nhất thỏa mãn bài toán.

Bài 3.15. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x-y)) = f(x)f(y) - f(x) + f(y) - xy,$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Giải. Chọn $y = x$ ta nhận được $f(f(0)) = f^2(x) - x^2$. Đặt $f(f(0)) = c$, ta có $f^2(x) = x^2 + c$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Chọn $y = 0$ ta được $f(f(x)) = (f(0) - 1)f(x) + f(0)$. Bình phương 2 vế ta được

$$f^2(f(x)) = (f(0) - 1)^2 f^2(x) + f^2(0) + 2f(0)(f(0) - 1)f(x)$$

hay

$$x^2 + 2c = (f(0) - 1)^2(x^2 + c) + f^2(0) \pm 2f(0)(f(0) - 1)\sqrt{x^2 + c}$$

www.mathvn.com

Do đẳng thức trên đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên đồng nhất 2 vế ta được

$$\begin{cases} (f(0)-1)^2 = 1 \\ (f(0)-1)^2 c = 2c \\ f(0)(f(0)-1) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Vậy với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $f(x) = x$ hoặc $f(x) = -x$ (*).

- Trường hợp 1: $f(1) = 1$. Chọn $x = 2$ và $y = 1$ ta có $1 = f(2) - f(2) + 1 - 2$, mâu thuẫn.
- Trường hợp 2: $f(1) = -1$. Chọn $y = 1$ ta có $\pm(x-1) = -2f(x) - 1 - x$, do đó với mọi x, ta có $f(x) = -x$ hoặc $f(x) = -1$. Kết hợp với (*) ta được $f(x) = -x$ với mọi $x \neq -1$. Riêng $f(-1)$ có thể bằng 1 hoặc -1.

  Giả sử $f(-1) = -1$, chọn $x = -1, y = 0$, ta được $-1 = 1$, mâu thuẫn. Như vậy $f(-1) = 1$.

Kết luận: $f(x) = -x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ là hàm số duy nhất thỏa yêu cầu bài toán. □

Bài 3.16 (Đề thi 2011). Tìm hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn. Ta chia 2 vế cho $(x-y)(x+y)$ để tách riêng được 2 yếu tố $x-y$ và $x+y$:

$$\frac{f(x+y)}{x+y} - \frac{f(x-y)}{x-y} = 4xy.$$

Để đơn giản, đặt $u = x+y$ và $v = x-y$ ta tính được $4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2 = u^2 - v^2$. Do đó phương trình đã cho trở thành

$$\frac{f(u)}{u} - \frac{f(v)}{v} = u^2 - v^2 \Leftrightarrow \frac{f(u)}{u} - u^2 = \frac{f(v)}{v} - v^2.$$

Do điều này đúng với mọi $u, v \neq 0$ nên với mọi $u \neq 0$ ta phải có $\frac{f(u)}{u} - u^2 = c$ hay $f(u) = u^3 + cu$. Mặt khác nếu chọn $x = y = 1$ trong phương trình ban đầu thì $f(0) = 0$. Vậy $f(x) = x^3 + cx$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 3.17 (Đề thi 2013). Cho $\alpha \geq \beta > 0$. Hãy tìm các hàm số $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(x) = \max\{x^\alpha y^\beta - f(y) : y \geq x\}$ với mọi $x \in (0, +\infty)$.

Hướng dẫn. Ta viết lại điều kiện $f(x) = \max\{x^\alpha y^\beta - f(y) : y \geq x\}$ ở dạng cân đối hơn

$$f(x) + f(y) \geq x^\alpha y^\beta \quad (1)$$

với mọi $y \geq x$ và tồn tại $y_0 \geq x$ sao cho

$$f(x) + f(y_0) = x^\alpha y_0^\beta. \quad (2)$$

Chọn $y = x$ trong (1) ta có $f(x) \geq \frac{x^{\alpha+\beta}}{2}$. Do đó từ (2) suy ra

$$x^\alpha y_0^\beta \geq \frac{x^{\alpha+\beta}}{2} + \frac{y_0^{\alpha+\beta}}{2} \Leftrightarrow 2 \geq \left(\frac{x}{y_0}\right)^\beta + \left(\frac{y_0}{x}\right)^\alpha.$$

Mặt khác $\left(\frac{x}{y_0}\right)^\beta + \left(\frac{y_0}{x}\right)^\alpha \geq \left(\frac{x}{y_0}\right)^\beta + \left(\frac{y_0}{x}\right)^\beta \geq 2$ theo bất đẳng thức AM–GM. Như vậy tất cả các bất đẳng thức trên phải trở thành đẳng thức, nghĩa là $f(x) = \frac{x^{\alpha+\beta}}{2}$.

Bài 3.18. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$ sao cho tồn tại $a \in \mathbb{R}$ và $k > 0$ sao cho

$$f(x)f(2x)\cdots f(nx) \leq an^k,$$

với mọi số thực x và số nguyên dương n.

Hướng dẫn. Trực giác cho thấy vế trái có độ lớn cỡ hàm mũ trong khi vế phải cỡ hàm lũy thừa nên ta dự đoán chỉ có hàm số $f(x) \equiv 1$ thỏa bài toán. Trước hết đơn giản hóa giả thiết bằng cách lấy logarit 2 vế

$$\sum_{k=1}^{n} \ln f(kx) \leq \ln a + k \ln n.$$

Vế trái khiến ta liên tưởng đến tổng tích phân. Cố định $b > 0$ và chọn $x = \frac{b}{n}$ ta được

$$\sum_{k=1}^{n} \ln f\left(\frac{kb}{n}\right) \leq \ln a + k \ln n.$$

Do đó

$$\int_0^b \ln f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n} \ln f\left(\frac{kb}{n}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln a + k\ln n)b}{n} = 0.$$

Kết hợp với giả thiết $f(x) \geq 1$ ta suy ra $f(x) = 1$ với mọi $x \in [0, b]$. Vì $b > 0$ được chọn bất kì nên $f(x) = 1$ với mọi $x \geq 0$. Lập luận tương tự ta cũng có $f(x) = 1$ với mọi $x \leq 0$. Vậy $f(x) \equiv 1$.

www.mathvn.com

Phương trình hàm hồi qui tuyến tính dạng xoắn

Đây là lớp các phương trình hàm có dạng

$$f(\omega(x)) = g(x)f(x) + h(x)$$

trong đó g, h và ω là các hàm số cho trước.

Hàm ω thỏa mãn tính chất: tồn tại $n \geq 1$ sao cho $\omega_n(x) := \underbrace{\omega \circ \omega \circ \cdots \circ \omega}_{n \text{ lần}}(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khi gặp dạng này ta sẽ lần lượt thay x bởi $\omega(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_{n-1}(x)$ vào phương trình hàm đã cho để được hệ phương trình tuyến tính cấp n

$$\begin{cases} f(\omega(x)) - g(x)f(x) = h(x) \\ f(\omega_2(x)) - g(\omega(x))f(\omega(x)) = h(\omega(x)) \\ \ldots \\ f(x) - g(\omega_{n-1}(x))f(\omega_{n-1}(x)) = h(\omega_{n-1}(x)) \end{cases}$$

(với n biến số là $f(x), f(\omega(x)), f(\omega_2(x)), \ldots, f(\omega_{n-1}(x))$). Từ đó xác định được $f(x)$.

Bài 3.19 (Đề thi 2007)**.** Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2f(x) + \frac{3}{x-1}$ với mọi $x \neq 1$.

Giải. Thay x bởi $\frac{x+1}{x-1}$ trong phương trình đã cho, ta có

$$f(x) = 2f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \frac{3(x-1)}{2}$$

với mọi $x \neq 1$.

Nhân 2 vế của phương trình đã cho với 2 rồi cộng vào phương trình này ta được $f(x) = \frac{1-x}{2} + \frac{2}{1-x}$ với mọi $x \neq 1$.

Thử lại hàm số $f(x) = \frac{1-x}{2} + \frac{2}{1-x}$ với mọi $x \neq 1$ và $f(1)$ tùy ý thỏa mãn bài toán. □

Bài 3.20. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$(x-1)f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$$

với mọi $x \neq 0$.

www.mathvn.com

Giải. Thay x bởi $\frac{1}{x}$ trong phương trình đã cho, ta có

$$\left(\frac{1}{x}-1\right) f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{1}{x^2}$$

với mọi $x \neq 0$.

Nhân 2 vế của phương trình đã cho với $1-\frac{1}{x}$ rồi cộng vào phương trình này ta được $f(x)=\frac{x^4-x^3+1}{x(x^2-x+1)}$ với mọi $x \neq 0$.

Thử lại hàm số $f(x)=\frac{x^4-x^3+1}{x(x^2-x+1)}$ với mọi $x \neq 0$ thỏa mãn bài toán. □

Phương trình hàm hồi qui tuyến tính dạng liên tục

Tổng quát để tìm tất cả các hàm liên tục f thỏa mãn

$$f(\omega(x))=g(x)f(x)+h(x) \quad (1)$$

ta có thể làm như sau

1. "Mò" một nghiệm đặt biệt f_0 nào đó của (1), rồi đặt $u(x)=f(x)-f_0(x)$ để đưa bài toán về dạng thuần nhất: tìm các hàm liên tục u thỏa mãn

$$u(\omega(x))=g(x)u(x). \quad (2)$$

2. "Mò" một nghiệm đặt biệt u_0 nào đó của (2), rồi đặt $v(x)=\frac{u(x)}{u_0(x)}$ để đưa bài toán về dạng thuần nhất hệ số 1: tìm các hàm liên tục v thỏa mãn

$$v(\omega(x))=v(x). \quad (3)$$

3. Có 2 trường hợp thường gặp:

   (a) Nếu $\omega(x)=x+a$ với mọi x thì v là hàm tuần hoàn chu kì a. (Trường hợp này không cần đến giả thiết f liên tục.)

   (b) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n(x)=a \in \mathbb{R}$ với mọi x: áp dụng (3) liên tiếp ta có $v(x)=v(\omega_n(x))$ nên qua giới hạn ta nhận được

$$v(x)=\lim_{n\to\infty} v(\omega_n(x))=v\left(\lim_{n\to\infty}\omega_n(x)\right)=v(a).$$

Bài 3.21. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(2x)-f(x)=x,$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

www.mathvn.com

Hướng dẫn. Nhận thấy $f_0(x) \equiv x$ là một nghiệm của phương trình nên ta sẽ đặt $g(x) = f(x) - x$ thì g thỏa mãn $g(2x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra $g(x) = g\left(\frac{x}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R}$. Áp dụng liên tiếp ta được $g(x) = g\left(\frac{x}{2^n}\right), \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{x}{2^n}\right) = g(0).$$

Vậy g là hằng số, suy ra $f(x) \equiv x + c$ là tất cả các hàm số thỏa bài toán.

Bài 3.22 (Đề thi 2015)**.** Với mỗi số thực $\alpha \neq \pm 1$, tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại 0 sao cho

$$f(\alpha x) = f(x) + x^2$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có tồn tại hàm f thỏa mãn các điều kiện nói trên không nếu $\alpha = \pm 1$.

Hướng dẫn. Ta tìm một nghiệm đặc biệt ở dạng $f(x) = cx^2$, thay vào giả thiết đã cho được $c = \frac{1}{\alpha^2-1}$. Do đó bằng cách đặt $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{\alpha^2-1}$ ta sẽ triệt tiêu được số hạng x^2 trong giả thiết để được dạng thuần nhất $g(\alpha x) = g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Áp dụng liên tiếp n lần ta có

$$g(x) = g(\alpha^n x).$$

Do đó nếu $|\alpha| < 1$ thì $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g(\alpha^n x) = g(\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n x) = g(0)$. Tương tự nếu $|\alpha| > 1$ thì ta cũng có $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g(\frac{x}{\alpha^n}) = g(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{\alpha^n}) = g(0)$. Vậy hàm số $f(x) = \frac{x^2}{\alpha^2-1} + c$ với $c \in \mathbb{R}$ là tất cả các hàm số thỏa bài toán.

- Nếu $\alpha = 1$ thì giả thiết không được thỏa mãn với $x = 1$.
- Nếu $\alpha = -1$ thì giả thiết không được thỏa mãn với $x = 1$ hoặc $x = -1$.

Do đó không tồn tại hàm số f thỏa bài toán trong 2 trường hợp trên.

Bài 3.23. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = f(\sin x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Giải. Cố định $x \in \mathbb{R}$ bất kì, xét dãy số sau

$$\begin{cases} u_0 = x \\ u_{n+1} = \sin u_n \end{cases}$$

Bằng công cụ đạo hàm, dễ dàng kiểm tra $\sin t \leq t$ với mọi $t \geq 0$ và phương trình $\sin t = t$ chỉ có nghiệm duy nhất $t = 0$. Rõ ràng $u_1 = \sin x \in [-1, 1]$.

- Xét trường hợp $u_1 \in [0,1]$, khi đó $u_2 = \sin u_1 \geq 0$ và $u_2 = \sin u_1 \leq u_1$. Bằng qui nạp dễ dàng chứng minh $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$. Dãy (u_n) giảm và bị chặn dưới nên hội tụ đến nghiệm của phương trình $\sin t = t$, nghĩa là $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

- Xét trường hợp $u_1 \in [-1,0]$, khi đó $u_2 = \sin u_1 \leq 0$ và $u_2 = -\sin(-u_1) \geq -(-u_1) = u_1$. Bằng qui nạp dễ dàng chứng minh $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$. Dãy (u_n) tăng và bị chặn trên nên hội tụ đến nghiệm của phương trình $\sin t = t$, nghĩa là $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Như vậy trong mọi trường hợp ta đều có $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Từ giả thiết, bằng qui nạp ta có $f(x) = f(u_n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do đó $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} u_n) = f(0)$.

Vậy f là hàm hằng. □

Bài 3.24. Tìm tất cả các hàm số $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = f\left(\frac{x^2+1}{2}\right)$ với mọi $x > 1$ và giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ tồn tại.

Hướng dẫn. Mặc dù không có điều kiện f liên tục nhưng ta vẫn có thể vận dụng ý tưởng trên. Với mỗi $x > 1$, đặt $\omega_0(x) = x$, $\omega(x) = \frac{x^2+1}{2}$ và $\omega_n(x) = \underbrace{\omega \circ \omega \circ \cdots \circ \omega}_{n \text{ lần}}(x)$. Dễ dàng kiểm tra dãy $(\omega_n(x))$ tăng và hội tụ đến $+\infty$. Mặt khác ta có $f(x) = f(\omega_n(x))$, do đó

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(\omega_n(x)) = \lim_{x\to+\infty} f(x),$$

nghĩa là f là hằng số.

Bài 3.25. Tìm tất cả các hàm f xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(9x) + f(16x) = 2f(12x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hướng dẫn. Đặt $g(x) = f(x) - f\left(\frac{4}{3}x\right)$ thì g liên tục thỏa $g\left(\frac{3}{4}x\right) = g(x)$.

Phương trình hàm Cauchy

Đây là lớp các phương trình hàm có thể đưa về dạng sau thông qua một số phép biến đổi phù hợp

Định lí 3.9 (Phương trình hàm Cauchy)**.** *Tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ đều có dạng $f(x) = cx$ với $c \in \mathbb{R}$.

Giải. Bằng qui nạp theo n ta có $f(nx) = nf(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{N}$.

Áp dụng với $x = \frac{1}{n}$ ta có $f(1) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$, suy ra $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}f(1)$.

Áp dụng với $x = \frac{1}{m}$ ta có $f\left(\frac{n}{m}\right) = nf\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{n}{m}f(1)$.

Đặt $c = f(1)$ thì theo lập luận trên $f(x) = cx$ với mọi số hữu tỉ x. Mà f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên suy ra $f(x) = cx$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. □

Bài 3.26 (Đề thi 2010)**.** Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn $f(1) = 2010$ và $f(x+y) = 2010^x f(y) + 2010^y f(x)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn. Chia cả 2 vế cho $2010^x 2010^y$ và đặt $g(x) = \frac{f(x)}{2010^x}$ thì g liên tục và phương trình đã cho được đơn giản về dạng $g(x+y) = g(x)+g(y)$. Đây chính là phương trình hàm Cauchy nên ta được $g(x) = cx$. Suy ra $f(x) = c2010^x x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình với nhiều ẩn hàm

Đây là các dạng phương trình hàm chứa nhiều hàm số chưa biết mà ta cần phải xác định. Định hướng giải chủ yếu là chọn các giá trị đặc biệt của biến để giảm số ẩn hàm, khi đó bài toán sẽ trở nên đơn giản hơn.

Bài 3.27. Tìm cặp hàm f, g xác định trên $\mathbb{R}$ sao cho:

$$f(x)g(y) = x^2 - y^2, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Giải. Chọn $y = 0$, ta được $f(x)g(0) = x^2$ với mọi x.

Suy ra $g(0) \neq 0$ và $f(x) = ax^2$. Tương tự chọn $x = 0$ ta suy ra được $g(y) = by^2$ nhưng cặp hàm này không thỏa đề bài nên bài toán đã cho vô nghiệm. □

Bài 3.28. Tìm các hàm f, q, g xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho:

$$f(x^2) - f(y^2) = q(x+y) - g(x-y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Giải. Chọn $y = x$, khi đó $q(2x) = g(0)$ với mọi x, nghĩa là $q(x) \equiv g(0)$. Phương trình ban đầu trở thành

$$f(x^2) - f(y^2) = g(0) - g(x-y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Chọn $y = -x$, ta có $g(2x) = g(0)$ với mọi x, nghĩa là g là hằng số. Phương trình ban đầu trở thành

$$f(x^2) = f(y^2), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Do đó f là hằng số trên $[0, +\infty)$, nhận giá trị tùy ý trên $(-\infty, 0)$ và $g(x) = q(x) = c$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. □

www.mathvn.com

Bài 3.29 (Đề thi 2014)**.** Cho 2 hàm số f và g xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) = 0$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng ít nhất 1 trong 2 hàm f hoặc g là hàm hằng.

Giải. Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ ta có

$$\left[\begin{array}{l} \text{f(x)=f(y)} \\ \text{g(x)=g(y)} \end{array}\right.$$

Giả sử f không phải là hàm hằng, nghĩa là tồn tại x_0, y_0 sao cho $f(x_0) \neq f(y_0)$, suy ra $g(x_0) = g(y_0)$. Ta cần chứng minh rằng g là hàm hằng. Muốn vậy lấy $x \in \mathbb{R}$ bất kì, ta cần chỉ ra $g(x) = g(x_0) = g(y_0)$. Thật vậy do $f(x_0) \neq f(y_0)$ nên phải xảy ra 1 trong 2 trường hợp sau:

1. $f(x) \neq f(x_0)$: khi đó theo giả thiết ta có $g(x) = g(x_0)$.

2. $f(x) \neq f(y_0)$: khi đó theo giả thiết ta có $g(x) = g(y_0)$.

Bài toán đã được chứng minh xong. □

3.3 Bài tập tự luyện

Bài 3.30. Giả sử $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ là các hàm số liên tục trên thỏa mãn $f(g(x)) = g(f(x))$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

a) Chứng minh rằng tồn tại x_0 sao cho $f(x_0) = g(x_0)$.

b) Giả sử rằng f đơn điệu, chứng minh tồn tại $x_0 \in [0, 1]$ sao cho $f(x_0) = g(x_0) = x_0$.

c) Hãy cho phản ví dụ trong trường hợp thay miền $[0, 1]$ bởi $\mathbb{R}$.

Bài 3.31 (Đề thi 2011)**.** Ta gọi đoạn thẳng $[\alpha, \beta]$ là đoạn thẳng tốt nếu với mọi bộ số a, b, c thỏa mãn điều kiện $2a + 3b + 6c = 0$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thực thuộc đoạn $[\alpha, \beta]$. Trong tất cả các đoạn thẳng tốt, tìm đoạn có độ dài nhỏ nhất.

Bài 3.32 (Đề thi 2013)**.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$. Chứng minh rằng nếu tồn tại hàm $g(x)$ đơn điệu thực sự và liên tục trên $[0, 1]$ sao cho $\int_0^1 f(x)g^k(x)dx = 0$ với mọi $k = 0, 1, 2, \ldots, 2013$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 2014 nghiệm phân biệt nằm trong khoảng $(0, 1)$. Hãy chỉ ra ví dụ nếu bỏ tính đơn điệu của hàm số $g(x)$ thì định lí có thể không đúng.

www.mathvn.com

Bài 3.33. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm số đơn điệu giảm và liên tục. Chứng minh rằng hệ phương trình

$$\begin{cases} x = f(y) \\ y = f(z) \\ z = f(x) \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất.

Bài 3.34. Cho 2 đa thức

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k, \quad Q(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^k - 1} x^k.$$

Chứng minh rằng nếu $Q(1) = Q(2^{n+1})$ thì đa thức $P(x)$ có nghiệm trong $(0, 2^n)$.

Bài 3.35. Cho các hàm số liên tục $f, g : [0, 1] \to [0, +\infty)$ thỏa mãn

$$\sup_{0 \le x \le 1} f(x) = \sup_{0 \le x \le 1} g(x).$$

Chứng minh rằng tồn tại $t \in [0, 1]$ sao cho $f^2(t) + 3f(t) = g^2(t) + 3g(t)$.

Bài 3.36. Cho các hàm số liên tục $f, g : [0, 1] \to [0, +\infty)$ thỏa mãn

$$\sup_{0 \le x \le 1} f(x) = \sup_{0 \le x \le 1} g(x).$$

Chứng minh rằng tồn tại $t \in [0, 1]$ sao cho $f^2(t) + 3f(t) = g^2(t) + 3g(t)$.

Bài 3.37. Cho hàm số $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}, \quad \forall x \ge 1.$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ tồn tại và nhỏ hơn $1 + \frac{\pi}{4}$.

Bài 3.38. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả vi đến cấp 2. Giả sử với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $|f(x)| \le 1$ và $|f''(x)| \le 1$. Chứng minh rằng $|f'(x)| \le 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 3.39. Cho hàm số $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn $f(0) = 0$ và $0 \le f'(x) \le 2f(x)$ với mọi $x \in (0, 1)$. Chứng minh rằng $f \equiv 0$.

Bài 3.40 (Đề thi 2004)**.** Xác định các hàm số f thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:

www.mathvn.com

i) $f(x) \geq e^{2004x}$, với mọi $x \in \mathbb{R}$,

ii) $f(x+y) \geq f(x)f(y)$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Bài 3.41 (Đề thi 2009)**.** Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \geq 3f(x+2y+3z)$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Bài 3.42 (Đề thi 2012)**.** Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{x+y}{2012}\right) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2013}\right) + f\left(\frac{y}{2014}\right)\right)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Bài 3.43. Chứng minh rằng không tồn tại các hàm số thực f thỏa mãn

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x-y|$$

với mọi số thực x và y.

Bài 3.44. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) = x$$

với mọi $x \neq \pm 1$.

Bài 3.45. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2$$

với mọi $x \neq 0$.

Bài 3.46. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}, \quad \forall x \neq 0.$$

Bài 3.47. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \frac{2x+5}{x^2+1}, \quad \forall x \neq 1.$$

www.mathvn.com

Bài 3.48. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$(f(x))^2 + \frac{2}{f(x)} = 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 3.49. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn: $f(x^2)+f(x) = x^6 + x^3 + 1$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 3.50. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^2) = f(x),$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 3.51. Xác định các hàm f thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

1. $f(x)f(x+1) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$,
2. $f(x)f(1-x) = x(1-x), \forall x \in \mathbb{R}$,
3. $f(x)f(\frac{1}{1-x}) = x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 3.52. Xác định các hàm f thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

1. $f(5x) = f(x)$,
2. $f(x)f(2x)f(3x) = x$,

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 3.53. Tìm các hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa

$$f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 3.54. Tìm các hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa

$$f(xy) = f(x) - f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 3.55. Tìm các hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa

$$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 3.56. Tìm các hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa

$$f(x) + f(y) - f(x+y) = xy, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

www.mathvn.com

Bài 3.57. Tìm các hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa

$$(x+y)f(xy) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}, x+y \neq 0.$$

Bài 3.58. Tìm các hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa

$$xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}, x+y \neq 0.$$

Bài 3.59. Tìm các hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 3.60. Tìm các hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa

$$2f(x) + f(y) = 3f\left(\frac{2x+y}{3}\right), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 3.61. Tìm các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{2f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 3.62. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}, \quad \forall x \neq 0.$$

Bài 3.63. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \frac{2x+5}{x^2+1}, \quad \forall x \neq 1.$$

Bài 3.64. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$(f(x))^2 + \frac{2}{f(x)} = 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 3.65. Tìm tất cả các hàm số $f : [a; b] \to [a; b]$ với $a < b$ và thỏa mãn bất đẳng thức

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y|, \quad \forall x, y \in [a; b].$$

Bài 3.66. Tìm tất cả các hàm số $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y)g(x-y) = x^2 - y^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

www.mathvn.com

Bài 3.67. Tìm các cặp hàm f, g xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho

$$f(x^2) - f(y^2) = (x - y)g(x + y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 3.68. Tìm các cặp hàm f, g xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho

$$f(x^2) - f(y^2) = g(x - y)g(x + y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 3.69. Tìm các cặp hàm f, g xác định và liên tục trên $(1, \infty)$ sao cho

$$f(xy) = xg(y) + yg(x).$$

Bài 3.70. Tìm cặp hàm f, g xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho:

$$f(x) - f(y) = (x^2 - y^2)g(x - y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

www.mathvn.com

Chương 4

Phép tính vi phân

4.1 Tóm tắt lí thuyết

4.1.1 Đạo hàm

Định nghĩa 4.1 (Đạo hàm)**.** *Cho hàm số f xác định trên $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ với $\varepsilon > 0$. Giới hạn*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

nếu có được gọi là đạo hàm của f tại x_0, kí hiệu $f'(x_0)$ hoặc $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Nếu giới hạn trên bằng $\pm\infty$, ta nói f có đạo hàm vô cùng tại x_0.

Định nghĩa 4.2 (Đạo hàm một phía)**.**

1. *Cho hàm số f xác định trên $[x_0, x_0 + \varepsilon)$ với $\varepsilon > 0$. Giới hạn*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

nếu có được gọi là đạo hàm bên phải của f tại x_0, kí hiệu $f'(x_0^+)$ hoặc $\frac{df}{dx}(x_0^+)$.

2. *Cho hàm số f xác định trên $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ với $\varepsilon > 0$. Giới hạn*

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

nếu có được gọi là đạo hàm bên trái của f tại x_0, kí hiệu $f'(x_0^-)$ hoặc $\frac{df}{dx}(x_0^-)$.

www.mathvn.com

Định lí 4.1. *Hàm số f có đạo hàm tại x_0 khi và chỉ khi f có đạo hàm trái, đạo hàm phải tại x_0 và hai đạo hàm này bằng nhau.*

Định lí 4.2. *Nếu hàm số f có đạo hàm tại x_0 thì f liên tục tại x_0.*

Định lí 4.3 (Đạo hàm của các hàm sơ cấp cơ bản)**.**

1. $(C)' = 0$,
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$,
3. $(a^x)' = a^x \ln a$,
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$,
5. $(\sin x)' = \cos x$,
6. $(\cos x)' = -\sin x$,
7. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,
8. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
11. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Định lí 4.4 (Các qui tắc tính đạo hàm)**.** *Cho các hàm số u và v có đạo hàm tại $x \in \mathbb{R}$.*

1. *Đạo hàm của tổng, hiệu:*
$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$
2. *Đạo hàm của tích:*
$$(uv)' = u'v + uv'.$$
3. *Đạo hàm của thương:*
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$
4. *Đạo hàm của hàm hợp:*
$$(u(v(x)))' = u'(v(x))v'(x).$$
5. *Đạo hàm của hàm ngược: Cho hàm số $y(x)$ có hàm ngược $x(y)$:*
$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)}.$$

Định lí 4.5 (Đạo hàm cấp cao)**.** *Đạo hàm cấp n của hàm số f tại x_0, kí hiệu $f^{(n)}(x_0)$ hoặc $\frac{d^n}{dx^n} f(x_0)$, là đạo hàm của đạo hàm cấp $n-1$ của f tại x_0.*
$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n}{dx^n} f(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0).$$
Khi $n \le 3$, ta có thể kí hiệu $f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f'', f^{(3)} = f'''$.

www.mathvn.com

4.1.2 Khai triển Taylor

Công thức khai triển Taylor là mở rộng của 2 định lí quan trọng trong giải tích: định lí Lagrange và định lí Newton-Leibniz.

Định lí 4.6 (Công thức Taylor với phần dư Lagrange). *Cho f là hàm số khả vi đến cấp $n+1$, ta có*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \\ + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

với c là một số thực nằm giữa a và x.

Công thức khai triển Taylor tại $x_0 = 0$ được gọi là công thức khai triển Maclaurin.

Khi $n = 0$, ta kí hiệu $x = b$ thì công thức Taylor trở thành

Định lí 4.7 (Định lí giá trị trung bình (Lagrange)). *Nếu $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b) thì tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Trong trường hợp $f(a) = f(b)$ ta có

Định lí 4.8 (Định lí Rolle). *Nếu $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục trên $[a,b]$, khả vi trên (a,b) và thỏa mãn $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho*

$$f'(c) = 0.$$

Áp dụng định lí Rolle cho hàm số $\varphi(x) = f(x)(g(a) - g(b)) + g(x)(f(b) - f(a)) + f(a)g(b) - f(b)g(a)$ trên đoạn $[a,b]$ ta có dạng mở rộng sau của định lí Lagrange

Định lí 4.9 (Định lí Cauchy). *Nếu $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ là các hàm số liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b) thì tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Định lí 4.10 (Công thức Taylor với phần dư tích phân). *Cho f là hàm số khả vi đến cấp $n+1$, ta có*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \\ + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, dt.$$

Khi $n = 1$ thì công thức trên trở thành $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt$. Đó chính là *công thức Newton-Leibniz* quen thuộc.

www.mathvn.com

4.1.3 Qui tắc L'Hôpital

Qui tắc L'Hôpital được sử dụng để tìm giới hạn của hàm số ở dạng vô định $\frac{0}{0}$ và $\frac{\infty}{\infty}$.

Định lí 4.11 (Qui tắc L'Hôpital)**.** *Cho 2 hàm số f và g thỏa mãn*

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ *hoặc* $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty \end{cases}$,

2. *Tồn tại* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Qui tắc vẫn đúng khi thay $x \to a$ bởi $x \to a^+$, $x \to a^-$ hoặc $x \to \infty$. Với các dạng vô định khác, ta đưa về dạng $\frac{0}{0}$ và $\frac{\infty}{\infty}$ như sau

1. Dạng $0 \cdot \infty$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)} = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)}.$$

2. Dạng $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\left(\frac{1}{f(x)g(x)}\right)}.$$

3. Dạng $0^0, 1^\infty, \infty^0$

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$$

trong đó $g(x)\ln f(x)$ có dạng vô định $0 \cdot \infty$.

4.1.4 Cực trị của hàm số

Định nghĩa 4.3 (Điểm cực trị và cực trị)**.** *Cho hàm số f xác định trên một lân cận của x_0.*

1. *Nếu tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $f(x_0) < f(x)$ với mọi $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\setminus\{x_0\}$ thì x_0 là điểm cực tiểu của f và $f(x_0)$ là một giá trị cực tiểu của f.*

2. *Nếu tồn tại* $\varepsilon > 0$ *sao cho* $f(x_0) > f(x)$ *với mọi* $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\setminus\{x_0\}$ *thì* x_0 *là điểm cực đại của* f *và* $f(x_0)$ *là một giá trị cực đại của* f.

Điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị, giá trị cực tiểu và giá trị cực đại được gọi chung là cực trị của hàm số.

Định nghĩa 4.4 (Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất)**.** *Cho hàm số* f *xác định trên* D *và* $x_0 \in D$.

1. *Nếu* $f(x_0) \leq f(x)$ *với mọi* $x \in D$ *thì* f *đạt giá trị nhỏ nhất là* $f(x_0)$ *tại* x_0.

2. *Nếu* $f(x_0) \geq f(x)$ *với mọi* $x \in D$ *thì* f *đạt giá trị lớn nhất là* $f(x_0)$ *tại* x_0.

Định lí 4.12 (Điều kiện cần của cực trị)**.** *Nếu* x_0 *là điểm cực trị của hàm số liên tục* f *thì* x_0 *phải là điểm tới hạn của* f*, nghĩa là* $f'(x_0)$ *không tồn tại hoặc* $f'(x_0) = 0$.

Định lí 4.13 (Điều kiện đủ của cực trị theo đạo hàm bậc nhất)**.** *Giả sử* x_0 *là điểm tới hạn của hàm số* f *và* f *có đạo hàm trong khoảng* $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$. *Khi đó*

- *Nếu tại* x_0 *đạo hàm* f' *đổi dấu từ dương sang âm thì* x_0 *là điểm cực đại.*

- *Nếu tại* x_0 *đạo hàm* f' *đổi dấu từ âm sang dương thì* x_0 *là điểm cực tiểu.*

- *Nếu tại* x_0 *đạo hàm* f' *không đổi dấu thì* x_0 *không phải là điểm cực trị.*

Định lí 4.14 (Điều kiện đủ của cực trị theo đạo hàm bậc cao)**.** *Giả sử tồn tại số tự nhiên* $n \geq 2$ *sao cho* $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ *và* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. *Khi đó*

- *Nếu* n *là số chẵn thì*
  - x_0 *là điểm cực đại nếu* $f^{(n)}(x_0) < 0$,
  - x_0 *là điểm cực tiểu nếu* $f^{(n)}(x_0) > 0$.

- *Nếu* n *là số lẻ thì* x_0 *không phải là điểm cực trị.*

www.mathvn.com

4.1.5 Kĩ thuật thu gọn biểu thức chứa đạo hàm

Một số lượng không nhỏ các bài toán thi Olympic chỉ có thể giải được nếu ta biến đổi được một biểu thức chứa các đạo hàm phức tạp thành đạo hàm của một hàm số đơn giản hơn. Đây chính là bước làm đơn giản hóa bài toán và là kĩ thuật được sử dụng xuyên suốt với các dạng toán khác nhau trong chương này. Cụ thể, cho trước hàm số nhiều biến g, ta sẽ không làm việc trực tiếp với biểu thức $g(x, f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x))$ của đề bài mà ta sẽ tìm hàm số h và q thỏa mãn

$$q(x)g(x, f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(n)) = (h(f(x), x))^{(n)}$$

rồi làm việc với biểu thức $(h(f(x), x))^{(n)}$ đơn giản hơn. Phép biến đổi này đặc biệt hữu ích trong các bài toán giải phương trình vi phân và khảo sát tính đơn điệu của hàm số.

4.2 Các dạng toán về phép tính vi phân

4.2.1 Cực trị và bất đẳng thức

Bài 4.1. Chứng minh các bất đẳng thức sau

- $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$ với mọi $x \geq 0$,
- $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$ với mọi $x \geq 0$,
- $x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin(x) \leq x$ với mọi $x \geq 0$,
- $1 - \frac{x^2}{2!} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ với mọi $x \geq 0$,
- $x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x) \leq x$ với mọi $x \geq 0$,

Giải. Ta có khai triển Taylor của hàm số $f(x) = e^{-x}$ tại $x = 0$ đến cấp 1:

$$e^{-x} = f(0) + f'(0)(-x) + \frac{f''(c_1)}{2}(-x)^2 = 1 - x + \frac{e^{c_1}}{2}x^2, \text{ với } c_1 \in [0, x]$$

Tương tự khai triển Taylor của hàm số $f(x) = e^{-x}$ tại $x = 0$ đến cấp 2:

$$e^{-x} = f(0) + f'(0)(-x) + \frac{f''(0)}{2}(-x)^2 + \frac{f'''(c_2)}{6}(-x)^3 = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{e^{c_2}}{6}x^3,$$

với $c_2 \in [0, x]$.

Từ 2 đẳng thức trên ta suy ra được bất đẳng thức đầu tiên, các bất đẳng thức còn lại cũng chứng minh tương tự. □

Bài 4.2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq a^3 + b^3 + c^3.$$

Giải. Đặt $f(x) = a^x + b^x + c^x$. Ta có $f'(0) = \ln(abc) = 0$ và $f''(x) = a^x \ln^2 a + b^x \ln^2 b + c^x \ln^2 c > 0$, do đó $f'(x) \geq f'(0) = 0$ với mọi $x \geq 0$.

Vậy f tăng trên $[0, +\infty)$ nên ta có $f(2) \leq f(3)$. □

Bài 4.3. Tìm tất cả các bộ số thực a_1, a_2, a_3 sao cho $(x - a_1)(x - a_2) + (x - a_2)(x - a_3) + (x - a_3)(x - a_1) \geq 0$ với mọi số thực x.

Giải. Đặt

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)$$

thì

$$f'(x) = (x - a_1)(x - a_2) + (x - a_2)(x - a_3) + (x - a_3)(x - a_1) \geq 0$$

với mọi số thực x nên f là hàm số tăng. Nếu trong 3 số a_1, a_2, a_3 có 2 số khác nhau, chẳng hạn $a_1 \neq a_2$, thì mọi số thực x nằm giữa a_1 và a_2 đều là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, mâu thuẫn vì f là đa thức. Vậy $a_1 = a_2 = a_3$. Thử lại các bộ số thỏa điều kiện này đều thỏa mãn bài toán. □

4.2.2 Định lí giá trị trung bình

Cách giải bài toán chứng minh tồn tại số thực x thỏa mãn một đẳng thức nào đó chứa các đạo hàm của một hàm số khả vi f:

1. Sử dụng kĩ thuật thu gọn biểu thức chứa đạo hàm để biến đổi đẳng thức về dạng $g'(x) = c$ với g là một hàm số khả vi trên $[a, b]$.

2. Sử dụng định lí Lagrange hoặc định lí Rolle để chỉ ra sự tồn tại của x thỏa mãn điều kiện trên.

Bài 4.4. Cho hàm số f liên tục trên $[0, 1]$, khả vi trên $(0, 1)$ sao cho $f(1) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $cf'(c) = (c - 1)f(c)$.

Giải. Đặt $g(x) = xe^{-x} f(x)$. Ta có $g(0) = g(1) = 0$. Theo định lí Rolle, tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $g'(c) = 0$, hay nói cách khác $cf'(c) - (c - 1)f(c) = 0$. □

Bài 4.5 (Đề thi 2008)**.** Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0, \pi]$ và $f(0) = f(\pi) = 0$ thỏa mãn $|f'(x)| < 1$ với $x \in (0, \pi)$. Chứng minh rằng:

i) Tồn tại $c \in (0, \pi)$ sao cho $f'(c) = \tan f(c)$.

ii) $|f(x)| < \frac{\pi}{2}$ với mọi $x \in (0, \pi)$.

Hướng dẫn. Với câu i) ta cần thu gọn điều kiện $f'(x) = \tan f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\tan f(x)} - 1 = 0$. Một nguyên hàm của $\frac{1}{\tan x}$ là $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan x} = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln \sin x$ do đó

$$0 = \frac{f'(x)}{\tan f(x)} - 1 = (\ln \sin f(x) - x)'$$

Biểu thức đã được thu gọn, tuy nhiên nó không xác định tại $x = 0$ và $x = \pi$ nên ta thay bằng biểu thức $e^{\ln \sin f(x) - x} = e^{-x} \sin f(x)$ thì ta cần tìm $x \in (0, \pi)$ sao cho $(e^{-x} \sin f(x))' = 0$. Mà giá trị 2 đầu mút đã được biết nên ta nghĩ đến việc vận dụng định lí Rolle với hàm số $g(x) = e^{-x} \sin f(x)$ trên đoạn $[0, \pi]$.

Với câu ii) ta có thể sử dụng định lí Rolle hoặc công thức Newton-Leibniz để khai thác mối liên hệ giữa f và f'.

Giải.

i) Xét hàm số $g(x) = e^{-x} \sin f(x)$ thì g liên tục trên $[0, \pi]$, khả vi trong $(0, \pi)$ và $g(0) = g(\pi) = 0$.

   Theo định lí Rolle, tồn tại $c \in (0, \pi)$ sao cho $g'(c) = 0$. Mặt khác

   $$g'(x) = e^{-x}(-\sin f(x) + \cos f(x) f'(x))$$

   nên $-\sin f(c) + \cos f(c) f'(c) \Leftrightarrow f'(c) = \tan f(c)$.

ii) Do $f(0) = f(\pi) = 0$ nên:

   Nếu $x \leq \frac{\pi}{2}$ thì $|f(x)| = |\int_0^x f'(x)\, dx| \leq \int_0^x |f'(x)|\, dx < \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$.

   Nếu $x > \frac{\pi}{2}$ thì $|f(x)| = |\int_x^\pi f'(x)\, dx| \leq \int_x^\pi |f'(x)|\, dx < \int_{\pi/2}^\pi dx = \frac{\pi}{2}$.

□

Bài 4.6 (Đề thi 2008)**.** Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ và $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, khả vi trong $(0, 1)$. Chứng minh rằng với mọi $\alpha \in (0, 1)$, luôn tồn tại $x_1, x_2 \in (0, 1)$ sao cho $\frac{\alpha}{f'(x_1)} + \frac{1-\alpha}{f'(x_2)} = 1$.

Hướng dẫn. Bằng trực giác ta thấy nếu tồn tại (x_1, x_2) thỏa bài toán thì có lẽ sẽ tồn tại vô hạn cặp số như vậy vì từ cặp (x_1, x_2) ban đầu ta chỉ cần thay đổi phù hợp một chút giá trị của x_1 và x_2 thì ta thu được cặp mới cũng thỏa mãn. Bởi vậy có thể thử tìm cho trường hợp đặc biệt $x_1 = x_2 = c$. Ta cần tìm c thỏa $\frac{\alpha}{f'(c)} + \frac{1-\alpha}{f'(c)} = 1$ hay $f'(c) = 1$. Hiển nhiên giá trị c đó có thể tìm được bằng định lí Lagrange.

www.mathvn.com

Giải. Theo định lí Lagrange, tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1.$$

Chọn $x_1 = x_2 = c$ thì đẳng thức ở bài toán được thỏa mãn. □

Bài 4.7 (Đề thi 2005)**.** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a,b]$ và thoả mãn điều kiện $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $f(c) = 2005\int_a^c f(x)dx$.

Hướng dẫn. Để đơn giản, khử tích phân bằng cách đặt $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Ta cần tìm $c \in (a,b)$ thỏa $F'(c) = 2005F(c)$, thu gọn biểu thức đạo hàm để chuyển về dạng

$$\left(e^{-2005x}F(x)\right)'\Big|_{x=c} = 0.$$

Để tìm được c như vậy chỉ cần áp dụng định lí Rolle cho hàm số $g(x) = e^{-2005x}F(x)$ trên đoạn $[a,b]$ với lưu ý $F(a) = F(b) = 0$.

Giải. Đặt $g(x) = e^{-2005x}\int_a^x f(t)\,dt$. Ta có $g(a) = g(b) = 0$. Theo định lí Rolle, tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $g'(c) = 0$. Mặt khác,

$$g'(x) = e^{-2005x}\left(f(x) - 2005\int_a^x f(t)\,dt\right).$$

Do đó $f(c) = 2005\int_a^c f(x)dx$. □

Bài 4.8 (Đề thi 2012)**.** Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0,2012]$ và thỏa mãn $f(x) + f(2012 - x) = 0$ với mọi $x \in [0,2012]$. Chứng minh $\displaystyle\int_0^{2012} f(x)dx = 0$ và $(x - 2012)f(x) = 2012\int_0^{2012-x} f(u)du$ có nghiệm trong khoảng $(0,2012)$.

Chứng minh. Với phần đầu tiên, ta có

$$\begin{aligned}
\int_0^{2012} f(x)\,dx &= \int_0^{1006} f(x)\,dx + \int_{1006}^{2012} f(x)\,dx \\
&= \int_0^{1006} f(x)\,dx + \int_{1006}^{0} f(2012 - x)d(2012 - x)\,dx \\
&= \int_0^{2012} f(x) + f(2012 - x)\,dx = 0.
\end{aligned}$$

Với phần còn lại ta đặt $F(x) = \int_0^{2012-x} f(u)du$ thì $F'(x) = -f(2012-x) = f(x)$, bài toán chuyển về chứng minh tồn tại $x \in (0, 2012)$ thỏa

$$(2012-x)F'(x) = 2012F(x) \Leftrightarrow (2012-x)F'(x) - 2012F(x) = 0.$$

Ta hi vọng có thể thu gọn vế trái về dạng $(a(x)F(x))' = a(x)F'(x) + a'(x)F(x)$. Ta cần có $\frac{a'(x)}{a(x)} = \frac{2012}{x-2012}$. Từ đó tìm được $a(x) = e^{\int \frac{2012\,dx}{x-2012}} = (x-2012)^{2012}$. Vậy

$$(2012-x)F'(x) - 2012F(x) = 0 \Leftrightarrow ((x-2012)^{2012}F(x))' = 0.$$

Chỉ cần lưu ý $(0-2012)^{2012}F(0) = (2012-2012)^{2012}F(2012) = 0$, sử dụng định lí Rolle ta có điều phải chứng minh. □

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}\int_0^{2012} f(x)\,dx &= \int_0^{1006} f(x)\,dx + \int_{1006}^{2012} f(x)\,dx \\ &= \int_0^{1006} f(x)\,dx + \int_{1006}^{0} f(2012-x)d(2012-x)\,dx \\ &= \int_0^{2012} f(x) + f(2012-x)\,dx = 0.\end{aligned}$$

Đặt $g(x) = (x-2012)^{2012}\int_0^{2012-x} f(u)du$ thì $g(0) = g(2012) = 0$ nên theo định lí Rolle, tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $g'(c) = 0$, hay nói cách khác $(c-2012)f(c) = 2012\int_0^{2012-c} f(u)du$. □

Bài 4.9 (Đề thi 2009)**.**

a) Cho $P(x)$ là đa thức bậc n có hệ số thực. Chứng minh rằng phương trình $2x = P(x)$ có không quá $n+1$ nghiệm thực.

b) Cho $f(x) - x$, $f(x) - x^3$ là những hàm số đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng hàm số $f(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ cũng là hàm số đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$.

Giải. a) Xét hàm số $g(x) = 2^x - P(x)$ thì dễ thấy do $P(x)$ là đa thức bậc n nên

$$P^{(n+1)}(x) = 0 \Rightarrow g^{(n+1)}(x) = 2^x(\ln 2)^{n+1} > 0.$$

Đạo hàm cấp $n+1$ của hàm số g không đổi dấu nên theo định lí Rolle thì phương trình $g(x) = 0$ có không quá $n+1$ nghiệm.

b) Giả thiết đã cho có thể viết lại là

$$f'(x) > 1, \quad f'(x) > 3x^2$$

với mọi x. Nhân 2 bất đẳng thức theo từng vế ta có $(f'(x))^2 > 3x^2$. Mặt khác $f'(x) > 1 > 0$ nên suy ra $f'(x) > \sqrt{3}|x| \geq \sqrt{3}x$. Do đó hàm số $f(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ cũng là hàm số đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$. □

Bài 4.10. Cho hàm số f có đạo hàm cấp 2 liên tục trên đoạn $[a, b]$. Biết rằng phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt trên đoạn $[a, b]$. Chứng minh rằng tồn tại $x \in [a, b]$ thỏa mãn $f''(x) + 4xf'(x) + (2 + 4x^2)f(x) = 0$.

Hướng dẫn. Ta tìm cách thu gọn $f''(x) + 4xf'(x) + (2 + 4x^2)f(x) = 0$ thành dạng $(g(x)f(x))''$. Tính toán trực tiếp và so sánh các hệ số ta được $g(x) = e^{x^2}$. Do đó ta có lời giải sau

Giải. Đặt $g(x) = e^{x^2}f(x)$ ta có $g''(x) = e^{x^2}\left(f''(x) + 4xf'(x) + (2 + 4x^2)f(x)\right)$. Gọi $x_1 < x_2 < x_3$ là 3 nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ thì đó cũng là 3 nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

Áp dụng định lí Lagrange với hàm g, ta tìm được $y_1 \in (x_1, x_2)$ và $y_2 \in (x_2, x_3)$ thỏa mãn

$$g'(y_1) = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = 0,$$

và

$$g'(y_2) = \frac{g(x_3) - g(x_2)}{x_3 - x_2} = 0,$$

Tiếp tục áp dụng định lí Lagrange với hàm g', ta tìm được $z \in (y_1, y_2)$ thỏa mãn

$$g''(z) = \frac{g'(y_2) - g'(y_1)}{y_2 - y_1} = 0,$$

hay nói cách khác

$$f''(z) + 4zf'(z) + (2 + 4z^2)f(z) = 0.$$

□

Bài 4.11. Tìm các nghiệm thực của phương trình

$$6^x + 1 = 8^x - 27^{x-1}.$$

Giải. Phương trình có dạng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ với $a = 2^x$, $b = -3^{x-1}$, $c = -1$. Phân tích thành nhân tử

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2)$$

ta suy ra $a + b + c = 0$. Vậy ta có phương trình đơn giản hơn như sau: $2^x = 3^{x-1} + 1$. Đặt $f(t) = f^{x-1}$, ta có $f(3) - f(2) = f(2) - f(1)$ nên theo định lí giá trị trung bình tồn tại $t_1 \in (2,3)$ và $t_2 \in (1,2)$ sao cho $f'(t_1) = f'(t_2)$ Điều này dẫn đến

$$(x-1)t_1^{x-2} = (x-1)t_2^{x-2}.$$

Suy ra phương trình đã cho chỉ có 2 nghiệm là $x = 1$ và $x = 2$. □

Bài 4.12 (Đề thi 2008)**.** Cho hàm số $g(x)$ có $g''(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giả sử hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện $f(0) > g(0)$ và $\int_o^\pi f(x)\,dx < g(0)\pi + \frac{g'(0)}{2}\pi^2$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in [0,\pi]$ sao cho $f(c) = g(c)$.

Hướng dẫn. Do $f(0) > g(0)$ nên ta chỉ cần tìm $a \in [0,\pi]$ sao cho $f(a) \leq g(a)$ rồi vận dụng định lí giá trị trung gian cho hàm số $f - g$. Vì đã có $\int_o^\pi f(x)\,dx < g(0)\pi + \frac{g'(0)}{2}\pi^2$ nên nếu ta chứng minh được

$$g(0)\pi + \frac{g'(0)}{2}\pi^2 \leq \int_o^\pi g(x)\,dx$$

thì $\int_o^\pi f(x)\,dx < \int_o^\pi g(x)\,dx$ và ta sẽ tìm được a. Vế trái gợi ý ta sử dụng khai triển Taylor đến cấp 2 của g tại $x = 0$:

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(b)}{2}x^2 \geq g(0) + g'(0)x$$

ở đây ta $b \in [0,\pi]$ và ta đã sử dụng giả thiết $g''(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Lấy tích phân từ 0 đến π thì bất đẳng thức trên được chứng minh.

Giải. Xét hàm số $h(x) = g(x) - f(x)$ thì h liên tục và $h(0) < 0$. Khai triển Taylor Taylor đến cấp 2 của g tại $x = 0$ ta được

$$h(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(b)}{2}x^2 - f(x) \geq g(0) + g'(0)x - f(x)$$

ở đây ta $b \in [0,\pi]$ và ta đã sử dụng giả thiết $g''(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Lấy tích phân từ 0 đến π ta có

$$\int_o^\pi h(x)\,dx \geq \int_o^\pi (g(0)+g'(0)x-f(x))\,dx = g(0)\pi + \frac{g'(0)}{2}\pi^2 - \int_o^\pi f(x)\,dx > 0.$$

Suy ra tồn tại $a \in [0,\pi]$ sao cho $h(a) > 0$. Do tính liên tục của hàm số $h(x)$ trên đoạn $[0,a]$ thì tồn tại $c \in [0,a] \subset [0,\pi]$ sao cho $h(c) = 0$. Từ đó suy ra $f(c) = g(c)$. □

www.mathvn.com

Bài 4.13 (Đề thi 2010)**.** Cho hàm số $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0,1]$. Giả sử rằng $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xf(x)\,dx = 1$. Chứng minh rằng tồn tại điểm $c \in (0,1)$ sao cho $f'(c) = 6$.

Hướng dẫn. Vì cần chứng minh $f'(c) = 6$ nên ta sẽ làm cho f' xuất hiện dưới 2 dấu tích phân bằng cách dùng công thức tích phân từng phần:

$$1 = \int_0^1 f(x)\,dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x)\,dx = f(1) - \int_0^1 xf'(x)\,dx,$$

$$1 = \int_0^1 xf(x)\,dx = \frac{x^2}{2}f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}f'(x)\,dx = \frac{f(1)}{2} - \int_0^1 \frac{x^2}{2}f'(x)\,dx.$$

Do ta chưa có thông tin về $f(1)$ nên lấy 2 lần đẳng thức dưới trừ đi đẳng thức trên để triệt tiêu $f(1)$, ta được:

$$\int_0^1 (x - x^2)f'(x)\,dx = 1.$$

Đến đây bài toán đã trở nên dễ dàng: Ta có $\int_0^1 6(x - x^2)\,dx = 1$ nên nếu $f'(x) > 6$ với mọi $x \in (0,1)$ thì $\int_0^1 (x - x^2)f'(x)\,dx > 1$, tương tự nếu $f'(x) < 6$ với mọi $x \in (0,1)$ thì $\int_0^1 (x - x^2)f'(x)\,dx < 1$. Do đó từ tính liên tục của f' và định lí giá trị trung gian suy ra tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $f'(c) = 6$.

4.2.3 Tính giới hạn của hàm số

Ta có thể kết hợp kết hợp phương pháp thay vô cùng bé và qui tắc L'Hôpital để giải các bài toán tính giới hạn ở dạng vô định.

Bài 4.14. Cho các số thực dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Tính giới hạn

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k^x \right)^{1/x}.$$

Giải. Gọi hàm số cần tính giới hạn là $f(x)$, đây là giới hạn có dạng vô định

1^∞ nên ta tính

$$\lim_{x\to 0}\ln f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^x\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k^x - 1)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln a_k}{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln a_k.$$

Suy ra

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^x\right)^{1/x} = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}.$$

□

Bài 4.15. Cho các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \sin kx$. Chứng minh rằng nếu $|f(x)| \le |\sin x|$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì

$$\left|\sum_{k=1}^{n} k a_k\right| \le 1.$$

Giải. Ta có $\sum\limits_{k=1}^{n} k a_k = f'(0)$. Do đó ta dùng định nghĩa của đạo hàm ta có

$$\left|\sum_{k=1}^{n} k a_k\right| = |f'(0)| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right|$$
$$= \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{\sin x}\right| \cdot \left|\frac{\sin x}{x}\right| \le 1.$$

□

Bài 4.16 (Đề thi 2007)**.** Cho hàm số $f(x)$ xác định và khả vi trên $[0, +\infty)$. Biết rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) + f'(x)) = 1$. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Hướng dẫn. Với định hướng thu gọn biểu thức vi phân, ta sẽ biến đổi $f(x) + f'(x)$ thành $(h(x)f(x))'$. Lập luận tương tự như các bài trên, ta chọn $h(x) = e^x$ thì giả thiết được viết thành dạng $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(e^x f(x))'}{e^x} = 1$. Biểu thức này có dạng $\frac{u'}{v'}$ gợi ý ta sử dụng qui tắc L'Hôpital.

Giải. Áp dụng qui tắc L'Hôpital ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x f(x))'}{(e^x)'}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} (f(x) + f'(x)) = 1.$$

□

Bài 4.17 (Đề thi 2010)**.** Cho hàm số $f(x) = \ln(x+1)$.

a) Chứng minh rằng với mọi $x > 0$, tồn tại duy nhất số thực c thỏa mãn $f(x) = xf'(c)$ mà ta kí hiệu là $c(x)$.

b) Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{c(x)}{x}$.

Hướng dẫn. Dễ dàng tính được $c(x) = \frac{x}{\ln(x+1)} - 1$. Do đó giới hạn ở câu b) có thể tính được bằng qui tắc L'Hôpital.

Bài 4.18 (Đề thi 2014)**.**

a) Cho hàm số f đơn điệu trên $[0, +\infty)$ và

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = +\infty.$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Kết luận trên còn đúng không khi f là hàm liên tục trên $[0, +\infty)$ nhưng không đơn điệu trên khoảng đó? Tại sao?

Hướng dẫn. a) Có vẻ như bài toán này có thể giải bằng qui tắc L'Hôpital:

$$+\infty = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)'}{1} = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Tuy nhiên lập luận trên là sai vì ta chưa biết $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\left(\int_0^x f(t)dt\right)'}{1}$ có tồn tại hay không. Để có lời giải đúng ta có thể "cảm nhận bài toán bằng trực giác" như sau: $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ là giá trị trung bình của hàm số f trên $[0, x]$ nên nếu f giảm thì giá trị trung bình này không vượt quá $f(0)$ (không thể tiến tới $+\infty$). Ngược lại nếu f tăng thì giá trị trung bình này không vượt quá $f(x)$, từ đó suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \geq \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = +\infty$.

b) Để tìm một phản ví dụ ta sẽ xuất phát từ một hàm số nào đó thỏa mãn câu a), ví dụ hàm số $f(x) = x$. Ta sẽ "cắt xén" bớt giá trị của f sao cho $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ vẫn bằng $+\infty$ nhưng giá trị của f tại các số tự nhiên thì bằng 0 (khi đó $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ không tồn tại). Chẳng hạn có thể xây dựng hàm số f như sau:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x \notin \left[n-\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4}\right] \text{ với mọi } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{nếu } x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

sao cho f là hàm tuyến tính liên tục trên $\left[n-\frac{1}{4}, n\right]$ và $\left[n, n+\frac{1}{4}\right]$.

Bài 4.19 (Đề thi 2015)**.** Cho $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ là một hàm liên tục. Biết rằng tồn tại giới hạn

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\int_0^x (f(t))^2\,dt = a \in (0,+\infty)).$$

Hãy tìm $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x}f(x)$.

Hướng dẫn. Khử tích phân bằng cách đặt $F(x) = \int_0^x (f(t))^2\,dt$ thì $F'(x) = (f(x))^2$ và giả thiết đã cho trở thành $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{F'(x)}F(x) = a$. Sử dụng kĩ thuật thu gọn đạo hàm ta có

$$\lim_{x\to+\infty} (F(x))^2F'(x) = a^2 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \left((F(x))^3\right)' = 3a^2. \quad (*)$$

Ta tìm $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x}f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x}\sqrt{F'(x)}$. Muốn vậy ta chỉ cần tính được $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2/3}F'(x)$. Ý tưởng là dùng (*) và qui tắc L'Hôpital để ước lượng F^3 sau đó sẽ ước lượng được F và F'. Cụ thể từ (*) dễ thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ và ta có

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(F(x))^3}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{((F(x))^3)'}{1} = 3a^2.$$

Lấy căn bậc 3 để được ước lượng cho $F(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x^{1/3}} = (3a^2)^{1/3}.$$

Dùng qui tắc L'Hôpital để chuyển thành ước lượng cho $F'(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x^{1/3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3F'(x)}{x^{-2/3}} = \lim_{x\to+\infty} 3x^{2/3}F'(x).$$

Vậy

$$\lim_{x\to+\infty} x^{2/3}F'(x) = \frac{(3a^2)^{1/3}}{3} = \left(\frac{a}{3}\right)^{2/3} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x}f(x) = \sqrt[3]{\frac{a}{3}}.$$

4.2.4 Phương trình và bất phương trình vi phân

Kĩ thuật thu gọn biểu thức chứa đạo hàm đóng vai trò then chốt trong việc đơn giản hóa giả thiết trong các bài toán về phương trình vi phân, bất phương trình vi phân và bất đẳng thức vi phân.

Bài 4.20. Tìm các hàm số f thỏa mãn $f'(x) + kf(x) = 1$ với $k \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn. Nhắc lại qui tắc: thử giải bài toán với trường hợp đơn giản trước rồi tìm cách đưa trường hợp tổng quát về trường hợp đơn giản. Nếu $k = 0$ thì vế trái là đạo hàm của f, còn vế phải đã biết nên bài toán quá đơn giản. Trong trường hợp tổng quát, ta sẽ tìm cách đưa biểu thức ở vế trái về dạng $(h(x)f(x))' = h(x)f'(x)+h'(x)f(x)$. Để tỉ lệ hệ số của f' và f được bảo toàn, ta cần chọn h thỏa mãn $\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{k}{1} = k$. Do đó, $(\ln(h(x)))' = k$. Có thể chọn $\ln(h(x)) = kx$ hay $h(x) = e^{kx}$. Do đó nếu nhân cả 2 vế của phương trình vi phân với e^{kx} thì vế trái sẽ trở thành đạo hàm đúng.

Giải. Nhân cả 2 vế với e^{kx}, ta có $e^{kx}f'(x) + ke^{kx}f(x) = e^{kx}$, nghĩa là $(e^{kx}f(x))' = e^{kx}$. Nếu $k = 0$ thì $f(x) = x + C$. Nếu $k \neq 0$, ta có $f(x) = e^{-kx}\int e^{kx}\,dx = Ce^{-kx} + \frac{1}{k}$. □

Bài 4.21 (Đề thi 2006)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện $P(0) = 0$ và $0 \leq P'(x) \leq P(x), \forall x \in (0, 1)$.

Hướng dẫn. Rõ ràng giả thiết cốt lõi cần phải xử lí được là $P'(x) - P(x) \leq 0$. Ta đơn giản hóa giả thiết này bằng cách đưa nó về dạng $(h(x)P(x))' \leq 0$ hoặc $(h(x)P(x))' \geq 0$ (khi đó ta sẽ suy ra được tính đơn điệu của một hàm số phù hợp). Lập luận như bài toán trên ta có thể chọn $h(x) = e^{-x}$ và bất phương trình trên sẽ có dạng khá đẹp $(e^{-x}P(x))' \leq 0$. Do đó $e^{-x}P(x)$ là hàm số nghịch biến trên $(0, 1)$. Từ đó kết hợp với các giả thiết còn lại ta tìm được lời giải như sau:

Giải. Theo đề bài ta có $(e^{-x}P(x))' = e^{-x}(P'(x) - P(x)) \leq 0$ nên $e^{-x}P(x)$ là hàm số nghịch biến trên $(0, 1)$. Do đó

$$e^{-0}P(0) \geq e^{-x}P(x) \geq e^{-1}P(1).$$

Do $P(0) = 0$ và $P(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} P(x) \geq 0$ nên $0 \geq P(x) \geq 0$, dẫn đến $P(x) = 0$ với mọi $x \in (0, 1)$. Suy ra đa thức $P(x) \equiv 0$ là đa thức duy nhất thỏa mãn bài toán. □

Bài 4.22 (Đề thi 2014)**.** Tìm tất cả các hàm số f xác định, liên tục trên đoạn $[0,1]$, khả vi trong khoảng $(0,1)$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(0) = f(1) = \frac{2015}{2014}, \quad 2013f'(x) + 2014f(x) \geq 2015$$

với mọi $x \in (0,1)$.

Hướng dẫn. Ta có $2013f'(x) + 2014f(x) \geq 2015 \Leftrightarrow f'(x) + \frac{2014}{2013}f(x) \geq \frac{2015}{2013}$. Dùng kĩ thuật thu gọn biểu thức đạo hàm để đưa giả thiết này về dạng

$$\left(e^{\frac{2014}{2013}x}\left(f(x) - \frac{2015}{2014}\right)\right)' \geq 0.$$

Do đó $g(x) = e^{\frac{2014}{2013}x}\left(f(x) - \frac{2015}{2014}\right)$ là hàm không giảm trên $[0,1]$, nhưng $g(0) = g(1) = 0$ nên $f \equiv 0$ trong $[0,1]$. Từ đó suy ra $f(x) = \frac{2015}{2014}$ với mọi $x \in [0,1]$.

Bài 4.23 (Đề thi 2006)**.** Cho hàm số liên tục $f : [0,1] \to [0,+\infty)$. Đặt $g(x) = 1 + 2\int_o^x f(t)\,dt$ và ta giả sử rằng luôn có $g(x) \geq (f(x))^2$ với mọi $x \in [0,1]$. Chứng minh rằng $g(x) \leq (1+x)^2$.

Hướng dẫn. Để bỏ dấu tích phân (phức tạp) ta đặt $F(x) = \int_o^x f(t)\,dt$ thì $F(0) = 0$, $F(x) \geq 0$ và $F'(x) = f(x)$. Bài toán được chuyển về dạng: cho biết $1 + 2F(x) \geq (F'(x))^2$, cần chứng minh $1 + 2F(x) \leq (1+x)^2$. Điểm mấu chốt là cần thu gọn $1 + 2F(x) \geq (F'(x))^2$ về dạng đạo hàm duy nhất để suy ra tính đơn điệu của một hàm số nào đó. Muốn vậy ta cần rút căn để làm cho $F'(x)$ xuất hiện

$$\sqrt{1+2F(x)} \geq F'(x) \Leftrightarrow \frac{F'(x)}{\sqrt{1+2F(x)}} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{1+2F(x)} - x)' \leq 0.$$

Do đó hàm số $\sqrt{1+2F(x)} - x$ nghịch biến nên ta phải có $\sqrt{1+2F(x)} - x \leq \sqrt{1+2F(0)} = 1$. Bài giải có thể trình bày như sau:

Giải. Đặt $F(x) = \int_o^x f(t)\,dt$ thì $F(0) = 0$, $F(x) \geq 0$, $F'(x) = f(x)$ và $g(x) = 1 + 2F(x)$. Theo giả thiết ta có

$$1 + 2F(x) \geq (F'(x))^2 \Leftrightarrow \frac{F'(x)}{\sqrt{1+2F(x)}} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{1+2F(x)} - x)' \leq 0.$$

Do đó hàm số $\sqrt{1+2F(x)} - x$ nghịch biến trên $[0,1]$ nên ta phải có

$$\sqrt{1+2F(x)} - x \leq \sqrt{1+2F(0)} = 1.$$

Suy ra $g(x) = 1 + 2F(x) \leq (1+x)^2$. □

Bài 4.24 (Đề thi 2010)**.** Cho số thực a và hàm số $f(x)$ khả vi trên $[0,+\infty)$ thỏa mãn các điều kiện $f(0) \geq 0$ và $f(x) + af'(x) \geq 0$ với mọi $x \in [0,+\infty)$. Chứng minh rằng $f(x) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$.

Hướng dẫn. Dùng kĩ thuật thu gọn biểu thức đạo hàm đưa giả thiết $f(x) + af'(x) \geq 0$ về dạng $(e^{ax}f(x))' \geq 0$. Do đó với $x \geq 0$ ta có $e^{ax}f(x) \geq e^0 f(0) \geq 0$, nghĩa là $f(x) \geq 0$.

Bài 4.25 (Đề thi 2005)**.** Giả sử f là hàm số có đạo hàm cấp 2 liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện $f(0) = f(1) = a$. Chứng minh rằng $\max\limits_{0\leq x\leq 1} f''(x) \geq 8(a-b)$, với $b = \min\limits_{0\leq x\leq 1} f(x)$.

Hướng dẫn. Để f'' xuất hiện ta sẽ sử dụng khai triển Taylor

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2.$$

Do bài toán không cần đến f' nên ta sẽ chọn $c \in [0,1]$ sao cho $f'(c) = 0$. Chỉ cần chọn c là điểm làm cho hàm số đạt giá trị nhỏ nhất ($f(c) = b$). Vậy:

$$f(x) = b + \frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2.$$

Với $x = 0$, ta có

$$a = b + \frac{f''(\xi_0)}{2}c^2. \quad (1)$$

Với $x = 1$, ta có

$$a = b + \frac{f''(\xi_1)}{2}(1-c)^2. \quad (2)$$

Nếu $0 \leq c \leq \frac{1}{2}$ thì kết luận được suy ra từ (1), nếu $\frac{1}{2} < c \leq 1$ thì kết luận được suy ra từ (2).

4.2.5 Ứng dụng của phép tính vi phân

Đây là các bài toán liên quan đến ứng dụng thực tế của phép tính vi phân. Để giải được các dạng toán này, cần xác định chính xác các biến số và hàm số cần thiết để lập được mô hình bài toán, sau đó giải bằng các công cụ đạo hàm.

Bài 4.26. Người ta muốn tạo một bãi giữ xe hình chữ nhật bằng cách gập một sợi dây thừng thành 3 đoạn có chiều dài lần lượt x, y, x và quây vào tường (một cạnh của bãi giữ xe là tường, 3 cạnh còn lại là 3 đoạn của sợi dây). Hỏi người ta nên quây sợi dây thừng như thế nào để bãi giữ xe có diện tích lớn nhất, cho biết sợi dây có chiều dài 40 mét.

www.mathvn.com

Giải. Theo đề bài ta có $2x + y = 40$. Do đó diện tích bãi giữ xe là

$$S = xy = x(40 - 2x).$$

Khảo sát hàm số một biến $f(x) = x(40 - 2x)$, ta tìm được giá trị lớn nhất của f là 200 đạt được khi $x = 10$. Vậy ta nên quây sợi dây thừng thành 3 đoạn 10, 20 và 10 mét thì sẽ có được bãi giữ xe có diện tích lớn nhất. □

Bài 4.27 (Đề thi 2019)**.** Một doanh nghiệp sản xuất ô-tô có hàm sản xuất

$$Q = K^{\frac{2}{3}} L^{\frac{1}{3}},$$

với K và L lần lượt là số đơn vị vốn tư bản và số đơn vị lao động mà doanh nghiệp thuê được, còn Q ký hiệu số ô-tô sản xuất ra được. Cho biết giá thuê một đơn vị vốn tư bản là $w_K = 8$, giá thuê một đơn vị lao động là $w_L = 4$ và chi phí cố định là $C_0 = 100$. Năm 2019 doanh nghiệp dự định sản xuất 2000 chiếc ô-tô. Để chi phí sản xuất là thấp nhất, doanh nghiệp cần thuê bao nhiêu đơn vị vốn tư bản và bao nhiêu đơn vị lao động?

Giải. Theo đề bài ta có hàm chi phí sản xuất

$$TC = 8K + 4L + 100.$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của TC với điều kiện $K^{\frac{2}{3}} L^{\frac{1}{3}} = 2000$, nghĩa là $L = \frac{2000^3}{K^2}$. Do đó ta có thể biểu diễn TC thành hàm của một biến số K:

$$TC = 8K + 4 \cdot \frac{2000^3}{K^2} + 100.$$

Ta có $TC'(K) = 8 - 8 \cdot \frac{2000^3}{K^3}$. Hiển nhiên $TC'(K) < 0$ với $0 < K < 2000$, $TC'(K) > 0$ với $K > 2000$ và $TC'(K) = 0$ với $K = 2000$.

Do đó chi phát đạt cực tiểu khi $K = 2000$, khi đó $L = 2000$. □

Bài 4.28 (Đề thi 2017)**.** Theo các nhà điểu cầm học, khi bay ngang qua mặt nước, chim phải tiêu tốn nhiều năng lượng hơn so với khi bay ngang qua đất liền, và theo bản năng, chim luôn chọn đường bay ít tốn năng lượng nhất.

Một con chim cất cánh từ đảo A cách bờ biển 4 km. Hãy xem A như là một điểm, bờ biển là một đường thẳng và gọi B là hình chiếu vuông góc của A lên bờ biển. Quan sát cho thấy, trước tiên chim bay đến một điểm C trên bờ biển, sau đó mới bay đến tổ D của nó. Cho biết tổ chim cũng nằm trên bờ biển và cách B 12 km. Đặt $r = \frac{W}{L}$, trong đó W và L lần lượt là năng lượng tiêu tốn mỗi km bay khi chim bay trên mặt nước và khi chim bay dọc bờ biển.

www.mathvn.com

1. Hãy xác định vị trí của C nếu $r = \sqrt{2}$.
2. Giả sử $BC = 3$ km. Tính r.
3. Vị trí của C thay đổi như thế nào khi r biến thiên trong khoảng $(1, \infty)$.

Giải. Đặt $BC = x \in [0, 12]$, thì $CD = BD - BC = 12 - x$ và $AC = \sqrt{16 + x^2}$. Năng lượng tiêu tốn suốt hành trình bay của chim là

$$\sqrt{16 + x^2}W + (12 - x)L = Lf(x),$$

với $f(x) = r\sqrt{16 + x^2} + (12 - x)$. Ta có

$$f'(x) = \frac{rx}{\sqrt{16 + x^2}} - 1.$$

Ta có $f'(x) = 0$ với $x = \frac{4}{\sqrt{r^2-1}}$, $f'(x) < 0$ với $0 \leq x < \frac{4}{\sqrt{r^2-1}}$ và $f'(x) > 0$ với $x > \frac{4}{\sqrt{r^2-1}}$. Suy ra f đạt cực tiểu tại $x = \frac{4}{\sqrt{r^2-1}}$.

1. Khi $r = \sqrt{2}$ thì $x = 4$, nghĩa là $BC = 4$ km.
2. Khi $BC = 3$, nghĩa là $x = 3$ thì $3 = \frac{4}{\sqrt{r^2-1}}$, suy ra $r = \frac{5}{3}$.
3. Khi $1 \leq r \leq \frac{\sqrt{10}}{3}$ thì $x = 12$.

   Khi r tăng trong khoảng $\frac{\sqrt{10}}{3} \to \infty$ thì x giảm trong khoảng $12 \to 0$.

□

4.3 Bài tập tự luyện

Bài 4.29. Tìm tất cả các nghiệm thực dương của phương trình $2^x = x^2$.

Bài 4.30. Tìm tất cả các nghiệm thực của phương trình $4^x + 6^{x^2} = 5^x + 5^{x^2}$.

Hướng dẫn. Ta chứng minh bài toán không có nghiệm nào khác ngoài 0 và 1.

Xét hàm số $f(t) = t^{x^2} + (10 - t)^x$ ta có $f(5) = f(6)$ nên tồn tại $c \in (5, 6)$ thỏa $f'(c) = 0$. Từ đó suy ra điều vô lí nếu $x \notin \{0, 1\}$.

Bài 4.31. Cho các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Tìm tất cả các số thực x sao cho

$$|x - a_1| + |x - a_2| + \cdots + |x - a_n|$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

www.mathvn.com

Bài 4.32 (Đề thi 2010). Cho đa thức $P(x)$ bậc n có hệ số thực sao cho $-\frac{P'(-1)}{P(-1)} \leq \frac{n}{2}$. Chứng minh rằng $P(x)$ có ít nhất một nghiệm x_0 với $|x_0| \geq 1$.

Bài 4.33 (Đề thi 2012). Cho đa thức $P(x)$ có bậc không nhỏ hơn 1 có hệ số thực và đa thức $Q(x)$ xác định bởi $Q(x) = (2012x^2 + 1)P(x)P'(x) + 2012x((P(x))^2 + (P'(x))2)$. Giả sử $P(x) = 0$ có đúng n nghiệm thực phân biệt trong khoảng $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, chứng minh $Q(x) = 0$ có ít nhất $2n - 1$ nghiệm thực phân biệt.

Bài 4.34. Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b). Giả sử rằng tồn tại $c \in (a, b)$ thỏa mãn

$$\frac{f(b) - f(c)}{f(c) - f(a)} < 0$$

thì tồn tại $\xi \in (a, b)$ sao cho $f'(\xi) = 0$.

Bài 4.35 (Đề thi 2013). Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ và khả vi trong $(0, 1)$, thỏa mãn $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Chứng minh rằng tồn tại các số phân biệt $x_1, x_2, \ldots, x_{2013} \in (0, 1)$ sao cho

$$\sum_{k=1}^{2013} \frac{kx_k}{f'(x_k)} = \frac{2013 \cdot 1007}{2}.$$

Hướng dẫn. Ta thử tìm $x_1, x_2, \ldots, x_{2013}$ ở dạng $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2013} = c$, nghĩa là bài toán sẽ được giải nếu ta tìm được c thỏa

$$\sum_{k=1}^{2013} \frac{kc}{f'(c)} = \frac{2013 \cdot 1007}{2} \Leftrightarrow \frac{2014 \cdot 2013 \cdot c}{2f'(c)} = \frac{2013 \cdot 1007}{2} \Leftrightarrow f'(c) = 2c.$$

Vận dụng kĩ thuật thu gọn biểu thức đạo hàm, ta được $f'(c) = 2c \Leftrightarrow g'(c) = 0$ trong đó $g(x) = f(x) - x^2$. Chỉ cần áp dụng định lí Rolle cho hàm số g trên $[0, 1]$ là tìm được giá trị c thỏa bài toán.

Bài 4.36. Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b). Cho biết phương trình $f(x) = 0$ có $n+1$ nghiệm phân biệt, chứng minh rằng phương trình $f^{(n)}(x) = 0$ có nghiệm.

Bài 4.37. Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục trên $[a, b]$ và khả vi hai lần trên (a, b). Cho biết phương trình $f(a) = f(b)$ và $f'(a) = f'(b)$, chứng minh rằng với mọi số thực α, phương trình

$$f''(x) - \alpha(f'(x))^2 = 0$$

có nghiệm trong (a, b).

www.mathvn.com

Bài 4.38. Cho hàm số $f(x)$ xác định và khả vi trên $[0,+\infty)$. Biết rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+2\sqrt{x}f'(x))=1$. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Bài 4.39. Chứng minh nếu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm số khả vi thỏa mãn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ tồn tại và hữu hạn thì nếu $\lim\limits_{x\to\infty} xf'(x)$ tồn tại giới hạn này phải bằng 0.

Bài 4.40. Với mỗi số thực $\lambda \geq 1$, kí hiệu $f(\lambda)$ là nghiệm thực của phương trình $x(1+\ln x)=\lambda$. Chứng minh rằng

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{f(\lambda)\ln\lambda}{\lambda}=1.$$

Bài 4.41. Cho hàm số $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)=1$ và

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)},\quad \forall x\geq 1.$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ tồn tại và nhỏ hơn $1+\frac{\pi}{4}$.

Bài 4.42. Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ khả vi đến cấp 2. Giả sử với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có $|f(x)|\leq 1$ và $|f''(x)|\leq 1$. Chứng minh rằng $|f'(x)|\leq 2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Bài 4.43. Cho hàm số $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn $f(0)=0$ và $0\leq f'(x)\leq 2f(x)$ với mọi $x\in(0,1)$. Chứng minh rằng $f\equiv 0$.

Bài 4.44. Thảo cầm viên muốn dựng một lồng nuôi chim hình hộp chữ nhật có thể tích 500 mét khối bằng lưới thép (mặt đáy của hình hộp chữ nhật là mặt đất, 5 mặt còn lại được phủ lưới thép). Hỏi ban quản lí của thảo cầm viên nên xác định chiều dài các cạnh của lồng là bao nhiêu để tiết kiệm lưới thép nhất?

Bài 4.45 (Đề thi 2018)**.** Một quan sát viên C đứng cách đường đua Ot một khoảng $OC=1$ km ($OC\perp Ot$). hai vận động viên A, B cùng xuất phát tại O và chạy cùng lúc trên đường đua theo cùng hướng Ot. Góc $\theta=\angle(CA,CB)$ được gọi là góc nhìn từ C đến 2 vận động viên. Giả sử B luôn chạy nhanh gấp 4 lần A.

1. Tính $\tan\theta$ theo $x=OA$.

2. Xác định vị trí của 2 vận động viên trên đường đua để góc nhìn θ từ C đến họ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 4.46. Một doanh nghiệp cạnh tranh hoàn hảo có hàm sản xuất: $Q=K^{0,5}+L^{0,5}$, biết hai yếu tố K,L có giá $p_K=600, p_L=300$.

www.mathvn.com

1. Tìm phương án sản xuất để thu được lợi nhuận tối đa.

2. Hãy phân tích tác động của giá vốn và lao động tới mức lợi nhuận tối đa.

Bài 4.47. Một doanh nghiệp cạnh tranh hoàn hảo có hàm chi phí biên là $MC = Q^2 + 7Q + 15$, chi phí cố định là FC và giá sản phẩm là p.

1. Hãy xác định hàm tổng chi phí với $FC = 20$. Với $p = 45$ hãy xác định mức sản lượng và lợi nhuận tối ưu.

2. Nếu giá tăng 7% thì mức sản lượng và lợi nhuận tối ưu sẽ biến động tương đối ra sao?

www.mathvn.com

Chương 5

Phép tính tích phân

5.1 Tóm tắt lí thuyết

5.1.1 Tích phân bất định

Định nghĩa 5.1 (Nguyên hàm). *Hàm số F được gọi là nguyên hàm của hàm số f trong (a,b) nếu F có đạo hàm tại mọi $x \in (a,b)$ và $F'(x) = f(x)$.*

Định nghĩa 5.2 (Tích phân bất định). *Tập hợp tất cả các nguyên hàm của f được gọi là tích phân bất định của f, ký hiệu $\int f(x)\,dx$. Nếu F là một nguyên hàm của f thì*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Định lí 5.1 (Một số tính chất của tích phân bất định). *Cho các hàm khả tích f, g và các số thực α, β. Ta có*

1. $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx.$

2. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$

3. $\int f'(x)\,dx = f(x) + C.$

Định lí 5.2 (Tích phân bất định của các hàm số sơ cấp cơ bản).

1. $$\int x^\alpha\,dx = \begin{cases} x^{\alpha+1}/(\alpha+1) + C, & \text{nếu } \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C, & \text{nếu } \alpha = -1 \end{cases}$$

2. $$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

www.mathvn.com

3. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

4. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$ *với* $a \neq 0$.

Định lí 5.3 (Các phương pháp tính tích phân bất định)**.**

1. *Phương pháp đổi biến: Nếu φ là một hàm số khả vi thì*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt\Big|_{t=\varphi(x)}.$$

2. *Phương pháp tích phân từng phần: Nếu u, v là các hàm số khả vi thì*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

5.1.2 Tích phân xác định

Định nghĩa 5.3 (Tích phân xác định)**.** *Cho hàm số f xác định trên $[a,b]$. Chia đoạn $[a,b]$ thành n đoạn bởi các điểm chia $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Trên mỗi đoạn chọn $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ và đặt $\Delta = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i - x_{i-1}|$. Nếu giới hạn*

$$I = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

tồn tại và không phụ thuộc vào cách chia và cách chọn các điểm x_i^* thì I được gọi là tích phân xác định của f trên đoạn $[a,b]$, kí hiệu $\int_a^b f(x)\,dx$.

Định lí 5.4 (Một số tính chất của tích phân xác định)**.** *Cho các hàm khả tích f, g và các số thực a, b, α, β. Ta có*

1. $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx.$

www.mathvn.com

2. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

3. $\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt\right)' = f(\varphi(x))\varphi'(x)$.

Định lí 5.5 (Các phương pháp tính tích phân xác định)**.**

1. *Công thức Newton - Leibnitz: Nếu f liên tục trên $[a,b]$ thì với mọi nguyên hàm F của f ta có*
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

2. *Phương pháp đổi biến: Nếu φ là một hàm số khả vi thì*
$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt.$$

3. *Phương pháp tích phân từng phần: Nếu u, v là các hàm số khả vi thì*
$$\int_a^b u\,dv = uv|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

5.1.3 Tích phân suy rộng

Định nghĩa 5.4 (Tích phân suy rộng loại 1)**.** *Các tích phân suy rộng loại 1 được định nghĩa như sau*

1. *Nếu f xác định trên $[a, +\infty)$:*
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

2. *Nếu f xác định trên $(-\infty, b]$:*
$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

3. *Nếu f xác định trên $(-\infty, \infty)$:*
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$$
với $c \in \mathbb{R}$.

www.mathvn.com

Nếu giới hạn tồn tại và hữu hạn thì tích phân gọi là hội tụ. Ngược lại, nếu giới hạn không tồn tại hoặc bằng vô cùng, thì tích phân gọi là phân kỳ.

Định nghĩa 5.5 (Tích phân suy rộng loại 2)**.** *Các tích phân suy rộng loại 2 được định nghĩa như sau*

1. *Nếu* f *xác định trên* $[a, b)$*:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx.$$

2. *Nếu* f *xác định trên* $(a, b]$*:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx.$$

3. *Nếu* f *xác định trên* (a, b)*:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

   với $c \in (a, b)$*.*

Nếu giới hạn tồn tại và hữu hạn thì tích phân gọi là hội tụ. Ngược lại, nếu giới hạn không tồn tại hoặc bằng vô cùng, thì tích phân gọi là phân kỳ.

5.1.4 Bất đẳng thức tích phân

Trong các định lí dưới đây ta giả sử rằng a và b là 2 số thực thỏa $a < b$.

Định lí 5.6 (Bất đẳng thức Jensen)**.** *Cho* f *là hàm số lồi trên* $\mathbb{R}$*. Ta có bất đẳng thức*

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)\,dx\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(\varphi(x))\,dx,$$

trong đó φ *là một hàm khả tích trên* $[a, b]$*. Nếu* f *là lồi chặt thì dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi* φ *là hàm hằng.*

Định lí 5.7 (Bất đẳng thức Jensen mở rộng)**.** *Cho* f *là một hàm số lồi trên* $[0, +\infty)$ *và* g *và* h *là hai hàm số liên tục và không âm trên* $[a, b]$*. Giả sử* $\displaystyle\int_a^b h(x)\,dx = 1$*. Ta có*

i) $f\left(\int_a^b g(x)h(x)\,dx\right) \le \int_a^b f(g(x))h(x)\,dx,$

www.mathvn.com

ii) $f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(g(x))\,dx.$

Định lí 5.8 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz). *Cho các hàm số f và g thỏa mãn f^2 và g^2 khả tích trên $[a,b]$. Ta có*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi f và g là 2 hàm tỉ lệ.

Tổng quát ta có

Định lí 5.9 (Bất đẳng thức Hölder). *Cho $p, q > 0$ thỏa $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ và các hàm số f và g thỏa mãn f^p và g^q khả tích trên $[a,b]$. Ta có*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $|f|$ và $|g|$ là 2 hàm tỉ lệ.

Định lí 5.10 (Bất đẳng thức Minkowski). *Cho $p > 1$ và các hàm số f và g thỏa mãn f^p và g^p khả tích trên $[a,b]$. Ta có*

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi f và g là 2 hàm tỉ lệ và cùng dấu.

Định lí 5.11 (Bất đẳng thức Chebyshev). *Cho f và g là 2 hàm số tăng trên $\mathbb{R}$. Ta có*

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi một trong 2 hàm số là hàm hằng.

Định lí 5.12 (Bất đẳng thức Poincare). *Cho $p > 0$ và f là một hàm số liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b) thỏa mãn $f(a) = 0$. Ta có*

$$\int_a^b |f(x)|^p\,dx \leq \frac{(b-a)^p}{p}\int_a^b |f'(x)|^p\,dx.$$

5.2 Các dạng toán về phép tính tích phân

5.2.1 Tính tích phân xác định

Ngoài công thức Newton-Leibniz, phương pháp đổi biến và phương pháp tích phân từng phần, bài toán tính tích phân xác định thường vận dụng đến các tính chất sau:

1. Nếu f là hàm tuần hoàn chu kì T thì $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$

2. Công thức "cuốn chiếu" kiểu cộng: bằng cách đổi biến $t = a + b - x$ ta có
$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b (f(x)+f(a+b-x))\,dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} (f(x)+f(a+b-x))\,dx.$$
Đặc biệt
   - Nếu f là hàm số lẻ thì $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$
   - Nếu f là hàm số chẵn thì $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$

3. Công thức "cuốn chiếu" kiểu nhân: với $ab > 0$ bằng cách đổi biến $t = \frac{ab}{x}$ ta có
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{1}{2}\int_a^b \left(f(x) + \frac{ab}{x^2} f\left(\frac{ab}{x}\right)\right)\,dx\\ &= \int_a^{\sqrt{ab}} \left(f(x) + \frac{ab}{x^2} f\left(\frac{ab}{x}\right)\right)\,dx.\end{aligned}$$

Khi gặp bài toán tính tích phân xác định có thể kiểm tra $f(x) + f(a+b-x)$ hoặc $f(x) + \frac{ab}{x^2}f\left(\frac{ab}{x}\right)$ có dạng đơn giản không để dùng 2 công thức "cuốn chiếu" bên trên. Với bài toán yêu cầu tính $I_n = \int_a^b f_n(x)\,dx$, có thể vận dụng các phép đổi biến và tích phân từng phần để lập công thức truy hồi, từ đó tìm được số hạng tổng quát I_n.

Bài 5.1 (Đề thi 2007)**.** Tính tích phân
$$\int_0^{2\pi} \ln(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x})\,dx.$$

Hướng dẫn. Ta không nên hi vọng tìm được công thức nguyên hàm của hàm lượng giác phức tạp nằm trong hàm logarit mà nên xem xét các tính chất đặc biệt của hàm số và các cận tích phân. Ta thấy $\ln(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x})$ là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì 2π nên có thể vận dụng kết hợp 2 tính chất trên để được lời giải sau

Giải. Vì $\ln(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x})$ là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì 2π nên ta có

$$\int_0^{2\pi} \ln(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x})\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x})\,dx = 0.$$

□

Bài 5.2 (Đề thi 2011)**.** Tính tích phân

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x+x^2+\sqrt{x^4+3x^2+1}}.$$

Hướng dẫn. Đặt $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2+\sqrt{x^4+3x^2+1}}$ thì ta có $f(x)+f(-x) = \frac{1}{1+x^2}$ có nguyên hàm là $\frac{1}{1+x^2}$. Do đó vận dụng công thức "cuốn chiếu" kiểu cộng ta tìm được lời giải sau

Giải. Đặt $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2+\sqrt{x^4+3x^2+1}}$, ta có $f(x)+f(-x) = \frac{1}{1+x^2}$. Do đó

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)dx &= \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx\\ &= \int_0^1 f(-x)dx + \int_0^1 f(x)dx\\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

□

Bài 5.3. Cho $a > 0$. Tính tích phân

$$I = \int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Hướng dẫn. Biểu thức cần tính tích phân khiến ta nghĩ đến công thức lượng giác $x = a\sin t$ và $x = a\cos t$. Từ đó tìm được lời giải sau.

Giải. Đổi biến $x = a\sin t$, ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos t dt}{a\sin t + \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t dt}{\sin t + \cos t}.$$

Đổi biến $x = a\cos t$, ta có

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{-a\sin t dt}{a\cos t + \sqrt{a^2 - a^2\cos^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t dt}{\sin t + \cos t}.$$

Cộng 2 đẳng thức theo từng vế ta được $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$. Do đó $I = \frac{\pi}{4}$. □

5.2.2 Tính chất của tích phân

1. *Tính đơn điệu:* Cho f là hàm số liên tục trên $[a; b]$.

   (a) Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a; b]$ thì ta có $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

   (b) Ngược lại nếu $\displaystyle\int_c^d f(x)\,dx \geq 0$, với mọi c, d thỏa $[c; d] \subset [a; b]$ thì $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a; b]$.

2. *Công thức đổi biến:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \varphi'(t) f(\varphi(t))\,dt,$$

   trong đó φ^{-1} là hàm ngược của hàm φ. Đặc biệt ta có

   (a) Chuẩn hóa cận tích phân:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_0^1 f\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\,dx.$$

   (b) Chuẩn hóa đối số của hàm dưới dấu tích phân:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{f(x)}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)}\,dx.$$

   (c) Công thức "cuốn chiếu" tổng quát:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_c^d \varphi_1'(t) f(\varphi_1(t)) - \varphi_2'(t) f(\varphi_2(t))\,dt,$$

   trong đó φ_1 và φ_2 khả vi thỏa mãn $\varphi_1(c) = \varphi_2(d) = a$ và $\varphi_1(d) = \varphi_2(c) = b$.

3. *Làm xuất hiện đạo hàm dưới dấu tích phân:*

   (a) Công thức tích phân từng phần:

   $$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

   (b) Công thức khai triển Taylor với phần dư tích phân:

   $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt.$$

Bài 5.4 (Đề thi 1995)**.** Cho hàm số f liên tục và nghịch biến trên $[0, b]$ và cho $a \in [0, b]$. Chứng minh rằng

$$b\int_0^a f(x)\,dx \geq a\int_0^b f(x)\,dx.$$

Hướng dẫn. Đầu tiên ta phải tìm cách tách riêng a, b về 2 vế bằng cách chia cả 2 vế cho ab. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,dx \geq \frac{1}{b}\int_0^b f(x)\,dx,$$

nghĩa là ta cần chứng minh $g(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(x)\,dx$ là hàm số nghịch biến. Việc còn lại là chỉ ra $g'(x) \leq 0$ với $x \in (0, b)$.

Giải. Đặt $g(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(x)\,dx$, ta có

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{f(t)}{t} - \frac{1}{t^2}\int_0^t f(x)\,dx = \frac{1}{t^2}\left[tf(t) - \int_0^t f(x)\,dx\right] \\ &= \frac{1}{t^2}\int_0^t [f(t) - f(x)]\,dx \geq 0. \end{aligned}$$

Do đó $g(a) \geq g(b)$, nghĩa là $b\int_0^a f(x)\,dx \geq a\int_0^b f(x)\,dx$. □

Bài 5.5. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$, liệu có luôn tồn tại hay không $\xi \in [0, 1]$ thỏa mãn

$$\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{3}f(\xi).$$

Cũng câu hỏi trên với đẳng thức

$$\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = f(\xi).$$

Hướng dẫn. Để chứng minh rằng $3\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = f(\xi)$ với $\xi \in [0,1]$, theo phương pháp của định lí giá trị trung gian, ta cần chỉ ra

$$\min_{[0,1]} f \leq 3\int_0^1 x^2 f(x)\,dx \leq \max_{[0,1]} f.$$

Giải. Đặt $m = \min_{[0,1]} f$ và $M = \max_{[0,1]} f$, ta có

$$3\int_0^1 x^2 f(x)\,dx \geq 3\int_0^1 x^2 m\,dx = m$$

và

$$3\int_0^1 x^2 f(x)\,dx \leq 3\int_0^1 x^2 M\,dx = M.$$

Do đó, theo định lí giá trị trung gian, tồn tại $\xi \in [0,1]$ thỏa mãn

$$f(\xi) = 3\int_0^1 x^2 f(x)\,dx$$

Tuy nhiên nếu ta chọn $f \equiv 1$ trong $[0,1]$ thì rõ rằng đẳng thức $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = f(\xi)$ không được thỏa mãn với mọi $\xi \in [0,1]$. □

5.2.3 Bất đẳng thức tích phân

Để chứng minh một bất đẳng thức tích phân cần vận dụng linh hoạt các tính chất sau

1. *Tính đơn điệu:* Nếu $f(x) \leq g(x)$ với mọi $x \in [a,b]$ thì ta có

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

2. *Công thức tổng tích phân:* Với mỗi $n \in \mathbb{N}$ chọn các điểm chia $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{1\leq i\leq n} |x_i - x_{i-1}| = 0$ và chọn các điểm trung gian $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Khi đó

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n |x_i - x_{i-1}| f(\xi_i).$$

3. *Công thức đổi biến:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \varphi'(t) f(\varphi(t))\,dt.$$

4. *Công thức tích phân từng phần:*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Định hướng giải:

1. Sử dụng các tính chất của tích phân để đơn giản hóa bất đẳng thức. Nếu gặp tích phân có cận biến thiên, thử đặt tích phân đó là một hàm số mới và phát biểu lại bài toán với hàm số mới này.

2. Nếu có thể khử hết các tích phân thì bài toán trở thành một bất đẳng thức vi phân, hãy sử dụng kĩ thuật thu gọn biểu thức đạo hàm và khảo sát hàm số để chứng minh.

3. Để chứng minh $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq c$ hãy tìm một hàm số g thỏa mãn $\int\limits_a^b g(x)\,dx = c$ và $f(x) \geq g(x)$ với mọi $x \in [a, b]$. Thông thường ta sẽ chọn g sao cho bất đẳng thức $f(x) \geq g(x)$ có thể chứng minh dễ dàng bằng các bất đẳng thức sơ cấp như bất đẳng thức AM-GM (Cauchy), Cauchy–Schwarz, ... hoặc các bất đẳng thức hệ quả của khai triển Taylor.

4. Sử dụng các bất đẳng thức tích phân thông dụng như Cauchy–Schwarz, Hölder, ...

   (a) Tìm một trường hợp đặc biệt sao cho bất đẳng thức cần chứng minh trở thành đẳng thức.

   (b) Để đánh giá tối ưu, chỉ nên vận dụng các bất đẳng thức tích phân thông dụng sao cho dấu bằng xảy ra trong trường hợp đặc biệt bên trên.

Sử dụng các bất đẳng thức thông dụng

Bài 5.6. Cho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục. Chứng minh rằng

$$\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)^2 \leq \int_0^1 f^2(t)\,dt.$$

Giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz, ta có

$$\int_0^1 f^2(t)\,dt \int_0^1 dt \geq \left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)^2.$$

Từ đó có điều phải chứng minh. □

Bài 5.7. Tìm các hàm số liên tục $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3} + \int_0^1 f^2(x^2)\,dx.$$

Hướng dẫn. Ràng buộc bởi một đẳng thức tích phân với cận cố định thường khá yếu (bài toán rất dễ có vô số nghiệm), do đó bản chất của các bài toán dạng này là chứng minh một bất đẳng thức tích phân rồi tìm điều kiện để dấu bằng xảy ra.

Trước hết ta chuẩn hóa biến số của hàm f bằng cách đổi biến $x = t^2$ để được $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 2tf(t^2)\,dt = \int_0^1 2xf(x^2)\,dx$. Bài toán trở thành

$$\int_0^1 2xf(x^2)\,dx = \frac{1}{3} + \int_0^1 f^2(x^2)\,dx.$$

Do vế trái có $f(x^2)$, vế phải có $f^2(x^2)$ khiến ta nghĩ đến việc dùng bất đẳng thức AM-GM để đưa ra đánh giá

$$\int_0^1 2xf(x^2)\,dx \leq \int_0^1 \left(x^2 + f^2(x^2)\right)\,dx = \frac{1}{3} + \int_0^1 f^2(x^2)\,dx.$$

Vậy theo giả thiết dấu bằng trong bất đẳng thức AM-GM phải xảy ra. Suy ra chỉ có hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ thỏa mãn bài toán. Dựa trên phân tích đó, lời giải có thể được trình bày ngắn gọn như sau

Giải. Thực hiện đổi biến $x = t^2$, ta có

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 2tf(t^2)\,dt = \int_0^1 2xf(x^2)\,dx.$$

Bài toán trở thành

$$\int_0^1 2xf(x^2)\,dx = \frac{1}{3} + \int_0^1 f^2(x^2)\,dx \Leftrightarrow \int_0^1 \left(f(x^2) - x\right)^2\,dx = 0.$$

Suy ra $f(x^2) = x$ với mọi $x \in [0,1]$, nghĩa là $f(x) = \sqrt{x}$ với mọi $x \in [0,1]$. □

Bài 5.8. Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục thỏa mãn

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xf(x)\,dx = 1.$$

Chứng minh rằng

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \geq 4.$$

Hướng dẫn. Nếu ta vận dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz một cách vội vàng

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \int_0^1 x^2\,dx \geq \left(\int_0^1 xf(x)\,dx\right)^2$$

thì chỉ được kết luận yếu hơn ở đề bài. Lí do là vì ta chưa dùng đến giả thiết $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ nên dấu bằng trong bất đẳng thức ở đề bài không xảy ra khi $f(x) \equiv x$. Ta chưa biết dấu bằng xảy ra với hàm số f nào nên ta tạm gọi f_0 là hàm số thỏa đề bài và $\displaystyle\int_0^1 f_0^2(x)\,dx = 4$. Khi đó ta tự tin đưa ra đánh giá chặt bằng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz như sau

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \int_0^1 f_0^2(x)\,dx \geq \left(\int_0^1 f_0(x)f(x)\,dx\right)^2.$$

Vấn đề còn lại là chọn f_0 thế nào để vế phải có thể xác định được giá trị cụ thể. Do đã biết $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xf(x)\,dx = 1$ nên ta thử tìm f_0 ở dạng sau

$$f_0(x) = ax + b.$$

Do f_0 thỏa $\displaystyle\int_0^1 f_0(x)\,dx = \int_0^1 xf_0(x)\,dx = 1$ nên ta tính được $a = 6$, $b = -2$. Vậy ta có thể trình bày lời giải như sau

Giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz ta có

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^2(x)\,dx \int_0^1 (6x-2)^2\,dx &\geq \left(\int_0^1 (6x-2)f(x)\,dx\right)^2\\ &= \left(6\int_0^1 xf(x)\,dx - 2\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2\\ &= 16.\end{aligned}$$

Mặt khác $\displaystyle\int_0^1 (6x-2)^2\,dx = 4$ nên ta có $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,dx \geq 4$. □

Bài 5.9 (Đề thi 2010)**.** Xác định hàm số dương $f(x)$khả vi liên tục trên $[0,1]$ mà $f(1) = ef(0)$ và $\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx \le 1$.

Hướng dẫn. Thu gọn đạo hàm ta có $\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln f(x))'$, do đó

$$\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(1) - \ln f(0) = \ln\frac{f(1)}{f(0)} = 1.$$

Ta không thể tính trực tiếp $\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx$, tuy nhiên quan sát bậc của lũy thừa dưới dấu tích phân ta nghĩ đến áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz để đưa ra đánh giá

$$\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx \int_0^1 dx \ge \left(\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx\right)^2 = 1.$$

So sánh với giả thiết suy ra dấu bằng trong bất đẳng thức trên phải xảy ra, nghĩa là $\frac{f'(x)}{f(x)}$ là hằng số. Từ đó suy ra $f(x) = ce^x$ (c>0) là các hàm số thỏa bài toán.

Bài 5.10. Cho n là một số nguyên lẻ lớn hơn 1. Tìm các hàm số liên tục $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\int_0^1 (f(x^{1/k}))^{n-k}\,dx = \frac{k}{n},$$

với $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Hướng dẫn. Chuẩn hóa đối số của f bằng cách đổi biến $t = x^{1/k}$ ta được

$$\int_0^1 (f(t))^{n-k} t^{k-1}\,dt = \frac{1}{n},$$

với $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Hiển nhiên đẳng thức này cũng đúng với $k = n$. Ta dự đoán $f(t) \equiv t$. Dạng biểu thức giúp ta liên tưởng đến công thức khai triển nhị thức Newton. Ta có

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (f(t)-t)^{n-1}\,dt &= \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^k (-1)^k (f(t))^{n-1-k} t^k\,dt \\
&= \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^k (-1)^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} (1-1)^{n-1} = 0.
\end{aligned}$$

Vậy $f(t) \equiv t$ là hàm số duy nhất thỏa bài toán.

www.mathvn.com

Phương pháp đổi biến và tích phân từng phần

Bài 5.11 (Đề thi 2008)**.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ và thỏa mãn điều kiện

$$xf(y) + yf(x) \leq 1$$

với mọi $x, y \in [0,1]$. Chứng minh rằng $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \leq \frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn. Để quan sát rõ ảnh hưởng của x và y trong điều kiện đã cho, ta tham số hóa 2 biến x và y thành 2 hàm số theo biến t:

$$x(t)f(y(t)) + y(t)f(x(t)) \leq 1.$$

Sử dụng tính đơn điệu, để chứng minh bất đẳng thức đã cho ta sẽ lấy tích phân xác định 2 vế theo t và hi vọng có cách đổi biến thỏa $\displaystyle\int x(t)f(y(t))\,dt = \int y(t)f(x(t))\,dt = \int f(x)\,dx$. Muốn vậy ta cần chọn x, y sao cho $x' = \pm y$ và $y' = \pm x$. Từ đó tìm được $x(t) = \sin t$ và $y(t) = \cos t$.

Giải. Đổi biến $x = \sin t$, ta có: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos t f(\sin t)\,dt$.

Đổi biến $x = \cos t$, ta có: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin t f(\cos t)\,dt$.

Do đó sử dụng giả thiết đã cho ta nhận được

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,dx &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2} \cos t f(\sin t)\,dt + \int_0^{\pi/2} \sin t f(\cos t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\cos t f(\sin t) + \sin t f(\cos t))\,dt \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

□

Bài 5.12 (Đề thi 2011)**.** Cho hàm số f liên tục trên $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ và thỏa mãn điều kiện

$$xf(x) + \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right) \leq 2$$

với mọi $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Chứng minh rằng $\displaystyle\int_{1/2}^2 f(x)\,dx \leq 2\ln 2$.

Hướng dẫn. Lập luận tương tự như bài trên, do ta có $x(t)f(x(t))+\frac{1}{x(t)}f\left(\frac{1}{x(t)}\right) \leq 2$ nên ta hi vọng tìm được hàm x sao cho $\displaystyle\int x(t)f(x(t))\,dt = \int \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)\,dt = \int f(x)\,dx$. Có thể chọn $x = e^t$. Từ đó ta có lời giải sau:

Giải. Theo giả thiết ta có $e^t f(e^t) + e^{-t}f(e^{-t}) \leq 2$ với mọi $t \in [-\ln 2, \ln 2]$. Mặt khác bằng cách đổi biến $x = e^t$ ta có

$$\int_{1/2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^t f(e^t)\,dt.$$

Tương tự bằng cách đổi biến $x = e^t$ ta có

$$\int_{1/2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^{-t} f(e^{-t})\,dt.$$

Do đó

$$\int_{1/2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^t f(e^t) + e^{-t}f(e^{-t})\,dt \leq \int_{-\ln 2}^{\ln 2} dt = 2\ln 2.$$

□

Bài 5.13 (Đề thi 2009)**.** Cho hàm số $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ có đạo hàm cấp hai, liên tục và có $f''(x) > 0$ trên $(0,1)$. Chứng minh rằng $2\int_0^1 f(t)\,dt \geq 3\int_0^1 f(t^2)\,dt - f(0)$.

Hướng dẫn. Trước hết ta nên đưa biểu thức $f(t^2)$ trong tích phân thứ hai về dạng $f(t)$ như tích phân đầu để dễ xử lí. Thực hiện đổi biến $t = x^{1/2}$ ta được $\displaystyle\int_0^1 f(t^2)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{2}x^{-1/2}f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}t^{-1/2}f(t)\,dt$. Như vậy bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$f(0) + \int_0^1 \left(2 - \frac{3}{2}t^{-1/2}\right) f(t)\,dt \geq 0.$$

Để khai thác được giả thiết $f''(x) > 0$ trên $(0,1)$ ta nghĩ đến việc biến đổi tích phân trong bất đẳng thức trên thành tích phân của biểu thức chứa f''.

Muốn vậy có thể sử dụng công thức tích phân từng phần hai lần liên tiếp

$$\begin{aligned}
&f(0) + \int_0^1 \left(2 - \frac{3}{2}t^{-1/2}\right) f(t)\,dt \\
&= f(0) + (2t - 3t^{1/2} + 1)f(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 (2t - 3t^{1/2} + 1)f'(t)\,dt \\
&= -\int_0^1 (2t - 3t^{1/2} + 1)f'(t)\,dt \\
&= -(t^2 - 2t^{3/2} + t)f'(t)\Big|_0^1 + \int_0^1 (t^2 - 2t^{3/2} + t)f''(t)\,dt \\
&= \int_0^1 (t^2 - 2t^{3/2} + t)f''(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Ở bước biến đổi đầu tiên ta đã đặt $du = \left(2 - \frac{3}{2}t^{-1/2}\right) dt$ và $v = f(t)$. Ta đã chọn $u = 2t - 3t^{1/2} + 1$ thay cho $u = 2t - 3t^{1/2}$ vì chọn thế này sẽ làm cho số hạng $f(0)$ (mà ta không có thông tin gì về nó) biến mất trong bước tiếp theo.

Việc còn lại là khá đơn giản

$$\int_0^1 (t^2 - 2t^{3/2} + t)f''(t)\,dt = \int_0^1 t(t^{1/2} - 1)^2 f''(t)\,dt \geq 0$$

và ta có điều phải chứng minh.

Bài 5.14 (Đề thi 2012)**.** Cho hàm số $f(x)$ khả vi liên tục cấp 2 trên $\mathbb{R}$. Giả sử $f(1) = 0$ và $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0$. Chứng minh rằng với mọi $\alpha \in (0, 1)$, ta có

$$\left|\int_0^\alpha f(x)\,dx\right| \leq \frac{2}{81} \max_{0\leq x\leq 1} |f''(x)|.$$

Hướng dẫn. Trước hết ta chuẩn hóa cận tích phân từ 0 đến 1:

$$\int_0^\alpha f(x)\,dx = \alpha \int_0^1 f(\alpha x)\,dx$$

Sử dụng khai triển Taylor cho $f(\alpha x)$ tại x để khai thác được $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0$ và làm f'' xuất hiện

$$f(\alpha x) = f(x) + (\alpha - 1)xf'(x) + \frac{(\alpha - 1)^2 x^2}{2} f''(\xi).$$

Do đó

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(\alpha x)\,dx &= \int_0^1 f(x) + (\alpha-1)xf'(x) + \frac{(\alpha-1)^2x^2}{2}f''(\xi)\,dx\\ &= \int_0^1 f(x)\,dx + (\alpha-1)\int_0^1 xf'(x)\,dx + \frac{(\alpha-1)^2}{2}\int_0^1 x^2f''(\xi)\,dx\\ &= 0 + (\alpha-1)\left(xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\,dx\right) + \frac{(\alpha-1)^2}{2}\int_0^1 x^2f''(\xi)\,dx\\ &= \frac{(\alpha-1)^2}{2}\int_0^1 x^2f''(\xi)\,dx.\end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\alpha f(x)\,dx\right| &\le \frac{\alpha(\alpha-1)^2}{2}\max_{0\le x\le 1}|f''(x)|\int_0^1 x^2\,dx\\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)^2}{6}\max_{0\le x\le 1}|f''(x)|\\ &\le \frac{2}{81}\max_{0\le x\le 1}|f''(x)|.\end{aligned}$$

(do $\frac{\alpha(\alpha-1)^2}{6} \le \frac{2}{81}$ với $\alpha \in (0,1)$, có thể chứng minh bằng cách khảo sát hàm số hoặc dùng bất đẳng thức AM–GM).

Bài 5.15. Cho hàm số f khả vi liên tục trên $[a,b]$ và $f(a) = f(b) = 0$, $|f'(x)| \le 1, \forall x \in [a,b]$. Chứng minh rằng

$$\int_a^b |f(x)|dx \le \frac{(b-a)^2}{4}.$$

Chỉ ra rằng nếu $c < \frac{(b-a)^2}{4}$ thì tồn tại hàm số f thỏa mãn các điều kiện trên sao cho

$$\int_a^b |f(x)|dx > c.$$

Giải. Ta có $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(x)dx = \int_a^x f'(x)dx$. Do đó với mọi $x \in [a,b]$ ta có

$$|f(x)| = \left|\int_a^x f'(x)dx\right| \le \int_a^x |f'(x)|dx \le \int_a^x dx = x - a.$$

Tương tự $f(x) = -\int_x^b f'(x)dx$ nên với mọi $x \in [a,b]$ ta cũng có

$$|f(x)| = \left|\int_x^b f'(x)dx\right| \le \int_x^b |f'(x)|dx \le \int_x^b dx = b - x.$$

Do đó

$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|dx$$
$$\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)dx = \frac{(b-a)^2}{4}.$$

Với mỗi $\varepsilon > 0$ đủ bé, xét hàm f_ε như sau

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} x-a & \text{nếu } 0 \leq x < \frac{a+b}{2} - \varepsilon, \\ \frac{1}{\varepsilon}\left(-x^2 + (a+b)x - \left(\varepsilon - \frac{b-a}{2}\right)^2\right) & \text{nếu } \frac{a+b}{2} - \varepsilon \leq x < \frac{a+b}{2} + \varepsilon, \\ b-x & \text{nếu } \frac{a+b}{2} + \varepsilon \leq x < b \end{cases}$$

Khi đó f_ε khả vi liên tục trên $[a,b]$ và $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^b |f_\varepsilon(x)|dx = \frac{(b-a)^2}{4}$ nên với ε đủ bé ta sẽ có $\int_a^b |f_\varepsilon(x)|dx > c$. □

Bài 5.16. Cho các hàm số không âm khả tích f và g. Chứng minh bất đẳng thức

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2 + \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b \sqrt{f^2(x)+g^2(x)}\,dx\right)^2.$$

Giải. Ta có

$$\left(\int_a^b \sqrt{f^2(x)+g^2(x)}\,dx\right)^2 - \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2$$
$$= \int_a^b (\sqrt{f^2(x)+g^2(x)} - f(x))\,dx \int_a^b (\sqrt{f^2(x)+g^2(x)} + f(x))\,dx$$
$$\geq \left(\int_a^b \sqrt{(\sqrt{f^2(x)+g^2(x)} - f(x))(\sqrt{f^2(x)+g^2(x)} + f(x))}\,dx\right)^2$$
$$= \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)^2.$$

Ta đã sử dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho đánh giá trên. □

Bài 5.17 (Đề thi 2012)**.** Cho hàm số $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là hàm lõm (còn gọi là lồi lên phía trên), khả vi liên tục thỏa mãn $f(0) = f(1) = 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{1 + 4\max_{0\leq x\leq 1} f^2(x)} \leq \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx \leq 1 + 2\max_{0\leq x\leq 1} f(x).$$

Hướng dẫn. Áp dụng bất đẳng thức của bài trên ta có:

$$\left(\int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\right)^2 \geq \left(\int_a^b dx\right)^2 + \left(\int_a^b |f'(x)|\,dx\right)^2.$$

Mặt khác ta có:

$$\int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \leq \int_0^1 (1+|f'(x)|)\,dx.$$

Như vậy vấn đề còn lại là phải biểu diễn được $\int_0^1 |f'(x)|\,dx$ thành biểu thức của $\max\limits_{0\leq x\leq 1} f(x)$. Gọi x_0 là điểm cực đại của f trên miền $[0,1]$. Ta có

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f'(x)|\,dx &= \int_0^{x_0} f'(x)\,dx - \int_{x_0}^1 f'(x)\,dx\\ &= (f(x_0)-f(0)) - (f(1)-f(x_0)) = 2f(x_0).\end{aligned}$$

Kết hợp những điều trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 5.18 (Đề thi 2013)**.** Cho $f(x)$ là hàm dương, liên tục trên đoạn $[0,1]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x)+f((1-\sqrt{x})^2)\leq 1$ với mọi $x\in[0,1]$. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 \sqrt{f(x)}\,dx \leq \frac{\pi\sqrt{5}}{8}.$$

Hãy chỉ ra rằng dấu đẳng thức không thể xảy ra.

Hướng dẫn. Nhận xét rằng $\sqrt{x}+\sqrt{(1-\sqrt{x})^2}=1$ nên ta sẽ thay x bởi x^2 trong giả thiết để đưa nó về dạng cân đối hơn như sau:

$$f(x^2)+f((1-x)^2)\leq 1, \quad (*)$$

với mọi $x\in[0,1]$, (*) sẽ trở thành đẳng thức nếu $f(x)=\sqrt{x}$. Muốn sử dụng được (*) cần làm cho $f(x^2)$ và $f((1-x)^2)$ xuất hiện dưới dấu tích phân. Do đó ta thực hiện đổi biến $x=t^2$ để được:

$$\int_0^1 \sqrt{f(x)}dx = 2\int_0^1 t\sqrt{f(t^2)}\,dt.$$

Tương tự, đổi biến $x=(1-t)^2$ ta có

$$\int_0^1 \sqrt{f(x)}\,dx = 2\int_0^1 (1-t)\sqrt{f((1-t)^2)}\,dt.$$

Như vậy

$$\int_0^1 \sqrt{f(x)}\,dx = \int_0^1 (t\sqrt{f(t^2)} + (1-t)\sqrt{f((1-t)^2)})\,dt.$$

So sánh với (*), ta nghĩ đến việc sử dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz để được

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(t\sqrt{f(t^2)} + (1-t)\sqrt{f((1-t)^2)}\right)\,dt \\
&\leq \int_0^1 \sqrt{(t^2+(1-t)^2)(f(t^2)+f((1-t)^2))}\,dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{t^2+(1-t)^2}\,dt.
\end{aligned}$$

Công việc còn lại là chỉ ra $\int_0^1 \sqrt{t^2+(1-t)^2}\,dt < \frac{\pi\sqrt{5}}{8}$, có thể tính cụ thể tích phân này hoặc dùng bất đẳng thức AM–GM $\sqrt{t^2+(1-t)^2} \leq \frac{1+(t^2+(1-t)^2)}{2}$ để được

$$\int_0^1 \sqrt{t^2+(1-t)^2}\,dt \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1+t^2+(1-t)^2\right)\,dt = \frac{5}{6} < \frac{\pi\sqrt{5}}{8}.$$

Ta đã đưa ra 1 bất đẳng thức tốt hơn đề bài, bạn đọc suy nghĩ xem liệu có thể đánh giá tối ưu hơn hay không.

Bài 5.19 (Đề thi 2014)**.** Cho f là hàm số liên tục trên $[0,+\infty)$. Giả sử rằng

$$\int_0^x f^2(t)\,dt \leq \frac{x^3}{3}$$

với mọi $x \geq 0$. Chứng minh rằng

$$\int_0^x f(t)\,dt \leq \frac{x^2}{2}$$

với mọi $x \geq 0$.

Hướng dẫn. Nhận xét rằng ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp $f(x) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$ (nếu không ta xét hàm số $|f|$) và các bất đẳng thức ở đề bài khá chặt vì dấu bằng xảy ra với hàm số $f(x) = x$. Do đó ta sẽ viết lại bất đẳng thức cần chứng minh ở dạng cân đối sau

$$\int_0^x (f(t)-t)\,dt \leq 0. \quad (1)$$

www.mathvn.com

Tương tự ta viết lại giả thiết dưới dạng

$$\int_0^x (f^2(t) - t^2)\, dt \le 0 \Leftrightarrow \int_0^x (f(t) - t)(f(t) + t)\, dt \le 0. \quad (2)$$

Ta tìm liên hệ giữa (2) và (1). Do $f(t) + t \ge t$ nên từ (2) ta nhận được

$$F(x) = \int_0^x t(f(t) - t)\, dt \le 0. \quad (3)$$

Ta sẽ biến đổi vế trái của (1) và tích phân từng phần để khai thác (3) như sau

$$\int_0^x (f(t) - t)\, dt = \int_0^x \frac{1}{t} t(f(t) - t))\, dt = \frac{F(x)}{x} - \lim_{t\to 0^+} \frac{F(t)}{t} + \int_0^x \frac{F(t)}{t^2}\, dt.$$

Do $F(x) \le 0$ và $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{F(t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{F'(t)}{1} = \lim\limits_{t\to 0^+} t(f(t) - t) = 0$ nên bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Bài 5.20 (Đề thi 2005)**.** Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0, 1]$ và thoả mãn điều kiện

$$\int_x^1 f(t)\, dt \ge \frac{1 - x^2}{2}$$

với mọi $x \in [0, 1]$. Hãy chứng minh

$$\int_0^1 (f(x))^2\, dx \ge \int_0^1 xf(x)\, dx.$$

Hướng dẫn. Để đơn giản, đặt $F(x) = \int_x^1 f(t)\, dt$, ta có $F'(x) = -f(x)$, $F(1) = 0$ và

$$F(x) \ge \frac{1 - x^2}{2}. \quad (1)$$

Ta cần phải chứng minh rằng

$$\int_0^1 (F'(x))^2 + xF'(x)\, dx \ge 0. \quad (2)$$

Lưu ý là các bất đẳng thức ở đề bài sẽ trở thành đẳng thức khi $f(x) \equiv x$ hay $F'(x) \equiv -x$. Với lưu ý đó, ta sẽ đánh giá $(F'(x))^2$ bởi $(F'(x) + x)^2 \ge 0$ và đánh giá $xF'(x)$ bởi công thức tích phân từng phần và (1), cụ thể như sau

$$\begin{aligned}\int_0^1 (F'(x))^2 + xF'(x)\,dx &= \int_0^1 (F'(x)+x)^2 - xF'(x) - x^2\,dx \\ &\geq -\int_0^1 xF'(x)\,dx - \int_0^1 x^2\,dx \\ &\geq -\int_0^1 xF'(x)\,dx - \frac{1}{3} \\ &\geq -xF(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 F(x)\,dx - \frac{1}{3} \\ &\geq \int_0^1 \frac{1-x^2}{2}\,dx - \frac{1}{3} = 0.\end{aligned}$$

Đưa về bất đẳng thức vi phân

Một số bất đẳng thức mặc dù phát biểu ở dạng tích phân nhưng có thể đưa được về dạng vi phân bằng công thức tích phân với cận biến thiên (tổng quát của công thức Newton-Leibniz):

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt\right) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

Từ đó ta vận dụng được kĩ thuật thu gọn biểu thức đạo hàm đã học trong chương trước.

Bài 5.21 (Bất đẳng thức Grönwall)**.** Cho u và v là các hàm số liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b). Giả sử $u'(t) \leq v(t)u(t)$, $\forall t \in (a,b)$. Chứng minh rằng $u(t) \leq u(a)e^{\int_a^t v(s)\,ds}$, $\forall t \in [a,b]$.

Hướng dẫn. Khử tích phân bằng cách đặt $g(t) = \int_a^t v(s)\,ds$. Khi đó $g(a) = 0$ và giả thiết trở thành

$$u'(t) \leq g'(t)u(t), \quad \forall t \in (a,b) \quad (1)$$

và ta cần chứng minh

$$u(t) \leq u(a)e^{g(t)}, \quad \forall t \in [a,b]. \quad (2)$$

Thu gọn biểu thức chứa đạo hàm để đưa (1) về dạng

$$u'(t) - g'(t)u(t) \leq 0 \Leftrightarrow \left(e^{-g(t)}u(t)\right)' \leq 0.$$

Do đó $f(t) = e^{-g(t)}u(t)$ là không tăng trên $[a, b]$. Nhìn vào (2) ta thấy rằng nên so sánh $f(a)$ và $f(t)$. Do f là không tăng trên $[a, b]$ nên với mọi $t \in [a, b]$ ta có

$$f(t) \leq f(a) \Leftrightarrow u(t) \leq u(a)e^{g(t)}.$$

Bài 5.22. Cho hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Với $x \in \mathbb{R}$ ta xác định

$$g(x) = f(x) \int_0^x f(t)\, dt.$$

Chứng minh rằng nếu g là hàm không tăng thì f đồng nhất 0.

Hướng dẫn. Ta loại bỏ tích phân bằng cách đặt $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Khi đó $F(0) = 0$ và

$$g(x) = F'(x)F(x) = \frac{1}{2}(F^2(x))'.$$

Do g không tăng và $g(0) = 0$ nên $(F^2(x))' \geq 0$ trên $(-\infty, 0)$ và $(F^2(x))' \leq 0$ trên $(0, +\infty)$. Vậy với mọi x ta có $F^2(x) \leq F^2(0) = 0$. Suy ra $F(x) = 0$ với mọi x. Do đó $f(x) = F'(x) = 0$ với mọi x.

Bài 5.23. Cho hàm số f có đạo hàm liên tục trên $[0, 1]$ thỏa mãn $0 < f'(x) \leq 1$ và $f(0) = 0$. Chứng minh rằng

$$\left(\int_0^1 f(x)\, dx\right)^2 \geq \int_0^1 (f(x))^3\, dx.$$

Hướng dẫn. Ta nhận thấy f chỉ bị ràng buộc tại lân cận của 0, do đó cận trên 1 trong bất đẳng thức cần chứng minh không có vai trò gì đặc biệt. Do đó bài toán chỉ có thể giải được nếu ta chứng minh được bất đẳng thức với cận trên được thay bởi t bất kì, nghĩa là chứng minh

$$F(t) = \left(\int_0^t f(x)\, dx\right)^2 - \int_0^t (f(x))^3\, dx$$

là không âm. Vì $F(0) = 0$ nên ta cần chứng minh $F' \geq 0$. Ta có

$$F'(t) = f(t)\left(2\int_0^t f(x)\, dx - (f(t))^2\right).$$

Từ điều kiện $f(0) = 0$ và $f'(x) > 0$ ta có $f(t) \geq 0$ với $t \geq 0$. Do đó chỉ cần chỉ ra $G(t) = 2\int_0^t f(x)\, dx - (f(t))^2 \geq 0$ với $t \geq 0$. Ta có

$$G'(t) = 2f(t) - 2f(t)f'(t) = 2f(t)(1 - f'(t)).$$

Từ giả thiết $f'(x) \leq 1$ ta có $G'(t) \geq 0$. Do đó $G(t) \geq G(0) = 0$ với $t \geq 0$. Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Bài 5.24 (Đề thi 2015)**.** Cho $f : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ là một hàm liên tục. Đặt

$$g(x) = \sqrt[3]{f(x)} \int_0^x \frac{dt}{f(t)}.$$

Chứng minh rằng hàm g không thể bị chặn trên $[0, +\infty)$.

Hướng dẫn. Ta loại bỏ tích phân bằng cách đặt $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{f(t)}$ thì $F'(x) = \frac{1}{f(x)}$ và

$$g(x) = \frac{F(x)}{\sqrt[3]{F'(x)}}.$$

Để sử dụng được kĩ thuật thu gọn đạo hàm ta viết lại dưới dạng

$$\frac{1}{(g(x))^3} = \frac{F'(x)}{(F(x))^3} = \left(-\frac{1}{2(F(x))^2}\right)'.$$

Giả sử g bị chặn trên thì tồn tại $M > 0$ sao cho

$$\left(-\frac{1}{2(F(x))^2}\right)' > M \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2(F(x))^2} - Mx\right)' > 0 \quad (*).$$

Do đó $-\frac{1}{2(F(x))^2} - Mx$ là hàm số tăng trên $(0, +\infty)$. Tuy nhiên trực giác cho thấy điều này là vô lí vì hàm $-Mx$ giảm đều trong khi hàm số $-\frac{1}{2(F(x))^2}$ bị chặn trên bởi 0. Để trình bày chính xác dự đoán trên lấy tích phân từ 1 đến t của (*) ta được

$$-\frac{1}{2(F(t))^2} - Mt + \frac{1}{2(F(1))^2} + M > 0$$

suy ra

$$\frac{1}{2(F(1))^2} > M(t-1),$$

với mọi $t > 1$. Mâu thuẫn này cho ta điều phải chứng minh.

5.3 Bài tập tự luyện

Bài 5.25 (Đề thi 2012)**.** Tính tích phân

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(2012^x + 1)(1 + x^2)}.$$

www.mathvn.com

Bài 5.26. Cho $a > 0$. Tính tích phân

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2}\, dx.$$

Hướng dẫn. Đổi biến $x = \frac{1}{t}$ đối với trường hợp $a = 1$.

Bài 5.27. Cho số tự nhiên n. Tính tích phân

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos nx}{1 - \cos x}\, dx.$$

Hướng dẫn. Từ các công thức lượng giác ta nghĩ đến việc xét $I_{n+1} + I_{n-1}$ và tìm được công thức truy hồi $I_n = \frac{I_{n+1}+I_{n-1}}{2}$.

Bài 5.28. Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục. Chứng minh rằng

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\, dx = \pi \int_0^{\pi/2} f(\sin x)\, dx.$$

Bài 5.29. Tính tích phân

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \sin^2 x}\, dx.$$

Bài 5.30. Cho các số thực dương a và b. Tính tích phân

$$\int_a^b \frac{e^{x/a} - e^{b/x}}{x}\, dx.$$

Bài 5.31. Tính tích phân

$$\int_0^1 \sqrt[3]{2x^3 - 3x^2 - x + 1}\, dx.$$

Bài 5.32. Tính tích phân

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x)\, dx.$$

Bài 5.33. Tính tích phân

$$\int_0^1 \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2}\, dx.$$

Bài 5.34. Cho số tự nhiên n. Tính tích phân

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx.$$

Hướng dẫn. Tích phân từng phần để thiết lập được công thức truy hồi $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

Bài 5.35. Tính tích phân

$$\int_0^{\pi} \ln(\sin x) \, dx.$$

Bài 5.36. Cho f là một hàm số liên tục không âm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\int_0^{+\infty} f(x) \, dx < \infty.$$

Chứng minh rằng

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int_0^n x f(x) \, dx = 0$$

Bài 5.37. Cho $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục. Chứng minh rằng

$$\lim_{n \to \infty} (n+1) \int_0^1 x^n f(x) \, dx = f(1).$$

Bài 5.38. Cho hàm số f liên tục trên $[a, b]$. Chứng minh rằng

$$\min_{x \in [a,b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

Biểu thức $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$ được gọi là *giá trị trung bình* của hàm số f trên $[a; b]$.

Bài 5.39. Tìm các hàm số liên tục $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\int_0^1 (x - f(x)) f(x) \, dx = \frac{1}{12}.$$

Bài 5.40. Cho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 \left(x^2 f(x) - x f^2(x) \right) \, dx \leq \frac{1}{16}.$$

www.mathvn.com

Bài 5.41. Cho f là hàm số liên tục trên $[0;+\infty)$ thỏa mãn

$$\int_0^x tf(t)\,dt \le \frac{x^3}{3}$$

với mọi $x \ge 0$. Chứng minh rằng $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt \le \frac{x^2}{2}$ với mọi $x \ge 0$.

Bài 5.42 (Đề thi 2000)**.** Cho hàm số f liên tục trên $[0,1]$ và $a > 0$ thỏa mãn

$$\int_0^1 f(x)\,dx = a \quad \text{và} \quad 0 \le f(x) \le a^{2/3}, \quad \forall x \in [0,1].$$

Chứng minh rằng

$$\int_0^1 \sqrt{f(x)}\,dx \ge a^{2/3}.$$

Bài 5.43 (Đề thi 2000)**.** Cho hàm số f liên tục trên $[0,1]$ và thỏa mãn

$$\int_{x_1}^{x_2} f^2(x)\,dx \le \frac{x_2^3 - x_1^3}{3},$$

với mọi $x_1, x_2 \in [1,2]$ sao cho $x_1 \le x_2$. Chứng minh rằng

$$\int_1^2 f(x)\,dx \le \frac{3}{2}.$$

Bài 5.44. Cho f là một hàm số liên tục khả vi trên $[0,+\infty)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Chứng minh rằng

$$\int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx \le 2\sqrt{\int_0^{+\infty} x^2 f^2(x)\,dx \int_0^{+\infty} (f'(x))^2\,dx}$$

Bài 5.45. Cho $a \in [0;1]$. Tìm tất cả các hàm số không âm f liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn các điều kiện

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1, \quad \int_0^1 xf(x)\,dx = a, \quad \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = a^2.$$

Bài 5.46. Cho hàm số liên tục $f : [0;1] \to (0;+\infty)$. Chứng minh rằng

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^3 \le 9\int_0^1 f^3(x)\,dx.$$

Bài 5.47. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx.$$

trong đó f là các hàm số liên tục thỏa mãn

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e^x f(x)\,dx = 1.$$

Bài 5.48 (Đề thi 1998)**.** Cho hàm số f khả vi liên tục trên $[0,1]$ thỏa mãn $f(0) = 0$. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 |f(t)f'(t)|\,dt \le \frac{1}{2}\int_0^1 (f'(t))^2\,dt.$$

Bài 5.49. Cho các số thực dương p và M và f là một hàm số liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b) thỏa mãn $f(a) = 0$ và $|f'(x)| \le M$ với mọi $x \in (a,b)$. Chứng minh

$$\int_a^b |f(x)|^p\,dx \le \frac{M^p}{p+1}(b-a)^{p+1}.$$

Bài 5.50. Cho hàm số f liên tục trên $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ và thỏa mãn điều kiện

$$xf(x) + yf(y) \le 2$$

với mọi $x, y \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của $\displaystyle\int_{1/2}^2 f(x)\,dx$.

Bài 5.51. Cho hàm số $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ có đạo hàm cấp hai, liên tục và có $f''(x) \ge 0$ trên $(0,1)$. Chứng minh rằng

$$2\int_0^1 (1-t)f(t)\,dt \le \int_0^1 f(t^2)\,dt.$$

Bài 5.52 (Đề thi 2015)**.** Cho $f : [0,1] \to (-\infty, 1]$ là một hàm liên tục thỏa mãn điều kiện $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0$. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 (f(x))^3 dx \le \frac{1}{4}.$$

www.mathvn.com

www.mathvn.com

Chương 6

Đề thi chọn đội tuyển trường Đại học Ngân hàng TP. HCM

www.mathvn.com

6.1 Đề thi chọn đội tuyển năm 2015

Câu 1. Cho số thực a. Tìm giới hạn của dãy số (u_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} u_1 = a, \\ (n+1)^3 u_{n+1} = n^3 u_n + 3n^2 + 3n + 1, \text{ với mọi } n \geq 1. \end{cases}$$

Câu 2. Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) và (v_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 1, \\ u_{n+1} = u_n^2 + 4v_n^2, \text{ với mọi } n \geq 0, \\ v_{n+1} = 2u_n v_n, \text{ với mọi } n \geq 0. \end{cases}$$

Câu 3. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn:

$$f(x^2) + f(x) = x^6 + x^3 + 1$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 4. Cho $f : [a, b] \to (a, b)$ là hàm số liên tục. Chứng minh rằng tồn tại $\alpha > 0$ và $c \in (a, b)$ sao cho

$$f(c) + f(c + \alpha) + f(c + 2\alpha) = 3(c + \alpha).$$

Câu 5. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi, có đạo hàm cấp 2 không âm. Chứng minh rằng

$$f(x + cf'(x)) \geq f(x)$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $c \geq 0$.

Câu 6. Cho hàm số f có đạo hàm cấp 2 liên tục trên đoạn $[a, b]$. Biết rằng phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt trên đoạn $[a, b]$. Chứng minh rằng tồn tại $x \in [a, b]$ thỏa mãn

$$f''(x) + 4xf'(x) + (2 + 4x^2)f(x) = 0.$$

Câu 7. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 2, \\ u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2 = 1, \text{ với mọi } n \geq 1. \end{cases}$$

Tính giới hạn sau

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+1}}.$$

Đáp án.

Câu 1. Theo giả thiết, ta có $(n+1)^3(u_{n+1}-1) = n^3(u_n-1)$.

Áp dụng hệ thức trên liên tiếp $n-1$ lần ta nhận được

$$n^3(u_n-1) = (n-1)^3(u_{n-1}-1) = \cdots = u_1 - 1 = a - 1.$$

Do đó $u_n = 1 + \frac{a-1}{n^3}$. Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

Câu 2. Ta có $u_{n+1} - 2v_{n+1} = (u_n - 2v_n)^2$. Áp dụng hệ thức này liên tiếp n lần ta được

$$u_n - 2v_n = (u_{n-1} - 2v_{n-1})^2 = (u_{n-2} - 2v_{n-2})^{2^2} = \cdots = (u_0 - 2v_0)^{2^n} = (-1)^{2^n}.$$

Tương tự,

$$u_n + 2v_n = (u_{n-1} + 2v_{n-1})^2 = (u_{n-2} + 2v_{n-2})^{2^2} = \cdots = (u_0 + 2v_0)^{2^n} = 3^{2^n}.$$

Do đó

$$u_n = \frac{3^{2^n} + (-1)^{2^n}}{2},$$

và

$$v_n = \frac{3^{2^n} - (-1)^{2^n}}{4}.$$

Câu 3. Theo giả thiết ta có $\left(f(x^2) - x^6 - \frac{1}{2}\right) + \left(f(x) - x^3 - \frac{1}{2}\right) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $g(x) = f(x) - x^3 - \frac{1}{2}$ thì g liên tục trên $\mathbb{R}$ và điều kiện trên trở thành

$$g(x^2) + g(x) = 0,$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó $g(x) = -g(x^2) = g(x^4)$. Vận dụng liên tiếp ta được

$$g(x) = g(x^4) = \cdots = g(x^{4^n}).$$

Thay x bởi $x^{1/4^n}$ ta có $g(x) = g(x^{1/4^n})$ với mọi $x > 0$ và $n \in \mathbb{N}$. Cho $n \to \infty$ ta được

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x^{1/4^n}) = g(\lim_{n\to\infty} x^{1/4^n}) = g(1).$$

Vậy $g(x) = C$ với mọi $x > 0$, trong đó $C \in \mathbb{R}$. Do đó với $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bất kì ta có $g(x) = g(x^4) = C$.

Mặt khác $g(x^2) + g(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $C = 0$. Đặt $x = 0$ vào hệ thức này ta cũng có $g(0) = 0$.

Vậy $g(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}$. Kiểm tra lại hàm số này thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Câu 4. Đặt $g(x) = f(x) - x$ thì g liên tục trên $[a, b]$. Ta có $g(a) = f(a) - a > 0$ và $g(b) = f(b) - b < 0$ nên từ tính liên tục của g suy ra tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $g(x) > 0$ với mọi $x \in [a, a+\varepsilon]$ và $g(x) < 0$ với mọi $x \in [b-\varepsilon, b]$.

Chọn $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$ và đặt $h(x) = g(x) + g(x+\alpha) + g(x+2\alpha)$ ta có $h(a) > 0 > h(b-2\alpha)$ và h liên tục trên $[a, b]$ nên tồn tại $c \in (a, b-2\alpha)$ sao cho $h(c) = 0$, nghĩa là $g(c) + g(c+\alpha) + g(c+2\alpha) = 0$, hay nói cách khác

$$f(c) + f(c+\alpha) + f(c+2\alpha) = 3(c+\alpha).$$

Câu 5. Nếu $c = 0$ hoặc $f'(x) = 0$ thì kết luận hiển nhiên đúng. Xét trường hợp $c > 0$ và $f'(x) \neq 0$.

Trường hợp $f'(x) > 0$, áp dụng định lí Lagrange ta có

$$f(x + cf'(x)) - f(x) = cf'(x)f'(\xi)$$

với $\xi \in (x, x + cf'(x))$.

Do $f''(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên f' là hàm không giảm. Do đó $f'(\xi) \geq f'(x) > 0$ nên từ hệ thức trên suy ra $f(x + cf'(x)) - f(x) > 0$.

Tương tự cho trường hợp $f'(x) < 0$, áp dụng định lí Lagrange ta có

$$f(x + cf'(x)) - f(x) = cf'(x)f'(\xi)$$

với $\xi \in (x + cf'(x), x)$.

Do f' là hàm không giảm nên trong trường hợp đang xét ta có $f'(\xi) \leq f'(x) < 0$ nên từ hệ thức trên suy ra $f(x + cf'(x)) - f(x) > 0$.

Câu 6. Đặt $g(x) = e^{x^2} f(x)$ ta có

$$g''(x) = e^{x^2}\left(f''(x) + 4xf'(x) + (2 + 4x^2)f(x)\right).$$

Gọi $x_1 < x_2 < x_3$ là 3 nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ thì đó cũng là 3 nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

Áp dụng định lí Lagrange với hàm g, ta tìm được $y_1 \in (x_1, x_2)$ và $y_2 \in (x_2, x_3)$ thỏa mãn

$$g'(y_1) = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = 0,$$

và

$$g'(y_2) = \frac{g(x_3) - g(x_2)}{x_3 - x_2} = 0,$$

www.mathvn.com

Tiếp tục áp dụng định lí Lagrange với hàm g', ta tìm được $z \in (y_1, y_2)$ thỏa mãn

$$g''(z) = \frac{g'(y_2) - g'(y_1)}{y_2 - y_1} = 0,$$

hay nói cách khác

$$f''(z) + 4zf'(z) + (2 + 4z^2)f(z) = 0.$$

Câu 7. Bằng qui nạp, dễ thấy $u_n > 0$. Ta có

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_{k-1}u_{k+1} - u_k^2}{u_k u_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{u_{k-1}}{u_k} - \frac{u_k}{u_{k+1}} \right) = \frac{u_0}{u_1} - \frac{u_n}{u_{n+1}}.$$

Mặt khác từ giả thiết ta có $u_{n-1}u_{n+1} > u_n^2$ hay $\frac{u_n}{u_{n+1}} < \frac{u_{n-1}}{u_n}$.

Do đó dãy số $\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên hội tụ về l thỏa mãn $l < \frac{u_0}{u_1} = \frac{1}{2}$.

Mặt khác theo giả thiết ta có $u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2 = u_{n-2}u_n - u_{n-1}^2$ (cùng bằng 1). Suy ra $\frac{u_{n+1}+u_{n-1}}{u_n} = \frac{u_n+u_{n-2}}{u_{n-1}}$. Áp dụng hệ thức này $n-1$ lần ta được

$$\frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{u_n} = \frac{u_n + u_{n-2}}{u_{n-1}} = \cdots = \frac{u_2 + u_0}{u_1} = 3.$$

Chuyển qua giới hạn ta có

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{u_n} = 3,$$

hay

$$\frac{1}{l} + l = 3.$$

Kết hợp với điều kiện $l < \frac{1}{2}$ ta suy ra $l = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Từ các lập luận trên ta có

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{u_0}{u_1} - l = \frac{\sqrt{5} - 2}{2}.$$

www.mathvn.com

6.2 Đề thi chọn đội tuyển năm 2016

Câu 1. Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1, \\ u_n = 5u_{n-2} - \frac{6}{u_{n-1}}, \text{ với mọi } n \geq 2. \end{cases}$$

Câu 2. Tính giới hạn sau

$$\lim_{n\to\infty} \left(n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[n+k]{e}} \right).$$

Câu 3. Cho hàm số f có đạo hàm cấp 2 liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $f(k\pi) = 0$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng tồn tại vô số giá trị $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f''(x) - 2f'(x)\tan x - f(x) = 0.$$

Câu 4. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{x+2y}{3}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Câu 5. Cho các hàm số liên tục $f, g : [a; b] \to \mathbb{R}$ thỏa $f(x) > 0$ và $g(x) > 0$ với mọi $x \in [a; b]$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho

$$\frac{f(c)}{\int_a^c f(x)\,dx} - \frac{g(c)}{\int_c^b g(x)\,dx} = 1.$$

Câu 6. Cho hàm số liên tục $f : [0; 1] \to [0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(x) + f(1-x) = 1 \quad \text{với mọi } x \in [0; 1].$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{8} < \int_0^1 xf(x)\,dx < \frac{3}{8}.$$

Có thể thay $\frac{1}{8}$ bởi số lớn hơn hoặc $\frac{3}{8}$ bởi số nhỏ hơn để bất đẳng thức vẫn còn đúng hay không?

www.mathvn.com

Đáp án.

Câu 1. Từ công thức truy hồi ta có $u_n u_{n-1} = 5u_{n-1}u_{n-2} - 6$. Đặt $x_n = u_{n+1}u_n$ ta được $x_0 = 1$ và $x_n = 5x_{n-1} - 6$. Suy ra $x_n - \frac{3}{2} = 5\left(x_{n-1} - \frac{3}{2}\right)$. Áp dụng hệ thức này liên tiếp n lần ta có

$$x_n - \frac{3}{2} = 5\left(x_{n-1} - \frac{3}{2}\right) = \cdots = 5^n\left(x_0 - \frac{3}{2}\right) = -\frac{5^n}{2}.$$

Vậy $x_n = \frac{3-5^n}{2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do đó, nếu n chẵn ta có

$$u_n = \frac{u_n u_{n-1}}{u_{n-1}u_{n-2}} \cdot \frac{u_{n-1}u_{n-2}}{u_{n-2}u_{n-3}} \cdots \frac{u_2 u_1}{u_1 u_0} = \frac{x_{n-1}x_{n-3}x_{n-5}\cdots x_1}{x_{n-2}x_{n-4}x_{n-6}\cdots x_0} = \frac{\prod\limits_{k=0}^{(n-2)/2}(3-5^{2k+1})}{\prod\limits_{k=0}^{(n-2)/2}(3-5^{2k})}.$$

Tương tự nếu n lẻ ta có

$$u_n = \frac{u_n u_{n-1}}{u_{n-1}u_{n-2}} \cdot \frac{u_{n-1}u_{n-2}}{u_{n-2}u_{n-3}} \cdots \frac{u_3 u_2}{u_2 u_1} = \frac{x_{n-1}x_{n-3}x_{n-5}\cdots x_2}{x_{n-2}x_{n-4}x_{n-6}\cdots x_1} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{(n-1)/2}(3-5^{2k})}{\prod\limits_{k=1}^{(n-1)/2}(3-5^{2k-1})}.$$

Câu 2. Sử dụng khai triển Taylor của hàm số e^{-x} dễ dàng chứng minh được

$$1 - x \le e^{-x} \le 1 - x + \frac{x^2}{2}$$

với mọi $x \ge 0$. Áp dụng bất đẳng thức này với $x = \frac{1}{n+k}$ ta có

$$1 - \frac{1}{n+k} \le \frac{1}{\sqrt[n+k]{e}} \le 1 - \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2(n+k)^2}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{n+k} - \frac{1}{2(n+k)^2} \le 1 - \frac{1}{\sqrt[n+k]{e}} \le \frac{1}{n+k}.$$

Cho $k = 1, 2, \ldots, n$ rồi lấy tổng ta được

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} \le n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[n+k]{e}} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \quad (1).$$

www.mathvn.com

Ta có

$$0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2}$$

nên theo nguyên lí kẹp

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} = 0 \quad (2).$$

Mặt khác ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{1+k/n} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 \quad (3).$$

Từ (1), (2), (3) và theo nguyên lí kẹp ta suy ra giới hạn cần tìm là $\ln 2$.

Câu 3. Đặt $g(x) = f(x)\cos x$. Xét số nguyên k bất kì. Ta có $g\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = g(k\pi) = g\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$ nên áp dụng định lí Rolle cho hàm số g trên các đoạn $\left[k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi\right]$ và $\left[k\pi; k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ suy ra tồn tại $a_k \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi\right)$ và $b_k \in \left(k\pi; k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $g'(a_k) = g'(b_k) = 0$. Tiếp tục áp dụng định lí Rolle cho hàm số g' trên đoạn $[a_k; b_k]$ suy ra tồn tại $c_k \in (a_k; b_k)$ thỏa mãn $g''(c_k) = 0$. Mặt khác bằng tính toán trực tiếp ta có

$$g''(x) = (f''(x) - 2f'(x)\tan x - f(x))\cos x$$

với mọi $x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$. Suy ra

$$f''(c_k) - 2f'(c_k)\tan c_k - f(c_k) = 0$$

với mỗi $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 4. Ta chứng minh rằng f là hàm hằng. Thật vậy, giả sử tồn tại $x, y \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) \neq f(y)$. Đặt $f(x) = a$, $f(y) = b$ thì $a \neq b$. Ta có

$$f\left(\frac{x+2y}{3}\right) = f\left(\frac{2x+y}{3}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Ta sẽ tính $f\left(\frac{5x+4y}{9}\right)$ bằng 2 cách. Một mặt ta có

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5x+4y}{9}\right) &= f\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{x+2y}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2x+y}{3}\right) \\ &= \frac{f\left(\frac{x+2y}{3}\right) + f\left(\frac{2x+y}{3}\right)}{2} = \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

www.mathvn.com

Mặt khác ta có

$$f\left(\frac{5x+4y}{9}\right) = f\left(\frac{1}{3}\cdot x + \frac{2}{3}\cdot\frac{x+2y}{3}\right) = \frac{f(x) + f\left(\frac{x+2y}{3}\right)}{2} = \frac{3a+b}{4}.$$

Do đó $\frac{a+b}{2} = \frac{3a+b}{4}$, suy ra $a = b$, mâu thuẫn với giả sử ban đầu. Vậy chỉ có các hàm số $f(x) = c$, trong đó c là hằng số, thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5. Đặt

$$h(t) = e^{-t}\int_a^t f(x)\,dx\int_t^b g(x)\,dx$$

thì $h(a) = h(b) = 0$ nên áp dụng định lí Rolle trên đoạn $[a; b]$ ta tìm được $c \in (a; b)$ thỏa mãn $h'(c) = 0$. Mặt khác

$$\begin{aligned} h'(c) &= e^{-c}\left(f(c)\int_c^b g(x)\,dx - g(c)\int_a^c f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx\int_c^b g(x)\,dx\right) \\ &= e^{-c}\int_a^c f(x)\,dx\int_c^b g(x)\,dx\left(\frac{f(c)}{\int_a^c f(x)\,dx} - \frac{g(c)}{\int_c^b g(x)\,dx} - 1\right) \end{aligned}$$

nên ta có

$$\frac{f(c)}{\int_a^c f(x)\,dx} - \frac{g(c)}{\int_c^b g(x)\,dx} - 1 = 0.$$

Câu 6. Đổi biến $x = 1 - t$ ta được

$$\int_{1/2}^1 xf(x)\,dx = -\int_{1/2}^0 (1-t)f(1-t)\,dt = \int_0^{1/2}(1-x)f(1-x)\,dx.$$

Do đó

$$\int_0^1 xf(x)\,dx = \int_0^{1/2}\left(xf(x) + (1-x)f(1-x)\right)\,dx. \quad (1)$$

Với $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ ta có $1 - x \geq x$, do đó

$$x(f(x) + f(1-x)) \leq xf(x) + (1-x)f(1-x) \leq (1-x)(f(x) + f(1-x)).$$

Do giả thiết $f(x) + f(1-x) = 1$ nên bất đẳng thức trên trở thành

$$x \leq xf(x) + (1-x)f(1-x) \leq 1 - x$$

với mọi $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$. Lấy tích phân từ 0 đến $\frac{1}{2}$ ta nhận được

$$\frac{1}{8} \leq \int_0^{1/2}\left(xf(x) + (1-x)f(1-x)\right)\,dx \leq \frac{3}{8}. \quad (2)$$

www.mathvn.com

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{1}{8} \leq \int_0^1 xf(x)\,dx \leq \frac{3}{8}. \quad (3)$$

Bất đẳng thức đầu tiên của (3) sẽ trở thành đẳng thức khi và chỉ khi $f(1-x) = 0$ với mọi $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right)$, kết hợp với giả thiết $f(x) + f(1-x) = 1$ suy ra

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right) \\ 0, & \text{nếu } x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases}.$$

Điều này mâu thuẫn với tính liên tục của f, vậy bất đẳng thức đầu tiên của (3) không thể trở thành đẳng thức. Chứng minh tương tự bất đẳng thức thứ hai của (3) cũng không thể trở thành đẳng thức. Tóm lại ta có

$$\frac{1}{8} < \int_0^1 xf(x)\,dx < \frac{3}{8}.$$

Với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, xét các hàm số

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x \in \left[0; \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) \\ \frac{n+2}{4} - \frac{nx}{2}, & \text{nếu } x \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}; \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) \\ 0, & \text{nếu } x \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}; 1\right] \end{cases}$$

và

$$g_n(x) = 1 - f_n(x)$$

với mọi $x \in [0; 1]$.

Ta thấy các hàm số f_n và g_n thỏa mãn điều kiện đề bài. Mặt khác $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 xf_n(x)\,dx = \frac{1}{8}$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 xg_n(x)\,dx = \frac{3}{8}$. Do đó không thể thay $\frac{1}{8}$ bởi số lớn hơn hoặc $\frac{3}{8}$ bởi số nhỏ hơn để kết luận của bài toán vẫn đúng.

6.3 Đề thi chọn đội tuyển năm 2017

Câu 1. Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 0, \\ u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{u_n+3}, \text{ với mọi } n \geq 1. \end{cases}$$

Câu 2. Cho số thực $a > 0$ và dãy số (u_n) được xác định như sau

$$\begin{cases} u_1 = a, \\ u_{n+1} = u_n^{u_n}, \text{ với mọi } n \geq 1. \end{cases}$$

Tìm các giá trị của a để dãy số trên có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.
Câu 3. Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn f đồng biến và f không liên tục tại bất kì điểm nào.
Câu 4. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) = x^{x-1} f(x^x)$$

với mọi $x > 0$.
Câu 5. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = x^{x^x}$ đồng biến trên $(0, +\infty)$ và

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.$$

Câu 6. Xét phương trình $a^x = x^a$.

(i) Chứng minh rằng phương trình có tối đa hai nghiệm dương và tìm các giá trị của a để phương trình có đúng một nghiệm dương.

(ii) Kí hiệu $s(a)$ là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình trên. Tính $\lim\limits_{a\to+\infty} s(a)$.

Câu 7. Cho hàm số liên tục $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(y) \geq |x - y|$ với mọi $x, y \in [0, 1]$. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 f(x)\, dx \geq \frac{1}{4}.$$

Cho một ví dụ về hàm số f mà đẳng thức xảy ra.

www.mathvn.com

Đáp án.

Câu 1. Đặt $v_n = u_n + 3$. Với mọi $n \geq 1$, từ công thức truy hồi ta có $v_{n+1} = \frac{6v_n - 8}{v_n}$. Suy ra $v_{n+1}v_n = 6v_n - 8$.

Đặt $w_0 = 1$ và $w_n = \prod\limits_{k=1}^{n} v_k$ thì công thức trên trở thành $w_{n+1} = 6w_n - 8w_{n-1}$ với mọi $n \geq 1$. Suy ra $w_{n+1} - 2w_n = 4(w_n - 2w_{n-1})$. Áp dụng hệ thức này liên tiếp n lần ta có

$$w_{n+1} - 2w_n = 4(w_n - 2w_{n-1}) = 4^2(w_{n-1} - 2w_{n-2}) = \cdots = 4^n(w_1 - 2w_0) = 4^n.$$

Suy ra $w_{n+1} - \frac{4^{n+1}}{2} = 2\left(w_n - \frac{4^n}{2}\right)$. Áp dụng hệ thức này liên tiếp n lần ta có

$$w_{n+1} - \frac{4^{n+1}}{2} = 2\left(w_n - \frac{4^n}{2}\right) = 2^2\left(w_{n-1} - \frac{4^{n-1}}{2}\right) = \cdots = 2^n\left(w_1 - \frac{4}{2}\right) = 2^n.$$

Vậy $w_{n+1} = \frac{2^{n+1} + 4^{n+1}}{2}$, suy ra $u_n = v_n - 3 = \frac{w_n}{w_{n-1}} - 3 = \frac{2^n + 4^n}{2^{n-1} + 4^{n-1}} - 3 = \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1} + 1}$ với mọi $n \geq 1$.

Câu 2. Dãy số được cho bởi công thức truy hồi $u_{n+1} = f(u_n)$ trong đó $f(x) = x^x$.

Xét $f(x) - x = x(x^{x-1} - 1)$. Nếu $x > 1$ thì $x - 1 > 0$ nên $x^{x-1} > x^0 = 1$. Nếu $0 < x < 1$ thì $x - 1 < 0$ nên $x^{x-1} > x^0 = 1$. Do đó ta luôn có $f(x) > x$ với $0 < x \neq 1$ và $f(1) = 1$. Suy ra $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$ nên (u_n) là dãy số không giảm.

Nếu dãy số (u_n) hội tụ đến $l \in \mathbb{R}$ thì ta phải có $l = f(l)$, do đó $l = 1$.

Mặt khác $f'(x) = (e^{x \ln x})' = x^x(\ln x + 1)$. Do đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$. Ta cũng có $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x = e^{\lim_{x\to 0^+} x \ln x} = 1$ vì $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0$.

Bảng biến thiên của f:

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
							$+\infty$
						$\nearrow$	
$f(x)$	1				1		
		$\searrow$		$\nearrow$			
			$f(e^{-1})$				

Ta xét 2 trường hợp sau:

- Trường hợp $a > 1$: (u_n) là dãy số không giảm và $u_1 > 1$ nên (u_n) không thể hội tụ đến 1, do đó $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

- Trường hợp $0 < a \leq 1$: Từ bảng biến thiên ta có $0 < u_2 = f(u_1) \leq 1$. Bằng qui nạp ta có $0 < u_n \leq 1$ với mọi $n \geq 2$. Do (u_n) là dãy số không giảm và bị chặn trên bởi 1 nên hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

Kết luận: $0 < a \leq 1$, khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

Câu 3. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn bài toán. Với mọi $x \in [0,1]$, do f đồng biến nên $\lim\limits_{t\to x^-} f(t)$ và $\lim\limits_{t\to x^+} f(t)$ tồn tại. Đặt $r(x) = \lim\limits_{t\to x^-} f(t) - \lim\limits_{t\to x^+} f(t)$. Do f đồng biến và không liên tục tại bất kì điểm nào nên $r(x) > 0$ với mọi $x \in [0,1]$.

Với mỗi số nguyên dương n, đặt $A_n = \left\{x \in [0,1] : r(x) > \frac{1}{n}\right\}$ thì $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = [0,1]$. Nếu tất cả các tập hợp A_n đều hữu hạn thì $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ là một tập hợp vô hạn đếm được, mâu thuẫn vì $[0,1]$ là một tập hợp vô hạn không đếm được. Do đó tồn tại n_0 sao cho tập hợp A_{n_0} có vô hạn phần tử.

Chọn ra một dãy (a_n) các phần tử phân biệt trong A_{n_0}. Từ tính đồng biến của f và định nghĩa của A_{n_0} ta có $f(1) - f(0) \geq \sum\limits_{k=1}^{n} r(a_k) \geq \frac{n}{n_0}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Cho $n \to \infty$, ta nhận được điều vô lý: $f(1) - f(0) \geq +\infty$. Vậy không tồn tại hàm số f thỏa bài toán.

Câu 4. Đặt $g(x) = xf(x)$ thì phương trình trở thành $g(x) = g(x^x)$. Xét $x > 0$ bất kì.

- Nếu $0 < x \leq 1$, xét dãy số (u_n) được xác định như sau

$$\begin{cases} u_1 = x, \\ u_{n+1} = u_n^{u_n}, \text{ với mọi } n \geq 1. \end{cases}$$

  Ta có $g(u_{n+1}) = g(u_n^{u_n}) = g(u_n)$ nên $g(u_n) = g(u_{n-1}) = \cdots = g(u_1) = g(x)$ với mọi $n \geq 1$. Mặt khác theo câu 2, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$ nên $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g(u_n) = g(\lim\limits_{n\to\infty} u_n) = g(1)$.

- Nếu $x > 1$, kí hiệu $s : [1,+\infty) \to [1,+\infty)$ là hàm số ngược của hàm số $r(x) = x^x$ trên $[1,+\infty)$ (s tồn tại vì r là hàm số đồng biến trên $[1,+\infty)$

theo bảng biến thiên ở câu 2). Xét dãy số (u_n) được xác định như sau

$$\begin{cases} u_1 = x, \\ u_{n+1} = s(u_n), \text{ với mọi } n \geq 1. \end{cases}$$

Theo câu 2, $r(x) \geq x$ nên $s(x) \leq r(s(x)) = x$ với mọi $x \in (0,1)$. Do đó (u_n) là dãy số không tăng và bị chặn dưới bởi 1 nên hội tụ đến $l \in \mathbb{R}$ thỏa $l = s(l) \Rightarrow r(l) = r(s(l)) = l \Rightarrow l = 1$ theo câu 2. Vậy $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g(u_n) = g(\lim\limits_{n\to\infty} u_n) = g(1)$.

Vậy g là hàm hằng. Suy ra các hàm số cần tìm là $f(x) = \frac{c}{x}$ với $c \in \mathbb{R}$.

Câu 5. Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{x^x \ln x}\right)' = x^{x^x}\left(x^x \ln x\right)' = x^{x^x}\left((e^{x\ln x})' \ln x + x^{x-1}\right) \\ &= x^{x^x}\left(x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1}\right) \\ &= x^{x^x + x}\left((\ln x + 1)\ln x + \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

- Nếu $x \geq 1$ thì $\ln x \geq 0$ nên $f'(x) > 0$.
- Nếu $0 < x < 1$ thì $(\ln x + 1)\ln x = \left(\ln x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$ và $\frac{1}{x} > 1$ nên ta cũng có $f'(x) > 0$.

Vậy f đồng biến trên $(0, +\infty)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x} = 1$ vì $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0$. Do đó $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0^1 = 0$.

Câu 6. Phương trình đã cho tương đương với

$$x \ln a = a \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, ta có $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. Ta cũng có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Do đó f có bảng biến thiên như sau:

www.mathvn.com

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có tối đa hai nghiệm dương. Phương trình có đúng một nghiệm dương khi và chỉ khi

$$f(a) = \frac{\ln a}{a} \in (-\infty, 0] \cup \{e^{-1}\} \Leftrightarrow a \in (0, 1] \cup \{e\}.$$

Cũng từ bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{a \to +\infty} s(a) = 1$.

Câu 7. Áp dụng bất đẳng thức đã cho với $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ và $y = x + \frac{1}{2}$ ta có $f(x) + f\left(x + \frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$ với mọi $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Do đó

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^{1/2} \left(f(x) + f\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) dx \geq \int_0^{1/2} \frac{dx}{2} = \frac{1}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra với hàm số $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$. Thật vậy,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\, dx &= \int_0^{1/2} \left|x - \frac{1}{2}\right| dx + \int_{1/2}^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| dx \\ &= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} - x\right) dx + \int_{1/2}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Mặt khác

$$f(x) + f(y) = \left|x - \frac{1}{2}\right| + \left|y - \frac{1}{2}\right| \geq \left|\left(x - \frac{1}{2}\right) - \left(y - \frac{1}{2}\right)\right| = |x - y|$$

nên f thỏa mãn điều kiện của bài toán.

www.mathvn.com

6.4 Đề thi chọn đội tuyển năm 2018

Câu 1. Cho số thực a và dãy số (u_n) được xác định như sau

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n, \text{ với mọi } n \geq 0. \end{cases}$$

a) Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số.

b) Tìm các giá trị của a để dãy số trên có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Câu 2. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(y + f(f(x))) + x + y = 0$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Chứng minh rằng $f(x) - f(2x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Tìm tất cả các hàm số liên tục f thỏa mãn điều kiện trên.

Câu 3. Tìm số thực a nhỏ nhất thỏa mãn $3^x > x^3$ với mọi $x > a$.
Câu 4. Cho các số thực dương a và b. Tính tích phân

$$\int_a^b \frac{e^{x/a} - e^{b/x}}{x}\, dx.$$

Câu 5. Công ty sữa muốn sản xuất các hộp sữa hình trụ có dung tích 1 lít. Cho biết giá mỗi cm^2 vật liệu để làm 2 đáy gấp k lần giá mỗi cm^2 vật liệu để làm bề mặt xung quanh của hộp sữa. Hỏi công ty nên lựa chọn tỉ lệ chiều cao : đường kính đáy hộp bằng bao nhiêu để tiết kiệm vật liệu nhất?

www.mathvn.com

Đáp án.

Câu 1.

a) Ta có $u_{n+1}+1=(u_n+1)^2$ với mọi $n\geq 0$. Áp dụng công thức này liên tiếp ta có

$$\begin{aligned} u_n+1 &= (u_{n-1}+1)^2=(u_{n-2}+1)^{2^2}=(u_{n-3}+1)^{2^3}=\cdots \\ &= (u_0+1)^{2^n}=(a+1)^{2^n}. \end{aligned}$$

Do đó $u_n=(a+1)^{2^n}-1$.

b) Từ kết quả của câu a) suy ra:

- Nếu $|a+1|>1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=+\infty$.
- Nếu $|a+1|=1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.
- Nếu $|a+1|<1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=-1$.

Vậy (u_n) có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi $|a+1|\leq 1 \Leftrightarrow -2\leq a\leq 0$ với giới hạn được xác định như trên.

Câu 2.
<u>*Cách 1.*</u>

a) Chọn $y=x-f(f(x))$ ta có $f(x)+x+x-f(f(x))=0$, nghĩa là $-f(x)+f(f(x))=2x$.

Chọn $y=-f(x)$ ta có $f(-f(x)+f(f(x)))+x-f(x)=0$, kết hợp với dòng bên trên suy ra $f(2x)+x-f(x)=0$, nghĩa là $f(x)-f(2x)=x$.

b) Đặt $g(x)=f(x)+x$, theo câu a) ta có $g(x)=g(2x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$, suy ra $g(x)=g\left(\frac{x}{2}\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Áp dụng công thức này liên tiếp ta có

$$g(x)=g\left(\frac{x}{2}\right)=g\left(\frac{x}{2^2}\right)=\cdots=g\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

với mọi $n\in\mathbb{N}$. Cho $n\to+\infty$ và sử dụng tính liên tục của f ta được $g(x)=g(0)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Suy ra $f(x)=c-x$ với $c=g(0)$. Thay hàm số này vào phương trình ban đầu ta tìm được $c=0$. Do đó $f(x)\equiv -x$ là hàm số duy nhất thỏa mãn bài toán.

Cách 2.

Chọn $y = -f(f(x))$ ta có $f(0)+x-f(f(x)) = 0$. Do đó $f(f(x)) = f(0)+x$. Thay biểu thức này vào phương trình đã cho ta được $f(y+f(0)+x)+x+y = 0$. Chọn $y = -f(0)$ ta được $f(x) + x - f(0) = 0$, nghĩa là $f(x) = c - x$ với $c = f(0)$. Thay hàm số này vào phương trình ban đầu ta tìm được $c = 0$. Do đó $f(x) \equiv -x$ là hàm số duy nhất thỏa mãn bài toán. Hiển nhiên hàm số này thỏa mãn câu a).

Câu 3. Đặt $f(x) = 3^x - x^3$, ta cần tìm a nhỏ nhất sao cho $f(x) > 0$ với mọi $x > a$. Vì $f(3) = 0$ nên ta phải có $a \geq 3$. Ta sẽ chứng minh rằng $a = 3$ thỏa bài toán, nghĩa là chứng minh rằng $f(x) > 0$ với mọi $x > 3$. Thật vậy,

$f'(x) = 3^x \ln 3 - 3x^2$,

$f''(x) = 3^x(\ln 3)^2 - 6x$,

$f'''(x) = 3^x(\ln 3)^3 - 6$.

Với $x > 3$ thì $f'''(x) > f'''(3) > 0$. Do đó f'' tăng trên $(3, +\infty)$, suy ra $f''(x) > f''(3) > 0$. Do đó f' tăng trên $(3, +\infty)$, suy ra $f'(x) > f'(3) > 0$. Do đó f tăng trên $(3, +\infty)$, suy ra $f(x) > f(3) = 0$.

Vậy $a = 3$ là giá trị nhỏ nhất thỏa mãn bài toán.

Câu 4. Gọi I là tích phân cần tính. Đổi biến $x = \frac{ab}{t}$ ta có

$$I = \int_b^a \frac{e^{b/t} - e^{t/a}}{ab} t \left(-\frac{ab}{t^2}\right) dt = \int_a^b \frac{e^{b/t} - e^{t/a}}{t} dt = -I.$$

Do đó $2I = 0$, suy ra $I = 0$.

Câu 5. Gọi r và h (cm) lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hộp sữa. Gọi p là giá $1cm^2$ vật liệu làm bề mặt xung quanh hộp.

Thể tích hộp sữa:

$$\pi r^2 h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}.$$

Chi phí vật liệu làm nên hộp sữa:

$$kp.2\pi r^2 + 2\pi rh.p = (kr^2 + rh)2\pi p = \left(kr^2 + \frac{1000}{\pi r}\right) 2\pi p.$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(r) = kr^2 + \frac{1000}{\pi r}$ trên $(0, +\infty)$. Ta có $f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{k\pi}}$, $f'(r) < 0$ với $r < \sqrt[3]{\frac{500}{k\pi}}$ và $f'(r) > 0$ với $r > \sqrt[3]{\frac{500}{k\pi}}$.

Do đó f nhỏ nhất khi $r = \sqrt[3]{\frac{500}{k\pi}}$, khi đó $h = \frac{1000}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{4000k^2}{\pi}}$, suy ra $\frac{h}{2r} = k$.

Vậy để tiết kiệm vật liệu nhất, công ty nên lựa chọn tỉ lệ chiều cao : đường kính đáy hộp bằng k.

www.mathvn.com

Chương 7

Đề thi cấp quốc gia bảng B môn giải tích

Trong chương này, chúng tôi liệt kê một số đề thi gần đây để bạn đọc tự luyện và nắm bắt được xu hướng ra đề. Nhìn chung, đề thi những năm gần đây có xu hướng giảm bớt tính kinh viện, tăng tính ứng dụng thực tiễn. Mỗi đề đều có một bài toán liên quan đến ứng dụng hoặc mô hình thực tế.

Về đáp án chi tiết, bạn đọc có thể tìm thấy trong các cuốn kỷ yếu của ban tổ chức cuộc thi [8].

www.mathvn.com

7.1 Đề thi năm 2016

Bài 1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = a, \quad u_{n+1} = u_n + (u_n - 2016)^2.$$

1. Tìm tất cả các giá trị thực của a để dãy số (u_n) hội tụ.
2. Tìm giới hạn của dãy số đó khi nó hội tụ.

Bài 2. Cho số thực α và hàm số $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ được xác định bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Chứng minh các khẳng định sau:

1. f liên tục nếu và chỉ nếu $\alpha > 0$.
2. f khả vi nếu và chỉ nếu $\alpha > 1$.
3. f khả vi liên tục nếu và chỉ nếu $\alpha > 2$.

Bài 3. Cho số thực $a \geq 1$ và hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

- $(f(ax))^2 \leq a^3x^2 f(x)$ với mọi số thực x,
- f bị chặn trên trong khoảng $(-1, 1)$.

Chứng minh rằng $f(x) \leq \frac{x^2}{a}$ với mọi số thực x.
Bài 4. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục hai lần và thỏa mãn điều kiện

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình $f''(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm.
Bài 5. Cho hàm số $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ được xác định bởi công thức

$$f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{dt}{\ln t}.$$

Hãy tìm tập tất cả các giá trị của f.

www.mathvn.com

7.2 Đề thi năm 2017

Bài 1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - 1.$$

1. Chứng minh rằng $-1 < u_n < 0$ với mọi $n \geq 2$.

2. Chứng minh rằng dãy số (u_n) hội tụ đến $1 - \sqrt{3}$.

Bài 2. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \leq 0, \\ a^x + x^a & \text{nếu } x > 0, \end{cases}$$

trong đó $a > 0$ là một hằng số thực. Chứng minh rằng

1. f là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

2. f không khả vi tại 0.

Bài 3. Tính tích phân

$$\int_0^3 \sqrt{2 + \sqrt{1 + x}}dx.$$

Bài 4. Theo các nhà điểu cầm học, khi bay ngang qua mặt nước, chim phải tiêu tốn nhiều năng lượng hơn so với khi bay ngang qua đất liền, và theo bản năng, chim luôn chọn đường bay ít tốn năng lượng nhất.

Một con chim cất cánh từ đảo A cách bờ biển 4 km. Hãy xem A như là một điểm, bờ biển là một đường thẳng và gọi B là hình chiếu vuông góc của A lên bờ biển. Quan sát cho thấy, trước tiên chim bay đến một điểm C trên bờ biển, sau đó mới bay đến tổ D của nó. Cho biết tổ chim cũng nằm trên bờ biển và cách B 12 km. Đặt $r = \frac{W}{L}$, trong đó W và L lần lượt là năng lượng tiêu tốn mỗi km bay khi chim bay trên mặt nước và khi chim bay dọc bờ biển.

1. Hãy xác định vị trí của C nếu $r = \sqrt{2}$.

2. Giả sử $BC = 3$ km. Tính r.

3. Vị trí của C thay đổi như thế nào khi r biến thiên trong khoảng $(1, \infty)$.

Bài 5. Cho số thực $\alpha \geq 1$. Chứng minh rằng tồn tại số thực $C > 0$ sao cho với mọi số thực $x > 0$ ta đều có

$$|(1 + x)^\alpha - 1 - \alpha x| \leq Cx^{\min\{2,\alpha\}} + Cx^\alpha.$$

Kết luận trên còn đúng không khi $0 < \alpha < 1$.

www.mathvn.com

7.3 Đề thi năm 2018

Bài 1. Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = 2019, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2018}x_n^2 + \frac{2017}{2018}x_n.$$

1. Chứng minh rằng (x_n) là một dãy số tăng ngặt và không bị chặn trên.
2. Chứng minh rằng
$$\frac{x_n}{x_{n+1}-1} = 2018\left(\frac{1}{x_n-1} - \frac{1}{x_{n+1}-1}\right).$$
3. Tìm
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1}{x_2-1} + \frac{x_2}{x_3-1} + \cdots + \frac{x_n}{x_{n+1}-1}\right).$$

Bài 2. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

1. Tính $f'(x)$ tại $x \neq 0$.
2. Tính $f'(0)$.
3. Hàm số f có đạo hàm cấp 2 tại $x = 0$ hay không?

Bài 3. Cho hàm số $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục sao cho

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx.$$

Chứng minh rằng tồn tại số thực $c \in (0,1)$ sao cho

$$f(c) = 2018\int_0^c f(x)dx.$$

Bài 4. Một quan sát viên C đứng cách đường đua Ot một khoảng $OC = 1$ km ($OC \perp Ot$). hai vận động viên A, B cùng xuất phát tại O và chạy cùng lúc trên đường đua theo cùng hướng Ot. Góc $\theta = \angle(CA, CB)$ được gọi là góc nhìn từ C đến 2 vận động viên. Giả sử B luôn chạy nhanh gấp 4 lần A.

1. Tính $\tan\theta$ theo $x = OA$.

www.mathvn.com

2. Xác định vị trí của 2 vận động viên trên đường đua để góc nhìn θ từ C đến họ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 5. Cho $f : [0, +\infty)$ là một hàm số khả vi, với f' dương và liên tục, sao cho

$$f(0) = 0 \quad \text{và} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f'(x)(1 + x^2 + f(x))} = +\infty.$$

1. Chứng minh rằng hàm số f bị chặn trên.

2. Hãy tìm ví dụ về một hàm số $g : [0, +\infty)$ khả vi và bị chặn trên, với g' dương và liên tục, $g(0) = 0$, sao cho giới hạn

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{g'(x)(1 + x^2 + g(x))}$$

tồn tại và hữu hạn.

3. Hãy tìm ví dụ về một hàm số f thỏa mãn tất cả điều kiện của đề bài.

www.mathvn.com

7.4 Đề thi năm 2019

Bài 1. Cho (x_n) là dãy số được xác định bởi các điều kiện

$$x_1 = 2019, \quad x_{n+1} = \ln(1 + x_n) - \frac{2x_n}{2 + x_n} \quad \forall n \geq 1.$$

1. Chứng minh rằng (x_n) là một dãy số không âm.
2. Chứng minh rằng tồn tại số thực $c \in (0, 1)$ sao cho
$$|x_{n+1} - x_n| \leq c|x_n - x_{n-1}| \quad \forall n \geq 2.$$
3. Chứng minh rằng (x_n) có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó.

Bài 2. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1 + x^2)\cos\frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

1. Tính $f'(x)$ tại $x \neq 0$.
2. Tính $f'(0)$.
3. Xét tính liên tục của hàm số f' tại điểm $x = 0$.

Bài 3. Một doanh nghiệp sản xuất ô-tô có hàm sản xuất

$$Q = K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}},$$

với K và L lần lượt là số đơn vị vốn tư bản và số đơn vị lao động mà doanh nghiệp thuê được, còn Q ký hiệu số ô-tô sản xuất ra được. Cho biết giá thuê một đơn vị vốn tư bản là $w_K = 8$, giá thuê một đơn vị lao động là $w_L = 4$ và chi phí cố định là $C_0 = 100$. Năm 2019 doanh nghiệp dự định sản xuất 2000 chiếc ô-tô. Để chi phí sản xuất là thấp nhất, doanh nghiệp cần thuê bao nhiêu đơn vị vốn tư bản và bao nhiêu đơn vị lao động?

Bài 4. Cho f là một hàm số khả vi liên tục trên $[0, 1]$ và có $f(1) = 0$.

1. Chứng minh rằng
$$\int_0^1 |f(x)|dx \leq \int_0^1 x|f'(x)|dx.$$

www.mathvn.com

2. Tìm ví dụ về một hàm số f khả vi liên tục trên $[0,1]$ và có $f(1)=0$, sao cho
$$\int_0^1 |f(x)|dx < \int_0^1 x|f'(x)|dx.$$

Bài 5. Cho $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ là một hàm số liên tục và đơn điệu không tăng.

1. Giả sử tồn tại giới hạn
$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\int_0^x f(t)dt\right) < +\infty.$$
Chứng minh rằng
$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)=0.$$

2. Tìm ví dụ về một hàm số $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ liên tục và đơn điệu không tăng, sao cho
$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\int_0^x f(t)dt\right) < +\infty \quad \text{và} \quad \lim_{x\to+\infty} xf(x)=0.$$

www.mathvn.com

www.mathvn.com

Tài liệu tham khảo

[1] Lê Sĩ Đồng (chủ biên), *Toán cao cấp – Giải tích*, NXB Giáo Dục, 2007.

[2] Trần Lưu Cường (chủ biên), *Toán Olympic cho sinh viên - Tập 1*, NXB Giáo Dục, 2002.

[3] Trần Lưu Cường (chủ biên), *Toán Olympic cho sinh viên - Tập 2*, NXB Giáo Dục, 2002.

[4] Tô Văn Ban, *Những bài toán giải tích chọn lọc*, NXB Quân Đội Nhân Dân Hà Nội, 2005.

[5] W. J. Kaczkor, M. T. Nowak, *Problems in Mathematical Analysis I, Real Numbers, Sequences and Series*, AMS, 2000.

[6] W. J. Kaczkor, M. T. Nowak, *Problems in Mathematical Analysis II, Continuity and Differentiation*, AMS, 2001.

[7] Văn Phú Quốc, *Bài tập giải tích*, lưu hành nội bộ.

[8] Ban tổ chức, *Kỷ yếu kì thi Olympic Toán sinh viên (2013-2018)*, https://www.vms.org.vn/.