④ Dãy phân tuyến tính

Dạng $x_{n+1} = \dfrac{a x_n + b}{c \cdot x_n + d}$ (1) (a, b, c, d - hằng số)

* Nếu dãy hội tụ đến L thì L phải là nghiệm của pt $L = \dfrac{aL+b}{c.L+d}$ (2)

$\Leftrightarrow \quad c.L^2 + (d-a)L - b = 0$ (3)

$\Delta = (d-a)^2 + 4bc$

•) Nếu $\Delta < 0 \rightarrow$ dãy phân kỳ

•) Nếu $\Delta = 0$ thì (2) có nghiệm kép λ. Đặt $X_n = \dfrac{1}{x_n - \lambda}$ thì $\{X_n\}$ là cấp số cộng.

•) Nếu $\Delta > 0$ thì (2) có 2 nghiệm phân biệt α, β.

+) Nếu $x_1 = \alpha \rightarrow x_n = \alpha \ \forall n$ (dãy hằng $\rightarrow$ hội tụ về α)

+) Nếu $x_1 \neq \alpha$ thì đặt $X_n = \dfrac{x_n - \beta}{x_n - \alpha}$ được $X_{n+1} = \lambda X_n$

$\Rightarrow \{X_n\}$ là cấp số nhân

VD 1 Tìm số hạng TQ, từ đó tính gh (nếu có) của dãy:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2x_n + 1} \end{cases}$$

Giải: Nếu dãy có g.h L thì L sẽ là nghiệm của pt:

$L = \dfrac{L}{2L+1} \Leftrightarrow 2L^2 = 0 \Leftrightarrow L = 0$ (nghiệm kép)

Đặt $X_n = \dfrac{1}{x_n + 0} = \dfrac{1}{x_n}$ ta được:

$X_n = X_1 + d(n-1)$

$X_n = X_1 \cdot q^{n-1}$

$X_{n+1} = \dfrac{1}{x_{n+1}} = \dfrac{2x_n + 1}{x_n} = 2 + \dfrac{1}{x_n} = 2 + X_n$

$\Rightarrow \{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ là cấp số cộng công sai 2 và $X_1 = \dfrac{1}{x_1} = 1$

$\Rightarrow X_n = 1 + 2(n-1)$

$\Rightarrow x_n = \dfrac{1}{X_n} = \dfrac{1}{1+2(n-1)} \quad \forall n \geq 1.$

$\Rightarrow \lim x_n = \lim \dfrac{1}{1+2(n-1)} = 0$

VD2: Cho dãy $\{U_n\}$ xđ bởi:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_n = \dfrac{-1}{3+U_{n-1}} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

CMR dãy có g.h và tìm g.h

Xét pt: $L = \dfrac{-1}{3+L} \Leftrightarrow L^2 + 3L + 1 = 0$

$\Leftrightarrow L = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ (α, β) $(\neq U_0)$ $\begin{cases} \alpha = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ \beta = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

$u_n - \alpha = X_n(u_n - \beta)$

$u_n(1 - X_n) = -X_n \cdot \beta + \alpha$

$u_n = \dfrac{-\beta X_n + \alpha}{1 - X_n}$

Đặt $X_n = \dfrac{U_n - \alpha}{U_n - \beta}$ (*) ta đc. $X_0 = \dfrac{1-\alpha}{1-\beta}$

$$X_{n+1} = \frac{U_{n+1} - \alpha}{U_{n+1} - \beta} = \frac{\frac{-1}{3+U_n} - \alpha}{\frac{-1}{3+U_n} - \beta} = \frac{-1 - \alpha(3+U_n)}{-1 - \beta(3+U_n)} = \frac{-(1+3\alpha) - \alpha U_n}{-(1+3\beta) - \beta U_n}$$

$$= \frac{-\overbrace{(1+3\alpha+\alpha^2)}^{0} + \alpha^2 - \alpha U_n}{-\underbrace{(1+3\beta+\beta^2)}_{0} + \beta^2 - \beta U_n} = \frac{\alpha(\alpha - U_n)}{\beta(\beta - U_n)} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \overbrace{\frac{U_n - \alpha}{U_n - \beta}}^{X_n}$$

$X_{n+1} = \dfrac{\alpha}{\beta} \cdot X_n \Rightarrow \{X_n\}$ là cấp số nhân công bội $\dfrac{\alpha}{\beta}$

$\Rightarrow X_n = \boxed{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n} \cdot X_0 =$

Mặt khác: $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \left|\dfrac{-3+\sqrt{5}}{-3-\sqrt{5}}\right| < 1 \Rightarrow \lim \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n = 0.$

Suy ra $\lim X_n = 0$

$\lim U_n = \lim \dfrac{\beta X_n - \alpha}{X_n - 1} = \alpha = \dfrac{\sqrt{5} - 3}{2}$

VD3. Cho $a_1 > 0$ $a_{n+1} = \frac{6a_n+4}{a_n+3}$ a) CMR dãy hty.
b) Tìm g-h của dãy.

Nháp

Xét pt: $L = \frac{6L+4}{L+3}$ $\Leftrightarrow L^2+3L = 6L+4$ $(L \neq -3)$

$\Leftrightarrow L^2-3L-4=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} L=-1 \\ L=4 \end{array}\right.$

Vì $a_1 > 0 \xRightarrow{\text{Quy nạp}} a_n > 0 \ \forall n$

$\rightarrow \lim a_n \geq 0$ (nếu có $\lim a_n$)

$\rightarrow$ loại $L=-1$.

*) TH1 Nếu $a_1 = 4$

$a_2 = \frac{6.4+4}{4+3} = 4$

$\xRightarrow{\text{Quy nạp}}$ Cm được $a_n = 4 \ \forall n$.

$\Rightarrow \{a_n\}$ là dãy hằng và $\lim a_n = 4$

*) TH2 Nếu $a_1 \neq 4$. Đặt $x_n = \frac{a_n+1}{a_n-4}$

$$x_{n+1} = \frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-4}$$

$$= \frac{\frac{6a_n+4}{a_n+3}+1}{\frac{6a_n+4}{a_n+3}-4} = \frac{7a_n+7}{2a_n-8} = \frac{7}{2}\cdot\frac{a_n+1}{a_n-4} = \frac{7}{2}x_n$$

$\Rightarrow \{x_n\}$ là cấp số nhân công bội $\frac{7}{2}$

$\Rightarrow x_n = \left(\frac{7}{2}\right)^{n-1}\cdot x_1 \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$

Mặt khác: $x_n = \frac{a_n+1}{a_n-4}$ $\rightarrow x_n(a_n-4) = a_n+1$

$\rightarrow a_n(x_n-1) = 4x_n+1$

$\Rightarrow a_n = \frac{4x_n+1}{x_n-1} = \frac{4\left(\frac{7}{2}\right)^{n-1}\cdot x_1+1}{\left(\frac{7}{2}\right)^{n-1}\cdot x_1-1}$

$$\lim a_n = \lim\frac{4x_n+1}{x_n-1} = \lim\frac{4+\frac{1}{x_n}}{1-\frac{1}{x_n}} = 4$$

Bài tập:

1) Cho $\begin{cases} a_1 = -4 \\ a_{n+1} = \dfrac{2(2a_n+1)}{a_n+3} \quad n \geq 1 \end{cases}$. Tìm $\lim a_n$.

2) Cho $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n+1}{u_n+3} \quad n \geq 1 \end{cases}$ Tìm số hạng TQ của $\{u_n\}$

3) Cho $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = \dfrac{43a_n - 425}{a_n+1}, \quad n \geq 1 \end{cases}$

a) Tìm a để dãy $\{a_n\}$ là dãy hằng số

b) Tìm a để dãy $\{a_n\}$ htụ.

4) Cho $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2017u_n + 2015}{2015u_n + 2017}, \quad n \geq 1 \end{cases}$

a) Tìm số hạng TQ của $\{u_n\}$.

b) Tính g.h (nếu có) của $\{u_n\}$

(*) Một số kiến thức cơ bản cần nhớ:

☆ 1, Dãy tăng: $u_{n+1} > u_n$.
2, Dãy giảm $u_{n+1} < u_n$
3, Dãy bị chặn trên $u_n \le M$ ∀n
4) ______ dưới $u_n \geq m$ ∀n
5, ______ $m \le u_n \le M$ ∀n ⟺ $|u_n| \le A$ ∀n.

☆ Một số nguyên lí tồn tại g.h
1) Tiêu chuẩn Weierstrass (dãy đơn điệu bị chặn)
•) Dãy tăng + b/c trên, → ht
•) Dãy giảm + b/c dưới → ht
•) Dãy đơn điệu + b/c → ht

•) Các cách cm dãy đơn điệu
(1) Xét hiệu $u_{n+1} - u_n$
•) Xét thương $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ($u_n > 0$)
•) Nếu $u_n = f(n)$ (Có CT tổng quát)
thì xét f'
- $f' > 0$ → $u_{n+1} = f(n+1) > f(n) = u_n$ → dãy tăng
- $f' < 0$ → dãy giảm

2) Nguyên lí kẹp. Nếu có 3 dãy $\{x_n\}$; $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ t/m:
$x_n \le y_n \le z_n$ ∀n ≥ n_0.
Khi đó, nếu $\lim x_n = \lim z_n = L$ thì $\lim y_n = L$

☆ $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$

☆ Dãy truy hồi $u_{n+1} = f(u_n)$ trong đó f là hàm ltục
•) Nếu $\lim u_n = L$ thì L phải là n₀ của pt: $f(x) = x$
•) Nếu f là hàm đồng biến ($f' > 0$) thì:
$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$ dấu phụ ∈ $u_n - u_{n-1}$

$u_n - u_{n-1} = f(u_{n-1}) - f(u_{n-2})$ dấu phụ ∈ $u_{n-1} - u_{n-2}$

..... cùng dấu $u_1 - u_0$.
→ dãy $\{u_n\}$ có chiều biến thiên phụ ∈ vào u_1 và u_0
- Nếu $u_1 - u_0 > 0$ ($u_1 > u_0$) → dãy $\{u_n\}$ là dãy tăng
- Nếu $u_1 - u_0 < 0$ → $\{u_n\}$ là dãy giảm

•) Nếu f là hàm nghịch biến ($f'<0$) thì $f\circ f$ đồng biến

$$u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f\circ f(u_{2n})$$

$$u_{2n+1} = f\circ f(u_{2n-1})$$

$\Big\} \to$ Hai dãy con $\{u_{2k}\}$ và $\{u_{2k+1}\}$ biến thiên ngc chiều nhau

- Nếu $u_0 < u_2$ thì $\{u_{2k}\}$ dãy tăng, $\{u_{2k+1}\}$ là dãy giảm
- Nếu $u_0 > u_2$ thì ______ giảm ______ tăng.

☆ f là ánh xạ co ($|f'| \leq c < 1$) $\boxed{f(x) = x \text{ có n}_0\text{!}}$

Khi đó $\{u_n\}$ sẽ hội tụ đến đ bất động ($f(x)=x$) duy nhất của f

thật vậy:

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \xrightarrow[\text{Lagrange}]{\text{đlí}} |f'(\varepsilon)(u_n - \ell)| \leq c\,|u_n - \ell|$$

$$\leq \dots \leq c^n\,|u_1 - \ell| \to 0$$

$\Rightarrow \{u_n\}$ có g-h là ℓ (là n₀ của pt $f(x) = x$)

<u>VD1</u>. Cho dãy $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2+1} \end{cases}$

a) CMR dãy đơn điệu

b) Cm dãy có g-h, Tìm g-h đó

<u>Giải</u>: Xét hiệu:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{u_n^2+1} - u_n = \frac{-u_n^3}{u_n^2+1}$$

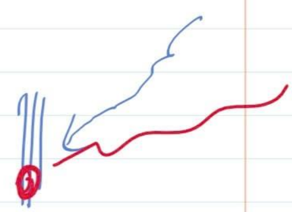
($\to$ dấu phụ thuộc vào dấu u_n)

⊕ Nhận thấy $\boxed{u_n > 0 \ \forall n}$ ⊛ (C/m bằng quy nạp) (1)

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^3}{u_n^2+1} < 0 \quad \forall n$$

$\Rightarrow \{u_n\}$ là dãy đơn điệu giảm (2)

$\{u_n\}$ bị chặn dưới



Từ (1) và (2) suy ra dãy có giới hạn $\lim u_n = \ell$ (hữu hạn)

ℓ phải t/m: $\ell = \dfrac{\ell}{\ell^2+1} \Leftrightarrow \ell^3 + \ell = \ell \Leftrightarrow \ell = 0$.

VD2: Cho dãy $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{2021}{u_{n-1}}\right) & \forall n \geq 2. \end{cases}$ CMR dãy có g.h và tìm g.h đó.

$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2021}{\ell}\right)$

Giải. $u_n = f(u_{n-1})$ $\quad f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2021}{x}\right)$

Xét hiệu $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{2021}{u_{n-1}}\right) - u_{n-1}$

$= \frac{-1}{2} u_{n-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2021}{u_{n-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2021 - u_{n-1}^2}{u_{n-1}}$

•) Quy nạp chm được $u_n > 0 \quad \forall n$

•) $u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{2021}{u_{n-1}}\right) \geq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{u_{n-1} \cdot \frac{2021}{u_{n-1}}} = \sqrt{2021}$ //

$\Rightarrow u_n^2 \geq 2021 \quad \forall n$

Vậy $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2021 - u_{n-1}^2}{u_{n-1}} < 0 \quad \forall n \geq 2$

$\rightarrow \{u_n\}$ là dãy giảm

Mà $\{u_n\}$ b/c dưới bởi $\sqrt{2021}$ $\Big\} \Rightarrow \{u_n\}$ có giới hạn

*) Tìm g.h bằng giải pt: $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2021}{\ell}\right)$

$\Rightarrow \boxed{\ell = \sqrt{2021}}$

VD3: Cho $a > 0$ và dãy $\{x_n\}$ xđ bởi:

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_{n+1} = a + x_n^2 & (n \geq 1) \end{cases}$ Tìm a để dãy htụ, tìm g.h (nếu có)

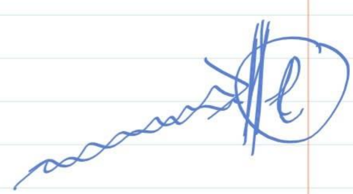
$x_{n+1} = f(x_n) \quad f$

Giải: $x_n > 0 \quad \forall n > 1$

Xét hàm $f(x) = a + x^2 \quad \rightarrow f'(x) \rightarrow$ $\boxed{f \text{ là hàm đồng biến}}$.

$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = a + 0 > 0 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{x_2 > x_1} \rightarrow$

$\Rightarrow x_3 = f(x_2) > x_2 = f(x_1)$



G/s $x_k > x_{k-1}$

$\Rightarrow x_{k+1} = f(x_k) > f(x_{k-1}) = x_k$

$\Rightarrow$ Theo giả thiết quy nạp thì $x_n > x_{n-1} \quad \forall n \cdot \Rightarrow \{x_n\}$ là dãy tăng.

Nếu $\{x_n\}$ có giới hạn L thì L thoả mãn $\boxed{x_{n+1} = a + x_n^2}$

$$L = a + L^2 \Leftrightarrow L^2 - L + a = 0 \ (*)$$

$$\Delta = 1 - 4a$$

•) Nếu $a > \frac{1}{4} \to \Delta < 0 \to (*)$ vô nghiệm $\Rightarrow \{x_n\}$ o htụ ($\lim x_n = +\infty$)

•) Nếu $a = \frac{1}{4}$ thì thay vào (*) giải đc $L = \frac{1}{2}$, ta c/m dãy $\{x_n\}$ bị chặn trên bởi $\frac{1}{2}$.

Ta có $x_1 = 0 < \frac{1}{2}$.

$$x_2 = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}.$$

G/s $x_n < \frac{1}{2}$. Ta c/m $x_{n+1} < \frac{1}{2}$. Thật vậy

$$x_{n+1} = \frac{1}{4} + x_n^2 < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Theo giả thiết quy nạp suy ra $x_n < \frac{1}{2} \ \forall n$.

<u>KL</u> Dãy có g. hạn bằng $\frac{1}{2}$.

•) Nếu $a < \frac{1}{4}$ thì pt (*) có 2n₀ $L = \frac{1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

Ta c/m $x_n < \frac{1 + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2}$.

Thật vậy $x_1 = 0 < \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2}$

G/sử $x_n < \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2}$. Ta cần c/m $x_{n+1} < \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2}$.

Thật vậy $x_{n+1} = a + x_n^2 < a + \left(\frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2}\right)^2$

$$= a + \frac{1 + 1 - 4a + 2\sqrt{1-4a}}{4} = \frac{4a + 2 - 4a + 2\sqrt{1-4a}}{4}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2}$$

$\Rightarrow x_{n+1} < \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2}$. Theo gt quy nạp suy ra $x_n < \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2} \ \forall n$

$\Rightarrow \{x_n\}$ bị chặn trên $\to \{x_n\}$ có g-h

VD4 $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_n = \sqrt{6+u_{n-1}} \quad (n \geq 2) \end{cases}$ CMR dãy có g-h, Tìm g-h đó.

$u_2 = \sqrt{6+u_1}$

Giải. •) $u_n > 0 \quad \forall n \geq 2$

•) $u_n - u_{n-1} = \sqrt{6+u_{n-1}} - u_{n-1}$ → có chứa căn khó đánh giá → làm mất căn

Xét $u_n^2 - u_{n-1}^2 = (u_n - u_{n-1})(\underbrace{u_n + u_{n-1}})$

⇒ dấu của $u_n - u_{n-1}$ cùng với dấu của $u_n^2 - u_{n-1}^2$

⇒ Xét $u_n^2 - u_{n-1}^2 = 6 + u_{n-1} - u_{n-1}^2 = \underbrace{(2+u_{n-1})}_{>0}\underbrace{(3-u_{n-1})}_{(*)}$

⇒ dấu của $u_n^2 - u_{n-1}^2$ phụ ∈ vào $3 - u_{n-1}$

⇒ Xem xét xem u_{n-1} lớn hơn hay nhỏ hơn 3

•) $u_1 = 0 < 3$

•) $u_2 = \sqrt{6+u_1} < \sqrt{6+3} = 3$

•) $u_3 = \sqrt{6+u_2} < \sqrt{6+3} = 3$

Quy nạp ta được $u_n < 3 \ \forall n$ → $3 - u_{n-1} > 0$ thay vào

(*) suy ra $u_n^2 - u_{n-1}^2 > 0$ → $u_n - u_{n-1} > 0$

→ $\{u_n\}$ là dãy tăng và bị chặn

trên bởi 3 → ∃ g-h là no của pt:

$x = -2$ (loại)

$x = \sqrt{6+x} \Leftrightarrow x^2 = 6 + x \Leftrightarrow \boxed{x = 3}$

C2

$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_n = \sqrt{6+u_{n-1}} \end{cases}$ $u_n = f(u_{n-1})$ NXét $u_n > 0 \ \forall n$

$f(x) = \sqrt{6+x}$

→ $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{6+x}} > 0 \ (\forall x > 0)$

→ f đồng biến.

$u_1 = 0$

$u_2 = \sqrt{6+0} = \sqrt{6}$ → $u_2 > u_1$ } ⇒ dãy $\{u_n\}$ là dãy tăng

(c)

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_n = \sqrt{6 + u_{n-1}} \end{cases} \qquad u_n = f(u_{n-1}) \qquad \underline{\text{NXét}}\ u_n > 0\ \forall n$$

$$f(x) = \sqrt{6+x}$$

$$\to f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{6+x}} > 0 \quad (\forall x > 0)$$

$\Rightarrow f$ đồng biến.

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = 0 \\ u_2 = \sqrt{6+0} = \sqrt{6} \end{array} \right| \to u_2 > u_1 \quad \Bigg\} \Rightarrow \text{dãy } \{u_n\} \text{ là dãy tăng}$$

* Ta cm $\{u_n\}$ bị chặn. (bởi mấy ???)

*) Nếu dãy có giới hạn l thì l phải t/m:

$$l = \sqrt{6+l} \Leftrightarrow l^2 = 6 + l \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} l = -2 < 0 \text{ loại} \\ l = 3 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ dự đoán $\{u_n\}$ bị chặn bởi 3.

<u>Cm</u>: $u_1 = 0 < 3$

$u_2 = \sqrt{6 + u_1} < \sqrt{6+3} = 3$

gs $u_n < 3$ ta cm $u_{n+1} < 3$ thật vậy

$u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n} < \sqrt{6+3} = 3$. đúng.

Vậy theo gt quy nạp thì $u_n < 3\ \forall n \Rightarrow \{u_n\}$ bị chặn bởi 3

<u>Btập</u>:

1) $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^+ \\ u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n^2 + 8) \end{cases}$ Tìm đk của u_0 để dãy $\{u_n\}$ htụ. Tìm g.h (nếu có)

2) $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{u_n}} \end{cases}$ <u>CMR</u> dãy có g.h. Tìm g.h đó.

3) $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 \end{cases}$ Tìm a để dãy có g.h. Tìm g.h khi dãy htụ

$u_n \to \infty$ 4) Cho $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + u_n^5 \\ u_1 = a \end{cases}$ a) CMR dãy $\{u_n\}$ tăng ngặt nếu $a > 0$, giảm ngặt nếu $a < 0$.

b) $a \neq 0$. Tính $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{u_{n+1} - u_n^3}{u_n}} - u_n^2 + 2\right)$