Chuyên đề 1

Dãy số và Chuỗi số

1. *Bài 1, trang 31.* Chứng tỏ rằng dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, với $a_n = \dfrac{n}{2^n}, n > 1$, giảm thực sự và tìm giới hạn của nó.

   Solution. Ta có $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{2^{n+1}} = \dfrac{n+1}{2n} \cdot \dfrac{n}{2^n} = \dfrac{n+1}{2n}.a_n,\ n > 1.$

   Vậy $\{a_n\}$ giảm thực sự. Mặt khác, $\{a_n\}$ bị chặn dưới bởi 0. Do đó tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$. Từ đẳng thức $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} \cdot a_n$ ta suy ra $g = \dfrac{1}{2}g$. Vậy $g = 0$.

2. *Bài 2, trang 31.* Chứng minh sự hội tụ của các dãy:

$$1)\quad a_n = -2\sqrt{n} + \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$2)\quad b_n = -2\sqrt{n+1} + \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

   Hint. First establish the inequalities

$$2(\sqrt{n+1} - 1) < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n},\ n \in \mathbb{N}.$$

   Solution. Bằng quy nạp ta chứng minh được bất đẳng thức

$$2(\sqrt{n+1} - 1) < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n},\ n \in \mathbb{N}.$$

   1) Ta có

$$a_{n+1} - a_n = ...? = \frac{-1}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)^2} < 0,\ n \in \mathbb{N}$$

   như thế $\{a_n\}$ đơn điệu giảm.

   Mặt khác, từ bất đẳng thức trên ta có $a_n > 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 1) > -2$, tức là $\{a_n\}$ bị chặn dưới. Vậy $\{a_n\}$ hội tụ.

   2) Làm tương tự phần 1).

3. *Bài 3, trang 31.* Giả sử rằng dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ thoả mãn điều kiện

$$0 < a_n < 1,\ a_n(1 - a_{n+1}) > \frac{1}{4} \quad \text{với} \quad n \in \mathbb{N}.$$

   Khẳng định sự hội tụ của dãy này và tìm giới hạn của nó.

Solution. Từ bất đẳng thức về trung bình cộng - trung bình nhân (AM-GM) và giả thiết ta có

$$\frac{a_n + (1 - a_{n+1})}{2} \geq \sqrt{a_n(1 - a_{n+1})} > \frac{1}{2}.$$

Suy ra $a_n - a_{n+1} > 0$, do đó dãy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm. Dãy này bị chặn dưới bởi 0, nên nó hội tụ tới g. Từ điều kiện $a_n(1 - a_{n+1}) > \frac{1}{4}$, suy ra $g(1-g) \geq \frac{1}{4}$. Bất đẳng thức này tương đương với bất đẳng thức $(2g-1)^2 \leq 0$, từ đó suy ra $g = \frac{1}{2}$.

4. *Bài 4, trang 31*. Khẳng định sự hội tụ và tìm giới hạn của dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ cho bởi

$$a_1 = 0,\ a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \quad \text{với} \quad n \geq 1.$$

Solution. Bằng quy nạp ta thấy rằng $0 \leq a_n < 3$ với $n \geq 1$.

Khi đó $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 6 + a_n - a_n^2 = (2 + a_n)(3 - a_n) > 0$, suy ra $a_{n+1} > a_n$, hay $\{a_n\}$ là dãy đơn điệu tăng. Dãy này bị chặn trên (bởi 3), nên nó hội tụ (tới $g \geq 0$).

Từ hệ thức $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$, ta được $g = \sqrt{6 + g}$, suy ra $g = 3$.

5. *Bài 6, trang 32*. Chứng tỏ rằng dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ cho bởi

$$a_1 = 0,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = \frac{1}{3}(1 + a_n + a_{n-1}^3) \quad \text{với} \quad n > 1,$$

hội tụ và xác định giới hạn của nó.

Solution. Ta sử dụng nguyên lý quy nạp sau:

Mệnh đề $M(n)$ đúng với mọi số tự nhiên n nếu hai điều kiện sau thoả mãn:

(i) *$M(1)$ đúng.*

(ii) *Nếu $M(k)$ đúng với $1 \leq k \leq n$, thì kéo theo $M(n+1)$ đúng.*

Từ đó ta dễ dàng có $0 \leq a_n \leq \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$ với $n \geq 1$.

Lại thấy rõ ràng là $a_2 = \frac{1}{2} > 0 = a_1$ và $a_3 = \frac{1}{3}(1 + a_2 + a_1^3) = \frac{1}{2} = a_2$.

Giả sử rằng $a_{n-1} \geq a_{n-2}$ và $a_n \geq a_{n-1}$, thì

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}(a_n - a_{n-1} + a_{n-1}^3 - a_{n-2}^3) \geq 0.$$

Vậy dãy $\{a_n\}$ đơn điệu không giảm. Dãy này bị chặn trên nên nó hội tụ.

Gọi giới hạn của dãy là g, ta suy ra $0 \leq g \leq \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$ và $g = \frac{1}{3}(1 + g + g^3)$, nên

$$\lim_{n \to \infty} a_n = g = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

6. *Bài 9, trang 32*. Khảo sát tính đơn điệu của dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ cho bởi

$$a_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}, n \geq 1$$

và xác định giới hạn của nó.

Solution. Ta có $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{(2n+3)!!} = \dfrac{n+1}{2n+3}.\dfrac{n!}{(2n+1)!!} = \dfrac{n+1}{2n+3}.a_n < a_n,\ n \geq 1.$

Như vậy dãy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm. Dãy này bị chặn dưới (bởi 0), nên hội tụ (tới g).

Ta suy ra $g = \dfrac{1}{2}g$, vậy $g = 0$.

7. *Bài 10, trang 32*. Xác định sự hội tụ hay phân kỳ của dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ cho bởi

$$a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, n \geq 1.$$

Solution. Ta có $a_{n+1} = \dfrac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!} = \dfrac{2n+2}{2n+3}.\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \dfrac{2n+2}{2n+3}.a_n < a_n,\ n \geq 1.$

Như vậy dãy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm. Dãy này bị chặn dưới (bởi 0), nên nó hội tụ.

8. *Bài 11, trang 32*. Chứng minh sự hội tụ của các dãy

$$1)\quad a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N},$$

$$2)\quad a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Solution. 1) Rõ ràng $\{a_n\}$ đơn điệu tăng. Nó bị chặn trên. Thực vậy,

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{n} < 2. \end{aligned}$$

2) Hiển nhiên $\{a_n\}$ đơn điệu tăng. Hơn nữa

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Theo 1) dãy này bị chặn trên. Vậy dãy hội tụ.

9. *Bài 12, trang 33*. Chứng minh sự hội tụ của dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ cho bởi

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)2n}}, n \in \mathbb{N}.$$

Solution. Với $n \geq 1$, ta có

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= -\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}} \\ &= \frac{-\sqrt{2(2n+1)} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{2n(n+1)(2n+1)}} < 0. \end{aligned}$$

Như vậy dãy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm. Dãy này bị chặn dưới (bởi 0), nên nó hội tụ.

10. *Bài 13, trang 33*. Với $p \in \mathbb{N}$, $a > 0$ và $a_1 > 0$, xác định dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ như sau

$$a_{n+1} = \frac{1}{p}\left[(p-1)a_n + \frac{a}{a_n^{p-1}}\right], n \in \mathbb{N}.$$

Tính $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Solution. Từ bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a_{n+1} \geq \sqrt[p]{a_n^{p-1}.\frac{a}{a_n^{p-1}}} = \sqrt[p]{a},\ n \geq 1.$$

Do đó

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{a_n}{p} + \frac{a}{pa_n^{p-1}} = \frac{a - a_n^p}{pa_n^{p-1}} \leq 0,\ n \geq 2.$$

Như vậy dãy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm, dãy này bị chặn dưới (bởi $\sqrt[p]{a}$) nên nó hội tụ và ta dễ dàng suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt[p]{a}$.

11. *Bài 14, trang 33*. Định nghĩa $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ bằng truy hồi bởi

$$a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{a_n}} \quad \text{với} \quad n \geq 1.$$

Chứng minh sự hội tụ của dãy này và tìm giới hạn của nó.

Solution. Dễ dàng thấy rằng $0 \leq a_n < 2$ với $n \geq 1$. Hơn nữa, rõ ràng $a_2 > a_1$ và nếu $a_n > a_{n-1}$ thì ta có

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = \sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}} > 0.$$

Như vậy dãy $\{a_n\}$ đơn điệu tăng. Dãy này bị chặn trên (bởi 2), do đó nó hội tụ tới g nào đó thoả mãn phương trình $g = \sqrt{2 + \sqrt{g}}$.

12. *Bài 15, trang 33*. Định nghĩa dãy truy hồi $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ như sau:

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{2(2a_n + 1)}{a_n + 3} \quad \text{với} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Khẳng định sự hội tụ của dãy này và tìm giới hạn của nó.

Solution. Chú ý rằng $a_{n+1} = 2\Big(2 - \dfrac{5}{a_n + 3}\Big),\ n \geq 1.$

Bằng phương pháp quy nạp ta có thể chỉ ra rằng $1 \leq a_n < 2$ với $n \geq 1$. Hơn nữa,

$$a_1 = 1 < \frac{3}{2} = a_2, \quad a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n + 1)(2 - a_n)}{a_n + 3} \geq 0.$$

Như vậy dãy $\{a_n\}$ đơn điệu tăng. Dãy này bị chặn trên (bởi 2), do đó nó hội tụ.

Dễ dàng suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

13. *Bài 16, trang 33*. Cho $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = \dfrac{3+2a_n}{3+a_n}, n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ tồn tại và tìm giá trị của nó.

Solution. Chú ý rằng $a_{n+1} = 2 - \dfrac{3}{3+a_n}$, $n \geq 1$.

Bằng phương pháp quy nạp ta có thể chỉ ra rằng $1 \leq a_n < 2$ với $n \geq 1$.

Xét hàm số đơn điệu tăng

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+3} \quad \text{(vì có} \quad f'(x) = \frac{3}{(x+3)^2} > 0), \ \forall x \neq -3$$

thì ta có $a_{n+1} = f(a_n)$ và rõ ràng $a_1 = 1 = f(0) < f(1) = \dfrac{5}{4} = f(a_1) = a_2$.

Suy ra (bằng quy nạp) dãy $\{a_n\}$ đơn điệu tăng. Dãy này bị chặn trên (bởi 2), nên hội tụ.

Dễ dàng suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$.

14. *Bài 17, trang 33*. Tìm tất cả $c > 0$ sao cho dãy truy hồi $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định như sau

$$a_1 = \frac{c}{2}, \ a_{n+1} = \frac{1}{2}(c + a_n^2) \quad \text{với} \quad n \in \mathbb{N}$$

hội tụ. Trong trường hợp hội tụ hãy tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Solution. Bằng quy nạp và sử dụng hàm số $f(x) = \frac{1}{2}(c + x^2)$ trên $[0, +\infty)$ có thể chỉ ra rằng dãy $\{a_n\}$ tăng thực sự.

Nếu $\{a_n\}$ bị chặn trên thì tồn tại số g thoả mãn $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, hay $g^2 - 2g + c = 0$.

Phương trình này có nghiệm thực khi và chỉ khi $c \leq 1$.

Giả sử rằng $0 < c \leq 1$ thì suy ra dãy $\{a_n\}$ bị chặn trên bởi $1 - \sqrt{1-c}$ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 - \sqrt{1-c}$.

Trường hợp $c > 1$ thì không tồn tại số g nói trên, suy ra $\{a_n\}$ không bị chặn trên, do đó nó phân kỳ về $+\infty$.

15. *Bài 22, trang 34*. Cho $a > 0$ cố định và định nghĩa dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ như sau

$$a_1 > 0 \quad \text{và} \quad a_{n+1} = a_n \cdot \frac{a_n^2 + 3a}{3a_n^2 + a} \quad \text{với } n \geq 1.$$

Tìm tất cả a_1 sao cho dãy trên hội tụ và tìm giới hạn của nó.

Solution. Chú ý rằng

$$a_{n+1} = a_n\left(1 - 2\frac{a_n^2 - a}{3a_n^2 + a}\right), \ n \geq 1$$

ta suy ra:

$$\begin{aligned}&\text{nếu}\quad a_n > \sqrt{a}\quad \text{thì}\quad a_n^2 - a > 0\quad \text{nên}\quad a_{n+1} < a_n,\\ &\text{nếu}\quad a_n < \sqrt{a}\quad \text{thì}\quad a_n^2 - a < 0\quad \text{nên}\quad a_{n+1} > a_n,\\ &\text{nếu}\quad a_n = \sqrt{a}\quad \text{thì}\quad a_n^2 - a = 0\quad \text{nên}\quad a_{n+1} = a_n.\end{aligned}$$

Ta nhận thấy rằng

$$a_{n+1} = a_n\frac{a_n^2 + 3a}{3a_n^2 + a} >=< \sqrt{a} \quad \Leftrightarrow \quad \left(a_n - \sqrt{a}\right)^3 >=< 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_n >=< \sqrt{a},$$

do đó ta có các kết luận:

nếu $0 < a_1 < \sqrt{a}$ thì $\{a_n\}$ là dãy tăng và bị chặn trên bởi $\sqrt{a}$,

nếu $a_1 > \sqrt{a}$ thì $\{a_n\}$ là dãy giảm và bị chặn dưới bởi $\sqrt{a}$,

nếu $a_1 = \sqrt{a}$ thì $\{a_n\}$ là dãy hằng số (bằng $\sqrt{a}$).

Trong mọi trường hợp trên dãy đều hội tụ tới $\sqrt{a}$.

16. *Bài 23, trang 34*. Cho dãy số dương $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ thỏa mãn

$$1 + a_{m+n} \leq (1 + a_m)(1 + a_n), \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Xác định dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ với $x_n = \sqrt[n]{1 + a_n}$.

Chứng minh rằng tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Solution. Ta đặt $y_n = \ln(1 + a_n)$ thì được dãy số dương $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ và có

$$x_n = \sqrt[n]{e^{y_n}} = \exp\{\frac{y_n}{n}\}.$$

Điều kiện đã cho của đề bài có thể viết thành

$$y_{m+n} \leq y_m + y_n \qquad (*), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Ta sẽ chứng tỏ tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{n} = \alpha > 0$. Từ đó $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \exp\{\alpha\} = e^{\alpha}$.

Thật vậy, gọi $\alpha = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \left\{\frac{y_n}{n}\right\} > 0$.

Với số dương nhỏ tùy ý $\varepsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên $n_1 = n_1(\varepsilon)$ sao cho

$$\alpha \leq \frac{y_{n_1}}{n_1} < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Bây giờ với $n \in \mathbb{N}$ mà $n \geq n_1$, ta có thể biểu diễn $n = n_1 q + r$, trong đó $q \in \mathbb{N}$ và $r \in \{0, 1, 2, ..., n_1 - 1\}$. Sử dụng điều kiện $(*)$ ta có

$$\begin{aligned}\alpha - \varepsilon < \alpha \leq \frac{y_n}{n} \leq \frac{y_{n_1 q} + y_r}{n} &\leq \frac{q y_{n_1} + r y_1}{n} = \frac{q y_{n_1}}{n_1 q + r} + \frac{r y_1}{n}\\ &\leq \frac{y_{n_1}}{n_1} + \frac{r y_1}{n} < \frac{y_{n_1}}{n_1} + \frac{n_1 y_1}{n} < \alpha + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n_1 y_1}{n}.\end{aligned}$$

Lấy $n_2 \in \mathbb{N}$ mà $n_2 > \dfrac{2n_1y_1}{\varepsilon}$, thì khi $n \geq n_2$ ta có $\dfrac{n_1y_1}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Đặt $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, ta suy ra khi $n \geq n_0$ thì

$$\alpha - \varepsilon < \frac{y_n}{n} < \alpha + \varepsilon \quad \text{hay là} \quad \left|\frac{y_n}{n} - \alpha\right| < \varepsilon.$$

Do đó theo định nghĩa giới hạn ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{n} = \alpha$.

17. *Bài 24, trang 35.* (OLP-2000). Cho trước $a \in \mathbb{R}$.

Xét dãy số thực $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ được xác định như sau

$$x_1 = b,\ x_{n+1} = x_n^2 + (1-2a)x_n + a^2,\ n \geq 1.$$

Xác định b để dãy $\{x_n\}$ hội tụ và tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ khi đó.

Solution. Ta có $x_{n+1} = (x_n - a)^2 + x_n \geq x_n$ với $n \geq 1$. Do đó $\{x_n\}$ đơn điệu không giảm. Hơn nữa, nếu $\{x_n\}$ hội tụ thì dễ dàng thấy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Do đó nếu $b > a$, thì dãy đã cho phân kỳ. Bởi vì nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, thì chọn $\varepsilon = b - a > 0$, phải tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - a| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$. Tức là $x_n - a < b - a$ hay $x_n < b$, $\forall n \geq n_0$, mâu thuẫn với tính đơn điệu không giảm của dãy $\{x_n\}$.

Trong trường hợp $a - 1 \leq b \leq a$, bằng quy nạp ta được $a - 1 \leq x_n \leq a$ với $n \geq 2$, do đó dãy hội tụ.

Cuối cùng, nếu $b < a - 1$, thì $b - a < -1 < 0$ và $b - a + 1 = b - (a-1) < 0$, nên $(b-a)(b-a+1) > 0$, hay $(b-a)^2 + b > a$, tức là $x_2 > a$, suy ra dãy phân kỳ.

18. *Bài 27, trang 35.* Cho $ab > 0$ và dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định như sau

$$x_1 = a,\ x_{n+1} = \frac{x_n^2}{b} + x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Đặt $S_n = \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \cdots + \dfrac{x_{n-1}}{x_n}$.

Chứng minh rằng tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ và tìm giới hạn đó.

Solution. Xét trường hợp $a > 0, b > 0$. Từ điều kiện đề bài ta có

$$0 < a = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots$$

Nếu x_n bị chặn trên thì tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l > 0$, đồng thời còn có

$$l = \frac{l^2}{b} + l \ \Rightarrow\ l = 0, \text{ mâu thuẫn với kết quả trên!}$$

Vậy x_n không bị chặn trên, hay $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Mặt khác, vẫn từ điều kiện đề bài ta có

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2}{b} \Leftrightarrow \frac{x_n}{x_{n+1}} = b(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}}),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Suy ra

$$S_n = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} = b(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_n}) = b(\frac{1}{a} - \frac{1}{x_n}).$$

Do đó dẫn đến $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{b}{a}$.

Trường hợp $a < 0, b < 0$ làm tương tự.

19. *Bài 36, trang 36*. Cho $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2a_n}$ với $n \geq 1$. Chứng tỏ rằng

$$n \leq a_n^2 < n + \sqrt[3]{n} \quad \text{và} \quad \lim_{n\to\infty}(a_n - \sqrt{n}) = 0.$$

Solution. +) Hiển nhiên $a_n > 0, \forall n \geq 1$ và ta có

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 1 + \frac{1}{4a_n^2} \quad \Rightarrow \quad a_{n+1}^2 > a_n^2 + 1.$$

Từ đây bằng quy nạp dễ dàng có $a_n^2 \geq n$.

Vẫn bằng quy nạp, ta chứng tỏ vế còn lại của bất đẳng thức. Rõ ràng đúng với $n = 1$. Giả sử đúng với n, tức là $a_n^2 < n + \sqrt[3]{n}$. Khi đó $a_{n+1}^2 < n + \sqrt[3]{n} + 1 + \frac{1}{4n}$, vì thế ta chỉ cần chứng tỏ $\sqrt[3]{n} + \frac{1}{4n} < \sqrt[3]{n+1}$ là được.

Thật vậy

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{n} + \frac{1}{4n} < \sqrt[3]{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4n} < \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)n} + \sqrt[3]{n^2} < 4n \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})^2} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} + 1 < 4\sqrt[3]{n}. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức sau cùng suy ra từ việc $1 + \frac{1}{n} < 2$ và $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1} < 4$.

+) Ta có

$$0 \leq a_n - \sqrt{n} < \sqrt{n + \sqrt[3]{n}} - \sqrt{n} = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n + \sqrt[3]{n}} + \sqrt{n}} < \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt[6]{n}} \searrow 0.$$

20. *Bài 37, trang 36*. Cho $a_1 > 0$ và $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n}$ với $n \geq 1$. Chứng tỏ rằng

1) $a_n \geq n$ với $n \geq 2$.

2) Dãy $\{\frac{a_n}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ và tìm giới hạn của nó.

Solution. 1) Quy nạp. Rõ ràng $a_2 = a_1 + \frac{1}{a_1} \geq 2$. Giả sử $a_n \geq n$, khi đó

$$a_{n+1} - (n+1) = a_n + \frac{n}{a_n} - (n+1) = \frac{(a_n - 1)(a_n - n)}{a_n} \geq 0$$

như thế $a_{n+1} \geq n + 1$.

2) Do kết quả trên, với $n \geq 2$ ta có $a_{n+1} = a_n + \dfrac{n}{a_n} \leq a_n + 1$. Từ đó dẫn tới $a_n \leq a_2 + n - 2$. Suy ra $1 \leq \dfrac{a_n}{n} \leq 1 + \dfrac{a_2 - 2}{n}$. Vậy được $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = 1$.

21. *Bài 44, trang 37*. Chứng tỏ rằng dãy sau hội tụ và tìm giới hạn của nó

$$\sqrt{7},\ \sqrt{7 - \sqrt{7}},\ \sqrt{7 - \sqrt{7 + \sqrt{7}}},\ \sqrt{7 - \sqrt{7 + \sqrt{7 - \sqrt{7}}}}, \ldots$$

Solution. Let x_n be the n-th number in the sequence.

We have $x_{n+2} = \sqrt{7 - \sqrt{7 + x_n}}$ and $1 < x_n < 3$, $x_n \neq 2$ for all $n \in \mathbb{N}$ (*why?*).

Hence if $x_n > 2$, then $x_{n+2} < 2$, and if $x_n < 2$, then $x_{n+2} > 2$. So if the sequence converges, its limit must be 2.

If $x_n = 2 + \varepsilon$, with $0 < \varepsilon < 1$, then $7 + x_n = 9 + \varepsilon < 9 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{36} = (3 + \frac{\varepsilon}{6})^2$, so $\sqrt{7 + x_n} < 3 + \frac{\varepsilon}{6}$ and $x_{n+2} = \sqrt{7 - \sqrt{7 + x_n}} > \sqrt{7 - (3 + \frac{\varepsilon}{6})} = \sqrt{4 - \frac{\varepsilon}{6}}$. But certainly $\frac{\varepsilon}{6} < \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon^2}{144}$, so $\sqrt{4 - \frac{\varepsilon}{6}} > 2 - \frac{\varepsilon}{12}$ and $2 - x_{n+2} < \frac{\varepsilon}{12} = \frac{1}{12}(x_n - 2)$.

Similarly, if $x_n = 2 - \varepsilon$, with $0 < \varepsilon < 1$, then $7 + x_n = 9 - \varepsilon > 9 - 2\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{9} = (3 - \frac{\varepsilon}{3})^2$, so $\sqrt{7 + x_n} > 3 - \frac{\varepsilon}{3}$ and $x_{n+2} = \sqrt{7 - \sqrt{7 + x_n}} < \sqrt{7 - (3 - \frac{\varepsilon}{3})} = \sqrt{4 + \frac{\varepsilon}{3}}$. But certainly $\frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon^2}{144}$, so $\sqrt{4 + \frac{\varepsilon}{3}} < 2 + \frac{\varepsilon}{12}$ and $x_{n+2} - 2 < \frac{\varepsilon}{12} = \frac{1}{12}(2 - x_n)$.

Thus $|x_{n+2} - 2| < \frac{1}{12}.|x_n - 2|$. So x_n converges to 2.

22. *Bài 45, trang 38*. Cho dãy số

$$x_n = \underbrace{\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \cdots + \sqrt[3]{6}}}}}_{n \text{ dấu căn}}$$

Hãy tính các giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} 6^n(2 - x_n)$.

Solution. Dễ dàng thấy rằng $x_n < x_{n+1}$ và $1 < x_n < 2$ với mọi $n \geq 1$.

Suy ra tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ và có thể thấy rằng $l = 2$. Khi đó

$$0 < 2 - x_n = \frac{8 - x_n^3}{4 + 2x_n + x_n^2} = \frac{2 - x_{n-1}}{4 + 2x_n + x_n^2} < \frac{1}{7}(2 - x_{n-1})$$

$$0 < 2 - x_n < \frac{1}{7}(2 - x_{n-1}) < \frac{1}{7^2}(2 - x_{n-2}) < \ldots < \frac{1}{7^{n-1}}(2 - x_1)$$

$$0 < 6^n(2 - x_n) < \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1} 6(2 - x_1) = \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1} 6(2 - \sqrt[3]{6}).$$

Vậy có $\lim\limits_{n\to\infty} 6^n(2 - x_n) = 0$.

23. *Bài 46, trang 38*. Cho dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ có tính chất:

các dãy con $\{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}, \{x_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}, \{x_{3n}\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ.

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ.

Solution. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = c$. Ta chứng tỏ $a = b = c$.

Thật vậy do $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = c$, nên $\lim\limits_{m\to\infty} x_{3(2m)} = c$ hay $\lim\limits_{m\to\infty} x_{6m} = c$, do đó $c = a$ và vẫn do $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = c$, nên $\lim\limits_{m\to\infty} x_{3(2m+1)} = c$ hay $\lim\limits_{m\to\infty} x_{2(3m+1)+1} = c$, do đó $c = b$.

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$, nên $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

24. *Bài 47, trang 38*. Cho các dãy số $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ và $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ thoả mãn các điều kiện sau

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0, \ \lim_{n\to\infty}(a_n^{2k+1} - b_n^{2k+1}) = 0,$$

với k là số nguyên không âm nào đó. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Solution. +) Trước tiên ta chứng minh bất đẳng thức

$$|t-1|^{2k+1} \le 2^{2k}|t^{2k+1} - 1|, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Thật vậy, khi $t = 1$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Với $t \neq 1$ xét hàm $f(t) = \dfrac{(t-1)^{2k+1}}{t^{2k+1} - 1}$, thì $f(t)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{(2k+1)(t-1)^{2k}(t^{2k+1}-1) - (2k+1)t^{2k}(t-1)^{2k+1}}{(t^{2k+1}-1)^2} \\ &= \frac{(2k+1)(t-1)^{2k}(t^{2k}-1)}{(t^{2k+1}-1)^2}. \end{aligned}$$

Như thế dấu của $f'(t)$ là dấu của $(t^{2k} - 1)$ với $t \neq 1$.

Ta thấy $f'(t) > 0$ khi $-\infty < t < -1$ hoặc $1 < t < +\infty$,

$$f'(t) < 0 \text{ khi } -1 < t < 1, \text{ còn } f'(-1) = 0 \text{ và } f(-1) = 2^{2k}.$$

Lại thấy

$$\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 1, \ \lim_{t\to 1} f(t) = \lim_{t\to 1}\frac{(t-1)^{2k+1}}{t^{2k+1}-1} = \lim_{t\to 1}\frac{(t-1)^{2k}}{t^{2k}} = 0.$$

Do đó suy ra

$$0 \le f(t) = \frac{(t-1)^{2k+1}}{t^{2k+1}-1} \le 2^{2k} \quad \Rightarrow \quad \frac{|t-1|^{2k+1}}{|t^{2k+1}-1|} \le 2^{2k}, \ \forall t \neq 1,$$

dẫn đến có bất đẳng thức cần phải chứng minh.

+) Tiếp theo ta chứng minh bất đẳng thức

$$|x-y|^{2k+1} \le 2^{2k}|x^{2k+1}-y^{2k+1}|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Thật vậy, khi $y = 0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Với $y \neq 0$, thì trong bất đẳng thức đã chứng minh ở trên ta chỉ việc đặt $t = \dfrac{x}{y}$ là suy ra bất đẳng thức cần phải chứng minh.

+) Bây giờ trở lại bài toán đã cho, ta coi $x = a_n,\ y = b_n$ thì được

$$0 \le |a_n - b_n|^{2k+1} \le 2^{2k}|a_n^{2k+1} - b_n^{2k+1}|,$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le |a_n - b_n| \le 2^{\frac{2k}{2k+1}}\left|a_n^{2k+1} - b_n^{2k+1}\right|^{\frac{1}{2k+1}}.$$

Cho $n \to \infty$ ta được $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. Kết hợp với giả thiết $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$ ta dẫn tới $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

25. *Bài 48, trang 38*. Cho số thực $\alpha \ge 0$ và dãy số $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ được xác định như sau

$$u_1 = 3,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{n^2}{\alpha + 4n^2}\sqrt{u_n^2 + 3},\ n \in \mathbb{N}.$$

1) Với $\alpha = 0$ chứng tỏ dãy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ và tìm giới hạn của nó.

2) Với mọi $\alpha \in [0, 1]$ chứng minh rằng dãy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ.

Solution. 1) Khi $a = 0$ ta có $u_1 = 3,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{u_n^2 + 3}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{x^2+3},\ x \ge 0$.

Ta thấy $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{4\sqrt{x^2+3}} > 0,\ \forall x \ge 0$, nên $f(x)$ là hàm tăng trên $[0, +\infty)$.

Lúc đó $u_1 = 3 > 0$ và $u_2 = f(u_1) = \frac{3+\sqrt{3}}{2} < 3 = u_1$. Suy ra $u_3 = f(u_2) < f(u_1) = u_2$.

Quy nạp, giả sử $u_k < u_{k-1}$ thì $u_{k+1} = f(u_k) < f(u_{k-1}) = u_k$.

Vậy dãy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ đơn điệu giảm. Hiển nhiên dãy này bị chặn dưới (bởi 0).

Do đó dãy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ. Gọi giới hạn của dãy này là g thì $g \ge 0$ và là nghiệm của phương trình $g = \dfrac{g}{2} + \dfrac{1}{4}\sqrt{g^2+3}$. Suy ra $g = 1$.

2) Khi $a \in [0, 1]$ ta thấy $\dfrac{n^2}{4n^2+1} \le \dfrac{n^2}{a+4n^2} \le \dfrac{1}{4}$.

Xét dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi $x_1 = 3,\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{n^2}{4n^2+1}\sqrt{x_n^2+3}$

và dãy $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi $y_1 = 3,\ y_{n+1} = \dfrac{y_n}{2} + \dfrac{1}{4}\sqrt{y_n^2+3}$.

Bằng quy nạp ta chứng tỏ được $x_n \le u_n \le y_n,\ \in \mathbb{N}$.

Theo phần trên ta đã có $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$. Ta sẽ chứng tỏ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Để làm điều này ta chứng minh $x_n \geq 1 - \frac{2}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ $(*)$

Hiển nhiên $(*)$ đúng với $n = 1, 2$. Giả sử quy nạp $(*)$ đúng với $n = k \geq 2$, ta chứng tỏ $(*)$ đúng với $n = k + 1$. Thật vậy, do $x_k \geq 1 - \frac{2}{k}$ ta có

$$x_{k+1} = \frac{x_k}{2} + \frac{k^2}{4k^2+1}\sqrt{x_k^2+3} \geq \frac{1}{2}(1 - \frac{2}{k}) + \frac{k^2}{4k^2+1}\sqrt{(1-\frac{2}{k})^2+3},$$

nên chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(1-\frac{2}{k}) + \frac{k^2}{4k^2+1}\sqrt{(1-\frac{2}{k})^2+3} \geq 1 - \frac{2}{k+1} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{2k}{4k^2+1}\sqrt{k^2-k+1} \geq \frac{k^2-k+2}{2k(k+1)} \\
\Leftrightarrow\quad & 4k^2(k+1)\sqrt{k^2-k+1} \geq (4k^2+1)(k^2-k+2) \\
\Leftrightarrow\quad & 16k^4(k+1)^2(k^2-k+1) \geq (4k^2+1)^2(k^2-k+2)^2 \quad (**)
\end{aligned}$$

Rõ ràng $(**)$ đúng với $k = 2, 3$. Xét $k \geq 4$ ta thấy

$$\begin{aligned}
16k^2(k+1)^2 \geq (4k^2+1)^2 &\Leftrightarrow 4k(k+1) \geq 4k^2+1 \quad \text{đúng!} \\
k^2(k^2-k+1) \geq (k^2-k+2)^2 &\Leftrightarrow k(k-2)^2 \geq 4 \quad \text{đúng!}
\end{aligned}$$

dẫn tới $(**)$ đúng. Vậy ta được bất đẳng thức

$$1 - \frac{2}{n} \leq x_n \leq u_n \leq y_n, \ \in \mathbb{N}$$

và sử dụng định lý "kẹp" ta có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$.

26. *Bài 49, trang 38*. Cho ba dãy số thực $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ thoả mãn

$$\begin{aligned}
&a_1 + b_1 + c_1 = 1, \\
&a_{n+1} = a_n^2 + 2b_nc_n, \ b_{n+1} = b_n^2 + 2c_na_n, \ c_{n+1} = c_n^2 + 2a_nb_n.
\end{aligned}$$

Chứng minh rằng ba dãy trên đều hội tụ và tìm giới hạn của chúng.

Solution. We have $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = (a_n + b_n + c_n)^2$, so by a trivial induction $a_n + b_n + c_n = 1$. There appears to be symmetry between the three sequences, so we conjecture that each converges to $\frac{1}{3}$. Suppose $a_n \leq b_n \leq c_n$.

We have $a_{n+1} = a_n^2 + 2b_nc_n \leq a_nc_n + b_nc_n + c_n^2 = c_n(a_n + b_n + c_n) = c_n$. Similarly, $b_{n+1} = b_n^2 + 2a_nc_n \leq b_nc_n + a_nc_n + c_n^2 = c_n$, and $c_{n+1} = c_n^2 + 2a_nb_n \leq c_n^2 + a_nc_n + b_nc_n = c_n$. Hence the largest of $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ is no bigger than the largest of a_n, b_n, c_n. An exactly similar argument works for the smallest. Hence the largest forms a monotonic decreasing sequence which is bounded below and the smallest forms a monotonic increasing sequence which is bounded above.

Let $b_n - a_n = h \geq 0, c_n - b_n = k \geq 0$. Then $a_{n+1} - b_{n+1} = (a_n - b_n)(a_n + b_n - 2c_n)$, so $|a_{n+1} - b_{n+1}| = h(h+2k) \leq (h+k)^2$. Similarly, $|b_{n+1} - c_{n+1}| = |b_n - c_n||b_n + c_n - 2a_n| = k(2h+k) \leq (h+k)^2$, and $|c_{n+1} - a_{n+1}| = |c_n - a_n||c_n + a_n - 2b_n| = |(h+k)(k-h)| \leq (h+k)^2$. So for $n+1$ the difference between the biggest and the smallest is the square of the difference for n. But a_1, b_1, c_1 are all positive and hence, by a trivial induction, a_n, b_n, c_n are positive. Their sum is 1 so the difference between the biggest and smallest must be less than 1. Hence the difference tends to zero. Hence a_n, b_n, c_n all tend to $\frac{1}{3}$.

27. Bài 50, trang 38. Cho $\alpha \in \mathbb{R}$, hãy tính

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(\alpha + \frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\alpha + \frac{n-1}{n}\right)^2\right].$$

Solution. Ta có

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(a + \frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(a + \frac{n-1}{n}\right)^2\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n-1}{n}a^2 + \frac{n(n-1)}{n^2}a + \frac{1 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3}\right] \\
&= a^2 + a + \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Chú ý. Bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được đẳng thức:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

28. Bài 51, trang 39. Dãy $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ cho bởi $a_0 = 0, a_1 = 2$,

$$a_{n+1} = \sqrt{2 - \frac{a_{n-1}}{a_n}},\ (n \geq 1).$$

Tính $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n a_n$.

Solution. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng $a_n = 2\sin\frac{\pi}{2^n}$.

Thật vậy $2\sin\frac{\pi}{2^0} = 2\sin 0 = 0 = a_0$, $2\sin\frac{\pi}{2^1} = 2\sin\frac{\pi}{2} = 2 = a_1$. Khi đó

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \sqrt{2 - \frac{a_{n-1}}{a_n}} = \sqrt{2 - \frac{2\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{\pi}{2^n}}} = \sqrt{2 - 2\cos\frac{\pi}{2^n}} \\
&= \sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{2^{n+1}}} = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} 2^n a_n = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\left(2\pi\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}\right) = 2\pi\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} = 2\pi.$$

29. *Bài 52, trang 39.* Dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(a_n + \dfrac{n}{a_n}\Big), (n \geq 1)$.

Xác định $[a_{2021}]$, $[x]$ là phần nguyên của x (số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$.

Solution. Rõ ràng dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ gồm toàn số dương và ta có

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{n}{a_n}\Big) \geq \sqrt{n}.$$

Do đó

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{n}{\sqrt{n-1}}\Big).$$

Bằng quy nạp ta suy ra với $n \geq 2$ thì

$$2^n a_{n+1} \leq a_1 + 2^{n-1} b_n + \cdots + 2b_3 + b_2,\ b_n = \frac{n}{\sqrt{n-1}}.$$

Đồng thời ta có $b_{n+1} > b_n \Leftrightarrow n^2 > n+1$, nên $\{b_n\}$ là dãy tăng.

Khi đó

$$a_{n+1} \leq \frac{1 + (2^{n-1} + \cdots + 1)b_n}{2^n} = \frac{1 + (2^n - 1)b_n}{2^n} < \frac{1}{2^n} + b_n.$$

Như vậy ta được

$$\sqrt{n} \leq a_{n+1} \leq \frac{1}{2^n} + \frac{n}{\sqrt{n-1}},\ 1 \leq \frac{a_{n+1}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2^n\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}.$$

Từ đây $[a_{2021}] = 44$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}} = 1$.

30. *Bài 53, trang 39.* Cho dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ với $a_1 \geq 0, a_{n+1} = a_n(4 + a_n), n \geq 1$.

1) Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{a_n}$.

2) Tính $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n[\ln(\sqrt[2^{n+1}]{a_{n+1}}) - \ln(\sqrt[2^n]{a_n})]$.

Solution. 1) Ta thấy $a_n \geq 0, n \geq 1$ và $\sqrt{a_{n+1}} = \sqrt{a_n}\sqrt{4 + a_n}$.

Đặt $x_n = \sqrt{a_n}$ thì $x_{n+1} = x_n\sqrt{4 + x_n^2}$ với $x_1 \geq 0$.

Lại đặt $t = \ln \frac{\sqrt{4+x_1^2}+x_1}{2}$ ta được $x_1 = e^t - e^{-t} = 2\sinh(t), x_2 = 2\sinh(2t)$.

Bằng quy nạp ta được $x_n = 2\sinh(2^{n-1}t)$. Từ đó $\sqrt[2^n]{a_n} = 2^{\frac{1}{2^{n-1}}}(\sinh(2^{n-1}t))^{\frac{1}{2^{n-1}}}$.

Đến đây ta thấy $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2^{n-1}}} = 1$ và $\lim\limits_{n\to\infty} (\sinh(2^{n-1}t))^{\frac{1}{2^{n-1}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \exp\{\frac{\ln\sinh(2^{n-1}t)}{2^{n-1}}\}$.

Sử dụng quy tắc l'Hôpital ta được $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\sinh(2^{n-1}t)}{2^{n-1}} = t$.

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{a_n} = \exp\{t\} = \dfrac{\sqrt{4 + x_1^2} + x_1}{2} = \dfrac{\sqrt{4 + a_1} + \sqrt{a_1}}{2}$.

2) Ta loại trừ khả năng $a_1 = 0$ vì lúc đó bài toán trở thành tầm thường.

Ta thấy $a_n > 0, \forall n \geq 1$ và $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 4 + a_n > 1, \forall n \geq 1$, nên $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ đơn điệu tăng.

Đặt $x_n = a_n + 2$ và $b_n = \sqrt[2^n]{a_n}, n \geq 1$.

Ta có $\frac{a_{n+1}}{a_n^2} = \frac{4 + a_n}{a_n} > 1$, tức là $\left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)^{2^{n+1}} > 1$, từ đó $\frac{b_{n+1}}{b_n} > 1, \forall n \geq 1$, nên $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ đơn điệu tăng.

Ta có $x_1 > 2$ và $x_{n+1} = x_n^2 - 2, n \geq 1$ nên $x_{n+1} < x_n^2$, do đó $x_n < x_1^{2^{n-1}}, n \geq 2$.

Suy ra $x_n - 2 < x_1^{2^{n-1}}$, dẫn đến $a_n < (2 + a_1)^{2^{n-1}}$. Do đó $b_n < \sqrt{2 + a_1}, n \geq 2$.

Vậy tồn tại $b = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{a_n} = \frac{\sqrt{4 + a_1} + \sqrt{a_1}}{2}$.

Mặt khác

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{n\to\infty} \frac{4 + a_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)^{2^{n+1}} \\
&= \exp\{\lim_{n\to\infty} 2^{n+1}[\ln(b_{n+1}) - \ln(b_n)]\} = \exp\{\lim_{n\to\infty} 2^{n+1}[\ln(\sqrt[2^{n+1}]{a_{n+1}}) - \ln(\sqrt[n]{a_n})]\}.
\end{aligned}$$

Suy ra $\lim_{n\to\infty} 2^{n+1}[\ln(\sqrt[2^{n+1}]{a_{n+1}}) - \ln(\sqrt[n]{a_n})] = 0$, nên

$\lim_{n\to\infty} 2^n[\ln(\sqrt[2^{n+1}]{a_{n+1}}) - \ln(\sqrt[n]{a_n})] = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} 2^{n+1}[\ln(\sqrt[2^{n+1}]{a_{n+1}}) - \ln(\sqrt[n]{a_n})] = 0.$

31. *Bài 56, trang 39.* Chứng minh sự hội tụ của dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ được xác định như sau

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{a_n}} \quad \text{với} \quad n \geq 1$$

và tìm giới hạn của nó.

Solution. Dãy $\{a_n\}$ tăng thực sự và bị chặn trên (chẳng hạn bởi 3).

Có thể chứng tỏ được giới hạn của $\{a_n\}$ là $\frac{3 + \sqrt{15}}{3}$.

32. *Bài 57, trang 39.* Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là hàm tăng và khả vi với f' là hàm giảm.

Xét dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi

$$x_n = \frac{1}{1^2}f'(\frac{1}{1}) + \frac{1}{2^2}f'(\frac{1}{2}) + \cdots + \frac{1}{n^2}f'(\frac{1}{n}),\ n \in \mathbb{N}.$$

Chứng tỏ rằng $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy hội tụ.

Solution. Vì f là hàm tăng, nên $f'(x) \geq 0, \forall x \in [0,1]$. Từ đó với mỗi $n \in \mathbb{N}$ ta có

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2}f'(\frac{1}{n+1}) \geq 0,$$

như thế $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy tăng.

Với mỗi $k \in \mathbb{N}$ áp dụng định lí Lagrange cho hàm f trên đoạn $[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$ ta được

$$f(\frac{1}{k}) - f(\frac{1}{k+1}) = f'(\alpha_k) \cdot \frac{1}{k(k+1)}, \alpha_k \in (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}).$$

Vì f' là hàm giảm và không âm nên suy ra

$$f(\frac{1}{k}) - f(\frac{1}{k+1}) \geq f'(\frac{1}{k}) \cdot \frac{1}{k(k+1)}.$$

Do đó

$$\frac{1}{k^2} f'(\frac{1}{k}) = \frac{k+1}{k} f'(\frac{1}{k}) \frac{1}{k(k+1)} \leq 2\Big[f(\frac{1}{k}) - f(\frac{1}{k+1})\Big].$$

Lần lượt cho $k = 1, 2, ..., n$ rồi cộng n bất đẳng thức thu được theo từng vế với chú ý rằng f là hàm tăng ta dẫn đến

$$x_n \leq 2\Big[f(1) - f(\frac{1}{n+1})\Big] \leq 2[f(1) - f(0)].$$

Như vậy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy tăng và bị chặn, nên nó là dãy hội tụ.

33. *Bài 60, trang 40*. Chứng minh sự hội tụ và tìm giới hạn của dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ được xác định bởi

$$a_1 > 0, \ a_{n+1} = 6\frac{1+a_n}{7+a_n}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Solution. Chú ý rằng $a_{n+1} = 6\Big(1 - \dfrac{6}{a_n+7}\Big)$ với $n \in \mathbb{N}$. Bằng quy nạp ta có:

nếu $a_1 < 2$ thì $a_n < 2$ và nếu $a_1 > 2$ thì $a_n > 2$, $n \in \mathbb{N}$.

Hơn nữa

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(3+a_n)(2-a_n)}{7+a_n}.$$

Suy ra:

1) nếu $0 < a_1 < 2$, thì $\{a_n\}$ là dãy tăng bị chặn trên bởi 2 và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$,
2) nếu $a_1 > 2$, thì $\{a_n\}$ là dãy giảm bị chặn dưới bởi 2 và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$,
3) nếu $a_1 = 2$ thì $a_n = 2$, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

34. *Bài 66, trang 41*. Cho dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi $x_1 = 1$,
$x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - x_n), (n \geq 1)$.

Chứng tỏ dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ và khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

Solution. Ta dễ dàng chứng tỏ được bất đẳng thức $e^x \geq x+1, (x \geq 1)$, hay $e^x - x \geq 1, (x \geq 1)$. Từ đó ta có

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - x_n) \geq \ln 1 = 0, (n \geq 1)$$
$$x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - x_n) \leq \ln(e^{x_n}) = x_n, (n \geq 1).$$

Như vậy dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy dương và đơn điệu giảm, nên nó hội tụ.

Từ quan hệ $x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - x_n), (n \geq 1)$ ta dẫn tới $x_n = e^{x_n} - e^{x_{n+1}}, (n \geq 1)$.

Gọi giới hạn của dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là l ta được $l = e^l - e^l = 0$.

Xét tổng riêng

$$\begin{aligned} S_n &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n = (e^{x_1} - e^{x_2}) + (e^{x_2} - e^{x_3}) + \cdots + (e^{x_n} - e^{x_{n+1}}) \\ &= e^{x_1} - e^{x_{n+1}} = e - e^{x_{n+1}} \to e - 1\ (n \to \infty). \end{aligned}$$

Vậy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = e - 1$.

35. *Bài 69, trang 41*. 1) Cho dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định như sau:

$$x_1 = -\frac{1}{2},\ x_n - (2 + x_n)x_{n+1} = 0\ (n \geq 1).$$

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$hội tụ, nhưng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1 + x_n)$ không hội tụ và tổng của chuỗi này bằng $+\infty$.

2) Cho dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định như sau:

$$x_1 = -\frac{1}{2},\ x_n - (1 + x_n(1 + x_n))x_{n+1} = 0\ (n \geq 1).$$

Chứng minh chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1 + x_n)$ hội tụ và tính tổng của chuỗi này.

Solution. 1) Ta thấy $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{x_n + 2}$. Bằng cách khảo sát hàm số $f(x) = \dfrac{x}{x+2}, (x \neq -2)$ ta thấy hàm này đơn điệu tăng, nên ta suy ra dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ đơn điệu tăng.

Bằng quy nạp chứng tỏ được $-\frac{1}{2} \leq x_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Thật vậy, rõ ràng $-\frac{1}{2} = x_1 < 0$.

Giả sử $-\frac{1}{2} \leq x_n < 0$, ta có $\frac{3}{2} \leq x_n + 2 < 2$, dẫn đến $\frac{2}{3} \geq \frac{1}{x_n+2} > \frac{1}{2}$ và do đó $\frac{2}{3}x_n \leq x_{n+1} = \dfrac{x_n}{x_n + 2} < \frac{1}{2}x_n < 0$.

Mặt khác $-\frac{1}{2} \leq x_n$, nên $\frac{2}{3} \cdot (-\frac{1}{2}) \leq \frac{2}{3} \cdot x_n$ hay $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{3} \leq \frac{2}{3}x_n \leq x_{n+1}$.

Vậy ta có $-\frac{1}{2} \leq x_{n+1} < 0$. Dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tăng và bị chặn (bởi 0), nên hội tụ.

Gọi $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, ta thấy $a = \dfrac{a}{a+2}$ và $-\dfrac{1}{2} \leq a \leq 0$, nên phải có $a = 0$.

Khi đó $\frac{1}{2} \le 1 + x_n < 1$ và $\lim_{n\to\infty}(1+x_n) = 1 \neq 0$, nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(1+x_n)$ không hội tụ và ta được $\sum_{n=1}^{\infty}(1+x_n) = +\infty$.

2) Ta thấy $x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, nên từ giả thiết ta có $x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n^2 + x_n + 1}$ và bằng quy nạp ta suy ra dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ gồm toàn các giá trị âm.

Lại có $y_n = 1 + x_n$, dẫn đến $y_{n+1} = \frac{y_n^2}{x_n^2 + x_n + 1}$ và bằng quy nạp suy ra dãy $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy dương. Mặt khác, dễ thấy $x_n - x_{n+1} = y_n x_n x_{n+1}$, $y_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}$.

Suy ra với $m > 1$ thì $\sum_{n=1}^{m-1} y_n = \frac{1}{x_m} - \frac{1}{x_1} = 2 + \frac{1}{x_m} < 2$. Nghĩa là dãy tổng riêng của chuỗi dương $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ bị chặn trên (bởi 2), do đó chuỗi này hội tụ.

Chuỗi này hội tụ nên số hạng tổng quát của nó phải thỏa mãn $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, do đó $\lim_{n\to\infty} x_n = -1$, suy ra $\sum_{n=1}^{\infty}(1+x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m-1} y_n = \lim_{m\to\infty}\left(2 + \frac{1}{x_m}\right) = 1$.

36. <u>*Bài 77, trang 43*</u>. Cho dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ đơn điệu tăng thực sự và $a_n \le n^2 \ln(n), \forall n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng chuỗi sau phân kỳ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1} - a_n}$.

<u>*Solution*</u>. Ta thấy $a_1 \le 1^2 \ln(1) = 0$. Xét chuỗi dương $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4[k\ln(2) - \frac{a_1}{4^k}]}$.

Ta sẽ chứng minh chuỗi này phân kỳ. Thật vậy theo tiêu chuẩn Cauchy thì

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{4[k\ln(2) - \frac{a_1}{4^k}]} > \frac{n}{4[(2n)\ln(2) - \frac{a_1}{4^{n+1}}]} \\ &= \frac{1}{8\ln(2) - \frac{a_1}{n4^n}} \to \frac{1}{8\ln(2)} \neq 0 \ (n \to \infty). \end{aligned}$$

Giả sử chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1} - a_n}$ hội tụ, khi đó

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1} - a_n} = \sum_{k=1}^{\infty}\Big[\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k - 1} \frac{1}{a_{n+1} - a_n}\Big] < +\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4[k\ln(2) - \frac{a_1}{4^k}]}.$$

Suy ra phải tồn tại $k \in \mathbb{N}$ để

$$\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k - 1} \frac{1}{a_{n+1} - a_n} < \frac{1}{4[k\ln(2) - \frac{a_1}{4^k}]}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\Big(\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\Big)\Big(\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1}(a_{n+1}-a_n)\Big)\geq\Big(\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1}1\Big)^2=(2^k-2^{k-1})^2=4^{k-1}.$$

Do đó

$$\frac{1}{4[k\ln(2)-\frac{a_1}{4^k}]}>\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\geq\frac{4^{k-1}}{\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1}(a_{n+1}-a_n)}=\frac{4^{k-1}}{a_{2^k}-a_{2^{k-1}}}\geq\frac{4^{k-1}}{a_{2^k}-a_1}.$$

Dẫn đến

$$a_{2^k}-a_1>4^k[k\ln(2)-\frac{a_1}{4^k}]=4^k\ln(2^k)-a_1\ \Rightarrow\ a_{2^k}>(2^k)^2\ln(2^k),$$

điều này mâu thuẫn với giả thiết $a_n\leq n^2\ln(n),\forall n\in\mathbb{N}$ khi $n=2^k$.

Vậy chuỗi đã cho không hội tụ (phân kỳ).

37. *Bài 78, trang 43.* Tính tổng của chuỗi sau

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\ln\Big(1+\frac{1}{2n}\Big)\ln\Big(1+\frac{1}{2n+1}\Big).$$

Solution. Đặt $f(n)=\ln\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big), n\geq 1$, ta thấy $f(2n)+f(2n+1)=f(n)$. Khi đó

$$\begin{aligned}f(n)f(2n)f(2n+1)&=[f(2n)+f(2n+1)]f(2n)f(2n+1)\\&=\frac{1}{3}\Big(3[f(2n)]^2f(2n+1)+3f(2n)[f(2n+1)]^2\Big)\\&=\frac{1}{3}\Big([f(2n)+f(2n+1)]^3-[f(2n)]^3-[f(2n+1)]^3\Big)\\&=\frac{1}{3}\Big([f(n)]^3-[f(2n)]^3-[f(2n+1)]^3\Big).\end{aligned}$$

Ta lại có $\ln(1+x)\leq x, x>0$ nên $f(n)\leq\dfrac{1}{n}$ và hiển nhiên thấy $f(n)$ đơn điệu giảm. Từ đó ta có

$$g(n):=[f(n)]^3+[f(n+1)]^3+\cdots+[f(2n-1)]^3=\sum_{k=n}^{2n-1}f^3(k)<n[f(n)]^3<\frac{1}{n^2}.$$

Dẫn tới $g(n)-g(n+1)=[f(n)]^3-[f(2n)]^3-[f(2n+1)]^3=3f(n)f(2n)f(2n+1)$.

Tổng riêng của chuỗi là

$$\sum_{n=1}^{N}f(n)f(2n)f(2n+1)=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}[g(n)-g(n+1)]=\frac{1}{3}[g(1)-g(N+1)].$$

Vì $0<g(N+1)<\dfrac{1}{(N+1)^2}\to 0\ (N\to\infty)$, nên ta suy ra

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\ln\Big(1+\frac{1}{2n}\Big)\ln\Big(1+\frac{1}{2n+1}\Big)=\frac{1}{3}g(1)=\frac{1}{3}\ln^3(2).$$

(To be continued)

Một số bài tập khác về Dãy số và Chuỗi số

38. Cho $s > 0$ và $p > 0$. Chứng tỏ rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^s}{(1+p)^n} = 0.$$

Solution. Đặt $a_n = \dfrac{n^s}{(1+p)^n}$, ta có

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^s . \frac{1}{p+1}.$$

Ngoài ra, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^s . \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p+1}$. Suy ra dãy $\{a_n\}$ là đơn điệu giảm bắt đầu từ chỉ số n_0 nào đấy, nó cũng bị chặn dưới, chẳng hạn bởi 0. Gọi giới hạn của nó bằng g thì g thoả mãn tính chất $g = \frac{1}{p+1} g$. Do đó $g = 0$.

39. Chứng minh sự hội tụ và tìm giới hạn của $\{a_n\}$, ở đây

$$a_n = \frac{n+1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \cdots + \frac{2^n}{n}\right) \quad \text{for (với)} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Solution. Ta có $a_{n+1} = \dfrac{n+2}{2(n+1)}(a_n + 1), n \in \mathbb{N}$. Suy ra

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-na_n + (n+2)}{2(n+1)}.$$

Sử dụng bất đẳng thức $na_n > n + 2$ với $n4$ (có thể chứng minh bằng quy nạp) ta thấy rằng dãy là đơn điệu giảm, do đó hội tụ. Đặt $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, từ phương trình $a_{n+1} = \dfrac{n+2}{2(n+1)}(a_n + 1)$ cho $n \to \infty$ ta được $\alpha = 1$.

40. Định nghĩa các dãy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ như sau:

$$0 < b_1 < a_1, \ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{và} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{với} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Chứng tỏ rằng $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ đều tiến tới cùng một giới hạn. Giới hạn đó được gọi là *trung bình AM-GM* của a_1 và b_1).

Solution. Theo bất đẳng thức Cauchy, $a_n \geq b_n$. Ta có

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq a_n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Do đó dãy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm. Mặt khác, dãy $\{b_n\}$ tăng vì

$$b_{n+1} = \sqrt{b_n a_n} \geq \sqrt{b_n^2} = b_n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Ngoài ra, $b_1 < a_n, b_n < a_1$, do đó cả hai dãy đều hội tụ. Đặt $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ và $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Ta có $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ cho $n \to \infty$ ta được $\alpha = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, suy ra $\alpha = \beta$.

41. Chứng tỏ rằng các dãy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ được cho bởi

$$0 < b_1 < a_1, \; a_{n+1} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n} \quad \text{và} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{với} \quad n \in \mathbb{N}$$

đều là đơn điệu và có cùng một giới hạn.

Solution. Từ bất đẳng thức $2(a_n^2 + b_n^2) \geq (a_n + b_n)^2$ ta có $a_n \geq b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Do đó

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n} \leq \frac{a_n^2 + a_n b_n}{a_n + b_n} = a_n, n \in \mathbb{N}.$$

Điều đó có nghĩa là dãy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm. Tương tự ta có dãy $\{b_n\}$ đơn điệu tăng. Ngoài ra, $b_1 < a_n$, $b_n < a_1$. Do đó cả hai dãy đều hội tụ. Đặt $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ và $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Ta có $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, cho $n \to \infty$ ta được $\beta = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$, suy ra $\alpha = \beta$.

42. Giả sử các dãy truy hồi $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ được cho bằng cách đặt

$$0 < b_1 < a_1, \; a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{và} \quad b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \quad \text{với} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh tính đơn điệu của các dãy trên và chứng tỏ rằng cả hai dãy đều tiến tới *trung bình AM-GM* của a_1 và b_1.

Solution. Theo bất đẳng thức về trung bình cộng và trung bình nhân ta có $a_n \geq b_n$. Khi đó

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq a_n, n \in \mathbb{N},$$

do đó dãy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm. Mặt khác, dãy $\{b_n\}$ đơn điệu tăng bởi vì

$$b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \geq b_n, n \in \mathbb{N}.$$

Hơn nữa, $b_1 < a_n, b_n < a_1$, do đó cả hai dãy đều hội tụ. Đặt $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ và $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Ta có $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, cho $n \to \infty$ ta được $\alpha = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$, do vậy $\alpha = \beta$. Với nhận xét rằng $a_{n+1}b_{n+1} = a_n b_n$ ta suy ra tất cả các phần tử của dãy $\{a_n b_n\}$ đều bằng $a_1 b_1$, do đó $\alpha = \beta = \sqrt{a_1 b_1}$.

43. Cho dãy số $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định như sau:

$$u_1 = \frac{1}{4}, \; u_2 = \frac{1}{8}, \; 4u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2} \; (n \geq 3)$$

Đặt $P_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$, $Q_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k u_k$. Tính các giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n$.

Solution. Ta có thể chứng minh được

$$P_n = \frac{F_n}{2^{n+1}}, \quad \text{với} \quad F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \; (n \geq 3).$$

Như vậy $\{F_n\}$ là dãy Fibonacci và ta có

$$P_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big].$$

Lại dễ dàng chứng minh được $u_n < 1$. Từ đó với $|x| < 1$ thì

$$1)\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x^k = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x},$$
$$2)\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} kx^k = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

và ta có

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \sum_{n=1}^{\infty} P_n = ...? = 1, \quad \lim_{n\to\infty} Q_n = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n = ...? = 5.$$

44. Chứng tỏ rằng giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$ không tồn tại.

Solution. Giả sử giới hạn của dãy tồn tại, ta có

$$0 = \lim_{n\to\infty}(\sin(n+2) - \sin n) = 2\sin 1 \lim_{n\to\infty}\cos(n+1)$$

suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n = 0$. Từ đó

$$0 = \lim_{n\to\infty}(\cos(n+2) - \cos n) = -2\sin 1 \lim_{n\to\infty}\sin(n+1)$$

suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n = 0$.

Vô lý bởi vì $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$. Do đó giới hạn của $\{\sin n\}$ không tồn tại.

45. Giả sử dãy bị chặn $\{a_n\}$ thoả mãn

$$a_{n+2} \le \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n \quad \text{với} \quad n \ge 1.$$

Chứng minh sự hội tụ của dãy $\{a_n\}$.

Solution. Từ bất đẳng thức $a_{n+2} \le \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n$ ta có $a_{n+2} + \frac{2}{3}a_{n+1} \le a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n$. Do đó dãy $b_n = a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n$ là dãy giảm, bị chặn, nên hội tụ. Đặt b là giới hạn của nó, ta sẽ chỉ ra rằng dãy $\{a_n\}$ hội tụ tới $a = \frac{3}{5}b$.

Với $\varepsilon > 0$ tuỳ ý, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\frac{\varepsilon}{6} > |b_n - b|$ với $n \ge n_0$. Do đó

$$\frac{\varepsilon}{6} > \Big|a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n - \frac{5}{3}a\Big| \ge |a_{n+1} - a| - \frac{2}{3}|a_n - a| \quad \text{với} \quad n \ge n_0.$$

Do vậy $|a_{n+1}-a| < \frac{2}{3}|a_n - a| + \frac{\varepsilon}{6}$. Bằng quy nạp ta có

$$\begin{aligned}|a_{n_0+k}-a| &\le \left(\frac{2}{3}\right)^k.|a_{n_0}-a| + \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + \cdots + \frac{2}{3} + 1\right].\frac{\varepsilon}{6}\\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^k.|a_{n_0}-a| + \frac{1-\frac{2}{3}^k}{1-\frac{2}{3}}.\frac{\varepsilon}{6} < \left(\frac{2}{3}\right)^k.|a_{n_0}-a| + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Từ $\left(\frac{2}{3}\right)^k.|a_{n_0}-a| < \frac{\varepsilon}{2}$ với k đủ lớn suy ra $|a_n - a| < \varepsilon$ với n đủ lớn.

46. Cho $a_1, a_2, ..., a_p$ là các số dương cố định. Xét các dãy

$$s_n = \frac{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_p^n}{p} \quad \text{và} \quad x_n = \sqrt[n]{s_n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Chứng tỏ rằng dãy $\{x_n\}$ là đơn điệu tăng.

Solution. Theo bất đẳng thức Schwarz $\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2$

ta có

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^r\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k^{\frac{r+s}{2}} a_k^{\frac{r-s}{2}}\right)^2 \le \sum_{k=1}^n a_k^{r+s} \sum_{k=1}^n a_k^{r-s} \qquad (*)$$

với mỗi bộ số dương $a_1, a_2, ..., a_n$ và với mọi r, s.

Từ $(*)$ ta suy ra $s_n^2 \le s_{n+1}s_{n-1}$ hay $\frac{s_n^2}{s_{n-1}} \le s_{n+1}$, với $n \ge 2$.

Vẫn theo bất đẳng thức Schwarz $\left(\sum_{k=1}^p a_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^p 1.a_k\right)^2 \le p\sum_{k=1}^p a_k^2$,

ta suy ra $x_1 \le x_2$.

Giả sử rằng $x_{n-1} \le x_n$ thì $\sqrt[n-1]{s_{n-1}} \le \sqrt[n]{s_n}$ hay $s_{n-1} \le s_n^{\frac{n-1}{n}}$,

do đó suy ra

$$x_{n+1} = \sqrt[n+1]{s_{n+1}} \ge \sqrt[n+1]{\frac{s_n^2}{s_{n-1}}} \ge \sqrt[n+1]{\frac{s_n^2}{s_n^{\frac{n-1}{n}}}} = \sqrt[n+1]{s_n^{\frac{n+1}{n}}} = \sqrt[n]{s_n} = x_n$$

Chứng minh được hoàn thành theo nguyên lý quy nạp.

47. Khẳng định tính đơn điệu của các dãy $\{a_n\}$ and (và) $\{b_n\}$, trong đó

$$\begin{aligned}a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln n \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N},\\ b_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \ln n \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Chứng tỏ rằng cả hai dãy đều tiến tới cùng một giới hạn, mà được biết đến là *hằng số Euler*.

Hint. Apply the inequality $(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$.

Solution. Theo bất đẳng thức trên ta có

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} > 0,$$
$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n} < 0.$$

Dễ thấy $a_1 \le a_n < b_n \le b_1,\ n \in \mathbb{N}$. Suy ra cả hai dãy hội tụ tới cùng một giới hạn.

(To be continued)