Chuyên đề 1

Ma trận và các vấn đề liên quan

1. *Bài 6, trang 35*. a) Cho ma trận $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Chứng minh $A^2 = -I_2$ khi và chỉ khi A có dạng

$$A = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{pq-1} & -p \\ q & \mp\sqrt{pq-1} \end{bmatrix}, \ (p, q \in \mathbb{R}, pq \geq 1)$$

b) Chứng minh rằng không tồn tại ma trận $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sao cho

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1-\varepsilon \end{bmatrix}, \ (\varepsilon > 0)$$

c) (OLP-2009). Có tồn tại ma trận $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sao cho

$$A^{2010} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1-\varepsilon \end{bmatrix}, \ (\varepsilon > 0)$$

hay không?

Solution. a) Giả sử $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Thế thì $A^2 = \begin{bmatrix} a^2+bc & (a+d)b \\ (a+d)c & bc+d^2 \end{bmatrix}$.

Giả thiết $A^2 = -I_2$ tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2 + bc = -1 \\ (a+d)b = 0 \\ (a+d)c = 0 \\ bc + d^2 = -1 \end{cases}$$

Nếu $(a+d) \neq 0$ thì từ phương trình thứ hai ta suy ra $b = 0$. Khi ấy thay vào phương trình thứ nhất sẽ dẫn đến mâu thuẫn $a^2 = -1$. Như thế ta phải có $(a+d) = 0$ hay là $a = -d$. Từ đây dễ dàng suy ra ma trận A có dạng như cần phải chứng minh.

b) Ta sử dụng cách làm của phần a) dẫn đến hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2 + bc = -1 \\ (a+d)b = 0 \\ (a+d)c = 0 \\ bc + d^2 = -1 - \varepsilon \end{cases}$$

và vẫn dẫn đến kết quả $a = -d$. Suy ra $a^2 = d^2$ và khi ấy phương trình thứ nhất sẽ mâu thuẫn với phương trình thứ tư. Vậy không tồn tại ma trận A thoả mãn yêu cầu đề bài.

c) Giả sử tồn tại ma trận A thoả mãn đẳng thức ở đề bài. Khi ấy đặt $B = A^{1005}$ ta có $A^{2010} = B^2$, dẫn đến $B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1-\varepsilon \end{bmatrix}$, mâu thuẫn với kết quả phần 1).

Vậy không tồn tại ma trận A thoả mãn yêu cầu đề bài.

2. *Bài 7, trang 36*. Tìm tất cả các số thực a, b sao cho $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$.

Solution. Rõ ràng $a = b = 0$ không thoả mãn bài toán. Giả sử $a^2 + b^2 \neq 0$, ta thấy

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \sqrt{a^2+b^2} \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{bmatrix} = \sqrt{a^2+b^2} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Dễ dàng thấy

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^4 = (a^2+b^2)^2 \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}^4 = (a^2+b^2)^2 \begin{bmatrix} \cos 4\varphi & -\sin 4\varphi \\ \sin 4\varphi & \cos 4\varphi \end{bmatrix}.$$

Suy ra $\cos 4\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{(a^2+b^2)^2}$, $\sin 4\varphi = \dfrac{1}{(a^2+b^2)^2}$ ...? $\Rightarrow$ $a^2 + b^2 = \sqrt{2}$.

Từ đó dẫn đến

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt[4]{2}},\ \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = \sqrt{2}a^2 - 1,\ 2\cos^2 2\varphi - 1 = \cos 4\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2(\sqrt{2}a^2 - 1)^2 - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2},\ 8a^4 - 8\sqrt{2}a^2 + (2 - \sqrt{3}) = 0$$

$$a^2 = \frac{2\sqrt{2} \pm (1+\sqrt{3})}{4},\ b^2 = \frac{2\sqrt{2} \mp (1+\sqrt{3})}{4} \quad \Rightarrow\ a, b = ...?$$

3. *Bài 11, trang 36*. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hãy tính A^{2020}.

Hint. Viết $A = B + I_3$, trong đó $B^3 = O_3$ và dùng khai triển nhị thức Newton.

4. <u>*Bài 12, trang 37*</u>. Trong $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cho $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$. Chứng minh rằng nếu $A^{2020} = O_2$ thì $A^2 = O_2$. Xác định A sao cho tồn tại $n \in \mathbb{N}$ để $A^n = I_2$.

<u>*Solution*</u>. Bằng quy nạp dễ dàng thấy $A^n = \begin{bmatrix} a^n & x_n \\ 0 & c^n \end{bmatrix}$, với $x_n \in \mathbb{R}$.

a) Khi đó $A^{2020} = \begin{bmatrix} a^{2020} & x_{2020} \\ & \\ 0 & c^{2020} \end{bmatrix} = O_2 \quad \Rightarrow \quad a = c = 0.$

Do đó $A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^2 = O_2$

b) Lại có $A^n = \begin{bmatrix} a^n & x_n \\ 0 & c^n \end{bmatrix} = I_2 \quad \Rightarrow \quad a^n = c^n = 1.$

Suy ra có những trường hợp sau:

+) $n = (2k-1)$ lẻ, $a = c = 1$, khi đó

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{2k-1} = \begin{bmatrix} 1 & (2k-1)b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \quad \Rightarrow \quad b = 0.$$

Vậy $A = I_2$ và $A^n = I_2,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

+) $n = 2k$ chẵn, $a = c = -1$, khi đó

$$A = \begin{bmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{2k} = \begin{bmatrix} 1 & 2kb \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \quad \Rightarrow \quad b = 0.$$

Vậy $A = -I_2$ và $A^{2k} = I_2,\ \forall k \in \mathbb{N}$.

+) $n = 2k$ chẵn, $a = 1, c = -1$, khi đó

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

+) $n = 2k$ chẵn, $a = -1, c = 1$, khi đó

$$A = \begin{bmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

+) $n = 2k$ chẵn, $a = c = 1$, khi đó

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{2k} = \begin{bmatrix} 1 & 2kb \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \quad \Rightarrow \quad b = 0.$$

Vậy $A = I_2$ và $A^n = I_2,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

5. <u>*Bài 13, trang 37*</u>. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} \frac{x}{2018} & 2019 \\ 0 & \frac{x}{2020} \end{bmatrix}$.

   Ký hiệu $A^n = \begin{bmatrix} a_{11}(n,x) & a_{12}(n,x) \\ a_{21}(n,x) & a_{22}(n,x) \end{bmatrix}$.

   Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to 1} a_{ij}(n,x)$, $(i,j = 1,2)$.

   <u>*Solution*</u>. Xét ma trận $M = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$, ta có $M^2 = \begin{bmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & \frac{b(a^2-c^2)}{a-c} \\ 0 & c^2 \end{bmatrix}$.

   Giả sử quy nạp
$$M^k = \begin{bmatrix} a^k & \frac{b(a^k-c^k)}{a-c} \\ 0 & c^k \end{bmatrix}.$$

   Khi đó
$$M^{k+1} = M^k M = \begin{bmatrix} a^k & \frac{b(a^k-c^k)}{a-c} \\ 0 & c^k \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{k+1} & \frac{b(a^{k+1}-c^{k+1})}{a-c} \\ 0 & c^{k+1} \end{bmatrix}.$$

   Vậy ta có $M^n = \begin{bmatrix} a^n & \frac{b(a^n-c^n)}{a-c} \\ 0 & c^n \end{bmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}$. Do đó $A^n = \begin{bmatrix} a_{11}(n,x) & a_{12}(n,x) \\ a_{21}(n,x) & a_{22}(n,x) \end{bmatrix}$ với
$$a_{11}(n,x) = \frac{x^n}{2018^n},\ a_{12}(n,x) = 2019\frac{\frac{x^n}{2018^n} - \frac{x^n}{2020^n}}{\frac{x}{2018} - \frac{x}{2020}},$$
$$a_{21}(n,x) = 0,\ a_{22}(n,x) = \frac{x^n}{2020^n}$$

   Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to 1} a_{ij}(n,x) = 0, (i,j = 1,2)$.

6. <u>*Bài 22, trang 38*</u>. Cho $A = (a_{ij})$ là ma trận thực, vuông, cấp n mà $a_{ii} = 0$.

   Chứng minh rằng tồn tại các ma trận B, C sao cho $A = BC - CB$.

   <u>*Solution*</u>. Ta chọn ma trận đường chéo $B = (b_{ij})$ với $b_{ii} = b_i,\ b_k \neq b_m\ (k \neq m)$, còn $b_{ij} = 0\ (i \neq j)$. Lại chọn ma trận $C = (c_{ij})$ với $c_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{b_i - b_j}\ (i \neq j)$, còn c_{ii} tuỳ ý.

   Dễ dàng kiểm tra được $A = BC - CB$.

7. <u>*Bài 23, trang 38*</u>. Với ma trận $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ ta định nghĩa
$$\sin(A) = A - \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{5!}A^5 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}A^{2n-1} + \cdots$$
$$\cos(A) = E - \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{4!}A^4 - \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}A^{2n} + \cdots$$

   Cho $A = \dfrac{\pi}{4}\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$, hãy tính $\sin(A)$ và $\cos(A)$ ở dạng rút gọn.

<u>*Solution*</u>. Ký hiệu

$$B = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Khi đó ta có $B = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}.$

Do $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \ C^m = \begin{bmatrix} 4^m & 0 \\ 0 & 10^m \end{bmatrix}$, nên

$$\sin(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Big(\frac{\pi}{4} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} - \frac{1}{3!} \Big(\frac{\pi}{4}\Big)^3 \begin{bmatrix} 4^3 & 0 \\ 0 & 10^3 \end{bmatrix} + \frac{1}{5!} \Big(\frac{\pi}{4}\Big)^5 \begin{bmatrix} 4^5 & 0 \\ 0 & 10^5 \end{bmatrix} - \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1} \Big(\frac{\pi}{4}\Big)^{2n-1} \begin{bmatrix} 4^{2n-1} & 0 \\ 0 & 10^{2n-1} \end{bmatrix} + \cdots \Big) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} .P. \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

trong đó

$$P = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} \pi^{2n-1} & 0 \\ 0 & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} (\frac{5}{2}\pi)^{2n-1} \end{bmatrix}.$$

Vì thế

$$\sin(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sin\pi & 0 \\ 0 & \sin\frac{5}{2}\pi \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tương tự ta có $\cos(A) = ...?$

8. <u>*Bài 32, trang 39*</u>. Cho $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ là các ma trận luỹ linh và thỏa mãn $AB = BA$. Chứng minh rằng các ma trận $I_n \pm (A+B)$ khả nghịch.

   <u>*Solution*</u>. Giả sử: $A^r = B^s = O_n$ (với $r, s \in \mathbb{N}, r \geq 2, s \geq 2$). Ta chứng tỏ rằng $A+B$ là ma trận luỹ linh. Thật vậy, do A và B giao hoán đối với phép nhân, nên ta có khai triển nhị thức Newton

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k A^k B^{m-k}, \ m \in \mathbb{N}.$$

   Chọn $m = r + s$ ta được

$$(A+B)^{r+s} = \sum_{k=0}^{r} C_{r+s}^k A^k B^{r+s-k} + \sum_{k=r+1}^{r+s} C_{r+s}^k A^k B^{r+s-k}.$$

Nhìn vào khai triển trên đây ta thấy:

+) với $k = 0, 1, ..., r$ thì $k \leq r$, nên $r + s - k \geq s$ và $B^{r+s-k} = O_n$,

+) với $k = r + 1, r + 2, ..., r + s$ thì $k > r$, nên $A^k = O_n$.

Vậy ta suy ra $(A + B)^{r+s} = O_n$, hay $A + B$ là ma trận luỹ linh.

Sử dụng lời giải bài 16 trang 34 ta suy ra các ma trận $I_n \pm (A + B)$ khả nghịch.

9. *Bài 39, trang 40*. Cho ma trận $S \in GL_n(\mathbb{F})$ và ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$.

   Chứng minh rằng $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(SAS^{-1})$.

   Solution. Sử dụng tính chất $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ ta có

$$\operatorname{tr}(SAS^{-1}) = \operatorname{tr}(S(AS^{-1})) = \operatorname{tr}((AS^{-1})S) = \operatorname{tr}(A(S^{-1}S)) = \operatorname{tr}(A).$$

10. *Bài 41, trang 40*. Cho các ma trận $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$.

    Chứng minh rằng nếu $A + B = \pm AB$ thì $AB = BA$.

    Ngoài ra, các ma trận $I_n \mp A$ tương ứng khả nghịch và tìm nghịch đảo của chúng.

    Solution. Giả sử $A + B = AB$. Ta thấy $I_n = I_n - A - B + AB = (I_n - A)(I_n - B)$. Điều này chứng tỏ $I_n - A$ khả nghịch và $(I_n - A)^{-1} = I_n - B$.

    Khi đó $I_n = (I_n - B)(I_n - A) = I_n - A - B + BA$. Suy ra $AB = BA$.

    Giả sử $A + B = -AB$. Ta thấy $I_n = I_n + A + B + AB = (I_n + A)(I_n + B)$. Điều này chứng tỏ $I_n + A$ khả nghịch và $(I_n + A)^{-1} = I_n + B$.

    Khi đó $I_n = (I_n + B)(I_n + A) = I_n + A + B + BA$. Suy ra $AB = BA$.

    Note. Thay giải thiết $A + B = \pm AB$ bằng $\alpha A + \beta B = \pm \alpha\beta AB$ với $\alpha > 0, \beta > 0$ thì kết luận của bài toán sẽ như thế nào?

11. *Bài 60, trang 44*. Cho ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+), n \geq 2$. Biết rằng A khả nghịch.

    Chứng minh $z_n \leq n^2 - 2n$, với z_n là số các phần tử bằng 0 của ma trận A^{-1}.

    Solution. Ký hiệu a_{ij} và b_{ij} tương ứng là các phần tử của A và A^{-1}. Do $AA^{-1} = I_n$, nên với $k \neq m$ ta có $\sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{im} = 0$ và do a_{ij} là các số dương ta suy ra trong n số $\{b_{im}; i = 1, 2, ..., n\}$ có ít nhất một số dương và có ít nhất một số âm (không thể xảy ra trường hợp tất cả n số đó bằng 0). Như thế mỗi cột của A^{-1} có ít nhất hai phần tử khác 0. Từ đây suy ra điều phải chứng minh

12. *Bài 63, trang 44*. Cho các ma trận $A, B \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{F})$. Chứng minh rằng nếu $AB = O_{2n+1}$ thì ít nhất một trong hai ma trận $A + A^t$ hoặc $B + B^t$ suy biến.

Solution. Theo bất đẳng thức Sylvester thì $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B) \leq \operatorname{rank}(AB)+(2n+1)$. Thế mà $AB = O_{2n+1}$, nên $\operatorname{rank}(AB) = 0$, do đó $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \leq 2n + 1$. Suy ra phải có ít nhất một trong hai ma trận A hoặc B có hạng $\leq n$. Không mất tổng quát, ta giả sử đó là ma trận A. Lại theo bất đẳng thức Sylvester thì

$$\operatorname{rank}(A + A^t) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(A^t) = 2.\operatorname{rank}(A) \leq 2n.$$

Vậy ma trận $A + A^t$ (cấp $2n + 1$) là ma trận suy biến.

13. *Bài 64, trang 44*. Cho ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ có $\operatorname{rank}(A) = r \leq n$. Chứng minh rằng có thể viết A thành tổng của r ma trận mà mỗi ma trận đều có hạng bằng 1.

    Solution. Ta viết $A = [A_1, A_2, ..., A_r, A_{r+1}, ..., A_n]$, trong đó A_j là vector cột thứ j của A. Vì $\operatorname{rank}(A) = r$ nên A có r vector cột độc lập tuyến tính, không giảm tổng quát ta coi đó là r cột đầu tiên. Khi ấy mỗi cột A_j $(r + 1 \leq j \leqslant n)$ biểu diễn tuyến tính được qua r cột đầu tiên

    $$A_j = \alpha_{j1}A_1 + \alpha_{j2}A_2 + \cdots + \alpha_{jr}A_r \quad (r + 1 \leq j \leq n)$$

    với các hệ số $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, ..., \alpha_{jr}$ không đồng nhất bằng 0.

    Từ đó ta có thể viết

    $$\begin{aligned} A = & [A_1, O, O, ..., O, \alpha_{r+1,1}A_1, \alpha_{r+2,1}A_1, ..., \alpha_{n1}A_1] \\ & + [O, A_2, O, ..., O, \alpha_{r+1,2}A_2, \alpha_{r+2,2}A_2, ..., \alpha_{n2}A_2] \\ & + [O, O, A_3, , ..., O, \alpha_{r+1,3}A_3, \alpha_{r+2,3}A_3, ..., \alpha_{n3}A_3] \\ & + \cdots \\ & + [O, O, O, ..., A_r, \alpha_{r+1,r}A_r, \alpha_{r+2,r}A_r, ..., \alpha_{nr}A_r] \\ = & B_1 + B_2 + B_3 + \cdots + B_r \end{aligned}$$

    Rõ ràng $B_1, B_2, B_3, ..., B_r$ là các ma trận mà mỗi trong số đó đều có hạng bằng 1.

14. *Bài 65, trang 44*. Cho $a > 0$. Chứng tỏ ma trận A sau khả nghịch và tìm A^{-1}.

    $$A = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 & a^3 \\ \frac{1}{a} & 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^3} & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}$$

    Hãy mở rộng kết luận của bài toán.

    Solution. Cách 1. Tính trực tiếp một cách thủ công.

Cách 2. Đặt $U = (1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3})$, $V = (1, a, a^2, a^3)$. Ta có $VU^t = < V, U > = 4$ và

$$U^tV = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^3} \end{bmatrix} (1\ a\ a^2\ a^3) = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ \frac{1}{a} & 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{a^3} & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{bmatrix} = A + I_4.$$

Khi đó suy ra

$$\begin{aligned} A^2 &= (U^tV - I_4)^2 = (U^tV)^2 - 2U^tV + I_4 \\ &= U^tVU^tV - 2U^tV + I_4 = U^t4V - 2U^tV + I_4 \\ &= 2U^tV + I_4 = 2(A + I_4) + I_4 = 2A + 3I_4. \\ A^2 - 2A = 3I_4 &\quad \text{hay} \quad A(A - 2I_4) = 3I_4. \end{aligned}$$

Vậy rõ ràng là A khả nghịch và $A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 2I_4)$.

Note. Với cách làm này có thể mở rộng kết luận của bài toán cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & \cdots & a^{n-1} \\ \frac{1}{a} & 0 & \cdots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a^{n-1}} & \frac{1}{a^{n-2}} & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \text{ với } a > 0.$$

15. *Bài Bài 66, trang 44*. Cho các ma trận $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Chứng minh rằng nếu $I_n - AB$ khả nghịch thì $I_n - BA$ cũng khả nghịch và

$(I_n - BA)^{-1} = I_n + B(I_n - AB)^{-1}A$

b) Chứng minh rằng nếu $I_n + AB$ khả nghịch thì $I_n + BA$ cũng khả nghịch và

$(I_n + BA)^{-1} = I_n - B(I_n + AB)^{-1}A$

Solution. a) Ta có $B(I_n - AB) = B - BAB = (I_n - BA)B$, do có $(I_n - AB)^{-1}$ nên

$$B(I_n - AB)(I_n - AB)^{-1}A = (I_n - BA)B(I_n - AB)^{-1}A$$

hay $BA = (I_n - BA)B(I_n - AB)^{-1}A$, tức $O_n = -BA + (I_n - BA)B(I_n - AB)^{-1}A$, do đó suy ra

$$I_n = I_n - BA + (I_n - BA)B(I_n - AB)^{-1}A = (I_n - BA)[I_n + B(I_n - AB)^{-1}A]$$

Chứng tỏ rằng $I_n - BA$ khả nghịch và $(I_n - BA)^{-1} = I_n + B(I_n - AB)^{-1}A$.

b) Trong phần a) ta chỉ việc thay B bởi $-B$ là được kết quả tương ứng.

16. <u>*Bài 67, trang 44*</u>. Cho ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $A^2 - 3A + 2I_n = O_n$.

Chứng minh rằng $A^{2k} - (2^k + 1)A^k + 2^k I_n = O_n$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

<u>*Solution*</u>. Từ điều kiện đề bài ta có $(A - I_n)(A - 2I_n) = O_n$, suy ra

$$\begin{aligned}
(A^{k-1} + A^{k-2} + \cdots + A + I_n)(A - I_n)(A - 2I_n) &= O_n,\\
(A^k - I_n)(A - 2I_n) &= O_n,\\
(A^k - I_n)(A - 2I_n)(A^{k-1} + 2A^{k-2} + \cdots + 2^{k-2}A + 2^{k-1}I_n) &= O_n,\\
(A^k - I_n)(A^k - 2^k I_n) &= O_n,\\
A^{2k} - (2^k + 1)A^k + 2^k I_n &= O_n.
\end{aligned}$$

17. <u>*Bài 68, trang 45*</u>. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2011 & 1 & -2011 \\ 2010 & 2 & -2011 \\ 2010 & 1 & -2010 \end{bmatrix}$.

Xác định các phần tử của ma trận $S = I_3 + A + A^2 + ... + A^{2011}$.

<u>*Solution*</u>. Ta viết $A = I_3 + B$ với $B = \begin{bmatrix} 2010 & 1 & -2011 \\ 2010 & 1 & -2011 \\ 2010 & 1 & -2011 \end{bmatrix}$. Dễ thấy $B^2 = O_3$.

Từ đó suy ra (*giải thích?*) $A^m = I_3 + mB$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Dẫn tới

$$\begin{aligned}
S &= I_3 + A + A^2 + \cdots + A^{2011} = I_3 + (I_3 + B) + (I_3 + 2B) + \cdots + (I_3 + 2011B)\\
&= 2012I_3 + (1 + 2 + \cdots + 2011)B\\
&= 2012I_3 + 2023066B = 2012 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2023066 \begin{bmatrix} 2010 & 1 & -2011 \\ 2010 & 1 & -2011 \\ 2010 & 1 & -2011 \end{bmatrix} = ...?
\end{aligned}$$

18. <u>*Bài 70, trang 45*</u>. Cho các ma trận $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$.

Biết rằng $AD^t - BC^t = I_n$ và AB^t, CD^t là các ma trận đối xứng.

Chứng minh A^tC, B^tD là các ma trận đối xứng và $A^tD - C^tB = D^tA - B^tC = I_n$.

<u>*Solution*</u>. Ta có AB^t, CD^t là các ma trận đối xứng nên $(AB^t)^t = AB^t$ hay $BA^t = AB^t$ và $(CD^t)^t = CD^t$ hay $DC^t = CD^t$. Suy ra $BA^t - AB^t = O_n$ và $CD^t - DC^t = O_n$.

Lại có $AD^t - BC^t = I_n$, nên $(AD^t - BC^t)^t = I_n$ hay $DA^t - CB^t = I_n$. Từ đó

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AD^t - BC^t & BA^t - AB^t \\ CD^t - DC^t & DA^t - CB^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & O_n \\ O_n & I_n \end{bmatrix} = I_{2n}.$$

Suy ra

$$I_{2n} = \begin{bmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^tA - B^tC & D^tB - B^tD \\ A^tC - C^tA & A^tD - C^tB \end{bmatrix}.$$

Do đó $A^tD - C^tB = D^tA - B^tC = I_n$ và $A^tC - C^tA = D^tB - B^tD = O_n$.

Dẫn đến $A^tC = C^tA,\ B^tD = D^tB$.

Nhưng $C^tA = (A^tC)^t,\ D^tB = (B^tD)^t$ nên ta có $(A^tC)^t = A^tC,\ (B^tD)^t = B^tD$ hay các ma trận A^tC, B^tD là đối xứng.

19. *Bài 71, trang 45*. Cho ma trận $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Chứng minh rằng mỗi ma trận $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ thoả mãn $AB = BA$ phải có dạng $B = sI_2 + tA,\ (s, t \in \mathbb{R})$.

   Solution. Xét thêm hai ma trận $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

   Các ma trận I_2, A, C, D là độc lập tuyến tính (theo nghĩa $\alpha I_2 + \beta A + \gamma C + \delta D = O_2$ khi và chỉ khi $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$), đồng thời C và D không giao hoán với A.

   Ta thấy $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ là không gian vector có $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$ và các ma trận I_2, A, B, C lập thành một cơ sở của $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Mỗi ma trận $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ đều có duy nhất biểu diễn $M = sI_2 + tA + uC + vD\ (s, t, u, v \in \mathbb{R})$.

   Do C và D không giao hoán với A, còn I_2 và A hiển nhiên giao hoán với A, nên mỗi ma trận $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mà B giao hoán với A chỉ có thể được biểu diễn dưới dạng

   $$B = sI_2 + tA,\ (s, t \in \mathbb{R}).$$

20. *Bài 72, trang 45*. Cho ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ thoả mãn $A^{2021} = O_n$.

   Chứng minh rằng ma trận $I_n + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 + ... + \frac{1}{2020}A^{2020}$ khả nghịch và tìm ma trận nghịch đảo của nó.

   Solution. Xét đa thức $f(x) = -\frac{1}{2020}x^{2019} - \frac{1}{2019}x^{2018} - \cdots - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$. Ta có

   $$\begin{aligned} f(A) &= -\frac{1}{2020}A^{2019} - \frac{1}{2019}A^{2018} - \cdots - \frac{1}{3}A^2 - \frac{1}{2}A - I_n \\ B = Af(A) = f(A)A &= -\frac{1}{2020}A^{2020} - \frac{1}{2019}A^{2019} - \cdots - \frac{1}{3}A^3 - \frac{1}{2}A^2 - A \\ B^{2021} &= [Af(A)]^{2021} = ...? = A^{2021}[f(A)]^{2021} = O_n. \end{aligned}$$

   Từ đó $(I_n - B)(I_n + B + B^2 + \cdots + B^{2020}) = I_n - B^{2021} = I_n$.

   Suy ra ma trận $I_n - B = I_n + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 + \cdots + \frac{1}{2020}A^{2020}$ khả nghịch và ma trận nghịch đảo của nó là $I_n + B + B^2 + \cdots + B^{2020}$.

21. *Bài 74, trang 46*. Cho $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ là ma trận khả nghịch, X là ma trận thực cấp $n \times 1$ và Y là ma trận thực cấp $1 \times n$. Đặt $B = XY$ và $\alpha = YA^{-1}X$.

   Chứng minh rằng $A + B$ khả nghịch khi và chỉ khi $\alpha \neq -1$, còn $A - B$ khả nghịch khi và chỉ khi $\alpha \neq 1$.

Solution. Khi $\alpha \neq -1$ ta có $(A+B)^{-1}$ từ đẳng thức sau

$$(A^{-1} - \frac{1}{\alpha+1}A^{-1}BA^{-1})(A+B) = I + A^{-1}B - \frac{1}{\alpha+1}A^{-1}B - \frac{1}{\alpha+1}A^{-1}BA^{-1}B = I_n,$$

với chú ý rằng $(A^{-1}B)^2 = (A^{-1}XY)^2 = (A^{-1}XY)(A^{-1}XY).$

$$= A^{-1}X(YA^{-1}X)Y = \alpha A^{-1}XY = \alpha A^{-1}B$$

Ngược lại, nếu có $(A+B)^{-1}$ thì phải có $\alpha \neq -1$.

Thật vậy, giả sử $\alpha = -1$ thì $A^{-1}B + (A^{-1}B)^2 = O_n$ hay $(I_n + A^{-1}B)A^{-1}B = O_n$.

Suy ra $(A+B)A^{-1}B = O_n$, dẫn đến $A^{-1}B = O_n$, hay $A^{-1}XY = O_n$.

Từ đó $Y(A^{-1}XY)A^{-1}X = 0$, hay $(YA^{-1}X)(YA^{-1}X) = 0$, tức là $\alpha^2 = 0$, hay $\alpha = 0$ (mâu thuẫn!).

Vậy $A+B$ khả nghịch khi và chỉ khi $\alpha \neq -1$. Với $A-B$ làm tương tự...?

22. *Bài 75, trang 46*. Cho các ma trận $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ và đặt $C = AB - BA$.

    Biết rằng $\mathrm{rank}(C) = 1$. Chứng minh rằng $C^2 = O_n$.

    Solution. Theo bài 15 trang 32 ta thấy $C = [\lambda_i u_j] = V^t U$ với $U = (u_1, u_2, ..., u_n) \neq \theta$ và $V = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \neq \theta$, còn V^t là chuyển vị của V. Đồng thời tồn tại duy nhất $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ để $C^2 = \lambda C$. Mặt khác, $\mathrm{tr}(C) = \mathrm{tra}(AB - BA) = 0$. Thế mà $\mathrm{tr}(C) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \lambda$. Do đó $\lambda = 0$, nên $C^2 = O_n$.

23. *Bài 76, trang 46*. Cho ma trận A cấp $m \times n$ và ma trận B cấp $n \times m$ thỏa mãn

    $$(AB)^2 = AB \quad \text{và} \quad \mathrm{rank}(AB) = n$$

    Chứng minh rằng $(BA)^3 = (BA)^2$ và tìm BA.

    Solution. Ta thấy

    $(BA)^3 = BABABA = B(AB)(AB)A = B(AB)^2A = B(AB)A = BABA = (BA)^2.$

    Sử dụng bất đẳng thức về hạng của ma trận $\mathrm{rank}(MN) \leq \min\{\mathrm{rank}(M), \mathrm{rank}(N)\}$ và chú ý ma trận BA có cấp $n \times n$, ta được

    $n = \mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}((AB)^2) = \mathrm{rank}(ABAB) \leq \mathrm{rank}(BAB) \leq \mathrm{rank}(BA) \leq n.$

    Do đó $\mathrm{rank}(BA) = n$, nên suy ra BA khả nghịch, tức là có $(BA)^{-1}$.

    Khi đó xuất phát từ đẳng thức $(BA)^3 = (BA)^2$ ta suy ra

    $$(BA)^{-1}(BA)^3(BA)^{-1} = (BA)^{-1}(BA)^2(BA)^{-1} \quad \text{hay} \quad BA = I_n$$

24. *Bài 77, trang 46.* Cho các ma trận $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{R}), C \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ thỏa mãn

$$ABC = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tính CAB và chứng tỏ $(BCA)^2 = BCA$.

Hint. Nhận xét rằng $(ABC)^2 = ABC$, $\operatorname{rank}(ABC) = 2$.

25. *Bài 80, trang 47.* Cho các ma trận A, B vuông, cùng cấp n và đặt $C = AB - BA$. Chứng minh rằng nếu ma trận C giao hoán với cả hai ma trận A và B thì C là ma trận luỹ linh.

Solution. Ta chứng tỏ bằng quy nạp rằng $AB^k - B^kA = kB^{k-1}C \quad (*)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Với $k = 1$ thì hiển nhiên $AB - BA = C$. Với $k = 2$ thì ta có

$$\begin{aligned} AB^2 - BA^2 &= AB^2 - BAB + BAB - B^2A \\ &= (AB - BA)B + B(AB - BA) = CB + BC = 2BC \end{aligned}$$

Giả sử có $AB^k - B^kA = kB^{k-1}C$, ta chứng tỏ $AB^{k+1} - B^{k+1}A = (k+1)B^kC$.

Thật vậy

$$\begin{aligned} AB^{k+1} - B^{k+1}A &= AB^{k+1} - BAB^k + BAB^k - B^{k+1}A \\ &= (AB - BA)B^k + B(AB^k - B^kA) \\ &= CB^k + B(kB^{k-1}C) = B^kC + kB^kC = (k+1)B^kC. \end{aligned}$$

Theo nguyên lý quy nạp ta đã chứng minh được dẳng thức $(*)$.

Lấy $q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ là đa thức bất kỳ với bậc $\le n$.

Ta có $q'(x) = a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}2x + a_{n-1}$.

Do đẳng thức $(*)$ ta suy ra $Aq(B) - q(B)A = q'(B)C \quad (**)$.

Xét đa thức đặc trưng của ma trận B là $p(x) = \det(B - xI_n)$, ta có $p(B) = O_n$.

Theo $(**)$ ta được $Ap(B) - p(B)A = p'(B)C$ hay là $O_n = p'(B)C$.

Chọn $q(x) \equiv p'(x)$ thì từ $(**)$ ta có $Ap'(B) - p'(B)A = p''(B)C$, dẫn tới

$Ap'(B)C - p'(B)AC = p''(B)C^2$ hay $Ap'(B)C - p'(B)CA = p''(B)C^2$,

tức là $O_n = p''(B)C^2$.

Lại chọn $q(x) \equiv p''(x)$ thì từ $(**)$ ta có $Ap''(B) - p''(B)A = p'''(B)C$, dẫn tới

$Ap''(B)C^2 - p''(B)AC^2 = p'''(B)C^3$ hay $Ap''(B)C^2 - p''(B)C^2A = p'''(B)C^3$,

tức là $O_n = p'''(B)C^3$.

Tiếp tục làm tương tự với $q(x) \equiv p^{(4)}(x), ..., q(x) \equiv p^{(n-1)}(x)$ ta được

$$O_n = p^{(5)}(B)C^5, ..., O_n = p^{(n)}(B)C^n.$$

Chú ý rằng $p^{(n)}(x) = (-1)^n n(n-1)(n-2)...2.1 = (-1)^n n!$, ta dẫn đến

$O_n = (-1)^n n! I_n C^n = (-1)^n n! C^n$, suy ra $C^n = O_n$, hay C là ma trận luỹ linh.

26. *Bài 82, trang 47.* Cho ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ thoả mãn $A^{p+1} = A$ với $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$. Chứng minh rằng:

   a) $\text{rank}(A) + \text{rank}(I_n - A^p) = n$.

   b) $\text{rank}(I_n - A) = \text{rank}(I_n - A^2) = \cdots = \text{rank}(I_n - A^{p-1})$ nếu p là số nguyên tố.

   Solution. Theo bất đẳng thức Sylvester ta có

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(I_n - A^p) - n \leq \text{rank}(A(I_n - A^p)) = \text{rank}(A - A^{p+1}) = \text{rank}(O_n) = 0$$

nên ta được $\text{rank}(A) + \text{rank}(I_n - A^p) \leq n$.

Vẫn theo bất đẳng thức Sylvester ta có $n = \text{rank}(I_n) = \text{rank}(A^p + I_n - A^p) \leq$

$\leq \text{rank}(A^p) + \text{rank}(I_n - A^p) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(I_n - A^p)$.

Vậy ta được $\text{rank}(A) + \text{rank}(I_n - A^p) = n$.

Ta nhận xét rằng với $k, m \in \mathbb{N}$ mà k là ước của m thì $I_n - A^m = (I_n - A^k)P(A)$ với $P(x)$ là đa thức xác định bởi phép chia đa thức $1 - x^m$ cho đa thức $1 - x^k$.

Suy ra $\text{rank}(I_n - A^k) \geq \text{rank}(I_n - A^m)$ (theo bất đẳng thức Sylvester).

Bây giờ xét p là số nguyên tố . Lấy bất kỳ số $k \in \{2, 3, ..., p-1\}$.

Xét tập hợp $S = \{p+1, 2p+1, ..., kp+1\}$ gồm k phần tử.

Từng cặp 2 phần tử trong S có số dư khác nhau khi chia cho k. Thật vậy, giả sử ngược lại có $r, s \in \{1, 2, ..., k\}$ $(r < s)$ để $rp+1$ và $sp+1$ có cùng số dư khi chia cho k , thì $(s-r)p$ chia hết cho k, suy ra $(s-r)$ chia hết cho k, điều này vô lý vì $(s-r) \in \{1, 2, ..., k-1\}$.

Suy ra phải có một phần tử $(qp+1) \in S$ mà $qp+1$ chia hết cho k, hay k là ước của $qp+1$, trong đó $q \in \{1, 2, ..., k-1\}$ (vì rằng $kp+1$ không chia hết cho k).

Theo kết quả trên ta có $\text{rank}(I_n - A) \geq \text{rank}(I_n - A^k) \geq \text{rank}(I_n - A^{qp+1})$.

Nhưng $A^{qp+1} = A^{p+1}A^{qp-p} = AA^{qp-p} = A^{(q-1)p+1}$.

Lại có $A^{(q-1)p+1} = A^{p+1}A^{(q-1)p-p} = AA^{(q-1)p-p} = A^{(q-2)p+1}$.

Tiếp tục như vậy sau q bước ta được $A^{qp+1} = A^{(q-q)p+1} = A$.

Do đó $\text{rank}(I_n - A^{qp+1}) = \text{rank}(I_n - A)$.

Vậy ta được $\text{rank}(I_n - A) = \text{rank}(I_n - A^k)$ với bất kỳ $k \in \{2, 3, ..., p-1\}$, tức là

$$\text{rank}(I_n - A) = \text{rank}(I_n - A^2) = ... = \text{rank}(I_n - A^{p-1}).$$

27. *Bài 86, trang 48.* a) Cho 2 ma trận A, D (không nhất thiết vuông). Chứng tỏ rằng

$$\text{rank}\begin{bmatrix} A & O \\ O & D \end{bmatrix} = \text{rank}(A) + \text{rank}(D).$$

b) Cho 2 ma trận B, C (không nhất thiết vuông). Chứng tỏ rằng

$$\text{rank}\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix} = \text{rank}(B) + \text{rank}(C).$$

Solution. 1) Hạng của ma trận là số vector cột độc lập tuyến tính của ma trận đó. Ký hiệu

$$M = \begin{bmatrix} A & O \\ O & D \end{bmatrix}, \ \tilde{A} = \begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix}, \ \tilde{D} = \begin{bmatrix} O \\ D \end{bmatrix}.$$

Gọi $\tilde{a} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix}$ là 2 cột khác 0 của $\tilde{A}, \tilde{D}$ tương ứng. Hai cột này độc lập tuyến tính vì

$$\lambda_1 \tilde{a} + \lambda_2 \tilde{d} = \lambda_1 \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 a \\ \lambda_2 d \end{bmatrix} = 0,$$

thì phải có $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (do $\tilde{a}, \tilde{d}$ là các cột khác 0).

Từ đó suy ra $\text{rank}(M) = \text{rank}\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{D} \end{bmatrix} = \text{rank}(\tilde{A}) + \text{rank}(\tilde{D}) = \text{rank}(A) + \text{rank}(D)$.

2) Vì đổi chỗ các cột (hàng) không làm thay đổi hạng của ma trận, nên ta có

$$\text{rank}\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix} = \text{rank}\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix} = \text{rank}(B) + \text{rank}(C).$$

28. *Bài 87, trang 48.* Cho các ma trận

$$M_1 = \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Chứng tỏ rằng các đẳng thức $\text{rank}(M_1) = \text{rank}(A) + \text{rank}(D)$,

hoặc $\text{rank}(M_2) = \text{rank}(A) + \text{rank}(D)$ không phải luôn luôn đúng.

Solution. Lấy $A = O$ và $D = O$ thì $\text{rank}(A) = \text{rank}(D) = 0$, nhưng lúc đó

$\text{rank}(M_1) = \text{rank}(B)$, $\text{rank}(M_2) = \text{rank}(C)$, nên các đẳng thức trên sẽ không đúng nếu $B \neq O$ hoặc $C \neq O$.

29. <u>*Bài 88, trang 48*</u>. Cho các ma trận

$$M_1 = \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Chứng tỏ rằng nếu A hoặc D (hoặc cả hai) là ma trận không suy biến, thì

$$\operatorname{rank}(M_1) = \operatorname{rank}(M_2) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(D).$$

Điều ngược lại có đúng không?

<u>*Solution*</u>. +) Giả sử A không suy biến, tức là tồn tại A^{-1}. Khi đó ta có

$$\begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ O & I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & O \\ -CA^{-1} & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Trong khi đó các ma trận $\begin{bmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ O & I_q \end{bmatrix}$ và $\begin{bmatrix} I_m & O \\ -CA^{-1} & I_n \end{bmatrix}$ khả nghịch (vì có định thức bằng $1 \neq 0$), nên ta được

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A & O \\ O & D \end{bmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(D).$$

+) Giả sử D không suy biến, tức là tồn tại D^{-1}. Khi đó ta có

$$\begin{bmatrix} I_m & -BD^{-1} \\ O & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & O \\ -D^{-1}C & I_n \end{bmatrix}.$$

Đến đây ta lý luận tượng tự phần trên.

Điều ngược lại không phải luôn đúng, vì nếu lấy $B = C = O$ thì dù A hoặc B có suy biến chăng nữa ta vẫn có

$$\operatorname{rank}(M_1) = \operatorname{rank}(M_2) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(D).$$

30. <u>*Bài 89, trang 48*</u>. a) Cho các ma trận

$$M_1 = \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Chứng tỏ rằng

$$\operatorname{rank}(M_1) \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(D),$$
$$\operatorname{rank}(M_2) \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(D).$$

b) Chứng tỏ rằng bất đẳng thức sau

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(D)$$

không phải luôn luôn đúng.

Solution. a) Giả sử $A_{m\times p}, B_{m\times q}, D_{n\times q}$ và gọi $r = \operatorname{rank}(A) \leq p$, $s = \operatorname{rank}(D) \leq q$. Ta thấy A có r cột độc lập tuyến tính, gọi đó là $a_1, a_2, ..., a_r$ và D có s cột độc lập tuyến tính, gọi đó là $d_1, d_2, ..., d_s$.

Lấy b_j là cột của B nối tiếp ở phía trên cột d_j của D. Ta lấy $r+s$ cột của M_1 là $\begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_r \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_2 \\ d_2 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} b_s \\ d_s \end{pmatrix}$ và sẽ chứng tỏ chúng độc lập tuyến tính. Thật vậy, xét ràng buộc tuyến tính

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \begin{pmatrix} a_i \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \begin{pmatrix} b_j \\ d_j \end{pmatrix} = \theta,$$

tức là

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j b_j = \theta, \ \sum_{j=1}^{s} \beta_j d_i = \theta.$$

Vì $\{d_1, d_2, ..., d_s\}$ độc lập tuyến tính nên $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_s = 0$. Từ đó $\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i a_i = \theta$, mà $\{a_1, a_2, ..., a_r\}$ độc lập tuyến tính nên suy ra $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_r = 0$. Vậy $r+s$ cột đã chọn ở trên độc lập tuyến tính. Do đó $\operatorname{rank}(M_1) \geq r+s = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(D)$.

Với M_2 chứng minh tương tự.

b) Lấy $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ I_n & I_n \end{bmatrix}$ ta dễ thấy điều cần chứng minh.

31. *Bài 90, trang 49*. Cho các ma trận

$$M_1 = \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Chứng tỏ rằng nếu B khả nghịch thì $\operatorname{rank}(M_1) = \operatorname{rank}(B) + \operatorname{rank}(DB^{-1}A)$,

còn nếu C khả nghịch thì $\operatorname{rank}(M_2) = \operatorname{rank}(C) + \operatorname{rank}(AC^{-1}D)$.

Solution. Ta thấy

$$\begin{bmatrix} I_m & O \\ -DB^{-1} & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & I_p \\ I_m & -B^{-1}A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & O \\ O & -DB^{-1}A \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} O & I_n \\ I_m & -AC^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & -C^{-1}D \\ O & I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & O \\ O & -AC^{-1}D \end{bmatrix}.$$

Đến đây ta áp dụng bài 86 trang 48 và tính chất việc nhân một ma trận với các ma trận khả nghịch không làm thay đổi hạng của ma trận ban đầu.

32. *Bài 91, trang 49*. Cho các ma trận $A_{m\times n}, B_{n\times p}$. Chứng minh rằng

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} O_{m\times p} & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = n + \operatorname{rank}(AB)$$

Solution. Việc đổi chỗ các cột (hàng) không làm thay đổi hạng của ma trận, nên

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} O_{m\times p} & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & O_{m\times p} \\ I_n & B \end{bmatrix}.$$

Đến đây áp dụng kết quả của bài 90 chuyên đề 1 ta được

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & O_{m\times p} \\ I_n & B \end{bmatrix} = \operatorname{rank}(I_n) + \operatorname{rank}(AI_n^{-1}B) = n + \operatorname{rank}(AB).$$

33. *Bài 92, trang 49*. Cho các ma trận $A_{m\times n}, B_{n\times p}, C_{p\times q}$. Chứng minh rằng

$$a)\quad \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \le \operatorname{rank}(AB) + n$$
$$b)\quad \operatorname{rank}(ABC) \ge \operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC) - \operatorname{rank}(B)$$

Solution. a) Ta thấy

$$\begin{bmatrix} I_n & O_{n\times m} \\ -A & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & B \\ A & O_{m\times p} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & -B \\ O_{p\times n} & I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & O_{n\times p} \\ O_{m\times n} & -AB \end{bmatrix}$$

do đó $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} I_n & B \\ A & O_{m\times p} \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} I_n & O_{n\times p} \\ O_{m\times n} & -AB \end{bmatrix} = n + \operatorname{rank}(AB)$

Ta lại có $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \le \operatorname{rank}\begin{bmatrix} I_n & B \\ A & O_{m\times p} \end{bmatrix}$ nên suy ra điều phải chứng minh.

b) Gọi $\operatorname{rank}(B) = r$, áp dụng Định lí (1.5.1) chuyên đề 1 ta thấy tồn tại các ma trận khả nghịch P, Q để $B = P\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}Q = M_{n\times r}N_{r\times q}$, với $P = [M\ S], Q = \begin{bmatrix} N \\ T \end{bmatrix}$

Theo trên ta có $\quad \operatorname{rank}(ABC) = \operatorname{rank}(AMNC) \ge \operatorname{rank}(AM) + \operatorname{rank}(NC) - r$

$\ge \operatorname{rank}(AMN) + \operatorname{rank}(MNC) - r$

$= \operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC) - r.$

34. *Bài 97, trang 50*. Cho các ma trận $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ thỏa mãn $A^2 = B^2 = O_n$ và $A + B$ khả nghịch.

Chứng minh rằng n là số chẵn và $\operatorname{rank}(AB)^k = \dfrac{n}{2}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Solution. Theo bất đẳng thức Sylvester ta có

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \leq \operatorname{rank}(AB) + n.$$

Do $A^2 = O_n$, nên từ đây ta được $2\operatorname{rank}(A) \leq n$, hay $\operatorname{rank}(A) \leq \dfrac{n}{2}$.

Tương tự có $\operatorname{rank}(B) \leq \dfrac{n}{2}$. Suy ra $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \leq \dfrac{n}{2} + \dfrac{n}{2} = n$.

Do $A + B$ khả nghịch nên $\operatorname{rank}(A + B) = n$. Theo bất đẳng thức Sylvester thì

$$n = \operatorname{rank}(A + B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \leq n.$$

Từ đây suy ra $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = \dfrac{n}{2}$. Vậy n phải là sô chẵn.

Lại có $A(AB)^k = A^2(AB)^{k-1}B = O_n(AB)^{k-1}B = O_n$

và $B^2(AB)^k = O_n(AB)^k = O_n$. Dẫn tới

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(AB)^{k+1} &= \operatorname{rank}[(AB)(AB)^k] = \operatorname{rank}[(AB)(AB)^k + B^2(AB)^k]\\ &= \operatorname{rank}[(A+B)B(AB)^k] = \operatorname{rank}[B(AB)^k]\\ &= \operatorname{rank}[A(AB)^k + B(AB)^k] = \operatorname{rank}[(A+B)(AB)^k] = \operatorname{rank}(AB)^k\end{aligned}$$

Như vậy $\operatorname{rank}(AB)^k = \operatorname{rank}(AB)^{k-1} = \cdots = \operatorname{rank}(AB)^2 = \operatorname{rank}(AB)$.

Lại có $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}[A^2 + (AB)] = \operatorname{rank}[A(A + B)] = \operatorname{rank}(A) = \dfrac{n}{2}$.

Vậy $\operatorname{rank}(AB)^k = \dfrac{n}{2}, \forall k \in \mathbb{N}$.

to be continued