Một số bài ôn tập Giải tích

Olympic Toán sinh viên

Vũ Tiến Việt - HMS[(1)]

1. (Minsk - 2006). Tìm tất cả các hàm $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} [f(x)]^3 - 3f(x)[g(x)]^2 = \cos 3x \\ 3[f(x)]^2 g(x) - [g(x)]^3 = \sin 3x \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{cases} [f(x)]^3 - 3f(x)[g(x)]^2 = \cos 3x \\ i3[f(x)]^2 g(x) - i[g(x)]^3 = i\sin 3x \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}, (i^2 = -1).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} [f(x)]^3 + i3[f(x)]^2 g(x) - 3f(x)[g(x)]^2 - i[g(x)]^3 &= \cos 3x + i\sin 3x, \\ [f(x) + ig(x)]^3 &= (\cos x + i\sin x)^3, \\ f(x) + ig(x) &= \cos x + i\sin x, \\ f(x) &= \cos x,\ g(x) = \sin x. \end{aligned}$$

Thử lại ta thấy $f(x) = \cos x,\ g(x) = \sin x$ thỏa mãn đề bài.

2. Cho hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục.

Chứng minh rằng tồn tại $\alpha, \beta \in (a, b)$ sao cho

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \Big(\frac{1}{a-\alpha} + \frac{1}{b-\alpha}\Big)\int_a^\alpha f(t)dt, \\ f(\beta) &= 2\beta\Big(\frac{1}{a^2-\beta^2} + \frac{1}{b^2-\beta^2}\Big)\int_a^\beta f(t)dt. \end{aligned}$$

Hint. Sử dụng định lý Rolle với các hàm

$$\begin{aligned} g(x) &= (x-a)(x-b)\int_a^x f(t)dt, \\ h(x) &= (x^2-a^2)(x^2-b^2)\int_a^x f(t)dt. \end{aligned}$$

[(1)]Hội toán học Hà Nội

3. Cho hàm số

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \cos^i x \sin^j x - \sum_{i=1}^{n} \cos^i x - \sum_{j=1}^{n} \sin^j x + 1.$$

1) Chứng minh rằng phương trình $f_n(x) = 0$ có đúng 2 nghiệm trong khoảng $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ với $n = 2, 3, \ldots$

2) Ký hiệu nghiệm lớn là α_n và nghiệm nhỏ là β_n. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{\pi}{3}, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = \frac{\pi}{6}.$$

Solution. 1) Ta thấy

$$f_n(x) = \Big(1 - \sum_{i=1}^{n} \cos^i x\Big)\Big(1 - \sum_{j=1}^{n} \sin^j x\Big).$$

Đặt $g_n(x) = 1 - \sum\limits_{i=1}^{n} \cos^i x$. Ta có $g_n'(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} i \cos^{i-1} x \sin x > 0, \forall x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$.

Như thế $g_n(x)$ liên tục, khả vi và đơn điệu tăng trong $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$.

Ta lại thấy

$$g_n(\frac{\pi}{6}) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \cos^i \frac{\pi}{6} = 1 - \sum_{i=1}^{n} (\frac{\sqrt{3}}{2})^i < 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} < 0,$$
$$g_n(\frac{\pi}{3}) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \cos^i \frac{\pi}{3} = 1 - \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{2})^i = 1 - (1 - \frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2^n} > 0.$$

Suy ra $g_n(x) = 0$ có duy nhất nghiệm trong khoảng $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$.

Đặt $h_n(x) = 1 - \sum\limits_{j=1}^{n} \sin^j x = 1 - \sum\limits_{j=1}^{n} \cos^j(\frac{\pi}{2} - x) = g_n(\frac{\pi}{2} - x)$.

Với $x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ thì $t = \frac{\pi}{2} - x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ và

$$h_n(\frac{\pi}{6}) = g_n(\frac{\pi}{3}) > 0, \quad h_n(\frac{\pi}{3}) = g_n(\frac{\pi}{6}) < 0.$$

Do đó $h_n(x) = g_n(\frac{\pi}{2} - x) = g_n(t)$ (hàm $h_n(x)$ liên tục, khả vi và đơn điệu giảm) có duy nhất nghiệm trong khảng $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$.

Nghiệm duy nhất của $g_n(x) = 0$ và nghiệm duy nhất của $h_n(x) = 0$ trong khảng $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ không trùng nhau, vì nếu trùng nhau thì ta có $x = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{4}$, khi đó

$$1 = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\sqrt{2}}{2})^i = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^n - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1} \Rightarrow (\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1} = \sqrt{2} - 1 \text{ vô lý!}$$

Vậy phương trình $f_n(x) = g_n(x)h_n(x) = 0$ có đúng 2 nghiệm trong khảng $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$.

2) Gọi $\gamma_n = \arccos(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n})$ ta thấy với $n \geq 2$ thì

$$\begin{aligned}
g(\gamma_n) &= 1 - \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n})^i < 1 - \sum_{i=1}^{n} \left[(\frac{1}{2})^i + i(\frac{1}{2})^{i-1} \frac{1}{2^n} \right] \\
&< 1 - \sum_{i=1}^{n} \left[(\frac{1}{2})^i + (\frac{1}{2})^{i-1} \frac{1}{2^n} \right] = 1 - (1 - \frac{1}{2^n}) - (2 - \frac{1}{2^{n-1}}) \frac{1}{2^n} \\
&= -\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n-1}} < 0.
\end{aligned}$$

Suy ra nghiệm duy nhất α_n của $g_n(x) = 0$ phải thỏa mãn $\gamma_n < \alpha_n < \frac{\pi}{3}$. Thế mà $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \frac{\pi}{3}$, nên ta phải có $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{\pi}{3}$.

Gọi $\delta_n = \frac{\pi}{2} - \gamma_n$ ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = \frac{\pi}{6}$ và

$$h_n(\delta_n) = h_n(\frac{\pi}{2} - \gamma_n) = g_n(\gamma_n) < 0.$$

Suy ra nghiệm duy nhất β_n của $h_n(x) = 0$ (chú ý $h_n(x)$ đơn điệu giảm) phải thỏa mãn $\delta_n > \beta_n > \frac{\pi}{6}$. Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \frac{\pi}{6}$.

4. Cho hàm số $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục và thỏa mãn $f(0) = 0, f(1) = 1$.

Chứng minh rằng với mỗi $n \in \mathbb{N}$ tồn tại $x_1, x_2, ..., x_n \in [0, 1]$ phân biệt sao cho

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} + \cdots + \frac{1}{f'(x_n)} = n.$$

Solution 1. Hàm $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$, có $f(0) = 0, f(1) = 1$, nên giá trị của $f(x)$ phải lấp đầy đoạn $[0, 1]$ (định lý Darboux) và các đoạn con của $[0, 1]$.

Xét $0 < \frac{1}{n} < 1$. Thế thì phải tồn tại $a_1 \in [0, 1]$ sao cho $f(a_1) = \frac{1}{n}$.

Xét $\frac{1}{n} < \frac{2}{n} < 1$. Thế thì phải tồn tại $a_2 \in [a_1, 1]$ sao cho $f(a_2) = \frac{2}{n}$.

Xét $\frac{2}{n} < \frac{3}{n} < 1$. Thế thì phải tồn tại $a_3 \in [a_2, 1]$ sao cho $f(a_3) = \frac{3}{n}$.

... ...

Xét $\frac{n-2}{n} < \frac{n-1}{n} < 1$. Thế thì phải tồn tại $a_{n-1} \in [a_{n-2}, 1]$ sao cho $f(a_{n-1}) = \frac{n-1}{n}$.

Như thế ta có $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = 1$.

Áp dụng định lý Lagrange cho hàm $f(x)$ trên mỗi đoạn $[a_k, a_{k+1}]$, $(k = 0, 1, 2, ..., n-1)$ thì tồn tại $x_k \in (a_k, a_{k+1})$ sao cho

$$f'(x_k) = \frac{f(a_{k+1}) - f(a_k)}{a_{k+1} - a_k} = \frac{1}{n(a_{k+1} - a_k)} \Rightarrow \frac{1}{f'(x_k)} = n(a_{k+1} - a_k).$$

Các x_k là phân biệt. Cho $k = 0 \div (n-1)$ rồi cộng lại ta được điều phải chứng minh.

Solution 2. Theo định lý Lagrange tồn tại số $c \in (0,1)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1.$$

Có hai trường hợp xảy ra:

1) Với mọi $x \in [0,1]$ thì $f'(x) \geq 1$ (hoặc $f'(x) \geq 1$),

2) Tồn tại $a, b \in [0,1]$ để $f'(a) < 1 < f'(b)$.

+) Trường hợp 1) ta suy ra $f(x) \equiv x, \forall x \in [0,1]$. Thật vậy, xét $f'(x) \geq 1, \forall x \in [0,1]$. Giả sử phản chứng: tồn tại $t \in [0,1]$ để $f(t) \neq t$. Tức là $f(t) > t$ hoặc $f(t) < t$.

Khi $f(t) > t$, do định lý Lagrange cho hàm f trên $[t,1]$ tồn tại $\alpha \in (1,t)$ để

$$f'(\alpha) = \frac{f(1) - f(t)}{1 - t} = \frac{1 - f(t)}{1 - t} < \frac{1 - t}{1 - t} = 1$$

mâu thuẫn với việc $f'(x) \geq 1, \forall x \in [0,1]$.

Khi $f(t) < t$, do định lý Lagrange cho hàm f trên $[0,t]$ tồn tại $\beta \in (0,t)$ để

$$f'(\beta) = \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{f(t)}{t} < \frac{t}{t} = 1$$

mâu thuẫn với $f'(x) \geq 1, \forall x \in [0,1]$. Tương tự với $f'(x) \leq 1, \forall x \in [0,1]$.

Kết quả $f(x) \equiv x, \forall x \in [0,1]$ dẫn đến $f'(x) \equiv 1, \forall x \in [0,1]$ và kết luận của bài toán hiển nhiên là đúng.

+) Trường hợp 2) ta thấy do $f'(x)$ liên tục, nên giá trị của $f'(x)$ lấp đầy một đoạn nào đó $[m, M] \subset \mathbb{R}$. Gọi $\varepsilon = \min\{1 - f'(a), f'(b) - 1\} > 0$ thì $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \subset [m, M]$ và giá trị của $f'(x)$ lấp đầy $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$.

Lấy bất kỳ $y_1 \in (1, 1+\varepsilon]$, thì phải tồn tại $x_1 \in [0,1]$ để $f'(x_1) = y_1$.

Xét hệ thức $\dfrac{1}{y_1} + \dfrac{1}{y_2} = 2$, ta được $y_2 = \dfrac{y_1}{2y_1 - 1}$.

Dựa vào tính nghịch biến của hàm $g(x) = \dfrac{x}{2x-1}$ (do $g'(x) = \dfrac{-1}{(2x-1)^2} < 0, \forall x \neq \dfrac{1}{2}$) ta suy ra

$$1 > y_2 > \frac{1+\varepsilon}{1+2\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon} > 1 - \varepsilon \quad \text{hay} \quad y_2 \in (1-\varepsilon, 1)$$

nên phải tồn tại $x_2 \in [0,1]$ để $f'(x_2) = y_2$.

Như vậy ta đã có $x_1, x_2 \in [0,1]$ để $\dfrac{1}{f'(x_1)} + \dfrac{1}{f'(x_2)} = 2$ $(*)$ và rõ ràng $x_1 \neq x_2$ (vì nếu $x_1 = x_2$ thì $f'(x_1) = f'(x_2) = 1$ vô lý!)

Bây giờ nếu n chẵn ($n = 2k$) thì bằng cách lấy k điểm dạng y_1 như nói ở trên và theo kết quả ($*$) ta sẽ được kết luận của bài toán.

Nếu n lẻ ($n = 2k + 1$) thì vẫn bằng cách xét k điểm dạng y_1 như nói ở trên và theo kết quả ($*$), đồng thời lấy thêm điểm $c \in (0, 1)$ mà $f'(c) = 1$ đã có ở phần đầu, ta sẽ được kết luận của bài toán.

5. Cho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi và $f(0) = 0, f(1) = 1$.

   Chứng tỏ rằng với mỗi số tự nhiên n tồn tại các số $c_1, c_2, ..., c_n \in (0, 1)$ phân biệt sao cho

$$f'(c_1)f'(c_2)\cdots f'(c_n) = 1.$$

Solution. Nếu f là hàm đồng nhất $f(x) \equiv x$ thì bài toán là tầm thường.

Ta xét $f(x) \not\equiv x$, chọn $t \in (0, 1)$ mà $f(t) \neq t$. Theo định lý Lagrange ta có

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{f(t)}{t} = f'(t_1) := a, \quad \frac{f(1) - f(t)}{1 - t} = \frac{1 - f(t)}{1 - t} = f'(t_2) := b.$$

Nếu $f(t) < t$ thì $a < 1$ và $b > 1$. Nếu $f(t) > t$ thì $a > 1$ và $b < 1$.

Darboux's Theorem: Let I be a closed interval, $f : I \to \mathbb{R}$ a real-valued differentiable function. Then f' has the intermediate value property: If a and b are points in I with $a < b$, then for every y between $f'(a)$ and $f'(b)$, there exits an x in (a, b) such that $f'(x) = y$.

Theo định lý Darboux thì giá trị của $f'(x)$ lấp đầy khoảng (a, b) hoặc khoảng (b, a).

Suy ra tồn tại $r > 0$ để giá trị của $f'(x)$ lấp đầy khoảng $(1 - r, 1 + r)$.

Ta lấy bất kỳ $y \in (1, 1 + r)$ thì $\frac{1}{y} \in (\frac{1}{1 + r}, 1) \subset (1 - r, 1)$.

Theo định lý Darboux tồn tại $x_1, x_2 \in (0, 1)$ để $f'(x_1) = y, f'(x_2) = \frac{1}{y}$ và $f'(x_1)f'(x_2) = 1$.

Rõ ràng $x_1 \neq x_2$, vì nếu ngược lại $x_1 = x_2$, thì ta có $f'(x_1) = f'(x_2)$ nên $y = \frac{1}{y}$ dẫn tới $y = 1$ là điều vô lý!

Xét n chẵn, $n = 2m$, ta chọn $y_1, y_2, ..., y_m \in (1, 1 + r)$ phân biệt.

Theo lý luận trên tồn tại $n = 2m$ điểm $c_1, c_2, ..., c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, ..., c_n \in (0, 1)$ phân biệt để $f'(c_k) = y_k, f'(m + k) = \frac{1}{y_k}$ với $(k = 1, 2, ..., m)$. Khi đó

$$f'(c_1)f'(c_2)\cdots f'(c_m)f'(c_{m+1})f'(c_{m+2})\cdots f'(c_n) = 1.$$

Xét n lẻ, $n = 2m + 1$, a chọn $y_1, y_2, ..., y_m \in (1, 1 + r)$ phân biệt.

Theo lý luận trên tồn tại $2m$ điểm $c_1, c_2, ..., c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, ..., c_{2m} \in (0, 1)$ phân biệt để $f'(c_k) = y_k, f'(m + k) = \frac{1}{y_k}$ với $(k = 1, 2, ..., m)$. Khi đó

$$f'(c_1)f'(c_2)\cdots f'(c_m)f'(c_{m+1})f'(c_{m+2})\cdots f'(c_{2m}) = 1.$$

Cuối cùng lấy $y_n = 1$ thì tồn tại c_n để $f'(c_n) = y_n = 1$ và do $1 \neq y_k, 1 \neq \frac{1}{y_k}$ nên rõ ràng c_n khác các điểm c_k, c_{m+k} với $(k = 1, 2, ..., m)$. Từ đó ta được

$$f'(c_1)f'(c_2)\cdots f'(c_m)f'(c_{m+1})f'(c_{m+2})\cdots f'(c_{2m})f'(c_n) = 1.$$

6. Cho hàm $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục đến cấp $k - 1$, với $k \in \mathbb{N}$ và thỏa mãn $f^{(k-1)}(0) = 0$, đồng thời

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho

$$\int_0^c xf(x)dx = \frac{kc}{k+1}\int_0^c f(x)dx.$$

Solution. Xét hàm

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{khi } t = 0 \\ \dfrac{t\int\limits_0^t f(x)dx - \int\limits_0^t xf(x)dx}{t^{k-1}}, & \text{khi } 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

Sử dụng quy tắc L"Hopital ta thấy

$$\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0}\frac{t\int\limits_0^t f(x)dx - \int\limits_0^t xf(x)dx}{t^{k=1}} = \lim_{t\to 0}\frac{\int\limits_0^t f(x)dx}{(k+1)t^k}$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{(k+1)kt^{k-1}} = \cdots = \lim_{t\to 0}\frac{f^{(k-1)}(t)}{(k+1)k(k-1)...2.1}$$
$$= \frac{f^{(k-1)}(0)}{(k+1)k(k-1)...2.1} = 0 = g(0).$$

Vậy $g(t)$ liên tục trên $[0, 1]$ và rõ ràng $g(0) = g(1) = 0$.

Mặt khác $g(t)$ khả vi trong $(0, 1)$ và

$$g'(t) = \frac{t^{k+1}\int\limits_0^t f(x)dx - (k+1)t^k\left[t\int\limits_0^t f(x)dx - \int\limits_0^t xf(x)dx\right]}{t^{2(k+1)}}$$
$$= \frac{(k+1)\int\limits_0^t xf(x)dx - kt\int\limits_0^t f(x)dx}{t^{k+2}}.$$

Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $g'(c) = 0$.

Suy ra điều phải chứng minh.

7. Cho hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ liên tục và $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0$.

   Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho

$$c^{n+1} f(c) = n \int_0^c x^n f(x) dx.$$

Lời giải. Xét hàm

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi} \quad t = 0 \\ \frac{1}{t^n} \int_0^t x^n f(x) dx & \text{khi} \quad 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

Ta thấy

$$\lim_{t \to 0^+} g(t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t^n} \int_0^t x^n f(x) dx \underset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{t \to 0^+} \frac{t^n f(t)}{nt^{n-1}} = \lim_{t \to 0^+} \frac{tf(t)}{n} = 0 = g(0),$$

như vậy $g(t)$ liên tục trên $[0,1]$.

Rõ ràng $g(t)$ khả vi trong $(0,1)$ và

$$g'(t) = \frac{t^{2n} f(t) - nt^{n-1} \int_0^t x^n f(x) dx}{t^{2n}} = \frac{t^{n+1} f(t) - n \int_0^t x^n f(x) dx}{t^{n+1}}.$$

Ta sẽ chứng tỏ tồn tại $a \in (0,1]$ để $g(a) = 0$.

Thật vậy, giả sử ngược lại $g(t) \neq 0, \forall t \in (0,1]$. Không mất tổng quát có thể coi $g(t) > 0, \forall t \in (0,1]$). Đặt $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)dx, t \in (0,1]$ là hàm khả vi, $F'(t) = f(t)$.

Với $t \in (0,1]$ ta có

$$\begin{aligned} g(t) = \frac{1}{t^n} \int_0^t x^n f(x) dx &= \frac{1}{t^n} [x^n F(x)]\Big|_0^t - \frac{1}{t^n} \int_0^t nx^{n-1} F(x) dx \\ &= F(t) - \frac{1}{t^n} \int_0^t nx^{n-1} F(x) dx := F(t) - G(t), \end{aligned}$$

trong đó $G(t) = \displaystyle\frac{1}{t^n} \int_0^t nx^{n-1} F(x) dx$.

Ta thấy $G(t)$ khả vi trong $(0,1]$ và

$$G'(t) = \frac{nt^{2n-1} F(t) - nt^{n-1} \int_0^t nx^{n-1} F(x) dx}{t^{2n}} = \frac{nt^{n-1}[F(t) - G(t)]}{t^n} = \frac{ng(t)}{t} > 0.$$

Do vậy $G(t)$ đơn điệu tăng trên $[0,1]$, nên $G(1) > G(0) = 0$.

Mặt khác $F(1) = \int_0^1 f(x)dx = 0$ nên $g(1) = F(1) - G(1) = -G(1) < 0$, mâu thuẫn với giả thiết $g(t) > 0, \forall t \in (0,1]$.

Vậy phải tồn tại $a \in (0,1]$ để $g(a) = 0$. Lúc này áp dụng định lý Rolle cho $g(t)$ thì tồn tại $c \in (0,a) \subset (0,1)$ sao cho

$$0 = g'(c) = \frac{c^{n+1}f(c) - n\int_0^c x^n f(x)dx}{c^{n+1}}.$$

Dẫn tới điều cần chứng minh.

8. Cho hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ liên tục và $\int_0^1 f(x)dx = 0$, hàm $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục với $g(0) = 0$ và $g'(x) > 0, \forall x \in (0,1)$.

   Chứng minh rằng tồn tại $\xi \in (0,1)$ sao cho

$$f(\xi) = \frac{g'(\xi)}{[g(\xi)]^2}\int_0^\xi f(x)g(x)dx.$$

Solution. Xét hàm số

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi} \quad t = 0 \\ \frac{1}{g(t)}\int_0^t g(x)f(x)dx & \text{khi} \quad 0 < t \le 1 \end{cases}$$

Ta thấy

$$\lim_{t\to+0} h(t) = \lim_{t\to+0}\frac{1}{g(t)}\int_0^t g(x)f(x)dx = \lim_{t\to+0}\frac{g(t)f(t)}{g'(t)} = \frac{g(0)f(0)}{g'(0)} = 0 = h(0),$$

như vậy $h(t)$ liên tục trên $[0,1]$.

Rõ ràng $h(t)$ khả vi trong $(0,1)$ và

$$h'(t) = \frac{[g(t)]^2 f(t) - g'(t)\int_0^t g(x)f(x)dx}{[g(t)]^2}.$$

Ta sẽ chứng tỏ tồn tại $a \in (0,1]$ để $h(a) = 0$.

Thật vậy, giả sử ngược lại $h(t) \neq 0, \forall t \in (0,1]$. Không mất tổng quát có thể coi $h(t) > 0, \forall t \in (0,])$. Đặt $F(t) = \int_0^t f(x)dx, t \in (0,1]$ là hàm khả vi, $F'(t) = f(t)$.

Với $t \in (0,1]$ ta có

$$\begin{aligned} h(t) = \frac{1}{g(t)}\int_0^t g(x)f(x)dx &= \frac{1}{g(t)}[g(x)F(x)]\Big|_0^t - \frac{1}{g(t)}\int_0^t g'(x)F(x)dx \\ &= F(t) - \frac{1}{g(t)}\int_0^t g'(x)F(x)dx := F(t) - G(t), \end{aligned}$$

với $G(t) = \dfrac{1}{g(t)} \displaystyle\int_0^t g'(x)F(x)dx$.

Ta thấy $G(t)$ khả vi trong $(0,1]$ và

$$G'(t) = \frac{g(t)g'(t)F(t) - g'(t)\int_0^t g'(x)F(x)dx}{[g(t)]^2} = \frac{g'(t)[F(t)-G(t)]}{g(t)} = \frac{g'(t)h(t)}{g(t)} > 0$$

(chú ý $g'(t) > 0$, nên $g(t)$ dơn điệu tăng, do đó $g(t) > g(0) = 0$).

Vậy $G(t)$ đơn điệu tăng trên $[0,1]$, nên $G(1) > G(0) = 0$.

Mặt khác $F(1) = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0$ nên $h(1) = F(1) - G(1) = -G(1) < 0$, mâu thuẫn với giả thiết $h(t) > 0, \forall t \in (0,1]$.

Vậy phải tồn tại $a \in (0,1]$ để $h(a) = 0$. Lúc này áp dụng định lý Rolle cho $h(t)$ thì tồn tại $\xi \in (0,a) \subset (0,1)$ để $h'(\xi) = 0$. Dẫn tới điều cần chứng minh.

Ghi chú. Nếu lấy hàm $g(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ ta được bài toán:

Cho hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ liên tục và $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n tồn tại $\xi \in (0,1)$ sao cho

$$\xi^{n+1} f(\xi) = n \int_0^\xi x^n f(x)dx.$$

9. Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[0,\pi]$, khả vi trong $(0,\pi)$

   và thỏa mãn $f(0) = f(\pi), [f(x)]^2 + [f'(x)]^2 \neq 0, \forall x \in (0,\pi)$.

   Chứng minh rằng tồn tại $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ sao cho

   $$\tan\alpha = \frac{f(2\alpha) + 2f'(2\alpha)}{f(2\alpha) - 2f'(2\alpha)}$$

   Hint. Xét hàm $g(x) = f(x)(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})$ và sử dụng định lý Rolle.

10. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

    $$f(\frac{x-1}{x}) + f(\frac{1}{1-x}) = ax^2 + bx + c,$$

    với $a, b, c \in \mathbb{R}$.

    Solution. Đặt $y = \dfrac{1}{1-x}$ ta được

    $$f(\frac{1}{1-y}) + f(y) = a(\frac{y-1}{y})^2 + b(\frac{y-1}{y}) + c.$$

Lại đặt $y = \dfrac{x-1}{x}$ ta được

$$f(y) + f(\frac{y-1}{y}) = a(\frac{1}{1-y})^2 + b(\frac{1}{1-y}) + c.$$

Suy ra

$$2f(y) + f(\frac{y-1}{y}) + f(\frac{1}{1-y}) = a(\frac{y-1}{y})^2 + a(\frac{1}{1-y})^2 + b(\frac{y-1}{y}) + b(\frac{1}{1-y}) + 2c.$$

Đến đây chú ý rằng

$$f(\frac{y-1}{y}) + f(\frac{1}{1-y}) = ay^2 + by + c,$$

ta thu được

$$\begin{aligned}
2f(y) &= a(\frac{y-1}{y})^2 + a(\frac{1}{1-y})^2 + b(\frac{y-1}{y}) + b(\frac{1}{1-y}) - ay^2 - by + c,\\
f(y) &= \frac{a}{2}\Big[(\frac{y-1}{y})^2 + (\frac{1}{1-y})^2 - y^2\Big] + \frac{b}{2}\Big[(\frac{y-1}{y}) + (\frac{1}{1-y}) - y\Big] + \frac{c}{2}.
\end{aligned}$$

Bây giờ chỉ việc thay $y = x$ ta sẽ được hàm $f(x)$ cần tìm.

11. 1) Cho hàm $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục và $g(0) = -1, g(1) = 2$.

Chứng minh rằng

$$\int_0^1 [g'(x)]^2 dx \geq 12 \int_0^1 g(x)dx$$

Lời giải. Xét tập hợp E các hàm liên tục trên $[0,1]$ với tích vô hướng

$$f, g \in E \quad \text{thì} \quad < f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx, \ \|f\| = \sqrt{< f, f >}.$$

Như thế E trở thành không gian vector tuyến tính với tích vô hướng (không gian Hilbert).

Xét $e_1(x) = 1, e_2(x) = \sqrt{3}(2x-1) \in E$. Ta dễ thấy $< e_1, e_2 >= 0, \|e_1\| = \|e_2\| = 1$ và $\{e_1, e_2\}$ độc lập tuyến tính.

Gọi F là không gian con của E sinh bởi cơ sở trực chuẩn $\{e_1, e_2\}$, tức là $F = \text{span}(\{e_1, e_2\})$. Khi đó lấy bất kỳ $h \in E$ thì hình chiếu vuông góc của h trên F là

$$h_F =< e_1, h > e_1 + < e_2, h > e_2.$$

Rõ ràng là $\|h_F\| \leq \|h\|$, nên suy ra $| < e_1, h > |^2 + | < e_2, h > |^2 \leq \|h\|^2 \qquad (1).$

Lấy hàm $g \in E$ khả vi liên tục, thì $g' \in E$ và ta có

$$\begin{aligned}
< e_1, g' > &= \int_0^1 g'(x)dx = g(1) - g(0),\\
< e_2, g' > &= \sqrt{3}\int_0^1 (2x-1)g'(x)dx = \sqrt{3}(2x-1)g(x)\Big|_0^1 - 2\sqrt{3}\int_0^1 g(x)dx\\
&= \sqrt{3}\Big[(g(1) + g(0) - 2\int_0^1 g(x)dx\Big].
\end{aligned}$$

Áp dụng (1) cho $h = g'$ ta được

$$[g(1) - g(0)]^2 + 12\Big[\frac{g(1)+g(0)}{2} - \int_0^1 g(x)dx\Big]^2 \leq \int_0^1 [g'(x)]^2 dx \tag{2}$$

Áp dụng (2) cho hàm g đã cho với $g(0) = -1, g(1) = 2$ ta được

$$9 + 12\Big[\frac{1}{2} - \int_0^1 g(x)dx\Big]^2 \leq \int_0^1 [g'(x)]^2 dx.$$

Việc còn lại là chứng minh

$$9 + 12\Big[\frac{1}{2} - \int_0^1 g(x)dx\Big]^2 \geq 12\int_0^1 g(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad 12\Big[\int_0^1 g(x)dx - 1\Big]^2 \geq 0, \quad \text{đúng!}$$

2) Cho hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục và $f(0) = 0, f(1) = 1$. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + \frac{4}{3} \geq 4\int_0^1 f(x)dx$$

3) Cho hàm $[0,1] \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục và $f(0) = f(1) = -\dfrac{1}{6}$. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \geq 2\int_0^1 f(x)dx + \frac{1}{4}$$

Hint. Học cách làm của phần 1), áp dụng bất đẳng thức (2) cho 2 hàm cụ thể đã cho.

12. Cho hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ khả tích với $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = k$.

Chứng minh rằng $\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^2 dx \geq (2k)^2$.

Lời giải. Xét hàm $g(x) = 6kx - 2k$. Ta có $\int_0^1 [f(x) - g(x)]^2 dx \geq 0$. Mặt khác

$$\begin{aligned}
\int_0^1 [f(x) - g(x)]^2 dx &= \int_0^1 [f(x)]^2 dx - 2\int_0^1 f(x)g(x)dx + \int_0^1 [g(x)]^2 dx \\
&= \int_0^1 [f(x)]^2 dx - 2\int_0^1 f(x)(6kx - 2k)dx + \int_0^1 (6kx - 2k)^2 dx \\
&= \int_0^1 [f(x)]^2 dx - 12k\int_0^1 xf(x)dx + 4k\int_0^1 f(x)dx \\
&\quad + \int_0^1 (36k^2x^2 dx - 24k^2x + 4k^2)dx \\
&= \int_0^1 [f(x)]^2 dx - 4k^2.
\end{aligned}$$

Như thế $\int_0^1 [f(x)]^2 dx \geq 4k^2 = (2k)^2$.

• Chọn k thích hợp sẽ được các bài thi Olympic.

Chẳng hạn với $k = 1$ là bài thi OLP-2004 của Kiev.

13. Cho $n \in \mathbb{N}$ và $f(x), g_1(x), g_2(x), ..., g_n(x)$ là các hàm khả vi trên $[a, b]$. Đồng thời $g_i(x) \neq 0, \forall x \in (a, b), \forall (i = 1, 2, ..., n)$. Chứng minh rằng tồn tại $\xi \in (a, b)$ sao cho

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{g_i'(\xi)}{g_i(b) - g_i(a)}.$$

Hint. Sử dụng định lý Rolle cho hàm

$$F(x) = n[f(x) - f(a)] - \sum_{i=1}^{n} \frac{f(b) - f(a)}{g_i(b) - g_i(a)}[g_i(x) - g_i(a)].$$

14. Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục với $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$.

Chứng minh rằng với mỗi cặp điểm (x_1, x_2) mà $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ và $f(x_1)f(x_2) > 0$ thì tồn tại $t \in (x_1, x_2)$ sao cho

$$\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = t - \frac{f(t)}{f'(t)}.$$

Solution. Ta thấy f là hàm tăng trên $[a, b]$ và do $f(x_1)f(x_2) > 0$ nên $f(x) \neq 0$ trên $[x_1, x_2]$.

Đặt $F(x) = -\dfrac{x}{f(x)}$, $G(x) = -\dfrac{1}{f(x)}$ với $x \in [x_1, x_2]$. Ta thấy F, G liên tục trên $[x_1, x_2]$, khả vi trong (x_1, x_2) và $G'(x) = \dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2} \neq 0$ trong (x_1, x_2).

Áp dụng định lý giá trị trung bình Cauchy tồn tại $t \in (x_1, x_2)$ sao cho

$$\frac{F(x_2) - F(x_1)}{G(x_2) - G(x_1)} = \frac{F'(t)}{G'(t)},$$

$$\frac{-\frac{x_2}{f(x_2)} + \frac{x_1}{f(x_1)}}{-\frac{1}{f(x_2)} + \frac{1}{f(x_1)}} = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{\frac{-f(t)+tf'(t)}{[f(t)]^2}}{\frac{f'(t)}{[f(t)]^2}} = t - \frac{f(t)}{f'(t)}.$$

15. Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là hàm thuộc lớp $C^2[0,1]$ (tức là f'' tồn tại và liên tục trên $[0,1]$) sao cho $f(0) = f(1)$ và $f'(0) = a \neq 0$.

Chứng minh rằng

$$\int_0^1 [f''(x)]^2 dx \geq 3a^2.$$

Hãy chỉ ra hàm f để có dấu $(=)$ trong bất đẳng thức.

Solution. Cách 1. Gọi $\mathcal{F}$ là lớp hàm thỏa mãn giả thiết của đề bài. Dĩ nhiên là trong lớp hàm này có các đa thức.

Xét đa thức $p(x) = \frac{a}{2}x(x-1)(x-2)$ thì $p \in \mathcal{F}$ và dễ thấy $\int_0^1 [p''(x)]^2 dx = 3a^2$.

Ta có $f(x) = p(x) + f(x) - p(x) = p(x) + g(x)$, với $g(x) = f(x) - p(x)$ và thỏa mãn $g(0) = g(1), g'(0) = f'(0) - p'(0) = 0$. Khi đó

$$\int_0^1 f''(x)g''(x)dx = 3a\int_0^1 (x-1)g''(x)dx = 3a\left[(x-1)g'(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 g'(x)dx\right] = 0,$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 [f''(x)]^2 dx &= \int_0^1 [p''(x) + g''(x)]^2 dx \\ &= \int_0^1 [p''(x)]^2 dx + 2\int_0^1 f''(x)g''(x)dx + \int_0^1 [g''(x)]^2 dx \\ &= 3a^2 + \int_0^1 [g''(x)]^2 dx \geq 3a^2.\end{aligned}$$

Dấu $(=)$ xảy ra khi và chỉ khi $\int_0^1 [g''(x)]^2 dx = 0$, hay $g(x) \equiv 0, \forall x \in [0,1]$, tức là $f(x) \equiv p(x), \forall x \in [0,1]$.

Cách 2. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz về tích phân ta có

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x-1)^2 dx \int_0^1 [f''(x)]^2 dx &\geq \left[\int_0^1 (x-1)f''(x)dx\right]^2 \\ \frac{1}{3}\int_0^1 [f''(x)]^2 dx &\geq \left[\int_0^1 (x-1)f''(x)dx\right]^2 \\ &= \left[(x-1)f'(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'(x)dx\right]^2 = a^2.\end{aligned}$$

Suy ra bất đẳng thức cần phải chứng minh.

Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $f''(x) = k(x-1), f(0) = f(1), f'(0) = a$,

hay $f(x) = \frac{a}{2}(x^3 - 3x^2 + 2x - 1) + c$ với c là hằng số tùy ý.

16. Cho hàm $f(x)$ khả vi liên tục trên $[a, b]$. Giả sử tồn tại $c \in (a, b)$ để $f'(c) = 0$.

Chứng minh rằng tồn tại $\xi \in (a, b)$ sao cho

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - a}.$$

Solution. Nếu $f(c) = f(a)$ thì ta lấy ngay $\xi = c$.

Khi $f(c) \neq f(a)$ ta xét hàm

$$g(x) = f'(x) - \frac{f(x) - f(a)}{b - a}, x \in [a, b].$$

Đây là hàm liên tục trên $[a, b]$.

+) Nếu $f(c) > f(a)$ thì $g(c) = \frac{f(a) - f(c)}{b - a} < 0$.

Chọn $d \in [a, c)$ sao cho $f(d) = \min f(x)$ trên $[a, c)$.

Theo định lý Fermat thì $f'(d) = 0$. Lúc đó $g(d) = \frac{f(a) - f(d)}{b - a} > 0$.

Vì $g(x)$ liên tục, nên tồn tại $\xi \in (d, c) \subset (a, b)$ sao cho $g(\xi) = 0$, nên suy ra điều cần chứng minh.

+) Nếu $f(c) < f(a)$ thì $g(c) = \frac{f(a) - f(c)}{b - a} > 0$.

Chọn $e \in [a, c)$ sao cho $f(e) = \max f(x)$ trên $[a, c)$.

Theo định lý Fermat thì $f'(e) = 0$. Lúc đó $g(e) = \frac{f(a) - f(e)}{b - a} < 0$.

Vì $g(x)$ liên tục, nên tồn tại $\xi \in (e, c) \subset (a, b)$ sao cho $g(\xi) = 0$, nên suy ra điều cần chứng minh.

to be continued