- Ôn 5 đề cấp trường gần nhất
- Kỷ yếu 5 năm gần nhất

Chuyên đề. Định thức

1) Quy tắc tam giác

VD1. Tìm x biết $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & x+11 \\ 3 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 2$

$\Leftrightarrow 50 + 16 + 3(x+11) - 15 - 40 - 4(x+11) = 2$

$\Leftrightarrow 11 - (x+11) = 2 \Leftrightarrow -x = 2 \Leftrightarrow x = -2$

VD2. Tìm giá trị lớn nhất của định thức cấp 3 có các phần tử bằng 1 hoặc -1.

* Xét $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = m_1 + m_2 + m_3 - m_4 - m_5 - m_6$

với $m_j = 1, -1$ $(j = \overline{1,6})$

* NX. $m_1 m_2 m_3 (-m_4)(-m_5)(-m_6) = -\underbrace{m_1 m_2 m_3}_{} \cdot \underbrace{m_4 m_5 m_6}_{}$

$= -\prod a_{ij} \quad \prod a_{ij}$

$= -(\prod a_{ij})^2 < 0$

$\Rightarrow$ Trong 6 số $m_1, m_2, m_3, -m_4, -m_5, -m_6$, luôn có 2 số trái dấu

$\Rightarrow$ 2 số đó có tổng $= 0 \Rightarrow \det A =$ Tổng 4 số còn lại ≤ 4

$\Rightarrow \operatorname{Max} \det A = 4$

* Ta chỉ ra đc Dấu = Khi $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$

2) Khai triển định thức

- Ktriển theo hàng i : $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$, A_{ij} = Phần bù đại số $= (-1)^{i+j} \cdot |M_{ij}|$
- Ktriển theo cột j : $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$,

VD3. Cho ma trận A. Tính tổng các phần bù đại số của các phần tử thuộc dòng 4 của A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & -m \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$$

* Xét $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & -m \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Khiển A' theo hàng 4: $\det A' = 1.A_{41} + 1.A_{42} + 1.A_{43} + 1.A_{44}$

mà $\det A' = 0$ (vì hàng 3,4 tỉ lệ)

$\Rightarrow A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = 0$

VD4. Cho ma trận A. Tính $1A_{41} + 2A_{42} + 3A_{43} + 4A_{44}$? $= T$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & -5 & 6 \\ -4 & 5 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

* Xét $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Khiển A' theo hàng 4:

$\det A' = 1A_{41} + 2A_{42} + 3A_{43} + 4A_{44}$

mà $\det A' = 0$ (vì h1,4 giống nhau)

$\Rightarrow T = 0$

3) Khai triển theo khối

VD5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-3)(-8) = 24$

4) Dùng BĐSC

VD6. Tính $det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times 1 \\ \times 1 \\ \times 1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times -1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$

$= 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 48$

VD6 Tính định thức sau: $D = \begin{array}{c} \\ \times 1 \\ \times 1 \\ \times 1 \end{array}$ $\begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}$

$$= (a+b+c-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix} \quad \begin{array}{ccc} \times(-a) & \times(-b) & \times(-c) \end{array}$$

$$= (a+b+c-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -a-x & c-a & b-a \\ 0 & c-b & -b-x & a-b \\ 0 & b-c & a-c & -c-x \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \times 1 \\ \\ \end{array}$$

$$= (a+b+c-x)\begin{vmatrix} c-b-a-x & c-b-a-x & 0 \\ c-b & -b-x & a-b \\ 0 & a-b-c-x & a-b-c-x \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c-x)(c-b-a-x)(a-b-c-x)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ c-b & -b-x & a-b \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c-x)(c-b-a-x)(a-b-c-x)(c-a-b-x)$$

VD7 Tìm số thực x thỏa mãn

$$\det\begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2-x & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+x & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2022 & 2022 & 2022 & \cdots & 2022-x \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \times(-1) \\ \times 1 \\ \\ \times(-1) \end{array} = 0.$$

$\underbrace{1-2}_{-1}+\underbrace{3-4}_{-1}+\ldots \underbrace{2021-2022}_{-1}$

$-1011+x$

* Cộng vào hàng 1: (-1) lần các hàng chẵn và 1 lần các hàng lẻ

$$\Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} x-1011 & x-1011 & \cdots & x-1011 \\ 2 & 2-x & & 2 \\ 3 & 3 & & 3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2022 & 2022 & \cdots & 2022-x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x-1011).\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2-x & & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2022 & 2022 & & 2022-x \end{vmatrix} \begin{array}{c} \times(-2) \cdots \times(-2022) \end{array} = 0$$

$$\Rightarrow (x-1011).\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-1011).(-x)^{2021} = 0$$

$\Rightarrow x = 1011$ hoặc $x = 0$

VD8 . Cho A là ma trận vuông cấp 2024, với $a_{ii} \in \{8,10,12,14\}$ $(i = \overline{1,2024})$ và $a_{ij} \in \{7,9,11,13\} (i \neq j)$. Chứng minh rằng $\det A \neq 0$.

Xét phép đồng dư cho 2:

$$|A| \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \times 1 \\ \\ \times 1 \end{matrix} \equiv \begin{vmatrix} 2023 & 2023 & \cdots & 2023 \\ 1 & 0 & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \equiv 2023 . \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times -1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\equiv 2023 . \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \equiv 2023 . (-1)^{2023} \equiv -2023 \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow \det A \neq 0$$

VD9 Tính định thức của ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & 2013 & 2014 \\ 2 & 1 & 2 & \ldots & 2012 & 2013 \\ 3 & 2 & 1 & \ldots & 2011 & 2012 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2013 & 2012 & 2011 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tự làm

VD10 Tìm x thỏa mãn:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & \ldots & 2018 \\ 1 & x & 2 & \ldots & 2018 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & x \end{vmatrix} = 0.$$

Tự làm

5) Sử dụng các đthức đặc biệt

① **Đthức Vandermonde**:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

(Được dùng)

VD.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 \end{vmatrix} = (3-2)(4-2)(5-2)(4-3)(5-3)(5-4) = 12$$

② **Đthức 3 đg chéo**: (Ktriển)

VD11 Cho $a, b \in R, a \neq b$. Tính định thức cấp n:

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

* Khiển theo hàng 1:

$$D_n = (a+b).\begin{vmatrix} a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & a+b & ab \\ 0 & 0 & & 1 & a+b \end{vmatrix} - ab.\begin{vmatrix} 1 & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & & a+b & ab \\ 0 & 0 & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$D_n = (a+b)\, D_{n-1} - ab.D_{n-2}$$

$$D_n = aD_{n-1} + bD_{n-1} - ab.D_{n-2}$$

* $\underbrace{D_n - aD_{n-1}} = b(\underbrace{D_{n-1} - aD_{n-2}}) = b^2(D_{n-2} - aD_{n-3}) = \dots = b^{n-2}(D_2 - aD_1)$

$= b^{n-2}\left((a+b)^2 - ab - a(a+b)\right) = b^{n-2}.b^2 = b^n$

* $D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2}) = \dots = a^{n-2}(D_2 - bD_1) = a^n$

* Có $\begin{cases} D_n - aD_{n-1} = b^n & \times b \\ D_n - bD_{n-1} = a^n & \times a \end{cases} \Rightarrow (b-a)D_n = b^{n+1} - a^{n+1}$

$\Rightarrow D_n = \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}$

VD12

$$x_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

* Khiển theo hàng 1:

$$x_n = 3.\begin{vmatrix} 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & & 1 & 3 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 3 & 2 \\ 0 & 0 & & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$= \underline{3.\,x_{n-1}} - 2x_{n-2}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_n - x_{n-1} = 2(x_{n-1} - x_{n-2}) = \dots = 2^{n-2}(x_2 - x_1) = 2^n & (\times 2) \\ x_n - 2x_{n-1} = x_{n-1} - 2x_{n-2} = \dots = x_2 - 2x_1 = 7 - 2.3 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_n = 2^{n+1} - 1$

VD13.

$$X_n = \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} & \boxed{1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \boxed{1} & \boxed{1} \end{vmatrix} \qquad A = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Tự làm

6) Sử dụng đlý Halminton-Caley

$$\det(A - xI) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}.\underbrace{\text{Trace}(A)}.x^{n-1} + \underline{(-1)^{n-2}.C_2(A)x^{n-2} + \ldots + \det A} \quad (*)$$

- Trace(A) = Vết của A = Tổng các phần tử trên đchéo chính
- $C_2(A)$ = Tổng các đthức con cấp 2 chính của A
- (*) nhận các gtrị riêng làm n₀, nhận A làm n₀

VD14 Cho ma trận $A = [a_{ij}]$ vuông cấp n có vết $Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = 2017$ và $\boxed{r(A) = 1.}$ Tính $\det(A + I)$.

* Vì $r(A) = 1 \Rightarrow C_2 = C_3 = \ldots = \det A = 0$
* $\det(A + I) = (-1)^n.(-1)^n + (-1)^{n-1}.\text{Trace}(A).(-1)^{n-1} = 1 + \text{Trace}(A) = 2018$

VD15. Cho A là ma trận vuông cấp 2, B là ma trận vuông cấp 3. Chứng minh rằng:

a. $\det A = \frac{1}{2}((tr(A)^2 - tr(A^2))$

b. $\det B = \frac{1}{6}\left[(tr(B))^3 - 3tr(B)tr(B^2) + 2tr(B^3)\right]$

a) * $\det(\underline{A - A.I}) = (-1)^2 A^2 + (-1)^1.Tr(A).A^1 + (-1)^0.\det A = 0$

$$A^2 - Tr(A).\underline{A} + I\det A = 0$$

* lấy vết 2 vế: $Tr(A^2) - (Tr(A))^2 + 2\det A = 0 \Rightarrow \det A = \dfrac{(Tr(A))^2 - Tr(A^2)}{2}$

b) * $\det(B - BI) = (-1)^3 B^3 + (-1)^2.Tr(B).B^2 + (-1)^1.C_2(B) + (-1)^0\det B = 0$

$$-B^3 + Tr(B).B^2 - \underline{C_2(B)}B + I\det B = 0$$

* Xét PT $-x^3 + Tr(B)x^2 - C_2(B)x + \det B = 0$ nhận các gtrị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ là n₀

$$\overset{\text{Viet}}{\Longrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = Tr(B) \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = C_2(B) \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det(B) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)$$

$$\Rightarrow C_2(B) = (Tr(B))^2 - (Tr(B^2))$$

b) * $\det(B - BI) = (-1)^3 . B^3 + (-1)^2 . Tr(B) . B^2 + (-1)^1 . C_2(B) + (-1)^0 \det B = 0$

$$-B^3 + Tr(B) . B^2 - \underline{C_2(B)} B + I \det B = 0 \quad (*)$$

* Xét PT $-x^3 + Tr(B)x^2 - C_2(B)x + \det B = 0$ nhận các gtr riêng $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ là n₀

$$\overset{Viet}{\Longrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = Tr(B) \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = C_2(B) \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det(B) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = \frac{1}{2}\left[(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2 - (\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)\right]$$

$$\Rightarrow C_2(B) = \frac{1}{2}\left[(Tr(B))^2 - (Tr(B^2))\right]$$

* Lấy vết 2 vế (*) $\Rightarrow -(Tr(B^3)) + Tr(B) . Tr(B^2) - \left[\frac{(Tr(B))^2 - (Tr(B^2))}{2}\right] Tr(B) + 3\det B = 0$

$$\Rightarrow -2(Tr(B^3)) + 3Tr(B)Tr(B^2) - Tr(B)^2 Tr(B) + 6\det B = 0$$