Một số dãy đưa về dãy tuyến tính.

Dạng 1 $(u_n)^a = (u_{n-1})^b \cdot (u_{n-2})^c$ (a, b, c – hằng số)

Lấy ln 2 vế ta đc:

$$a \ln u_n = b \ln u_{n-1} + c \ln u_{n-2}$$

Đặt $v_n = \ln u_n$ ta đc dãy tuyến tính cấp 2:

$$v_n = \frac{b}{a} v_{n-1} + \frac{c}{a} v_{n-2}$$

Dạng 2 $u_n = \dfrac{a \cdot u_{n-1} \cdot u_{n-2}}{b\, u_{n-1} + c \cdot u_{n-2}}$ (a, b, c – hằng số)

$\rightarrow \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{b \cdot u_{n-1} + c\, u_{n-2}}{a \cdot u_{n-1} \cdot u_{n-2}}$

Đặt $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ ta đc dãy tuyến tính

$$v_n = \frac{c}{a} v_{n-1} + \frac{b}{a} v_{n-2}$$

VD1: Cho $\begin{cases} u_0 = a > 0 \\ u_1 = b > 0. \\ u_{n+2} = \sqrt[3]{u_n^2 \cdot u_{n+1}} \end{cases}$ Tìm số hạng TQ.

Đặt $v_n = \ln u_n$ ta đc $v_{n+2} = \frac{2}{3} v_{n+1} + \frac{1}{3} v_n$

pt đặc trưng $\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$, $\lambda = \frac{-1}{3}$.

$\rightarrow v_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^n$ (*)

Thay $v_0 = \ln a$, $v_1 = \ln b$ vào (*) để tìm C_1, C_2

CTTQ $u_n = e^{v_n}$

VD2: Cho $u_0 = a > 0$, $u_1 = b > 0$ và $u_{n+2} = \dfrac{2u_n \cdot u_{n+1}}{u_n + u_{n+1}}$ $\forall n \geq 0$.

Tìm số hạng TQ của dãy.

$$\frac{1}{u_{n+2}} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2u_n \cdot u_{n+1}} = \frac{1}{2u_{n+1}} + \frac{1}{2u_n}.$$

Đặt $v_n = \frac{1}{u_n}$ ta đc dãy tuyến tính: $v_{n+2} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n$ (*)

pt đặc trưng: $t^2 - \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow t_1 = -\frac{1}{2}, t_2 = 1$

$\Rightarrow$ CTTQ của dãy $\{v_n\}$ là

$$v_n = C_1\left(-\frac{1}{2}\right)^n + C_2 \cdot 1^n$$

Thay $v_0 = \frac{1}{a}$, $v_1 = \frac{1}{b}$ vào để tìm C_1 và C_2.

CTTQ của dãy đã cho: $u_n = \frac{1}{v_n}$

Dạng 3
$$u_1 = \alpha$$
$$u_{n+1} = a u_n + \sqrt{b \cdot u_n^2 + c} \quad (a^2 - b = 1)$$

VD3: Tìm số hạng TQ của dãy $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u + \sqrt{3u_n^2 - 2} \end{cases}$ (*)

Giải:

(*) $\Leftrightarrow (u_{n+1} - 2u_n)^2 = 3u_n^2 - 2$

$\Leftrightarrow u_{n+1}^2 - 4u_{n+1} \cdot u_n + 4u_n^2 = 3u_n^2 - 2$

$\Leftrightarrow u_{n+1}^2 - 4u_{n+1} \cdot u_n + u_n^2 + 2 = 0.$

Ta cũng có: $u_{n-1}^2 - 4u_{n-1} \cdot u_n + u_n^2 + 2 = 0.$

$\Rightarrow$ u_{n+1} và u_{n-1} là no của phg trình $x^2 - 4x \cdot u_n + u_n^2 + 2 = 0.$

Theo đlí viet: $u_{n+1} + u_{n-1} = 4u_n \rightarrow$ dãy tuyến tính cấp 2.

Dang 4 : $u_n = \dfrac{u_{n-1}^2 + c}{u_{n-2}}$ $\quad u_1 = a$, $u_2 = b$ (a, b, c - hằng số)

Giải

$$u_n = \frac{u_{n-1}^2 + c}{u_{n-2}} \to u_n . u_{n-2} = u_{n-1}^2 + c$$

$$u_{n-1} = \frac{u_{n-2}^2 + c}{u_{n-3}} \to u_{n-1} . u_{n-3} = u_{n-2}^2 + c$$

$$\to u_n . u_{n-2} - u_{n-1} . u_{n-3} = u_{n-1}^2 - u_{n-2}^2$$

$$\Rightarrow u_n . u_{n-2} + u_{n-2}^2 = u_{n-1} . u_{n-3} + u_{n-1}^2$$

$$\to u_{n-2} (u_n + u_{n-2}) = u_{n-1} (u_{n-3} + u_{n-1})$$

$$\to \frac{u_n + u_{n-2}}{u_{n-1}} = \frac{u_{n-3} + u_{n-1}}{u_{n-2}}$$

Tương tự ta được :

$$\frac{u_n + u_{n-2}}{u_{n-1}} = \frac{u_{n-3} + u_{n-1}}{u_{n-2}} = \frac{u_{n-2} + u_{n-4}}{u_{n-3}} = \ldots = \frac{u_3 + u_1}{u_2} = c$$

hằng số

→ đưa về dãy tuyến tính :

$$u_n - c . u_{n-1} + u_{n-2} = 0 .$$

VD : Tìm số hạng TQ của dãy :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}^2 + 2}{u_{n-2}} \quad \forall n \geq 3 \end{cases}$$

Ta có: $u_3 = 3$.

Tương tự biến đổi trên ta đc:

$$\frac{u_n + u_{n-2}}{u_{n-1}} = \frac{u_1 + u_3}{u_2} = \frac{1+3}{1} = 4$$

Ta đc dãy truy hồi $u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}$

pt đặc trưng: $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{3}$

$\rightarrow$ CT tổng quát $u_n = C_1.(2+\sqrt{3})^n + C_2(2-\sqrt{3})^n$

thay $n=1$ và $n=2$ ta đc:

$$\begin{cases} 1 = C_1(2+\sqrt{3}) + C_2(2-\sqrt{3}) \\ 1 = C_1(2+\sqrt{3})^2 + C_2(2-\sqrt{3})^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{3\sqrt{3}-5}{2\sqrt{3}} \\ C_2 = \dfrac{3\sqrt{3}+5}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

Vậy $u_n = \dfrac{3\sqrt{3}-5}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^n + \dfrac{3\sqrt{3}+5}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^n$.

Dạng 5 Một số bài toán khác.

VD1 Cho dãy $\{u_n\}$ xđ bởi

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n-1} - u_n = \dfrac{n}{(n+1)!} \end{cases}$$ Xđ u_{2021} và tìm $\lim u_n$.

Giải Phải biểu diễn $\dfrac{n}{(n+1)!}$ thành $f(n+1) - f(n)$

ta có: $\dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$

Suy ra $u_{n-1} - u_n = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} \Leftrightarrow u_{n-1} - \dfrac{1}{n!} = u_n - \dfrac{1}{(n+1)!}$

Đặt $v_n = u_n - \frac{1}{(n+1)!}$ ta đc $v_n = v_{n-1} = \dots = v_0 = u_0 - 1 = 1$

Vậy số hạng TQ : $u_n = 1 + \frac{1}{(n+1)!}$

$u_{2021} = 1 + \frac{1}{2022!}$

$\lim u_n = \lim\left(1 + \frac{1}{(n+1)!}\right) = 0$.

VD2 : Cho dãy $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n.n! \end{cases}$ Tìm số hạng TQ.

Ta có $u_{n+1} - u_n = n.n!$ → phải biểu diễn $n.n!$ thành $f(n+1) - f(n)$

Ta có: $n.n! = (n+1)! - n!$

Suy ra $u_{n+1} - u_n = (n+1)! - n!$

→ $u_{n+1} - (n+1)! = u_n - n!$

Đặt $v_n = u_n - n!$ ta đc $v_{n+1} = v_n$ (→ dãy tuyến tính cấp 1)

$v_{n+1} = v_n = \dots = v_1 = 0$.

Suy ra $u_n = n!$

VD3 : Cho $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = n.u_n + n.n! \quad (*) \end{cases}$

Từ (*) suy ra $\frac{u_{n+1}}{n!} = \frac{n u_n}{n!} + n$

→ $\frac{u_{n+1}}{n!} = \frac{u_n}{(n-1)!} + n$

Đặt $v_n = \frac{u_n}{(n-1)!}$ ta đc dãy $v_{n+1} = v_n + n$. $n \geq 1$

$v_1 = 1$

Số hạng TQ $v_n = C + v_n^*$ trong đó $v_n^* = n(An+B)$

thay v_n^* vào hệ thức truy hồi đc:

$$(n+1)(A(n+1)+B) = n(An+B) + n$$

$$\Leftrightarrow An^2 + 2An + Bn + A + B = An^2 + Bn + n$$

đồng nhất hệ số đc $\begin{cases} A+B=0 \\ 2A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{matrix}$

Suy ra $v_n = C + n\left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right)$

thay $v_1 = 1$ ta đc $C = 1$

Vậy $v_n = 1 + \frac{1}{2}n(n-1)$

$$u_n = (n-1)!\, v_n = (n-1)!\left[1 + \frac{1}{2}n(n-1)\right]$$

$$= (n-1)! + \frac{1}{2}(n-1)\,n!$$

VD4 $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n - \frac{2}{n} \quad (*) \end{cases}$ Tìm a để dãy htụ.

Giải: Từ (*) ta có $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} - \frac{2}{n(n+1)}$

phải biểu diễn cái này thành $f(n+1) - f(n)$

Ta có: $\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$

Suy ra: $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n}$

$$\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{2}{n+1} = \frac{a_n}{n} - \frac{2}{n}$$

Đặt $v_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{2}{n+1}$ ta đc $v_{n+1} = v_n \to$ dãy tuyến tính cấp 1 (dãy hằng)

$$v_{n+1} = v_n = \dots = v_1 = a_1 - 2 = a - 2.$$

Ta đc $v_n = \frac{a_n}{n} - \frac{2}{n} = a - 2$

$\Rightarrow a_n = (a-2)n + 2$ Suy ra a_n hội tụ $\Leftrightarrow a = 2$

VD5: $\begin{cases} x_1 = a \\ (n+1)^2 x_{n+1} = n^2 \cdot x_n + 2n+1 \end{cases}$

phải biểu diễn thành sai phân $f(n+1) - f(n)$

Ta có $2n+1 = (n+1)^2 - n^2$.

VD6 $\begin{cases} x_1 = x_2 = 1 \\ x_n = (n-1)(x_{n-1} + x_{n-2}) \ (*) \end{cases}$

Nghĩ

Phải biểu diễn thành

$$x_n - f(n) x_{n-1} = c\,(x_{n-1} - f(n-1) x_{n-2}) \quad (c - \text{hằng số})$$

Đồng nhất hệ số với $(*)$ $\begin{cases} f(n) + c = n-1 \\ -c f(n-1) = n-1 \end{cases}$ $\to f(n) = n-1-c$ thay xuống

$f(n-1) = n-2-c$ suy ra $(n-2-c)(-c) = n-1$.

$\Leftrightarrow c^2 - c(n-2) - (n-1) = 0 \Rightarrow c = -1$

Vậy $f(n) = n$.

Ta đc: $x_n - n x_{n-1} = -(x_{n-1} - (n-1) x_{n-2}) = \dots = (-1)^{n-2}(x_2 - 2x_1)$
$= (-1)^{n-1}$

$$\Rightarrow \frac{x_n}{n!} = \frac{x_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} = \frac{x_{n-2}}{(n-2)!} + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$$

$$= \dots = \sum_{i=2}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i!}$$

$$\rightarrow x_n = n! \sum_{i=2}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i!}$$