

Câu 1. (5 điểm) a) Cho dãy số x_n được xác định như sau $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{2015}, \quad .$

$$\text{Tính: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1}} \right).$$

b) Cho $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$. Tính: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

Câu 2. (5 điểm)

a) Tìm tất cả các giá trị của a để hàm số $f(x) = |x+1|(a^3x^2 - 4ax - 5)$ khả vi tại $x = -1$.

b) Cho $f(x)$ là hàm số có đạo hàm đến cấp $(n+1)$ trên toàn trục số \mathbb{R} và thỏa mãn điều kiện với mọi $a < b$:

$$\ln \left(\frac{f(b) + f'(b) + \dots + f^{(n)}(b)}{f(a) + f'(a) + \dots + f^{(n)}(a)} \right) = b - a.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f^{(n+1)}(c) = f(c)$.

Câu 3. (3 điểm) Xét sự hội tụ của chuỗi số.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$$

Câu 4. (3 điểm) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + e^{\cos 4x}}$.

Câu 5. (2 điểm) Tìm hàm $f(x)$, $g(x)$ biết rằng với $\forall x \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\begin{cases} f(x+6) + 2g(2x+15) = \frac{x+2}{2} \\ f\left(\frac{x+2}{2}\right) + g(x+5) = x+4 \end{cases}$$

Câu 6. (2 điểm) Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $[0, +\infty)$ biết rằng tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2\sqrt{x}f'(x)) = 1$. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.