TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ ĐỊA CHẤT

ĐỀ THI OLYMPIC NĂM 2014

Môn: Đại số

Thời gian: 180 phút

Câu 1. Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm không tầm thường

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_1 + ax_2 + ... + x_{n-1} + x_n = 0 \\ .... \\ x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + ax_n = 0 \end{cases}.$$

Câu 2. Cho $n \geq 2$ là một số nguyên. A là ma trận cỡ $n \times n$ có các phần tử khác nhau và nhận một trong các giá trị $1, 2, ..., n^2$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất có thể của r(A).

Câu 3. Cho A là một ma trận cỡ $n \times n\,(n \geq 2)$ khả nghịch với các phần tử là các số thực dương. Chứng minh rằng số phần tử bằng 0 trong ma trận A^{-1} không vượt quá $n^2 - 2n$.

Câu 4. Cho T là một ma trận vuông cấp n và véc tơ cột $x \in R^n$.

Biết rằng $T^m x = 0; T^{m-1}x \neq 0$ trong đó m là một số nguyên dương. Chứng minh rằng hệ véc tơ $x, Tx, ..., T^{m-1}x$ độc lập tuyến tính trong R^n.

Câu 5. Cho ma trận $A = (a_{ij})_{n \times n}$ có các phần tử không âm thỏa mãn

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad (i = \overline{1, n}).$$

Chứng minh rằng mọi giá trị riêng của A có trị tuyệt đối nhỏ hơn hoặc bằng 1.

Câu 6. Tìm đa thức P(x) thỏa mãn hệ thức sau

$$P(x)P(3x) + P^2(-x) = P^2(2x) \; (\forall x \in R).$$

Chú ý: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.