

Câu 1. (3 điểm) Cho dãy số x_n được xác định như sau $x_1 = a, x_2 = b$,

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}, n = 3, 4, \dots$$

Tính: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Câu 2. (3 điểm) Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^{n-1} = 2^{n-1}$ với n lẻ.

b) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^n = 2^{n-1}$ với n chẵn.

Câu 3. (3 điểm) Tính giới hạn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{2013} + 2^{2013} + 3^{2013} + \dots + n^{2013}}{n^{2014}}$$

Câu 4. (3 điểm) Tính tích phân $\int_0^{2\pi} \ln(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}) dx$.

Câu 5. (3 điểm) Cho $f(x)$ là hàm có đạo hàm trên R thỏa mãn điều kiện $f(x + \sin x) \leq f(x)$. Chứng minh rằng phương trình $f'(x) = 0$ có vô số nghiệm.

Câu 6. (3 điểm) $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n$, với $a_0 \neq 0$ được gọi là đa thức bậc n , trong đó $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ được gọi là hệ số của đa thức.

Cho đa thức $Q(x) = (2 - 4x + x^3)^{20} (3 - 5x + 8x^2 - 6x^3)^{2014}$.

Hãy tính tổng những hệ số của đa thức $Q(x)$.

Câu 7. (2 điểm)

Cho hàm số $f: R \rightarrow (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ có đạo hàm tới cấp 2 và thỏa mãn: $f(0) = 2$;

$f'(0) = -2, f(1) = 1$. Chứng minh rằng tồn tại số $c \in (0, 1)$ sao cho:

$$f(c)f'(c) + f''(c) = 0.$$

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.