ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN 2025
Môn thi: Giải tích
Thời gian: 90 phút

Câu 1. (2 điểm) Xét hàm số: $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b \text{ nếu } x \leq 0 \\ \sin x + \cos x \text{ nếu } x > 0 \end{cases}$.

a) Tìm tất cả các giá trị a, b để hàm f khả vi liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Tìm tất cả các giá trị a, b để hàm f có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$.

Câu 2. (1 điểm) Cho $P(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ là đa thức bậc $n \geq 1$ thỏa mãn $P(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{j=0}^{n} P^{(j)}(x) \geq 0.$$

Câu 3. (1 điểm) Cho hàm $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0, +\infty)$ thỏa mãn $f(0) = 0$ và $f'(x) \in [0, 1]$ với mọi $x > 0$. Chứng minh rằng

$$\forall x > 0, \int_0^x (f(t))^3 dt \leq \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2.$$

Câu 4. (2 điểm) Gọi V là lớp các hàm $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$, khả vi trên $(0, 1)$ thỏa mãn $f(0) = 0, f(1) = 1$. Tìm tất cả các hằng số $\alpha \in \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất: Với mọi hàm $f(x) \in V$, tồn tại $\xi \in (0, 1)$ sao cho

$$f'(\xi) = 2025 f(\xi) + \alpha.$$

Câu 5. (4 điểm)

a) Cho số thực $\alpha \in \mathbb{R}$. Nếu tồn tại các dãy số nguyên p_n, q_n thoả mãn $p_n\alpha - q_n \neq 0$ và $\lim_{n\to\infty} |p_n\alpha - q_n| = 0$ thì α là số vô tỷ.

b) Cho $P(x)$ là đa thức bậc m. Chứng minh

$$\int_0^n e^{-x} P(x) dx = \sum_{j=0}^{m} P^{(j)}(0) - e^{-n} \sum_{j=0}^{m} P^{(j)}(n).$$

c) Chứng minh $e^n, n \in \mathbb{N}$ là số vô tỉ.

d) Chứng minh π là số vô tỷ.

**Kí hiệu $P^{(j)}(x)$ là đạo hàm cấp j của hàm $P(x)$.*