Khoa Toan - ...

ĐH Bách Khoa Hà Nội

Đề thi chọn đội tuyển Olympic Toán học Sinh viên năm 2025

Môn thi: Đại số

Thời gian làm bài: 90 phút

(Sinh viên không được sử dụng tài liệu)

Câu 1 (*1 điểm*). Cho a, b, c, d là bốn số thực. Chứng minh rằng ma trận

$$\begin{bmatrix} 1+a^2 & ab & ac & ad \\ ab & 1+b^2 & bc & bd \\ ac & bc & 1+c^2 & cd \\ ad & bd & cd & 1+d^2 \end{bmatrix}$$

là khả nghịch.

$1+a^2+b^2+c^2+d^2$

V

Câu 2 (*2 điểm*). Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ là một ánh xạ tuyến tính thỏa mãn $f(1,1,1) = (0,0,0)$, $f \circ f = f$, và $\operatorname{Im}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$. Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Câu 3 (*2 điểm*). Cho $A \in M_{2025}(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng $\operatorname{rank}(A^2 + I_{2025})$ là một số lẻ. $= 2025$ V

Câu 4 (*2 điểm*). Cho $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ là một đa thức thức bậc 2025 hệ số hữu tỷ và giả sử $p(x)$ bất khả quy trên $\mathbb{Q}$. Giả sử α, β là hai nghiệm phức phân biệt của $p(x)$. Chứng minh rằng:

a) $\beta - \alpha$ không là số hữu tỷ;

b) $\alpha\beta$ không là số hữu tỷ.

Câu 5 (*2 điểm*). Cho A, B là hai ma trận vuông thực cấp 4 khả nghịch thỏa mãn

$$ABA = BA^2B, \quad A^3 = I_4, \text{ và } B^{2025} = I_4.$$

Chứng minh rằng $B = I_4$.

V

Câu 6 (*1 điểm*). Giả sử $A_1, A_2, \ldots, A_{11} \in M_{2025}(\mathbb{R})$ thỏa mãn hai điều kiện:

- $A_i^2 = O_{2025}$, với mọi $1 \le i \le 11$;
- $A_iA_j = A_jA_i$, với mọi $1 \le i < j \le 11$.

Chứng minh rằng $A_1A_2 \cdots A_{11} = O_{2025}$.

Ghi chú:

- $M_n(K)$ là tập hợp các ma trận vuông cỡ $n \times n$ với các phần tử nằm trong K.
- I_n là ma trận đơn vị cấp n.
- O_n là ma trận vuông cỡ $n \times n$ mà mọi phần tử của nó đều là 0.

—HẾT—