Buổi 1: Phép toán với ma trận

1. Ma trận và các phép toán:

- Cơ bản: +) $A + B$: cộng các ptử tg ứng
  +) $k.A$: nhân số vs từng ptử
  +) A^t : đổi dòng thành cột
  +) $A.B$: $(A)_{m\times n}$; $(B)_{n\times p}$
  +) $(A+B)+C = A + (B+C)$
  +) $A + B = B + A$
  +) $(A^t)^t = A$
  +) $(A.B).C = A.(B.C)$
  (nhân k° giao hoán)
- Nâng cao: +) $AB = BA$ (A, B vuông cùng cỡ)
  +) $[A, B] = AB - BA$
  +) $A \in Mat(n)$: $tr A = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$ (trace)
  +) Nếu $A^t = A$ ($A \in Mat(n)$) thì A gọi là MT đxứng
  +) $(A.B)^t = B^t . A^t$

VD1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

Các MT sau có ∃ hay k°? Nếu ∃ thì tính

a) $D = ABC$ ∃
b) $E = BAC$
c) $F = BCA$ ∃
d) $G = ACB$
e) $H = CAB$ ∃
f) $J = CBA$

VD2: $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C = A.B$

Hãy tính: a) A^{37} b) B^{63}
c) B^{138} d) C^{42}

Giải

a) $A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a^2 & a^2 \\ a^2 & a^2 \end{pmatrix}$

$$A^3 = 2\begin{pmatrix} a^2 & a^2 \\ a^2 & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} = 2^2\begin{pmatrix} a^3 & a^3 \\ a^3 & a^3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Quy nạp : 1 vs $n = 1$

2 G/s đúng vs $n = k$. CM đúng vs $n = k+1$

3 KL

Dự đoán :

$$A^n = 2^{n-1}\begin{pmatrix} a^n & a^n \\ a^n & a^n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{37} = 2^{36}\begin{pmatrix} a^{37} & a^{37} \\ a^{37} & a^{37} \end{pmatrix} = 2^{36}\begin{pmatrix} 2^{-37} & 2^{-37} \\ 2^{-37} & 2^{-37} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = A$$

$$A^n = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2^{-n} & 2^{-n} \\ 2^{-n} & 2^{-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = A$$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B^{2k} = I & (k \in N^*) \\ B^{2k+1} = B & (k \in N^*) \end{cases}$$

$B^{63} = B$

c) $B^{138} = I$

d) $$C = A.B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C^{42} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C^n = O \quad (n > 1)$$

VD3 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ c & d \end{pmatrix}$ a) Tìm c, d sao cho $A^2 = -I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{c}{3} & \frac{1}{3} + \frac{d}{3} \\ c + c.d & \frac{c}{3} + d^2 \end{pmatrix}$$

KLONG

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+\dfrac{c}{3}=-1 \\ \dfrac{1}{3}+\dfrac{d}{3}=0 \\ c+c.d=0 \\ \dfrac{c}{3}+d^2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-6 \\ d=-1 \end{cases}$$

b) (.) TH $A^2=-I$. Hãy tính A^n

$A^2=-I$

$A^3=A^2.A=-A$

$A^4=A^2.A^2=I$

$A^5=A^4.A=A$

$$A^n = \begin{cases} +I & \text{nếu } n=4k \\ +A & \text{nếu } n=4k+1 \\ -I & \text{nếu } n=4k+2 \\ A & \text{nếu } n=4k+3 \end{cases}$$

VD3: $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Tìm a,b,c,d sao cho: $A^2=I$

$$A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+cd & cb+d^2 \end{pmatrix}=I$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+bc=1 \\ ab+bd=0 \\ ca+cd=0 \\ cb+d^2=1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} b=0 \\ a+d=0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} c=0 \\ a+d=0 \end{array}\right. \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+bc=1 \\ d^2+bc=1 \\ \left[\begin{array}{l} b=0 \\ a+d=0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} c=0 \\ a+d=0 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2+bc=1 \\ d^2+bc=1 \\ a+d=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+bc=1 \\ d^2+bc=1 \\ b=c=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+bc=1 \\ a=-d \end{cases}$$

Vậy $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ với $a^2+bc=1$

VD4: Tìm $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sao cho $\forall X \in Mat_2$ (hệ số thực) thì $A.X = X.A$ (giao hoán đc)

Tổng quát: $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

Đk cần: Chọn dạng đbiệt của X $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

↳ dạng của ma trận A

Đk đủ: CM vs dạng của A (ở trên) thì TM Đk giao hoán

Giải

Đk cần: A giao hoán vs mọi $X \Rightarrow A$ giao hoán vs X_1, X_2
tức là: $A . X_1 = X_1 . A$
$A . X_2 = X_2 . A$

Ta có: $A.X_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$

$X_1.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Do $A.X_1 = X_1.A \Rightarrow b = c = 0$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$

Ta có: $A.X_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$X_2 . A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Do $A.X_2 = X_2.A \Rightarrow a = d$

Vậy A muốn giao hoán vs X_1, X_2 thì A có dạng:
$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Đk đủ: Ta CM nếu $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ thì giao hoán đc $\forall X$

Ta có: $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a.I$

$\forall X \in Mat_2$ thì: $A.X = a.I.X = a.X$
$X.A = X.a.I = a.X.I$
$= a.X$

Vậy $A.X = X.A$

$\Rightarrow$ Kết luận : Ma trận vuông cấp 2 giao hoán được $\forall$ ma trận vuông cấp 2 $\neq$ (Hsố liên tục) là:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

VD5: Cho A là MT vuông cấp n, hs thực:

$A^{2023} = A^{100}$

$A^{64} = -A^2$. CMR: $A^2 = 0$

Giải

Ta có: $A^{2023} = (A^{64})^{31} \cdot A^{39}$ $\quad$ $2023 = 64 \cdot 31 + 39$

Thay $A^{64} = -A^2$: $A^{2023} = (-A^2)^{31} \cdot A^{39} = -A^{101} = A^{100}$

Ta có: $A^{100} = A^{64} \cdot A^{36} = -A^2 \cdot A^{36} = -A^{38}$

$A^{101} = A^{64} \cdot A^{37} = -A^2 \cdot A^{37} = -A^{39}$

Mà $A^{100} = -A^{101}$

$\Leftrightarrow \boxed{-A^{38} = -A^{39}}$

Mặt $\neq$: $A^{64} = A^{38} \cdot A^{26} = -A^{39} \cdot A^{26} = -A^{65}$

$\Rightarrow \boxed{A^{64} = -A^{65}}$

Vì $A^{64} = -A^2 \Rightarrow -A^2 = -(A^{64} \cdot A)$

$= -(-A^2 \cdot A)$

$= A^3$

$\Rightarrow \boxed{A^2 = -A^3}$

Ta có: $\forall k \geq 2$: $A^k = A^2 \cdot A^{k-2}$

$= -A^3 \cdot A^{k-2} = -A^{k+1}$

$\Rightarrow A^{64} = A^2 \Rightarrow A^2 = -A^2 \Rightarrow A^2 = 0$

BTVN

1. $A \in Mat_n$; $A^3 - 4A^2 + 3A - 5I_n = 0$

CMR: A k° suy biến

Giải

$A^3 - 4A^2 + 3A - 5I_n = 0$

$\Rightarrow A^3 - 4A^2 + 3A = 5I_n$

$\Rightarrow A(A^2 - 4A + 3I_n) = 5I_n$

Nhân cả 2 vế với A^{-1}

$A^{-1} \cdot A(A^2 - 4A + 3I_n) = 5 \cdot A^{-1}$

$\Rightarrow \frac{1}{5}(A^2 - 4A + 3I_n) = A^{-1}$

$\Rightarrow$ Có $\exists A^{-1} \Rightarrow \det A \neq 0$

$\Rightarrow$ A k° suy biến

③ $[A, B].C + B[A, C] = [X, Y]$
thì $X = ?$, $Y = ?$

Giải

$$(AB - BA).C + B(AC - CA) = XY - YX$$

$$\Rightarrow ABC - BAC + BAC - BCA = XY - YX$$

$$\Rightarrow ABC - BCA = XY - YX$$

$$\Rightarrow [X, Y] = [A, BC]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = A \\ Y = BC \end{cases}$$

④ $A \in Mat_2(\mathbb{C})$, $A \neq 0$. CMR: $\det A = 0$ thì:

1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}$ or $A = \begin{pmatrix} ka & kb \\ a & b \end{pmatrix}$

2) Tìm $B \in Mat_2(\mathbb{C})$ TM
$$B^2 - 2B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Buổi 2: Định thức

2. Ma trận và định thức:

- ĐN: ĐN = quy nạp ; ĐN = phép
- Các tính chất CB:
  - (+) Ktriển theo dòng, cột
  - (+) Biến đổi định thức về ma trận Δ
  - (+) Bấm MT
- Tính chất:
  - (+) $|I_n| = 1$
  - (+) Đổi chỗ 2 hàng (2 cột) thì định thức đổi dấu
  - (*) (+) Nhân 1 dòng (1 cột) vs λ thì định thức tăng lên λ lần
    Nhân cả MT vs 1 số λ thì định thức tăng lên λ^n lần (với n là cấp của MT vuông đó)
  - (*) (+) Cộng vào 1 dòng (cột) 1 tổ hợp tuyến tính của dòng (cột) khác thì định thức k đổi
  - (+) $|A^t| = |A|$, $|A.B| = |A|.|B|$

Bài 1:
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & x & 4 \\ 3 & -2 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad . \text{ Tìm } x = ?$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & x & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & x & 2 \\ 0 & 0 & 5-x & 4 \\ 0 & 0 & 0-x & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5-x & 4 \\ -x & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -4(5-x) + 4x = 0$$
$$\Leftrightarrow 8x - 20 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

KLONG

Bài 2: $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 7 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 8 & 0 \\ 3 & 4 & -8 & 3 & 2 \\ 27 & 6 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & x & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Tìm $x = ?$

(Tự làm)

Bài 3: $\begin{vmatrix} x & 2022 & 2023 & 2024 \\ 2024 & 2023 & 2022 & x \\ 2023 & 2024 & x & 2022 \\ 2022 & x & 2024 & 2023 \end{vmatrix} = 0$. Tìm $x = ?$

Giải

Đặt $a = 2022$. Ta viết lại ĐB:

$$\begin{vmatrix} x & a-1 & a & a+1 \\ a+1 & a & a-1 & x \\ a & a+1 & x & a-1 \\ a-1 & x & a+1 & a \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+3a & x+3a & x+3a & x+3a \\ a+1 & a & a-1 & x \\ a & a+1 & x & a-1 \\ a-1 & x & a+1 & a \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a+1 & a & a-1 & x \\ a & a+1 & x & a-1 \\ a-1 & x & a+1 & a \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & x-a-1 \\ 0 & 1 & x-a & -1 \\ 0 & x-a+1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+3a = 0 \quad \rightarrow \quad x = -3a = -6066 \\ \begin{vmatrix} -1 & -2 & x-a-1 \\ 1 & x-a & -1 \\ x-a+1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (1) \end{array}\right.$$

Giải (1):

$$(a-x) + 2(x-a-1) + 2(x-a+1) - (x-a+1)(x-a-1)(x-a) - 2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-x) + 2(x-a-1) + 2(x-a+1) - [(x-a)^2 - 1](x-a) = 0$$

Đặt: $x - a = t$

Ta có: $-t + 2(t-1) + 2(t+1) - (t^2-1)t = 0$

$$\Leftrightarrow -t + 2t - 2 + 2t + 2 - t^3 + t = 0$$

$$\Leftrightarrow -t^3 + 4t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -2 \\ t = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-a=2 \\ x-a=-2 \\ x-a=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2+a \\ x=-2+a \\ x=a \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2024 \\ x=2020 \\ x=2022 \end{array}\right.$$

Bài 4 : a) $X \in Mat(m \times m)$
$y \in Mat(m \times n)$
O_{m}, I_m

CMR : $\det\begin{pmatrix} X & y \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det X$

b) $\det\begin{pmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{pmatrix} = \det(A.B)$ (dùng a) để CM)

Bài 5: Đặt : $A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

a) CMR : $A(\alpha).A(\beta) = A(\alpha+\beta)$

b) Tính $A^n\left(\frac{\pi}{2}\right)$

c) CMR : $\det A \neq 0$ tức là A ma trận k suy biến

Giải

a) $A(\alpha).A(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = A(\alpha+\beta)$

b) $A^n\left(\frac{\pi}{2}\right) = A\left(\frac{\pi}{2}\right).A\left(\frac{\pi}{2}\right)\ldots A\left(\frac{\pi}{2}\right) = A\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

$= \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{2} & -\sin\frac{n\pi}{2} \\ \sin\frac{n\pi}{2} & \cos\frac{n\pi}{2} \end{pmatrix}$

+) $n = 4k \rightarrow A^n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

+) $n = 4k+1 \rightarrow A^n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

+) $n = 4k+2 \rightarrow A^n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

+) $n = 4k+3 \rightarrow A^n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\det A = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 > 0$

$\Rightarrow$ A là ma trận k° suy biến

Bài 6: Cho a_0, d là các số thực. Dãy $a_0, a_1, \dots, a_n$ là lập thành 1 CSC vs công sai d. Tính định thức sau

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_0 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \dots & \dots & & \dots & \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

Cứ lấy $c_{j+1} - c_j$ ta đc:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & d & d & \dots & d & d \\ a_1 & -d & d & \dots & d & d \\ a_2 & d & -d & \dots & d & d \\ \dots & & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n-1} & d & d & \dots & -d & d \\ a_n & d & d & \dots & d & -d \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ NX: Ta nhận thấy các c_j $(j \geq 2)$ tỉ lệ vs nhau

Vậy $\det(A) = 0$

Bài 7: Gsử x là 1 số thực; $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$$A_n = [a_{jk}] \;;\quad a_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } |j-k| > 1 \\ 1 & \text{nếu } |j-k| = 1 \\ 2\cos x & \text{nếu } j = k \end{cases}$$

CM: $\det A_n = \dfrac{\sin(n+1)x}{\sin x}$

Giải

Dạng của $A_n = \begin{pmatrix} 2\cos x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos x \end{pmatrix}$

Đặt: $D_n = \det A_n$, CMR: $D_{n+2} - 2D_{n+1}\cos x + D_n = 0$

KLONG

Khai triển theo cột 1 :

$$D_n = 2\cos x \begin{vmatrix} 2\cos x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2\cos x & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \cos 2x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2\cos x & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos x \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad D_n = 2\cos x \,.\, D_{n-1} - D_{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad D_n - 2\cos x \,.\, D_{n-1} + D_{n-2} = 0$$

Chuyên đề: ĐỊNH THỨC

I | P² tách định thức:

1. Quy tắc tam giác (cấp 3):

VD1: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & x+11 \\ 3 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 2$

$\Leftrightarrow 50 + 16 + 3(x+11) - 15 - 40 - 4(x+11) = 2$

$\Leftrightarrow x = -2$

2. Khai triển:

- Khai triển theo hàng i (cột j): $|A| = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} (-1)^{i+j} \cdot |M_{ij}|$

$= \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot \underbrace{A_{ij}}_{\text{phần bù đs}}$

VD2: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \overset{h_3}{=} (-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

$= 9$

VD3: Cho ma trận A. Tính tổng các ptử đsố của các ptử ∈ dòng 4 của A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & -m \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = ?$

Xét $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & -m \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Khai triển det A' theo hàng 4:

$\det A' = 1 . A_{41} + 1 . A_{42} + 1 . A_{43} + 1 . A_{44}$

mà $\det A' = 0$ (do h_3, h_4 tỉ lệ vs nhau)

$\Rightarrow A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = 0$

VD4: Cho ma trận A. Tính $1 A_{41} + 2 A_{42} + 3 . A_{43} + 4 A_{44}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & -5 & 6 \\ -4 & 5 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

Xét $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Khai triển det A' theo hàng 4 ta được:

$\det A' = 1.A_{41} + 2.A_{42} + 3.A_{43} + 4.A_{44}$

mà $\det A' = 0$ (do h_1 và h_4 bằng nhau)

$\Rightarrow A_{41} + 2A_{42} + 3A_{43} + 4A_{44} = 0$

- Khai triển theo khối:

$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A).\det(B)$ với A, B, C đều là MT vuông cùng cỡ

VD5: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Tính $\det(A)$, $\det(A.A^T)$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-3).(-8) = 24$

$|A.A^T| = |A|.|A^T| = 24.24 = 576$

3. Dùng BĐSC:

VD6: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \times 1 \\ \times 1 \\ \times 1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

$= 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times -1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$= 6.8 = 48$

VD7: $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix}$. Tính $\det(3M)$

$\det M = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \times 1 \\ \times 1 \\ \times 1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$

$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times -a & \times -b & \times -c \\ & & \\ & & \\ & & \end{matrix}$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -a & c-a & b-a \\ 0 & c-b & -b & a-b \\ 0 & b-c & a-c & -c \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1}{=} (a+b+c)\begin{vmatrix} -a & c-a & b-a \\ c-b & -b & a-b \\ b-c & a-c & -c \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 1 \quad \times 1 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} -a & c-a & b-a \\ c-b-a & c-b-a & 0 \\ b-c-a & 0 & b-c-a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)(c-b-a)(b-c-a)\begin{vmatrix} -a & c-a & b-a \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)(c-b-a)(b-c-a)(a-b-c)$$

$$\Rightarrow \det(3M) = 3^4 . \det M$$

$$= 81 (a+b+c)(c-b-a)(b-c-a)(a-b-c)$$

VD8: Tính định thức sau:

$$D = \begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \times 1 \\ \times 1 \\ \times 1 \end{matrix}$$

$$= (a+b+c-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix} \begin{matrix} \times -a \quad \times -b \quad \times -c \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= (a+b+c-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x-a & c-a & b-a \\ 0 & c-b & -x-b & a-b \\ 0 & b-c & a-c & -x-c \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1}{=} (a+b+c-x)\begin{vmatrix} -x-a & c-a & b-a \\ c-b & -x-b & a-b \\ b-c & a-c & -x-c \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 1 \quad \times 1 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= (a+b+c-x)\begin{vmatrix} -x-a & c-a & b-a \\ c-a-b-x & c-a-b-x & 0 \\ b-a-c-x & 0 & b-a-c-x \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c-x)(c-b-a-x)(b-a-c-x)\begin{vmatrix} -x-a & c-a & b-a \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c-x)(c-b-a-x)(b-a-c-x)(a-b-c-x)$$

VD 9: a) Cho a, b, c là số thực. Tính định thức sau:

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \times 1 \\ \times 1 \end{matrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & a-b \\ 0 & a-c & b-c \end{vmatrix} = (a+b+c)[-(b-c)^2 - (a-c)(a-b)]$$

$$= (a+b+c)[-(b^2 - 2bc + c^2) - (a^2 - ab - ac + bc)]$$

$$= (a+b+c)(ab + ac + bc - a^2 - b^2 - c^2)$$

b) Gọi x_1, x_2, x_3 là n₀ của PT bậc 3: $x^3 + x^2 - 3x + 9 = 0$, $9 \in R$. Gọi S là tập n₀ các ma trận vuông cấp 3 đc lập bởi $x_1; x_2, x_3$ sao cho mỗi n₀ chỉ XH đúng 1 lần ở mỗi hàng và mỗi cột. CMR $\det A \,\vdots\, 10 \quad \forall A \in S$

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 - (x_1 + x_2 + x_3)^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)) \quad (1)$$

Theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -3 \\ x_1x_1x_3 = -9 \end{cases}$

Thay vào (1) ta đc:

$$|A| = (-1)(+3(-3) - (-1)^2)$$

$$= 10 \Rightarrow |A| \,\vdots\, 10 \quad \forall A \in S$$

VD 10: Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & x_1 & x_4 & -x_3 \\ -x_3 & -x_4 & x_1 & x_2 \\ -x_4 & x_3 & -x_2 & x_1 \end{vmatrix}$$

Ma trận phản đx

Biết rằng x_1, x_2, x_3, x_4 là các n₀ của PT: $x^4 - 12x^3 + 4x - 2016 = 0$

Chú ý: MT phản đx $\rightarrow A.A^T$ là ma trận đc

$$D.D^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & x_1 & x_4 & -x_3 \\ -x_3 & -x_4 & x_1 & x_2 \\ -x_4 & x_3 & -x_2 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |D.D^T| = |(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2).I|$$

$$\Rightarrow |D|.|D^T| = (x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^4.|I|$$

$$\Rightarrow |D|^2 = (x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^4$$

$$\Leftrightarrow |D| = (x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^2$$

$$\Leftrightarrow |D| = (x_1+x_2+x_3+x_4)^2 - 2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1+x_4x_2 + x_1x_3)$$

Theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 = 12 \\ x_1x_2 + \dots + x_1x_3 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow |D| = 12^2 = 144$$

VD11: CMR với các số thực a, b, c, d tùy ý có:

$$\begin{vmatrix}1&a&a^2&a^4\\1&b&b^2&b^4\\1&c&c^2&c^4\\1&d&d^2&d^4\end{vmatrix} = (a+b+c+d)\begin{vmatrix}1&a&a^2&a^3\\1&b&b^2&b^3\\1&c&c^2&c^3\\1&d&d^2&d^3\end{vmatrix}$$

Xét: $|M| = \begin{vmatrix}1&a&a^2&a^3&a^4\\1&b&b^2&b^3&b^4\\1&c&c^2&c^3&c^4\\1&d&d^2&d^3&d^4\\1&x&x^2&x^3&x^4\end{vmatrix}$

$$\overset{h_5}{=} |M_{51}| - x|M_{52}| + x^2|M_{53}| - x^3|M_{54}| + x^4|M_{55}|$$

với $|M_{54}| = \begin{vmatrix}1&a&a^2&a^4\\1&b&b^2&b^4\\1&c&c^2&c^4\\1&d&d^2&d^4\end{vmatrix}$ và $|M_{55}| = \begin{vmatrix}1&a&a^2&a^3\\1&b&b^2&b^3\\1&c&c^2&c^3\\1&d&d^2&d^3\end{vmatrix}$

Theo Vi-ét ta có:

$$a+b+c+d = \frac{|M_{54}|}{|M_{55}|}$$

$$\Rightarrow |M_{54}| = (a+b+c+d)|M_{55}| \quad \text{(đpcm)}$$

Xét PT $|M| = 0$ dễ thấy a, b, c, d là n$_o$

Chuyên đề : ĐỊNH THỨC

Dạng 1 : Quy tắc tam giác

Bài 1 : Tìm GTLN của định thức cấp 3 có các phần tử bằng 1 or -1

Giải

Xét $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{21}a_{12}a_{33})$

$= m_1 + m_2 + m_3 - (m_4 + m_5 + m_6)$

NX : $m_1 . m_2 . m_3 (-m_4)(-m_5)(-m_6) = -(\prod a_{ij})^2 < 0$

$\Rightarrow$ $\exists$ 2 tích trái dấu nhau trong 6 tích

$\Rightarrow$ 2 tích đó sẽ triệt tiêu nhau

$\Rightarrow$ Định thức lớn nhất sẽ có gtrị bằng 4

Bài 2, Cho ma trận A vuông cấp n có tất cả các phần tử là 1 và -1 . CMR với $n \geq 3$ thì $|\det(A)| \leq (n-1)(n-1)!$

Giải

Với $n = 3 \Rightarrow |A_3| \leq (3-1)(3-1)! = 4$ (đúng)

Gsử mệnh đề này đúng vs $n-1$:

$|A_{n-1}| \leq (n-2)(n-2)!$

Ta sẽ CM mệnh đề đúng với n

+ $|A_n| \leq |C_1| . |C_2| . ... |C_n|$
với $C_1, C_2, ..., C_n$ là các định thức con cấp n-1 tg ứng với các phần tử ở hàng n

$\Rightarrow |A_n| \leq (n-2)(n-2)! . n$ (1)

+ $(n-2)(n-2)! . n \leq (n-1)(n-1)!$

$\Leftrightarrow (n-2)n \leq (n-1)(n-1)$

$\Leftrightarrow n^2 - 2n \leq n^2 - 2n + 1$ (luôn đúng) (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $|\det A_n| \leq (n-1)(n-1)!$ (đpcm)

Dạng 2: Khai triển định thức

Bài 3:

a) $A = \begin{vmatrix} -a & b & 0 & 0 \\ 0 & -a & b & 0 \\ 0 & 0 & -a & b \\ b & 0 & 0 & -a \end{vmatrix}$

$= (-a)\begin{vmatrix} -a & b & 0 \\ 0 & -a & b \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ -a & b & 0 \\ 0 & -a & b \end{vmatrix}$

$= (-a)(-a).(-a)^2 - b.b.b^2 = a^4 - b^4$

b) Để A khả nghịch thì: $|A| \neq 0$

$\Leftrightarrow a^4 - b^4 \neq 0$

$\Leftrightarrow a \neq \pm b$

$M_{11} = -a^3$ $\quad M_{21} = -a^2b$ $\quad M_{31} = -ab^2$ $\quad M_{41} = -b^3$

$M_{12} = -b^3$ $\quad M_{22} = -a^3$ $\quad M_{32} = -a^2b$ $\quad M_{42} = -ab^2$

$M_{13} = -ab^2$ $\quad M_{23} = -b^3$ $\quad M_{33} = -a^3$ $\quad M_{43} = -a^2b$

$M_{14} = -a^2b$ $\quad M_{24} = -ab^2$ $\quad M_{34} = -b^3$ $\quad M_{44} = -a^3$

$\Rightarrow \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} -a^3 & -a^2b & -ab^2 & -b^3 \\ -b^3 & -a^3 & -a^2b & -ab^2 \\ -ab^2 & -b^3 & -a^3 & -a^2b \\ -a^2b & -ab^2 & -b^3 & -a^3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{a^4 - b^4} . \tilde{A}^T$

Bài 4:

$D_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 \\ n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$

$|D_n| = 1 . \begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} - (-1)^{n+1} n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$

$= n! + (-1)^n . n . (n-1)!$

$= \cancel{n! + (-1)^n . n [(n-1)! + (-1)^{n-1} . (n-1) . D_{n-2}]}$

$= n! + (-1)^n . n! = n! \left(1 + (-1)^n\right)$

$$\Rightarrow |D_n| = \begin{cases} 2n!\ , n \text{ chẵn} & \Rightarrow r(D) = n \\ 0\ , n \text{ lẻ} & \Rightarrow r(D) = n-1 \end{cases}$$

Nếu n chẵn $\Rightarrow r(D) = n$

Nếu n lẻ $\Rightarrow r(D) < n$ vì $\exists$ 1 ma trận cấp $n-1$ có định thức $\neq 0$

$\Rightarrow r(D) = n-1$

b) Gsử $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ là CS của k'gian vectơ V. Tìm n để hệ $\{e_1 + e_2, 2e_2 + 2e_3, 3e_3 + 3e_4, \dots\}$ cũng là 1 cơ sở của V?

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ là CS $\Rightarrow \dim V = n$

Số phần tử của $S = \dim V = n$

Xét
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & n \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = |D^T| = |D|$$

$$= \begin{cases} 2n!\ , n \text{ chẵn} \\ 0\ , n \text{ lẻ} \end{cases}$$

Để S là cơ sở của V $\Leftrightarrow$ S độc lập tuyến tính
$\Leftrightarrow |D| \neq 0$
$\Leftrightarrow$ n là chẵn

Bài 5. Cho n là số nguyên (+) lẻ. Cho A là một ma trận thực vuông cấp n TM $\det A = 1$ or $\det A = -1$. Gọi A' là ma trận ~~chuyển vị của~~ x đc từ A bằng cách thay mỗi p tử = phần bù đại số của nó. Tính $\det A'$

Giải

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A')^T$$

$$\Rightarrow \det A \cdot A^{-1} = (A')^T$$

$$\Rightarrow \det A \cdot \det(A^{-1}) = \det (A')^T$$

$$\Rightarrow \det A' = 1$$

Bài 6: Cho ma trận vuông cấp 2 TM $\det A = d \neq 0$ và $\det(A + dA') = 0$, trong đó A' là MT phần bù ĐS của A. CMR $\det(A - dA') = 4$

Giải

$A = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \Rightarrow A^{*} = \begin{pmatrix} q & -n \\ -p & m \end{pmatrix}$

~~$\det(A + dA') = \begin{vmatrix} m+dq & n-dp \\ p-dn & q+dm \end{vmatrix}$~~

~~$= (m+dq)(q+dm) - (p-dn)(n-dp)$~~

~~$= mq + m^2d + dq^2 + d^2qm - (pn - dp^2 - dn^2 + d^2np)$~~

~~$= d(m^2 + q^2 + n^2 + p^2) + mq - np + d^2(mq - np)$~~

~~$= d(m^2 + q^2 + n^2 + p^2$~~

$\det(A + dA') = \begin{vmatrix} m+dq & n-dn \\ p-dp & q+dm \end{vmatrix}$

$= d(m^2 + q^2 + 2np + 1 + d^2)$

$= d(m^2 + q^2 + 2mq - 2d + 1 + d^2)$

$= d[(m+q)^2 + (d-1)^2] = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} m = -q \\ d = 1 \end{cases}$

$\det(A - dA') = \begin{vmatrix} m+dq & n+dn \\ p+dp & q+dm \end{vmatrix}$

$= d[(m+q)^2 + (d+1)^2]$

$= 4$

Dạng 3: Biến đổi sơ cấp

Bài 7:
$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = 64$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x-1 & -1 & -1 \\ +1 & 1 & 1+x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = 64$$

$$\Leftrightarrow x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x-1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & x+1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = 64$$

$$\Leftrightarrow x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 64$$

$$\Rightarrow x^4 = 64$$

$$\Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

Bài 8:
$$\det\begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2-x & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+x & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2022 & 2022 & 2022 & \cdots & 2022-x \end{pmatrix} = 0$$

Nhân các hàng chẵn vs (-1) ta đc:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2 & x-2 & -2 & \cdots & -2 \\ 3 & 3 & x+3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2022 & -2022 & -2022 & \cdots & x-2022 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1011)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2 & x-2 & -2 & \cdots & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2022 & -2022 & -2022 & \cdots & x-2022 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1011).x^{2021} = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = +1011 \\ x = 0 \end{array}\right.$$

Bài 9: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$

(Tự làm)

Bài 10: Tính định thức của ma trận A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2013 & 2014 \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 2012 & 2013 \\ 3 & 2 & 1 & \dots & 2011 & 2012 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cancel{2011} & \cancel{2012} \\ 2014 & 2013 & 2012 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Giải

Dùng $c_1 = c_1 + c_{2014}$

$$\Rightarrow |A| = 2015 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2013 & 2014 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 2012 & 2013 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 2011 & 2012 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2013 & 2012 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$\cancel{= 2015}$ $h_i = h_i - h_{i-1}$

$$|A| = 2015 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2013 & 2014 \\ 0 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2015 \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & & & \vdots & \\ 1 & 1 & & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2015 \cdot (-1) \cdot (-2)^{2013}$$

$$= 2015 \cdot 2^{2013}$$

Bài 11:
$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & \dots & 2018 \\ 1 & x & 2 & \dots & 2018 \\ & & \dots & & \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x \end{vmatrix} = 0$$

Giải

NX: + $x = 1, 2, \dots, 2018$ là no vì khi đó định thức luôn có 2 hàng giống nhau

+ Cộng tất cả các cột vào cột 1:

KLONG

$$\Leftrightarrow (x+1+2+\dots+2018)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \dots & 2018 \\ 1 & x & 2 & \dots & 2018 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow \quad x = -2037171$

Vì định thức trên là cấp 2019 nên chỉ có tối đa là 2019 no

Vậy $x = 1, 2, 3, \dots, 2018, -2037171$

Bài 12: Cho A là MT vuông cấp 2024, với $a_{ii} \in \{8, 10, 12, 14\}$

$a_{ij} \in (7, 9, 11, 13)$. CMR $\det A \neq 0$

Giải

$8, 10, 12, 14 \equiv 0 \pmod 2$

$7, 9, 11, 13 \equiv 1 \pmod 2$

$$\Rightarrow |A| \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} \pmod 2$$

$$= 2023 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2023 . \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2023.(-1)^{2023}$$

$\Leftrightarrow \quad |A| \equiv -2023 \pmod 2$

$\Rightarrow \quad |A| \neq 0$

KLONG

TỔNG KẾT:

① A vuông cấp 3, các p tử 1, 1 ⇒ $\det A \le 4$

② A vuông cấp n, ____ ⇒ $\det A \le (n-1)(n-1)!$

③ A nhỏ số 0 ⇒ Dùng khuôn

④ A k° có số 0 ⇒ Dùng BĐSC: cộng tất h (và c); cộng h_c và h_d; $h_i = h_i - h_{i-1}$

Bài 13: Cho $a_0, d \in R$ và $a_i = a_0 + id$ $(i = \overline{1,n})$
Hãy tính định thức:

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & & \cdots & & \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & & a_0 \end{vmatrix}$$

Dạng 4: P^2 quy nạp

Bài 14: Cho $a, b \in R$, $a \ne b$. Tính định thức cấp n

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

Giải

Khai triển theo hàng 1:

$$D_n = (a+b)\begin{vmatrix} a+b & ab & \cdots & 0 \\ 1 & ab & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & a+b \end{vmatrix} - ab \begin{vmatrix} 1 & ab & \cdots & 0 \\ 0 & a+b & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & a+b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b) D_{n-1} - ab\, D_{n-2}$$

Xét $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -ab & a+b \end{pmatrix}$, $Q_{n-1} = \begin{pmatrix} D_{n-2} \\ D_{n-1} \end{pmatrix}$

$$P \cdot Q_{n-1} = \begin{pmatrix} D_{n-1} \\ (a+b) D_{n-1} - ab\, D_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{n-1} \\ D_n \end{pmatrix}$$

KLONG

$\Rightarrow Q_n = P Q_{n-1} = \dots = P^{n-3} Q_3$

PT đặc trưng: $\lambda^2 - (a+b)\lambda + ab = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = a \\ \lambda = b \end{array}\right.$

QTR là $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$

Ma trận làm chéo hoá P là: $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$

$\Rightarrow T^{-1} = \dfrac{1}{b-a} \begin{pmatrix} b & -1 \\ -a & 1 \end{pmatrix}$

$P^{n-3} = T \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^{n-3} \cdot T^{-1}$

$= \dfrac{1}{b-a} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{n-3} & 0 \\ 0 & b^{n-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & -1 \\ -a & 1 \end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{b-a} \begin{pmatrix} a^{n-3} & b^{n-3} \\ a^{n-2} & b^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & -1 \\ -a & 1 \end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{b-a} \begin{pmatrix} a^{n-3} b - a b^{n-3} & -a^{n-3} + b^{n-3} \\ a^{n-2} . b - a . b^{n-2} & -a^{n-2} + b^{n-2} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} D_{n-1} \\ D_n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{b-a} \begin{pmatrix} a^{n-3} b - a . b^{n-3} & b^{n-3} - a^{n-3} \\ a^{n-2} b - a b^{n-2} & b^{n-2} - a^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow D_n = (a^{n-2} b - a b^{n-2})(a+b) + (b^{n-2} - a^{n-2})(a^2 + ab + b^2)$

$= \cancel{a^{n-1} b} + \cancel{a^{n-2} b^2} - \cancel{a^2 b^{n-2}} - \cancel{a b^{n-1}} + \cancel{a^2 b^{n-2}} + \cancel{a b^{n-1}} + b^n$
$\quad - a^n - \cancel{a^{n-1} b} - \cancel{a^{n-2} b^2}$

$= \cancel{2 a^{n-2} b} (b^n - a^n) \cdot \dfrac{1}{b-a}$

$= \dfrac{a^n - b^n}{a - b}$

Cách 2: $D_n = (a+b) D_{n-1} - ab D_{n-2}$

$\Leftrightarrow D_n - a D_{n-1} = b . D_{n-1} - ab D_{n-2}$

$\Leftrightarrow D_n - a D_{n-2} = b (D_{n-1} - a . D_{n-2})$
$\qquad = b^{n-2} (D_2 - D_1) \quad (1)$

$D_n - bD_{n-1} = aD_{n-1} - abD_{n-2}$

$\Leftrightarrow D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2})$ (2)

Từ (1), (2) giải hệ

Bài 15: Cho dãy số (x_n) đc XĐ như sau: $x_1 = 3$, $x_2 = 7$ và $x_n (n \geq 3)$ là định thức của ma trận cấp n

$$x_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ 0 & & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Giải

$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$

Xét $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $Q_{n-1} = \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P.Q_{n-1} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ -2x_{n-2} + 3x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = P^{n-2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Xét PT đặc trưng: $(-\lambda)(3-\lambda) + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \lambda = 1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ BTR: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P^{n-2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2^{n-2} \\ 1 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 - 2^{n-2} & -1 + 2^{n-2} \\ 2 - 2^{n-1} & -1 + 2^{n-1} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_n = 3(2 - 2^{n-1}) + 7(-1 + 2^{n-1}) = 4.2^{n-1} - 1 = 2^{n+1} - 1$

KLONG

Bài 16: Cho định thức cấp n:

$$X_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad X^{2017}$$

Giải

$$X_n = X_{n-1} - X_{n-2}$$

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
1	0	-1	-1	0	1	1	0

$2017 \equiv 1 \pmod 6 \Rightarrow X_{2017} = X_1 = 1$

Dạng 5: Tách định thức = tích 2 định thức

Bài 17:

$$D = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 & & \dots & 0 \\ \dots & x_3 & & & 0 \\ 1 & x_n & & & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Bài 18:

$$D = \begin{vmatrix} \sin 2a_1 & \sin(a_1+a_2) & \dots & \sin(a_1+a_n) \\ \sin(a_2+a_1) & \sin(a_2+a_2) & \dots & \sin(a_2+a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin(a_n+a_1) & \sin(a_n+a_2) & \dots & \sin(a_n+a_n) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin a_1 & \cos a_1 & 0 & \dots & 0 \\ \sin a_2 & \cos a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \sin a_n & \cos b_n & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \left(\begin{vmatrix} \cos a_1 & \sin a_1 & \dots & 0 \\ \cos a_2 & \sin a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \cos a_n & \sin a_n & \dots & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$= 0$$

Dạng 6 : Định lý Cayley Hamilton

+) Công thức:

$\det(A - xI) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \cdot trace(A) \cdot x^{n-1} + (-1)^{n-2} C_2 x^{n-2} + \dots + \det A$,

với $C_2, C_3, \dots, C_n$: tổng các đ thức con chính bậc 2,3

+) $\det(A - xI) = 0$: PT đặc trưng nhận GTR, ma trận A là n₀

+) $\det(A - xI) = -(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3) \dots (x - \lambda_n)$

Bài 19: Gsử $A \in M_{2018}(\mathbb{Z})$

a) Tìm ĐK cần và đủ để $\exists\, A^{-1} \in M_{2018}(\mathbb{Z})$

b) CMR: $\det(2018A + I) \neq 0$

Giải

a) Vì A là ma trận nguyên

$\rightarrow$ det (A) cũng là 1 số nguyên

Để A^{-1} cũng là MT nghịch $\rightarrow \det(A^{-1})$ cũng nguyên

mà $\det A \cdot \det(A^{-1}) = 1$

Buổi 3: Hạng của ma trận

Cách tìm hạng của ma trận:

⊕ Theo ĐN: Chỉ ra 1 định thức con $p \neq 0$; CM mọi đa thức cấp $p+1$ trở lên $= 0$ $\Big\} \ r(A) = p$

⊕ BĐSC MT về dạng bậc thang

↳ Đổi chỗ dòng / cột

↳ Cộng vào 1 dòng / cột 1 tổ hợp t^2 của dòng hay cột ≠

Bài 1: $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{pmatrix}$

$$A \xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m^2 \\ 1 & m & 1 & m \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1-m^3 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & 1+m-m^2-m^3 \end{pmatrix}$$

Giải PT: $2-m-m^2 = 0 \Rightarrow m \in \{1; -2\}$

$1+m-m^2-m^3 = 0 \Rightarrow m \in \{1; -1\}$

TH1: $m = 1$

A có dạng: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow r(A) = 1$

TH2: $m \neq 1 \rightarrow r(A) = 3$

Bài 2: Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$; $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{pmatrix}$

Tìm ĐK a, b, c để $r(A) = 3$

Vs a, b, c như vậy, tìm A^{-1}

Giải

Lưu ý: $A \in Mat(n)$, $r(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$

$|A| = -2abc$. Để $r(A) = 3$ thì: $|A| \neq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

Lý thuyết: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^t$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \left| \quad \right|$ (Tạo ra từ việc bỏ đi dòng i, cột j)

$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & a \end{vmatrix} = -bc$

$A_{12} = -ac$

$A_{13} = c^2$

$A_{21} = -ab$

$A_{22} = a^2$

$A_{23} = -ac$

$A_{31} = b^2$

$A_{32} = -ab$

$A_{33} = -bc$

$$\Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} -bc & -ac & c^2 \\ -ab & a^2 & -ac \\ b^2 & -ab & -bc \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2abc} \begin{pmatrix} -bc & -ab & b^2 \\ -ac & a^2 & -ab \\ c^2 & -ac & -bc \end{pmatrix}$$

Bài 3: Cho x là 1 số thực, a là tham số $\in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} x & a & a+1 \\ a & a+1 & x \\ a+1 & x & a \end{pmatrix}$$

a) Tính $|A|$ theo a và x

b) Tìm x nếu $|A| = 0$

c) Vs $a = 2023$, tìm x sao cho $r(A) < 3$. Tìm $r(A)$ (.) TH đó

Giải

a) $|A| = x(a+1)a + ax(a+1) + ax(a+1) - (a+1)^3 - x^3 - a^3$

$= 3ax(a+1) - (a+1)^3 - x^3 - a^3$

b) $\begin{vmatrix} x & a & a+1 \\ a & a+1 & x \\ a+1 & x & a \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2a+1 & x+2a+1 & x+2a+1 \\ a & a+1 & x \\ a+1 & x & a \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (x+2a+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & x \\ a+1 & x & a \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (x+2a+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x-a \\ 0 & x-a-1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (x+2a+1)\left[-1-(x-a)(x-a-1)\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2a-1 \\ (x-a)(x-a-1)+1 = 0 \quad (1) \end{array}\right.$

Giải (1) : Đặt : $t = x-a$

Ta có : $t(t-1)+1 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 - t + 1 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 - 2.\frac{1}{2}.t + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \quad (2)$

NX : $\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

$\Rightarrow$ (2) VN $\Rightarrow$ (1) VN

Vậy $|A| = 0$ khi $x = -2a-1$

c) $a = 2023 \rightarrow x = -2.2023 - 1 = -4047$

$A = \begin{pmatrix} -2a-1 & a & a+1 \\ a & a+1 & -2a-1 \\ a+1 & -2a-1 & a \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ BĐSC $\rightarrow$ $1 \leq r(A) \leq 2$

(Chỉ ra 1 đt con cấp 2 $\neq 0$ thì $r(A) = 2$)

Ta có : $\begin{vmatrix} a+1 & -2a-1 \\ -2a-1 & a \end{vmatrix}$

$= a(a+1) - (2a+1)^2$

$= a^2 + a - (4a^2 + 4a + 1) = \cancel{5a^2+5a+1} \; \underbrace{-3a^2 - 3a - 1}_{<0}$

Vì $r(A) < 3$, $r(A) \geq 2$

$\Rightarrow r(A) = 2$

Bài 4: Tìm m để ma trận sau có hạng min

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & m+4 & -2 & -3 \\ 3 & m+6 & -3 & m-3 \end{pmatrix}$

$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & m-2 & 0 & 0 \\ 0 & m-3 & 0 & m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & m-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m(m-2) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow r_{min}(A) = 1 \Leftrightarrow m = 2$

KI.ONG

Bài 5: Cho x, y, t là 3 n₀ của: $t^3 - 2019t + 4 = 0$

Tìm hạng của: $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}$

Giải

$|A| = 3xzy - (x^3 + y^3 + z^3)$

$= 3xyz - [(x+y+z)^3 - 3(xy + xzy + yz)]$

$\Rightarrow |A| \neq 0$

$\Rightarrow r(A) = 3$

Bài 6: Tìm hạng của:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n+1 & n+2 & \dots & n+n-1 & 2n \\ \dots & \dots & \dots & & \\ n^2-2n+1 & n^2-2n+2 & \dots & n^2-2n+n-1 & n^2-n \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & \dots & n^2-n+n-1 & n^2 \end{pmatrix}$$

Lấy $c_{j+1} - c_j$ $(j \geq 1)$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ n+1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & & & & \\ n^2-2n+1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ n^2-n+1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lấy $c_{j+1} - c_j$ $(j \geq 2)$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n+1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ n^2-2n+1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n^2-n+1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow r(A) = 2$

KLONG

Buổi 4: Ma trận nghịch đảo

⊛ $A \in Mat(n)$: $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$

⊛ Cách tìm: ① $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} . \tilde{A}^t$

② BĐSC

③ Bấm MT

⊛ Tính chất: $(A*B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

$(A, B \in Mat(n) ; \exists A^{-1}, B^{-1})$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$(A^{-1})^{-1} = A$

Nâng cao: $P = \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} A & 0 \\ Y & B \end{pmatrix}$

$A \in Mat(m)$
$B \in Mat(n)$

$\exists A^{-1}, B^{-1}$ thì: $P^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}XB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}YA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$$

Bài 1: Tìm A^{-1} với $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Giải

\- ĐK để $\exists A^{-1}$: $|A| \neq 0$

$\Rightarrow ad - bc \neq 0$

\- $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Bài 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

Tìm ptử $\in$ dòng 3 cột 2 của ma trận $\tilde{A}^t$

Giải

a_{32} của $\tilde{A}^t \longrightarrow a_{23}$ của $\tilde{A}$

$- \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$

KLONG

Bài 3: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & a & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Tìm a để A khả nghịch

b) Giải PT ma trận: $A.X = 3.X + B$ với $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$(a = -2)$

Giải

a) Để A khả nghịch thì: $|A| \neq 0$

$\Rightarrow a \neq \frac{-7}{5}$

b) $A.X = 3.X + B$

$\Rightarrow (A - 3I)X = B$

$\Rightarrow (A-3I)^{-1}(A-3I).X = (A-3I)^{-1}B$

$\Rightarrow X = (A-3I)^{-1}B$

$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (A-3I)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{30} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{-4}{15} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{30} \\ \frac{-4}{15} \\ \frac{9}{10} \end{pmatrix}$

Bài 4: $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{pmatrix}$. Tìm A^{-1}

Giải

Bài 5: Cho $A, B \in Mat(n)$ khả nghịch
Gsử $\exists C$ khả nghịch mà $C^{-1}ABC$ là MT đg chéo

CMR: $\exists D$ ______ $D^{-1} \overset{BA}{\cancel{AB}} D$ ______

Giải

$P = C^{-1}ABC$

$\Leftrightarrow P.C^{-1}A = C^{-1}ABC^{-1}A$

$\Rightarrow P.C^{-1}A = C^{-1}ABA$

$\Rightarrow A^{-1}C.P.C^{-1}A = A^{-1}CABA$

$\Rightarrow A^{-1}C\ P\ C^{-1}A = BA$

Đặt: $X = A^{-1}C$ thì $\cancel{C^{-1}X = X}$ $C^{-1}A^{-} = X^{-1}$

Ta có: $XPX^{-1} = BA$

$\Rightarrow P = X^{-1}BAX$ là 1 MT đg chéo

Vậy $\exists$ ma trận $D = X = A^{-1}C$ mà TMYCĐB

Bài 6: $B, A \in Mat(n)$ sao cho $A, B, A+B$ khả nghịch
và $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

CMR: $\det(A) = \det(B)$

Bài 7: $A \in Mat(n)$, TM: $A + A^{-1} + I = 0$
CMR: $\det A = 1$

Giải

$A + A^{-1} = -I$

$\Rightarrow A.A^{-1} + A^{-1}.A^{-1} = -A^{-1}$

$\Rightarrow (A^{-1})^2 \pm 0\, A^{-1} + I_n = 0$

$\Rightarrow$

KLONG

Bài 8: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ và 1 số tg ứng các ký tự và tg ứng sau:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H	N	C	D	A	O	G	M	T	E

Một gviên muốn gửi 1 dòng MK cho SV. Để đảm bảo bí mật, gviên muốn chuyển bảng tg ứng trên chuyển dòng MK này → dsố và hthành dsố này theo MT B theo ntắc lần lượt từ trái → phải, mỗi chữ số là 1 vtrí trên các dòng của B. Sau khi tính $C = BA$, chuyển C về dsố

7 11 5 13 12 10 9 12 12

Hãy giải mã ma trận B để tìm MK?

Giải

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 5 \\ 13 & 12 & 10 \\ 9 & 12 & 12 \end{pmatrix} \to$$

$$C = BA \Rightarrow B = C \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

→ Bí mật là: CANCOGANG

Buổi số 5: Chéo hoá ma trận và ƯD

(*) Chéo hoá: $A \in Mat(n)$; $\exists\, T \in Mat(n)$
T khả nghịch
sao cho $T^{-1}AT$ là MT đg chéo

- A gọi là chéo hoá đc
- T: làm chéo hoá A

(*) Các bc chéo hoá ma trận:

B1: Tìm GTR — $|A - \lambda I| = 0$
B2: Tìm VTR ứng vs từng GTR
B3: Lập T và ma trận đg chéo $D = T^{-1}AT$

(*) ĐK để 1 MT chéo hoá đc:
① Có n gtrị riêng pbiệt
② Có n VTR độc lập t^2

Bài 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Tìm GTR, VTR của A
b) Chéo hoá A

Giải

a) Xét PT đặc trưng: $\det(A - \lambda I_n) = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 4\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = 3 \end{array}\right.$$

Với $\lambda = -1$. Gọi $u(x, y, z)$ là ~~GT riêng~~ VTR ứng vs $\lambda = -1$
Thiết lập HPTTT $(A - \lambda I_n | 0)$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vậy VTR ứng vs $\lambda = -1$ là $u = t(-2, 1, 0)$ $(t \neq 0)$

Với $\lambda = 1$. Gọi $v(x,y,z)$ là VTR ứng vs $\lambda = 1$

Thiết lập HPTTT $(A - \lambda I_n | 0)$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vậy VTR ứng vs $\lambda = 1$ là $v = t(-3,0,1)$ $(t \neq 0)$

Với $\lambda = 3$. Gọi $w(x,y,z)$ là VTR ứng vs $\lambda = 3$

Thiết lập HPTTT $(A - \lambda I_n | 0)$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vậy VTR ứng vs $\lambda = 3$ là $w = t(2,1,0)$ $(t \neq 0)$

b) Lập T là MT(theo cột) của các VTR

$$T = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Khi đó T là ma trận làm chéo hoá A:

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Bài 2: Ứng dụng của chéo hoá ma trận

① Tìm A^n. Với A ở trên tìm A^{2024}

Đặt $T^{-1}AT = D$ (D là MT đg chéo)

$\Rightarrow A = T.D.T^{-1}$

Ta có: $A^{2024} = T.D.T^{-1} \ldots T.D.T^{-1}$

$= T.D^{2024}.T^{-1}$

$$\Rightarrow A^{2024} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{2024} \end{pmatrix} T^{-1}$$

② Dãy truy hồi: $a_0, a_1, \dots, a_k, \dots$ $(k > 0)$ là dãy truy hồi t^2 nếu: ∃ các số nguyên cố định TM:

i) $a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$

ii) $a_{k+2} = c.a_k + d.a_{k+1}$ $\forall k \geq 0$

Tìm $a_k = ?$

Giải

Đặt: $v_k = \begin{pmatrix} a_k \\ a_{k+1} \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{pmatrix}$ $(k \geq 0)$

$\Rightarrow A.v_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_k \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ a_{k+2} \end{pmatrix} = v_{k+1}$

Vậy $\boxed{v_{k+1} = A.v_k}$

$\Rightarrow v_1 = A.v_0$

$v_2 = A.v_1 = A^2 v_0$

$\Rightarrow$ Cứ t^2 ta có: $v_k = A^k v_0$ $(\forall k \geq 0)$

Để tìm $a_k \to$ tìm $v_k \to$ tìm A^k (biết v_0)

Bài 3: Cho dãy Fibonaci: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1, \dots$

TQ: $a_{k+2} = 1.a_k + 1.a_{k+1}$ $(\forall k \geq 0)$

Tìm số hạng TQ a_k của dãy Fibonaci

Giải

Đặt $v_k = \begin{pmatrix} a_k \\ a_{k+1} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ta có: $v_k = A^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Tìm A^k (bằng p^2 chéo hóa)

Các giá trị riêng: $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Các VTR ứng vs λ_1, λ_2: $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow a_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right)$

③ Tính e^A vs A có thể chéo hoá đc

$$e^A = I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots$$

(≈ khai triển của hàm $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$)

Ta có: $A = TDT^{-1}$ < D là MT đg chéo; T là MT làm chéo hoá A

=> $A^n = T.D^n.T^{-1}$. Thay vào CT e^A:

$$e^A = I_n + TDT^{-1} + \frac{1}{2!}TD^2T^{-1} + \dots$$

$$= T\left(I_n + D + \frac{1}{2!}D^2 + \dots\right)T^{-1}$$

$$= T.\,e^D.\,T^{-1}$$

$$\left(e^D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}D^k\right)$$

Bài 4: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) A có chéo hoá đc k⁰?
b) Tìm GTR, VTR, chéo hoá A
c) Tìm e^A

Giải

a) $\det A = -1 \neq 0 \rightarrow$ A chéo hoá đc

b) Các gtrị riêng $-1, 1$

$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$D = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $e^A = T.e^D T^{-1}$

$= T.\begin{pmatrix} \frac{1}{e} & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{e} & e - \frac{1}{e} \\ 0 & e \end{pmatrix}$

KLONG

Buổi 6: Hệ phương trình tuyến tính

1. Hệ PTTT:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Tổng quát: $A.X = b$

$\exists A^{-1}$ → $m = n$ (Ma trận vuông)
→ $\det A \neq 0$

$$A^{-1}.A.X = A^{-1}.b \Rightarrow X = A^{-1}.b$$

2. P² giải và biện luận:

a) P² Gauss: (khử bớt ẩn, dựa trên phép biến đổi ĐS
- Chỉ biến đổi theo hàng
- Đổi chỗ hàng của ma trận
- Nhân 1 hàng nào đó vs $\lambda \neq 0$
- Cộng vào 1 hàng 1 tổ hợp tuyến tính của 1 hàng ≠ (hàng khác)

VD: $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -7 \\ 2x_1 - 8x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 11x_2 - 7x_3 = 17 \end{cases}$

Từ HPT ta có: $(\bar{A} \mid b)$ (Ma trận $\bar{A}$ bổ sung)

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -4 & -7 \\ 2 & -9 & -1 & 4 \\ 3 & -11 & -7 & 17 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & 8 & 18 \\ 0 & 4 & 5 & 38 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & 8 & 18 \\ 0 & 0 & -27 & -34 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - 5b - 4c = -7 \\ b + 8c = 18 \\ -27c = -34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 855/23 \\ b = 176/23 \\ c = \frac{34}{23} \end{cases}$$

KLONG

- Định lý Cramer: → Số PT = Số ẩn
→ $|A| \neq 0$

Công thức no

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$ Thay cột i bởi cột tự do

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -7 \\ 2x_1 - 9x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 11x_2 - 7x_3 = 17 \end{cases}$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -7 & -5 & 4 \\ 4 & -9 & -1 \\ 17 & -11 & -7 \end{vmatrix}$$

Hữu ích khi: → Biện luận theo tham số
→ Tìm ĐK để hệ có no duy I
→ Tính no (tham số)

VD2: $$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

Ma trận bổ sung:

$$(A|b) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 & 11 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -3 & 11 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & -3 & 15 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & -3 & 15 \\ 0 & 0 & -15 & 15 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 6x_2 - 3x_3 = 15 \\ -15x_3 = 15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

VD3: $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -9 \\ 12x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -10 \end{cases}$

Ma trận bổ sung:

$$(A|b) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & -6 & -9 \\ 12 & -2 & 1 & -2 & -10 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -6 & -9 \\ 12 & -2 & 1 & -2 & -10 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & -10 & -14 \\ 0 & 2 & 5 & -10 & -14 \\ 0 & 10 & 25 & -50 & -70 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_2 + 5x_3 - 10x_4 = -14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cancel{\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = b \\ x_3 = c \\ x_4 = -a + b + 2c + 5 \end{cases}} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -0{,}5a + b - 2 \\ x_2 = -2{,}5a + 5b - 7 \\ x_3 = a \\ x_4 = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = a\left(\frac{-1}{2}, \frac{-5}{2}, 1, 0\right) + b(1, 5, 0, 1) + (-2, -7, 0, 0)$$

⇒ k° gian nghiệm: Số chiều là 2

Định lý Kronecker - Capelli

$$Ax = b$$

- $r(A) \neq r(A|b) \rightarrow$ Hệ vô no
- $r(A) = r(A|b) = n \rightarrow$ Hệ có no duy I'
- $r(A) = r(A|b) = r < n \rightarrow$ Hệ có VSN
  (k° gian có: $n-r$ chiều
  Chọn $n-r$ ẩn làm ẩn tự do

VD 4: Giải và biện luận HPT

$$\begin{cases} x_1 - mx_2 + m^2x_3 = m \\ mx_1 - m^2x_2 + mx_3 = 1 \\ mx_1 + x_2 - m^3x_3 = 1 \end{cases}$$

Cách ≠:
→ $|A| \neq 0$ no duy I
→ $|A| = 0$ tìm m thay vào HPT

Ma trận bổ sung:

$$(A|b) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & m^2 & m \\ m & -m^2 & m & 1 \\ m & 1 & -m^3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & m^2 & m \\ 0 & 0 & m-m^3 & 1-m^2 \\ 0 & 1+m^2 & -2m^3 & 1-m^2 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & m^2 & m \\ 0 & 1+m^2 & -2m^3 & 1-m^2 \\ 0 & 0 & m(1-m^2) & 1-m^2 \end{array}\right)$$

TH1: $m \neq 0, m \neq \pm 1$

$\Rightarrow r(A) = r(A|b) =$ Số ẩn $\rightarrow \begin{cases} x_1 = m \\ x_2 = 1 \\ x_3 = \frac{1}{m} \end{cases}$

$\Rightarrow$ HPT có no duy I

TH2: $m = 0$

$\Rightarrow r(A) < r(A|b) \Rightarrow$ HPT vô no

TH3: $m = 1$

$$\Rightarrow (A|b) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Do $r(A) = r(A|b) = 2 <$ Số ẩn

$\Rightarrow$ HPT có VSN

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = t \\ x_3 = t \end{cases} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = t(0,1,1) + (1,0,0)$$

TH4: $m = -1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = t(0,-1,1) + (1,0,0)$

VD5: $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$ (Giải theo Gamel)

Ta có: $|A| = \left|\begin{matrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{matrix}\right| \cancel{\left|\begin{matrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{matrix}\right|}$

$= \left|\begin{matrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{matrix}\right| \cancel{\left|\begin{matrix} a \\ a^2 \\ 1 \end{matrix}\right|} = \left|\begin{matrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \end{matrix}\right|$

$= \left|\begin{matrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & -a(a+1) \end{matrix}\right|$

TH1: $|A| \neq 0 \Rightarrow$ HPT có no duy I'

$\Leftrightarrow a \neq 0,\ a \neq -1$

$\left(\begin{matrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{matrix}\left|\begin{matrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{matrix}\right.\right) \Leftrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{matrix}\left|\begin{matrix} a \\ 1 \\ a^2 \end{matrix}\right.\right)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 \end{matrix}\left|\begin{matrix} a \\ 1-a^2 \\ a^2-a \end{matrix}\right.\right) \Leftrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 0 & a^2+a-2 \end{matrix}\left|\begin{matrix} a \\ 1-a^2 \\ a^3+a^2-a-1 \end{matrix}\right.\right)$

TH2: $a = 0$

$\Rightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{matrix}\right.\right) \Rightarrow$ HPT có no duy I': $\begin{cases} x = \frac{-1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$

TH3: $a = -1$

$\Rightarrow \left(\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix}\left|\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right.\right) \Rightarrow \left(\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\left|\begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix}\right.\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} x - y + z = -1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t-1 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (x, y, z) = t(1,1,0) + (-1,0,0)$

KLONG

3. Không gian nghiệm :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

↙ ↘

Tìm n. cho hệ thuần I' (VP = 0)   Tìm 1 n. riêng của hệ

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Nghiệm TQ} = \bar{y} + y^*}$

TH : $m = n$ (Số ẩn = Số PT)
$|A| \neq 0$
$\rightarrow$ Hệ thuần I' chỉ có n. $(0, 0, \dots, 0)$

$\Rightarrow$ **Nhận xét :** Nghiệm của HPT TT thuần I' là k' gian vectơ con có số chiều $n - r(A)$

VD : $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - x_3 = -2x_1 - x_4 \\ 2x_2 + x_3 = -4x_1 + 3x_4 \end{cases}$

Đặt : $x_1 = a$, $x_4 = b$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = -2a + \frac{2}{3}b \\ x_3 = 5/3\, b \\ x_4 = b \end{cases}$

Cho $(x_1, x_4) = (1; 0) \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

Cho $(x_1; x_4) = (0; 1) \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2/3 \\ x_3 = \frac{5}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Hệ n. cơ bản là : $\left\{ (1; -2; 0; 0), \left(0; \frac{2}{3}; \frac{5}{3}; 1\right) \right\}$

Lưu ý: +) Có thể chọn (x_1, x_4) tuỳ ý, chú ý $\left| \quad \right| \neq 0$

+) Hệ n₀ CB $\sim$
KGN: kgian sinh bởi 2 vectơ $\in$ hệ n₀ CB
thì k: thay đổi

$(\vec{u}, \vec{v}) \longrightarrow \lambda\vec{u} + \beta\vec{v}$ (λ, β là tham số)

Định lý: NTQ của HPTTT = n° riêng + nghiệm TQ của hệ thuần I

$$y = y^* + \bar{y}$$

($\vec{u}, \vec{v}$ là n₀ CB $\rightarrow$ $\bar{y}$: $\lambda\vec{u} + \beta\vec{v}$)

Ứng dụng:

- Cân = PTHH
- kinh tế / Sxuất
- Điện (cân bằng)

Bài 3:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 3x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$

$(A|b) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 4x_4 = -2x_2 + 3x_3 + 1 \\ 2x_1 - x_4 = 2x_2 - x_3 + 3 \end{cases}$

Đặt $x_2 = a$, $x_3 = b$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{10}{6}a - \dfrac{13}{6}b + \dfrac{11}{6} \\ x_4 = \dfrac{4}{3}a - \dfrac{4}{3}b + \dfrac{2}{3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 3 \end{cases}$

$(A|b) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & -5 & 8 & -7 & 3 \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$

Do $r(A) < r(A|b) =$ Số ẩn

$\Rightarrow$ HPT vô nghiệm

d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -7 \end{cases}$

$(A|b) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & -3 & -3 & -7 \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -12 & 9 & 13 & -11 \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & -12 & 9 & 13 & -11 \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 37 & 0 \\ 0 & 0 & 33 & 85 & -11 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 37 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 224 & -187 \end{array}\right)$

$\Rightarrow r(A) = r(A|b) =$ Số ẩn

$\Rightarrow$ HPT có n. duy I

KLONG

Bài 4:

a) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$ (Làm rồi)

b) $\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + by + z = 3 \\ x + 2by + z = 4 \end{cases}$

$(A|b) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{array}\right)$ $|A| = b(1-a)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1-ab & 1-a & 4-3a \\ 0 & b & 0 & 1 \end{array}\right)$

TH1: $b \neq 0$, $a \neq 1$

$\Rightarrow r(A) = r(A|b) \Rightarrow$ HPT có n_0 duy I

TH2: $b = 0$, $a \neq 1$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1-a & 4-3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\Rightarrow r(A) < r(A|b) \Rightarrow$ HPT vô n_0

TH3: $b \neq 0$, $a = 1$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1-b & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$ Hệ vô n_0

~~$\to b = 1 \to$~~ Hệ vô n_0

~~$\to b \neq 1 \to$~~

TH4: $b = 0$, $a = 1$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$ Hệ vô n_0

KLONG

Bài 5: $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$

Tìm đk cần và đủ để HPT có nghiệm

$(A|b) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & (1-a^2)(a-1) & (1-a)a \end{array}\right)$

Để HPT có no thì: $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$

Bài 7: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = a \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 5 \\ 1x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = -12 \end{cases}$

$(A|b) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & a \\ 1 & +2 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & -12 \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & -12 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & a \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & -17 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & a-10 \end{array}\right)$

~~Để HPT~~ $\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+7 \end{array}\right)$

Để HPT có no thì: $a + 7 = 0$

$\Rightarrow a = -7$

Bài 9: Với đk nào thì 3 đthg pbiệt

$a_1x + b_1y + c_1z = 0$

$a_2x + b_2y + c_2z = 0$ đồng quy?

$a_3x + b_3y + c_3z = 0$

Để 3 đthg đồng quy: $\det A \neq 0$

KLONG

Bài 10: Ta có PT đtròn TQ là:

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$$

Vs đ' $A(2,1)$: $-4a-2b+c=-5$

$B(0,2)$: $-4b+c=-4$

$C(0,1)$: $-2b+c=-1$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a-2b+c=-5 \\ -4b+c=-4 \\ -2b+c=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A|b) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & +3 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} a=\cancel{2}\ 1 \\ b=3/2 \\ c=+2 \end{cases}$$

Bài 11: Theo ĐB ta có HPT:

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ d=-1 \\ -a+b-c+d=-2 \\ 8a+4b+2c+d=7 \end{cases}$$

$$(A|b) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & +1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 8 & 4 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

$$\cancel{\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y=\cancel{2x^3-x^2-2x-1}\ x^3-1$$

Bài 12:
$$\begin{cases} a+b+c=-1 \\ 9a-3b+c=47 \\ 4a+2b+c=12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-2 \\ c=-4 \end{cases} \Rightarrow f(x)=5x^2-2x-4$$

Bài 13: (.) k° gian vectơ R^4 cho hệ vectơ,

$\vec{\alpha_1}$ $(1,1,1,1)$, $\vec{\alpha_2} = (2,2,2,2)$, $\vec{\alpha_3} = (3,0,-1,1)$

Hãy bd t^2 vectơ $\vec{\alpha} = (-12,3,8,-2)$ qua hệ vectơ đã cho

Ta có: $\vec{\alpha} = x\vec{\alpha_1} + y\vec{\alpha_2} + z\vec{\alpha_3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = -12 \\ x + 2y = 3 \\ x + 2y - z = 8 \\ x + 2y + z = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(A|b) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -12 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & -3 & 15 \\ 0 & 0 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & -2 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = t \\ z = -5 \end{cases}$$

Bài 14: (.) k° gian vectơ R^3 cho 2 cơ sở:

(ε): $\vec{\varepsilon_1} = (1,0,0)$, $\vec{\varepsilon_2} = (0,1,0)$, $\vec{\varepsilon_3} = (0,0,1)$

(ξ): $\vec{\xi_1} = (2,-1,3)$, $\vec{\xi_2} = (-3,1,-2)$, $\vec{\xi_3} = (0,4,5)$

Tìm ma trận chuyển từ cs $(\varepsilon) \to (\xi)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{\alpha} = (-1,2,0)$ đvs cơ sở (ξ)

Giải

$$[\varepsilon_1]_\xi \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ MT chuyển cs $\varepsilon \to \xi$ là: $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

$$[\alpha]_\xi \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow [\alpha]_\xi = \begin{pmatrix} -17/25 \\ -3/25 \\ 9/25 \end{pmatrix}$$

Bài 15:
$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(\varepsilon) \to (\varepsilon)$

$\vec{\varepsilon_1} = (1,-1,0)$

$\vec{\varepsilon_2} = (2,-1,0)$

$\vec{\varepsilon_3} = (1,1,-1)$

$\vec{\varepsilon_1} = (1,1,-1)$

$\vec{\varepsilon_2} = (1,1,0)$

$\vec{\varepsilon_3} = (2,0,0)$

Bài 20:

a)
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}$$

Biết 1 no riêng của hệ là $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0\right)$

— Tìm nc TQ của mỗi hệ nhờ hệ n. CB của hệ thuầ I' lkết tg ứng

— Nhờ n. TQ vừa tìm đc, tìm I n riêng mà các tlp tọa độ là nh số nguyên

Giải

$$(A|b) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & -6 & 10 & 0 \\ 0 & 9 & -9 & -9 & 15 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

Đặt $x_3 = a$, $x_4 = b$, $x_5 = c$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}c \\ x_2 = a + b - \frac{5}{3}c \end{cases}$$

Cho $(x_3, x_4, x_5) = (1,0,0) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

$(x_3, x_4, x_5) = (0,1,0) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

$(x_3, x_4, x_5) = (0,0,1) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{-5}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Hệ n₀ CB là:

$\left\{ (0,1,1,0,0), (0,1,0,1,0), \left(\frac{1}{3}, \frac{-5}{3}, 0,0,1\right) \right\}$

$\Rightarrow$ N° TQ của HPT thuần I' là:

$\bar{y} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$ (vs α, β, γ là tham số)

$\Rightarrow$ N° TQ của HPTTT là,

$$y = \bar{y} + y^* = \alpha(0,1,1,0,0) + \beta(0,1,0,1,0) + \gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{-5}{3}, 0,0,1\right) + \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0,0,0\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\gamma \\ x_2 = \frac{1}{3} + \alpha + \beta - \frac{5}{3}\gamma \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \\ x_5 = \gamma \end{cases}$$

Tìm α, β, γ sao cho $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}$

Ta thấy: $x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{Z} \rightarrow \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$

$x_1 = \frac{\gamma + 1}{3} \in \mathbb{Z} \rightarrow \gamma + 1 \vdots 3$

$x_2 = \alpha + \beta - 2\gamma + \frac{\gamma}{3} + \frac{1}{3} \rightarrow \gamma + 1 \vdots 3$

$\Rightarrow \gamma = 3n + 2 \ (n \in \mathbb{Z})$; $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$

Cho $\gamma = 2$; $\alpha, \beta = 0 \rightarrow$ N° riêng TM

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 2 \end{cases}$$

KLONG

VD: Chéo hoá ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$

Xét PT đặc trưng $\det(A - \lambda I_n) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda(\lambda - 4) + 5 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 2+i \\ \lambda = 2-i \end{array}\right.$

Với $\lambda = 2+i$. Xét: $(A|0)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2-i & 1 & 0 \\ -5 & 2-i & 0 \end{array}\right) \times (2-i)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -5 & 2-i & 0 \\ -5 & 2-i & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow -5x + (2-i)y = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2+i \end{cases}$

Vs $\lambda = 2-i$. Xét: $(A|0)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2+i & 1 & 0 \\ -5 & 2+i & 0 \end{array}\right) \times (2+i)$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -5 & 2+i & 0 \\ -5 & 2+i & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow -5x + (2+i)y = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2-i \end{cases}$

Gọi T là MT làm chéo hoá A

$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2+i & 2-i \end{pmatrix}$

$D = T^{-1} A T = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}$

VD: $A = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{bmatrix}$

$x_{k+1} = A x_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$ vs $x_0 = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{bmatrix}$

Giải

$x_1 = A . x_0$

$x_2 = A . x_1 = A^2 . x_0$

$\Rightarrow x_k = A^k . x_0 \quad (k \in \mathbb{Z})$

KLONG

Xét PT đặc trưng: $\det(A - \lambda I_n) = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0{,}95-\lambda & 0{,}03 \\ 0{,}05 & 0{,}97-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (0{,}95-\lambda)(0{,}97-\lambda) - 0{,}0015 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 1{,}92\lambda + 0{,}92 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = 0{,}92 \end{array}\right.$

Với $\lambda = 1$. Xét $(A|0)$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -0{,}05 & 0{,}03 & 0 \\ 0{,}05 & -0{,}03 & 0 \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow -0{,}05x + 0{,}03y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 5t \end{cases} \Rightarrow (x,y) = t(3,5)$

Với $\lambda = 0{,}92$. Xét $(A|0)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0{,}03 & 0{,}03 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}05 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow 0{,}03x + 0{,}03y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases} \Rightarrow (x,y) = t(1,-1)$

Gọi T là MT làm chéo hoá MT A

$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

$D = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}92 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = T.D.T^{-1}$

$\Rightarrow A^k = T.D^k.T^{-1}$

$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}92^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3+5.0{,}92^k & 3-3.0{,}92^k \\ 5-5.0{,}92^k & 5+3.0{,}92^k \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_k = A^k.x_0$

$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3+5.0{,}92^k & 3-3.0{,}92^k \\ 5-5.0{,}92^k & 5+3.0{,}92^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$

$\lim_{k\to\infty} x_k = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}375 \\ 0{,}625 \end{pmatrix}$

Buổi 8: Ánh xạ tuyến tính

Bài 1: Cho axạ XĐ bởi biểu thức

$$f(x,y,z) = (3x + y + z,\ 2x + 3y + 2z,\ 5x + 4y + 3z)$$

a) CM f là 1 AXTT. Viết MT chính tắc của f

b) Tìm CS của ker(f) và Im(f)

Giải

a) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$u \to f(u)$

Lấy $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$; $a, b \in \mathbb{R}$

$$f(au_1 + bu_2) = (3ax_1 + ay_1 + az_1 + 3bx_2 + by_2 + bz_1,\ 2ax_1 + 3ay_1 + 2az_1 + 2bx_2 + 3by_2 + 2bz_2,\ 5ax_1 + 4ay_1 + 3az_1 + 5bx_2 + 4by_2 + 3bz_2)$$

$$= (3ax_1 + ay_1 + az_1,\ 2ax_1 + 3ay_1 + 2az_1,\ 5ax_1 + 4ay_1 + 3az_1)$$

$$+ (3bx_2 + by_2 + bz_1,\ 2bx_2 + 3by_2 + 2bz_2,\ 5bx_2 + 4by_2 + 3bz_2)$$

$$= af(u_1) + bf(u_2)$$

$\Rightarrow$ f là 1 AXTT

Viết MT chính tắc của f: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

b) ker(f) $\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow$ ker(f) $\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 0 \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -1/7\,t \\ y = -4/7\,t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = -4t \\ z = 7t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow (x, y, z) = t(-1, -4, 7)$. Vậy $\ker(f) = \langle (-1, -4, 7) \rangle$

$\dim(\ker(f)) = 1$

$\mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Cơ sở của $\mathrm{Im}(f)$ là: $S = \{(0,0,1), (1,2,3)\}$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$

Bài 2: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$f(x) = x^8 + x^4 + 1$

a) Tìm các n. (thực, phức) của $f(x)$
b) Tìm $f(A)$
c) Tìm $e^{f(A)}$
d) Ptích $f(x)$ thành nhân tử (.) R

Giải

a) $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2} \\ x = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2} \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} \\ x = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} \end{array}\right.$

b) Lại a)

Đặt: $t = x^4$ ~~$(t \geq 0)$~~

Ta có: $f(t) = t^2 + t + 1$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ t = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x^4 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i & (1) \\ x^4 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i & (2) \end{array}\right.$

Giải (1) $\Rightarrow x = \sqrt[4]{-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i} \Rightarrow x = \sqrt[4]{1\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$

$\Rightarrow \quad x = \sqrt[4]{\cos\frac{2\pi}{3} + i.\sin\frac{2\pi}{3}}$

$\Rightarrow x = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right)$

$(k = 0, 1, 2, 3)$

— $k = 0 \rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

— $k = 1 \rightarrow x = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

— $k = 2 \rightarrow x = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1}{2}i$

— $k = 3 \rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{-\sqrt{3}}{2}i$

Giải (2) $\Rightarrow x = \sqrt[4]{\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

$\Rightarrow x = \sqrt[4]{\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$

$\Rightarrow x = \cos\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right)$

$(k = 0, 1, 2, 3)$

— $k = 0 \rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{-1}{2}i$

— $k = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

— $k = 2 \rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

— $k = 3 \rightarrow x = \frac{-1}{2} + \frac{-\sqrt{3}}{2}i$

b) Xét PT đặc trưng: $\det(A - \lambda I) = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 4\right] = 0$

$\Leftrightarrow (2-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \lambda = -1 \\ \lambda = 3 \end{array}\right.$

Với $\lambda = 2$. xét $(A|0)$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = -3t \\ y = t \\ z = +2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y, t) = t(-3, 1, +2) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Với $\lambda = -1$. xét $(A|0)$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = t(0, 1, -1) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Với $\lambda = 3$. xét $(A|0)$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = t(0, 1, 1)$$

Gọi T là MT làm chéo hoá MT A

$$T = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ +2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D = T^{-1}.A.T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = A^8 + A^4 + I$$

$$= T \cdot D^8 \cdot T^{-1} + T \cdot D^4 \cdot T^{-1} + T \cdot E \cdot T^{-1}$$

$$= T\,(D^8 + D^4 + E) \cdot T^{-1}$$

$$D^8 + D^4 + E = \begin{pmatrix} 2^8 & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{2}1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 273 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6643 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f(A) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ +2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 273 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6643 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -819 & 0 & 0 \\ 273 & 3 & 6643 \\ +546 & -3 & 6643 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} +1638 & 0 & 0 \\ 19380 & 19938 & 19920 \\ 18840 & 19920 & 19938 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 273 & 0 & 0 \\ 3230 & 3323 & 3320 \\ 3140 & 3320 & 3323 \end{pmatrix}$$

Vậy $f(A) = \begin{pmatrix} 273 & 0 & 0 \\ 3230 & 3323 & 3320 \\ 3140 & 3320 & 3323 \end{pmatrix} = B$

c) Xét PT đặc trưng: $\det(B - \lambda I) = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 273-\lambda & 0 & 0 \\ 3230 & 3323-\lambda & 3320 \\ 3140 & 3320 & 3323-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (273-\lambda)\left[(3323-\lambda)^2 - 3320^2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (273-\lambda)(3-\lambda)^2(6643-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 273 \\ \lambda = 3 \\ \lambda = 6643 \end{array}\right.$$

Với $\lambda = 273$. Xét $(A|0)$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3230 & 3050 & 3320 & 0 \\ 3140 & 3320 & 3050 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3230 & 3050 & 3320 & 0 \\ 0 & 1146600 & -573300 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow (x, y, t) = t(-3, 1, 2)$$

...

$$\Rightarrow T^{-1}.B.T = \begin{pmatrix} 273 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6643 \end{pmatrix} = E$$

$$\Rightarrow B = T.E.T^{-1}$$

$$\Rightarrow e^B = T.e^E.T^{-1}$$

$$= T.\begin{pmatrix} e^{273} & 0 & 0 \\ 0 & e^3 & 0 \\ 0 & 0 & e^{6043} \end{pmatrix} T^{-1}$$

(*) cách hay hơn :

$$f(A) = T\,(\underbrace{D^8 + D^4 + I}_{f(D)})\,T^{-1}$$

$$\Rightarrow e^{f(A)} = T.e^{f(D)}.T^{-1}$$

d) $f(x) = x^8 + x^4 + 1$

$$= x^8 + 2x^4 + 1 - x^4$$

$$= (x^4+1)^2 - (x^2)^2$$

$$= (x^4 - x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

$$= (x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$

Bài toán áp dụng chuỗi Markov

Bài 1: Một ngôi làng nhỏ hẻo lánh x đc CT phát thanh từ 2 đài phát thanh, 1 đài tin tức và 1 đài âm nhạc. (.) số nh' ⊢ nghe đc đài tin tức, 70% sẽ t² nghe tin tức sau giờ nghỉ của đài xra mỗi nửa tiếng (.) khi 30% sẽ chuyển sang đài âm nhạc vào giờ nghỉ của đài. (.) số nh' ⊢ nghe đc đài âm nhạc, 60% sẽ chuyển sang đài tin tức vào giờ nghỉ của đài, (.) khi 40% vẫn sẽ nghe đài âm nhạc. Gsử mọi ⊢ đang nghe tin tức vào 8h15 sáng

a) C² ma trận ngẫu nhiên mô tả cách ⊢ nghe radio có xu hg Hđổi đài tại mỗi giờ nghỉ của đài. Gán nhãn các hàng và cột

b) Đưa ra vectơ t.thái bđ

c) Bao nhiêu % ⊢ nghe sẽ nghe đài âm nhạc lúc 9h25 sáng (sau khi đài nghỉ lúc 8:30 và 9:00 sáng)

Giải

a) Gọi đài tin tức là N

đài âm nhạc là M

Đang ở / Chuyển đến	N	M
N	0,7	0,6
M	0,3	0,4

⇒ Ma trận ngẫu nhiên mô tả ... là: $A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,6 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$

b) Vì tất cả ⊢ nghe đc đều nghe đài Tin tức vào 8h15 sáng

→ 100% ⊢ nghe đc đều → đài Tin tức ở t.thái bđ

VT t.thái bđ là: $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) Số % ⊢ nghe mỗi đài vào sau lúc 8h30 là:

$$P_1(x) = A.x_0 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,6 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix}$$

Số % ⊢ nghe mỗi đài vào sau lúc 9h là:

$$P_2(x) = A.P_1(x) = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,6 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,67 \\ 0,33 \end{pmatrix}$$

Bài 2: Một con vật (.) phòng TN có thể ăn bất kỳ 1 (.) 3 loại thức ăn mỗi ngày. Hồ sơ của PTN cho thấy nếu con vật chọn 1 loại thức ăn (.) 1 lần thử thì nó sẽ chọn loại thức ăn đó (.) lần kế tiếp vs XS là 50% và nó sẽ chọn loại thức ăn còn lại, t/p ở lần thử tiếp theo vs XS = nhau là 25%.

a) Ma trận ngẫu nhiên của tình huống này là gì?

b) Nếu con vật chọn thức ăn số 1 ở lần đầu tiên thì XS nó sẽ chọn thức ăn số 2 ở lần thử T2 sau lần thử đầu tiên là bnhiêu

Giải

a) Ma trận ngẫu nhiên của tình huống này là:

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$$

b) Hệ thống này đc mtả bằng chuỗi Markov:

$$x_{k+1} = A \cdot x_k$$

Chúng ta có vectơ trạng thái bđ: $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lần thử đầu tiên của con vật:

$$x_1 = A \cdot x_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

Lần thử thứ 2 của con vật:

$$x_2 = A \cdot x_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,375 \\ 0,3125 \\ 0,3125 \end{pmatrix}$$

→ XS con vật chọn thức ăn số 2 ở lần T2 là 0,3125

Bài 3: Vào bất kỳ ngày nào, HS khỏe mạnh or bị bệnh. Nếu nh HS hnay khỏe mạnh thì 95% sẽ khỏe mạnh vào ngày mai. (.) số nh HS ốm ngày hnay 55% vẫn sẽ bị ốm vào ngày mai

a) Ma trận ngẫu nhiên của TH này là gì?

b) Gsử 20% số HS bị ốm vào T2. Số phần trăm có k/n bị ốm vào T3 và T4 là bnhiêu?

d) Nếu hnay 1 HS khỏe thì XS để HS đó vẫn khỏe ~~lại~~ or khỏe ~~lại~~ sau 2 ngày nx là?

KLONG

Giải

a) Ma trận ngẫu nhiên là:

$$M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,45 \\ 0,05 & 0,55 \end{pmatrix}$$

b) Bài toán này đc mtả theo chuỗi Markov:

$$x_{k+1} = M.x_k$$

Vectơ t.thái ban đầu là: $x_0 = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{pmatrix}$

$$x_1 = M.x_0 = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,45 \\ 0,05 & 0,55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,85 \\ 0,15 \end{pmatrix}$$

→ Tỉ lệ HS bị ốm vào T3 là 15%

$$x_2 = M.x_1 = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,45 \\ 0,05 & 0,55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,85 \\ 0,15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,875 \\ 0,125 \end{pmatrix}$$

→ Tỉ lệ HS bị ốm vào T4 là 12,5%

c) Vectơ t.thái bđ là: $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$x_1 = M.x_0 = \begin{pmatrix} 0,95 \\ 0,05 \end{pmatrix}$$

→ Tỉ lệ HS này vẫn khoẻ vào ngày t.tiếp là 95%.

$$x_2 = M.x_1 = \begin{pmatrix} 0,925 \\ 0,075 \end{pmatrix}$$

→ Tỉ lệ HS này vẫn khoẻ sau 2 ngày là 92,5%

Bài 4: Thời tiết ở Columbus có 3 k/năng tốt, bthg or xấu. Nếu hnay thời tiết tốt thì có 60% k/năng ngày mai thời tiết tốt, 30% thời tiết bthg và có 10% thời tiết sẽ xấu. Nếu hnay thời tiết bthg thì nó sẽ bthg vào ngày mai là 30% và tốt là 40%, Còn nếu hnay thời tiết xấu thì ngày mai nó sẽ tốt 40% và bthg là 50%.

a) Ma trận ngẫu nhiên c.) TH này là ?

b) Gsử hnay có 50% k/năng thời tiết tốt và 50% là bthg. XS ngày mai thời tiết xấu là ?

c) Gsử dự đoán thời tiết T2 là 40% thời tiết bthg và 60% thời tiết xấu. XS thời tiết tốt vào T4 là ?

Giải

a) Ma trận ngẫu nhiên (.) TH này là:

$$M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

b) Bài toán này đc mô tả theo chuỗi Markov:

$$x_{k+1} = M \cdot x_k$$

Vectơ t.thái bđ là: $x_0 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$x_1 = M \cdot x_0 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

→ Tỉ lệ thời tiết xấu ngày mai là 20%.

c) Vectơ t.thái bđ là: $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$

$$x_1 = M \cdot x_0 = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,42 \\ 0,18 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = M \cdot x_1 = \begin{pmatrix} 0,48 \\ 0,336 \\ 0,184 \end{pmatrix}$$

→ XS thời tiết tốt vào T4 là 48%

KLONG

Bài 1: Hộp đựng ngũ cốc ăn sáng thg ghi số lg calo và lượng protein, carbohydrate và chất béo có (.) 1 phần ngũ cốc. Số lg cho 2 loại ngũ cốc phổ biến đc đưa ra dưới đây. Gsử h² cho 2 loại — chứa cxác 295 calo, 9 g protein, 48 g carbohydrat và 8 g chất béo

a) Thiết lập PT vectơ cho bài toán này. Bao gồm 1 giải thích về các biến (.) PT đại diện cho cái gì?

b) Viết PT ma trận tg đg rồi xác định liệu có thể chuẩn bị hỗn hợp mong muốn của 2 loại ngũ cốc k°?

Giải

a) Ta có 2 vectơ diễn tả lượng dinh dưỡng (.) mỗi loại ~~đơ~~ ngũ cốc

$$a_1 = \begin{pmatrix} 110 \\ 4 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 130 \\ 3 \\ 18 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Vectơ b là lượng d² mong muốn khi trộn 2 loại ngũ cốc

$$b = \begin{pmatrix} 295 \\ 9 \\ 48 \\ 8 \end{pmatrix}$$

x_1, x_2 là lần lượt lượng ngũ cốc 1 và ngũ cốc 2 để ra được hỗn hợp mong muốn

Ta có: $a_1 . x_1 + a_2 . x_2 = b$

$$\Rightarrow (a_1 \ a_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = b$$

$$\cancel{\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (a_1 \ a_2 \mid b)}$$

$$\Rightarrow (a_1 \ a_2 \mid b)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 110 & 130 & 295 \\ 4 & 3 & 9 \\ 20 & 18 & 48 \\ 2 & 5 & 8 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 8 \\ 4 & 3 & 9 \\ 20 & 18 & 48 \\ 110 & 130 & 295 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 8 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & -32 & -32 \\ 0 & -145 & -145 \end{array}\right)$$

KLONG

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 8 \\ 0 & -7 & -7 \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1{,}5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Vậy để tạo ra đc h² ngũ cốc mong muốn thì cta cần kết hợp 1,5 loại ngũ cốc 1 với 1 loại ngũ cốc 2

⇒ PT ma trận là:

$$(a_1 \; a_2 \mid b) = \left(\begin{array}{cc|c} 110 & 130 & 295 \\ 4 & 3 & 9 \\ 20 & 18 & 48 \\ 2 & 5 & 8 \end{array}\right)$$

Bài 2: Một khẩu phần của PSW c² 160 calo, 5g protein 6 g chất xơ và 1 g CB. Một khẩu phần của C cung cấp 110 calo, 2g protein, 0,1 g chất xơ và 0,4 g CB

a) Thiết lập ma trận B và vectơ u sao cho Bu là lượng dinh dưỡng có ... h² gồm 3 phần PSW và 2 phần C

b) Gsử bạn muốn 1 loại ngũ cốc có nhì chất xơ hơn C nhưng ít calo hơn của PSW. Liệu h² của 2 loại ngũ cốc có thể c² 130 calo, 3,2g protein, 2,46 g chất xơ và 0,64 g CB k°? Nếu vậy, h² là gì?

Giải

a) Gsử b_1, b_2 là 2 vectơ thành phần d² của PSW và C

$\Rightarrow B = (b_1 \; b_2)$

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow B.u = \begin{pmatrix} 160 & 110 \\ 5 & 2 \\ 6 & 0{,}1 \\ 1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 700 \\ 19 \\ 18{,}2 \\ 3{,}8 \end{pmatrix}$

b) Theo ĐB ta có: $B.x = \begin{pmatrix} 130 \\ 3{,}2 \\ 2{,}46 \\ 0{,}64 \end{pmatrix} = v$

$\Leftrightarrow \left(b_1 \quad b_2 \mid v \right)$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 160 & 110 & 130 \\ 5 & 2 & 3,2 \\ 6 & 0,1 & 2,46 \\ 1 & 0,4 & 0,64 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0,4 & 0,64 \\ 5 & 2 & 3,2 \\ 6 & 0,1 & 2,46 \\ 160 & 110 & 130 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0,64 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & -23 & \\ 0 & & \end{array}\right)} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0,4 & 0,64 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2,3 & -1,38 \\ 0 & 46 & 27,6 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0,4 & 0,64 \\ 0 & 46 & 27,6 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0,4 \\ x_2 = 0,6 \end{cases}$$

Vậy để tạo đc k^2 mong muốn thì cần trộn PSW và C với tỉ lệ $(0,4 : 0,6)$

Bài 3: Sau khi tgia 1 lớp d², một t~ ham mô cuồng nhiệt của ___ đã quyết định cải thiện mức độ protein và chất xơ (.) bữa trưa yêu thích của mình bằng cách thêm bông cải xanh và ức gà.

a) Nếu cô ấy muốn giới hạn bữa trưa của mình mức 400 calo nhưng nhận được 30g protein và 10 g chất xơ thì cô ấy nên thêm bông cải xanh và thịt gà với tỉ lệ nào?

b) Cô ấy x thấy quá nh bông cải xanh theo tỷ lệ ở phần a), vì vậy cô ấy chuyển từ Mac and Cheese sang Shells. Cô ấy nên sử dụng tỷ lệ mỗi loại thực phẩm ntn để đạt được mục tiêu tg tự phần a)

Giải

a) Gọi a_1, a_2, a_3 là ttp dinh dưỡng của MaC, B và C

x_1, x_2, x_3 là tỉ lệ để đạt được yêu cầu

b là vectơ mục tiêu dinh dưỡng của khẩu phần ăn

Ta có: $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b$

$\Leftrightarrow (a_1 \ a_2 \ a_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = b$

$\Rightarrow (a_1 \ a_2 \ a_3)^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 270 & 51 & 70 \\ 10 & 5{,}4 & 15 \\ 2 & 5{,}2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 400 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}99 \\ 1{,}54 \\ 0{,}79 \end{pmatrix}$

Vậy cần kết hợp MC, B và C với tỉ lệ (0,99 : 1,54 : 0,79) thì đc như mong muốn

b) Ta có: $b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = b$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 260 & 51 & 70 \\ 9 & 5{,}4 & 15 \\ 5 & 5{,}2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 400 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}09 \\ 0{,}88 \\ 1{,}03 \end{pmatrix}$

Vậy cần kết hợp S, B và C với tỉ lệ (1,09 : 0,88 : 1,03)

Bài 4:

a) Gọi a_1, a_2, a_3, a_4 là lượng d^2 có trong N, S, W, SN

(sữa k° béo, bột đậu nành, váng sữa, protein đậu nành)

x_1, x_2, x_3, x_4 là tỉ lệ của các loại để chính xác theo chế độ ăn kiêng

b - tổng lượng dinh dưỡng theo chế độ ăn kiêng

Ta có: $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = b$

$\Rightarrow (a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = b$

b)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 51 & 13 & 80 \\ 52 & 34 & 74 & 0 \\ 0 & 7 & 1,1 & 3,4 \\ 1,26 & 0,19 & 0,8 & 0,18 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 33 \\ 45 \\ 3 \\ 0,8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6414 \\ 0,5441 \\ -0,093 \\ -0,2079 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ k° thể tính được lượng d² để có tạo ra 1 bữa theo chế độ d² Cambridge

Bài 9: ở 1 khu vực ∓ định, khoảng 7% dân số TP di chuyển → ngoại ô mỗi năm và 5% dân số ngoại ô ——— thành phố. Trong năm 2015 có 800.000 dân ở TP và 500.000 dân ở ngoại ô.

a) Thiết lập phương trình sai phân mô tả, (·) đó x_0 là dân số ban đầu vào năm 2015

b) Sau đó tính SL dân số vào năm 2017 ở TP và ngoại ô

Giải

a) Ma trận ngẫu nhiên trong trường hợp này là:

$$M = \begin{pmatrix} 0,93 & 0,05 \\ 0,07 & 0,95 \end{pmatrix}$$

PT sai phân: $x_{k+1} = M x_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$

b) Số lượng dân số ở mỗi khu vực năm 2016

$$x_1 = M.x_0 = \begin{pmatrix} 0,93 & 0,05 \\ 0,07 & 0,95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 800\,000 \\ 500\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 769\,000 \\ 531\,000 \end{pmatrix}$$

Số lượng dân ở mỗi khu vực năm 2017

$$x_2 = M x_1 = \begin{pmatrix} 0,93 & 0,05 \\ 0,07 & 0,95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 769\,000 \\ 531\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 741\,720 \\ 558\,280 \end{pmatrix}$$

KLONG

Bài 10: Ma trận ngẫu nhiên:

$$M = \begin{pmatrix} 0,94 & 0,04 \\ 0,06 & 0,96 \end{pmatrix}$$

Vectơ trạng thái ban đầu: $x_0 = \begin{pmatrix} 10\,000\,000 \\ 800\,000 \end{pmatrix}$

PT sai phân: $x_{k+1} = M.x_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$

Vào năm 2016:

$$x_1 = M.x_0 = \begin{pmatrix} 0,94 & 0,04 \\ 0,06 & 0,96 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10\,000\,000 \\ 800\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\,342\,000 \\ 1\,368\,000 \end{pmatrix}$$

Vào năm 2017:

$$x_2 = M.x_1 = \begin{pmatrix} 0,94 & 0,04 \\ 0,06 & 0,96 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9\,342\,000 \\ 1\,368\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\,920\,800 \\ 1\,879\,200 \end{pmatrix}$$

Bài 11: a) Tỉ lệ dân TP di chuyển đến ngoại ô là:

$$\frac{748\,252}{38\,041\,430} \approx 0,01967$$

$\Rightarrow$ Tỉ lệ ở lại là: $0,98033$

Tỉ lệ dân ngoại ô chuyển đến TP là:

$$\frac{493\,641}{275\,872\,610} = 0,00179$$

$\Rightarrow$ Tỉ lệ ở lại là: $0,99821$

Ta có ma trận ngẫu nhiên là:

$$M = \begin{pmatrix} 0,98033 & 0,00179 \\ 0,01967 & 0,99821 \end{pmatrix}$$

b) PT sai phân: $x_{k+1} = M.x_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$

$$x_1 = M.x_0$$
$$x_2 = M.x_1 = M^2.x_0$$
$$x_3 = M.x_2 = M^3.x_0$$

$\Rightarrow x_k = M^k.x_0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$

Vào năm 2024:

$$x_{10} = \begin{pmatrix} 0,98033 & 0,00179 \\ 0,01967 & 0,99821 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} 38\,041\,430 \\ 275\,872\,610 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 35\,729\,000 \\ 278\,185\,000 \end{pmatrix}$$

Bài 12: Ma trận ngẫu nhiên:

$$M = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,05 & 0,1 \\ 0 & 0,9 & 0,05 \\ 0,03 & 0,05 & 0,85 \end{pmatrix}$$

Cộng lại: Khi xe ở sân bay thì sẽ 3% chuyển đến phía Tây

Khi xe ở phía Đông thì 5% chuyển đến sân bay

5% ——— phía Tây

Khi xe ở phía Tây 10% chuyển đến sân bay

5% ——— phía Đông

Vectơ trạng thái ban đầu: $x_0 = \begin{pmatrix} 295 \\ 55 \\ 150 \end{pmatrix}$

PT sai phân: $x_{k+1} = M . x_k$

Vào thứ ba:

$$x_1 = M . x_0 = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,05 & 0,1 \\ 0 & 0,9 & 0,05 \\ 0,03 & 0,05 & 0,85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 295 \\ 55 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 304 \\ 57 \\ 139 \end{pmatrix}$$

Vào thứ tư:

$$x_2 = M . x_1 = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,05 & 0,1 \\ 0 & 0,9 & 0,05 \\ 0,03 & 0,05 & 0,85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cancel{295}\ 304 \\ \cancel{55}\ 57 \\ \cancel{150}\ 139 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 312 \\ 58 \\ 130 \end{pmatrix}$$

(Thầy Trình)

Bài 1: (Bài 4 - Bảng B 2023)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Tìm một MT khả nghịch C sao cho $C^{-1}AC$ là MT đg chéo

b) Tính $e^A = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{A^n}{n!}$

Giải

a) Xét PT đặc trưng: $\det(A - \lambda I_n) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \end{array}\right.$

Với $\lambda = 1$. Xét $(A|0)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = t \end{cases}$

$\Rightarrow$ VTR $u = t(1,0)$

Với $\lambda = 2$. Xét $(A|0)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases}$

$\Rightarrow$ VTR $v = t(-1, 1)$

Gọi MT làm chéo hoá A là C: $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow C^{-1}.A.C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) Khai triển Taylor Maclaurin

$$e^x = \underbrace{1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots}_{\text{Chuỗi đa thức}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Hàm ptạp

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\sin A = \frac{A}{1!} - \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n A^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$A = \cancel{D.A}\ C.D.C^{-1}$

$\Rightarrow A^n = C.D^n.C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & -2^n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-2^n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

$$e^A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^n}{n!}$$

$$= T.\left(I + \frac{D}{1!} + \frac{D^2}{2!} + \dots + \frac{D^n}{n!}\right) T^{-1}$$

$$= T.\ e^D\ T^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e & -e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e-e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

Định lý Cayley Hamilton

- Cho A là MT vuông và $P_A(\lambda)$ là đa thức đặc trưng của A. Khi đó: $P_A(A) = 0$ (Ma trận 0)

VD: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Tính $P_A(\lambda)$

b) Ktra xem $P_A(A) = ?$

Giải

a) $P_{(A)}(\lambda) \overset{=|A|}{=} (1-\lambda)(1-\lambda) - 4$

$= \lambda^2 - 2\lambda - 3$

b) $P_A(A) = A^2 - 2A - 3I$

$= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) Tính A^{100} dựa vào ĐL Cayley Hamilton

Đặt $f(x) = x^{100}$ ⇒ Cần tìm $f(A) = ?$

$P_A(x) = x^2 - 2x + 3$

$f(x) = P_A(x)\ Q(x) + R(x)$

$= (x+1)(x-3).Q(x) + ax + b = x^{100}$

Thay $x = -1$: $1 = -a + b$

$x = 3$: $3^{100} = 3a + b$

$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3^{100} - 1}{4} \\ b = \dfrac{3^{100} + 3}{4} \end{cases}$

KLONG

$$\Rightarrow f(A) = P_A(A)\, Q(A) + R(A)$$

$$\Rightarrow A^{100} = \frac{3^{100}-1}{4} . A + \frac{3^{100}+3}{4} . I$$

$$= \frac{3^{100}-1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{3^{100}+3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3^{100}+1}{2} & 3^{100}-1 \\ \frac{3^{100}-1}{4} & \frac{3^{100}+1}{2} \end{pmatrix}$$

VD: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^{2024}

Xét PT đặc trưng: $\det(A - \lambda I) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 2$

Với $\lambda = 2$. Xét $(A|0)$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

Đặt $f(x) = x^{2024}$

$P_A(x) = (x-2)^2$

$f(x) = P_A(x)\, Q(x) + R(x)$

$= (x-2)^2 . Q(x) + ax + b = x^{2024}$ (1)

Thay $x = 2 \to (1)$: $2a + b = 2^{2024}$

Theo ĐL Cayley Hamilton $P_A(A) = 0$

$\to A^2 - 4A + 4I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\to 2024 . x^{2023} = 2(x-2)\, Q(x) + (x-2)^2 Q'(x) + a$ (2)

Thay $x = 2$ vào (2):

$2024 . 2^{2023} = a$

$\Rightarrow b = -2023 . 2^{2024}$

$\Rightarrow A^{2024} = 2024 \cdot 2^{2023}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2023 \cdot 2^{2024}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

VD: $A = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tính A^{100}

$P_A(x) = (-3-\lambda)(2-\lambda) + 7$

$= \lambda^2 + \lambda + 1$

Theo ĐL Cayley Halmilton:

$P_A(A) = 0 \longrightarrow A^2 + A + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Đặt $f(x) = x^{100} =$

$P_A(x) = x^2 + x + 1$

NX: $A^3 - I = (A - I)(A^2 + A + I) = 0$

$\to A^3 = I \to A^{100} = A^{99} \cdot A = I \cdot A = A$

VD: $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$. Tính $\lim\limits_{n \to \infty} A^n$

(*) Cách 1:

Xét PT đặc trưng: $\det(A - \lambda I) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(\frac{1}{3} - \lambda\right)\left(\frac{1}{6} - \lambda\right)$

$P_A(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{3} - x\right)\left(\frac{1}{6} - x\right)$

Theo ĐL Cayley Halmilton:

$\cancel{P_A(A) = -\lambda^3 + \lambda^2 - \frac{11}{36}\lambda + \frac{1}{36}}$

$P_A(A) = -A^3 + A^2 - \frac{11}{36}A + \frac{1}{36}I$

Đặt $f(x) = x^n = \left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{3} - x\right)\left(\frac{1}{6} - x\right)Q(x) + ax^2 + bx + c$

Với $x = \frac{1}{2}$ ta có: $\frac{1}{2^n} = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c$ (1)

$x = \frac{1}{3}$ ta có: $\frac{1}{3^n} = \frac{a}{9} + \frac{b}{3} + c$ (2)

$x = \frac{1}{6}$ ta có: $\frac{1}{6^n} = \frac{a}{36} + \frac{b}{6} + c$ (3)

$\Rightarrow A^n = a.A^2 + b.A + c.I$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} A^n = \lim\limits_{n\to\infty} a + \lim\limits_{n\to\infty} b + \lim\limits_{n\to\infty} c$

Lấy $\lim\limits_{n\to\infty}$ của (1), (2), (3) ta đc:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a \cdot \frac{1}{4} + \lim\limits_{n\to\infty} b \cdot \frac{1}{2} + \lim\limits_{n\to\infty} c = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} a \cdot \frac{1}{9} + \lim\limits_{n\to\infty} b \cdot \frac{1}{3} + \lim\limits_{n\to\infty} c = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} a \cdot \frac{1}{36} + \lim\limits_{n\to\infty} b \cdot \frac{1}{6} + \lim\limits_{n\to\infty} c = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a = \lim\limits_{n\to\infty} b = \lim\limits_{n\to\infty} c = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} A^n = 0$

(*) Cách 2:

$D = T^{-1}.A.T = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^n = T.D^n.T^{-1} = T.\begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{3})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{6})^n \end{pmatrix} T^{-1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} A^n = \lim\limits_{n\to\infty} \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{3})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{6})^n \end{pmatrix} = 0$

VD: Hỏi có $\exists$ A vuông cấp 2 sao cho

$$A^{2010} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1-e \end{pmatrix}$$ hay k°?

Giải

Đặt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = x^2 - (a+d)x + (ad-bc)$$

Theo Cayley Hamilton ta có:

$$P_A(A) = 0 \rightarrow A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = 0$$

Đặt $f(x) = x^{2010} = [x^2 - (a+d)x + (ad-bc)]Q(x) + R(x)$

$$\Rightarrow A^{2010} = m.A + n.I$$
$$= m\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ma+n & mb \\ mc & md+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1-e \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ma+n = -1 \\ mb = 0 \\ mc = 0 \\ md+n = -1-e \end{cases}$$

TH1: $m = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -1 \\ n = -1-e \end{cases}$ (vô lý)

TH2: $m \neq 0 \Rightarrow b = c = 0$

$$\Rightarrow A^{2010} = \begin{pmatrix} a^{2010} & 0 \\ 0 & d^{2010} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1-e \end{pmatrix}$$

(*) Nếu A là ma trận thực: a^{2010} k° thể nào bằng -1

$\rightarrow$ k° có MT A nào TM

(*) Nếu A là MT phức: $a = \sqrt[2010]{-1}$

$d = \sqrt[2010]{-1-e}$

$\Rightarrow$ Có 2010 sp a TM
2010 sp d TM
$\Rightarrow$ Có 2010.2010 MT A thoả mãn

KLONG

VD: Ta định nghĩa

$$\sin A = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$$

a) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Tính $\sin A$

b) Cho x, y thực bất kỳ và $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$

+ Tính A^n
+ Tính $\sin A$

Giải

a) Xét PT đặc trưng: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \end{array}\right.$$

(Làm tắt)

T là ma trận làm chéo hoá A: $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = T^{-1} A\, T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = T.D.T^{-1}$$

$$\Rightarrow \sin A = T.\sin D.T^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin 1 & 0 \\ 0 & \sin 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin 1 & -\sin 2 \\ 0 & \sin 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin 1 & \sin 1 - \sin 2 \\ 0 & \sin 2 \end{pmatrix}$$

b) $P_A(t) = \begin{vmatrix} x-t & y \\ 0 & x-t \end{vmatrix} = (x-t)^2 = (t-x)^2$

(với t là ẩn)

Theo ĐL Cayley Hamilton:

$$P_A(A) = 0$$

$$\Rightarrow A^2 - 2x.A + x^2.I = 0$$

Đặt $t = x^n = (t-x)^2.Q(t) + at+b$ (1)

Đạo hàm: $n.x^{n-1} = 2(t-x).Q(t) + (t-x)^2.Q'(t) + a$ (2)

Thay $t = x$ vào (1) và (2) ta đc:

$$\begin{cases} a = n.x^{n-1} \\ b = (1-n)x^n \end{cases}$$

$$\Rightarrow A^n = a.A + b.I$$

$$= n.x^{n-1}.\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} + (1-n)x^n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x^n & nx^{n-1}y \\ 0 & x^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x^n & (x^n)'y \\ 0 & x^n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sin A = \begin{pmatrix} \lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} A^{2n+1} & y.\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n (x^{2n+1})'}{(2n+1)!} A^{2n+1} \\ 0 & \lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n (x^{2n+1})}{(2n+1)!} A^{2n+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin x & y.(\sin x)' \\ 0 & \sin x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin x & y.\cos x \\ 0 & \sin x \end{pmatrix}$$

KLONG

Bài 1: Cho ma trận A : $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

Tính A^{250}, A^{-5}, $\sqrt{A}$, $\sqrt[3]{A}$

Giải

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 7 \\ 5 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(6-\lambda) - 35$$
$$= \lambda^2 - 10\lambda - 11$$
$$= (\lambda - 11)(\lambda + 1)$$

Theo ĐL Cayley Hamilton ta có:

$$P_A(A) = 0 \rightarrow A^2 - 10A - 11I = 0$$

Đặt: $f(x) = x^{250} = (x-11)(x+11)Q(x) + \underset{ax+b}{\underset{\parallel}{R(x)}}$

Vs $\lambda = 11$: $11a + b = 11^{250}$
$\lambda = -1$: $-a + b = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{11^{250} - 1}{12} \\ b = \dfrac{11^{250} + 11}{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A^{250} = a.A + b.I$$
$$= \frac{11^{250} - 1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \frac{11^{250} + 11}{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \dfrac{5.11^{250} + 7}{12} & \dfrac{7.11^{250} - 7}{12} \\ \dfrac{5.11^{250} - 5}{12} & \dfrac{7.11^{250} + 5}{12} \end{pmatrix}$$

Đặt $f(x) = x^{-5} = (x-11)(x+1)Q(x) + ax + b$

Vs $\lambda = 11$: $11a + b = 11^{-5}$
$\lambda = -1$: $-a + b = -1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{11^{-5} + 1}{12} \\ b = \dfrac{11^{-5} - 11}{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A^{-5} = a.A + b.I$$

$$= \frac{11^{-5}+1}{12}\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \frac{11^{-5}-11}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5.11^{-5}-7}{12} & 7\left(\frac{11^{-5}+1}{12}\right) \\ 5\left(\frac{11^{-5}+1}{12}\right) & \frac{7.11^{-5}-5}{12} \end{pmatrix}$$

Đặt $f(x) = \sqrt{x} = (x-11)(x+1)Q(x) + ax+b$

Vs $x = 11$: $11a + b = \sqrt{11}$
$x = -1$: $-a + b = \sqrt{-1} = i$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{11} - i}{12} \\ b = \frac{\sqrt{11} + 11i}{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(A) = \sqrt{A} = a.A + b.I$$

$$= \frac{\sqrt{11}-i}{12}\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{11}+11i}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{11}+7i}{12} & 7.\left(\frac{\sqrt{11}-i}{12}\right) \\ 5\left(\frac{\sqrt{11}-i}{12}\right) & \frac{7\sqrt{11}+5i}{12} \end{pmatrix}$$

Đặt $f(x) = \sqrt[3]{x} = (x-11)(x+1)Q(x) + ax+b$

Vs $x=11$: $11a+b = \sqrt[3]{11}$
$x=-1$: $-a+b = -1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt[3]{11}+1}{12} \\ b = \frac{\sqrt[3]{11}-11}{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(A) = \sqrt[3]{A} = a.A + b.I$$

$$= \frac{\sqrt[3]{11}+1}{12}\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt[3]{11}-11}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt[3]{11}-7}{12} & 7\left(\frac{\sqrt[3]{11}+1}{12}\right) \\ 5.\left(\frac{\sqrt[3]{11}+1}{12}\right) & \frac{7\sqrt[3]{11}-5}{12} \end{pmatrix}$$

Đặt $f(x) = e^x = (x-11)(x+1)Q(x) + ax + b$

Vs $x = 11$: $11a + b = e^{11}$
$x = -1$: $-a + b = e^{-1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{e^{11}-e^{-1}}{12} \\ b = \frac{e^{11}+11e^{-1}}{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(A) = e^A = a.A + b.I$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5e^{11}+7e^{-1}}{12} & \frac{7}{12}(e^{11}-e^{-1}) \\ \frac{5}{12}(e^{11}-e^{-1}) & \frac{7e^{11}+5e^{-1}}{12} \end{pmatrix}$$

Đặt $f(x) = \ln x = (x-11)(x+1)Q(x) + ax + b$

Vs $x = 11$: $11a + b = \ln 11$
$x = -1$: $-a + b = \ln(-1)$
$= \ln(e^{i\pi})$
$= i\pi$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\ln 11 - i\pi}{12} \\ b = \frac{\ln 11 + 11i\pi}{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(A) = \ln(A) = a.A + b.I$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5\ln 11 + i7\pi}{12} & \frac{7}{12}(\ln 11 - i\pi) \\ \frac{5}{12}(\ln 11 - i\pi) & \frac{7\ln 11 + i5\pi}{12} \end{pmatrix}$$

Bài 2: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. Tính A^{15}

xét PT đặc trưng: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 & 8 \\ 3 & 1-\lambda & 5 \\ 4 & 6 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)(1-\lambda)(9-\lambda) + 144 + 100 - 32(1-\lambda) - 30(2-\lambda) - 15(9-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 - 3\lambda + 2)(9-\lambda) + 244 + 77\lambda - 227 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 29\lambda + 18 + 244 + 77\lambda - 227 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 12\lambda^2 + 48\lambda + 35 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 15,2892 \\ \lambda = -1 \\ \lambda = -2,2892 \end{array}\right.$$

Bài 1 (Sd chéo hoá)

Đề bảng A năm 2023

Bài 1: $f: R[X]_{2023} \to R[X]_{2023}$

$P(x) \to P'(x)$

Đặt $g = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{870 \text{ lần}}$

a) CM g là 1 AXTT

b) Tìm số chiều và cơ sở của Im(g) và ker(g)

Giải

a) * CM: f là AXTT

$\Rightarrow f(\alpha P + \beta Q) = \alpha f(P) + \beta f(Q)$
$\forall \alpha, \beta \in R$ và $\forall P, Q \in R[X]_{2023}$

KLONG

Thật vậy:

$$VT = (\alpha P + \beta Q)'' = \alpha P'' + \beta Q''$$
$$= \alpha f(P) + \beta . f(Q) = VP \text{ (đpcm)}$$

(*) Ta biết f_1, f_2 là các AXTT : $V \to V$ thì :
$f_1 \circ f_2$ cũng là AXTT

$\Rightarrow$ $g = f \circ f \circ \dots \circ f$ là AXTT

b) Xét $P(x) = a_0 + a_1 X + \dots + a_{2023} X^{2023}$

$$f(P)(X) = 2a_2 + 6a_3 X + 12 a_4 X_2 + \dots + 2023.2022 . a_{2023} X^{2022}$$

$\Rightarrow$ Ma trận chính tắc là:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2023.2024 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(*) $P(x) = a_0 + \dots + a_{2023} X^{2023} \in \ker(f)$

$$\Leftrightarrow A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_{2023} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\to$ $a_2 = a_3 = \dots = a_{2023} = 0$

$\to$ $P(x) = a_0 + a_1 X$

$\to$ $\forall$ đa thức bậc 1 or bậc $0 \in \ker(f)$

$\Rightarrow$ Cơ sở của $\ker(f)$ là $\{1, X\}$

$\to$ $\dim(\ker f) = 2$

(*) Trong A : cột 3 $\to$ 2023 ĐLTT (vì tạo MT bậc thang

$\to$ $Im(f)$ có cs là $\{2, 6x, 12x^2, \dots, 2022.2023x^{2023}\}$

$\to$ $\dim(Im(f)) = 2023 - 2 = 2021$

$$g = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{870 \text{ lần}}$$

$\Rightarrow \quad g(P)(x) = P^{(1740)}(x)$

$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_{2023} x^{2023}$

$g(P)(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{283} x^{283}$

$b_0 = 1740!\, a_{1740}$

$b_1 = \dfrac{1741!}{1!} a_{1741}$

$b_2 = \dfrac{1742!}{2!} a_{1742}$

$b_{283} = \dfrac{2023!}{283!} a_{2023}$

$\rightarrow$ Ma trận chính tắc:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1740! & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1741!}{1!} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \frac{1742!}{2!} \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & & \ldots & & \frac{2023!}{283!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(*) $\ker(g)$: $g(P)(x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad b_0 = b_1 = \ldots = b_{283} = 0$

$\Leftrightarrow \quad a_{1740} = a_{1741} = \ldots = a_{2023} = 0$

$\rightarrow P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{1739} x^{1739}$

$\rightarrow \ker(g)$ có CS là: $\{1; x; \ldots; x^{1739}\}$

$\dim(\ker(g)) = 1740$

KLONG

* $Im(g)$

Cơ sở là: $\left\{ 1740!; \frac{1741!}{1!} x; \dots; \frac{2023!}{283!} \cdot x^{283} \right\}$

$\rightarrow \dim Im(g) = 284$

Bài 2: Cho $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $a_{ij} \geq 0$

$\begin{cases} a_{11} + a_{21} < 1 \\ a_{12} + a_{22} < 1 \end{cases}$ $\quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$

$x = Ax + d$ với $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ duy I

$\Leftrightarrow I.x = A.x + d \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow (I - A)x = d$

$\Leftrightarrow x = (I - A)^{-1} d$

Để hệ có duy I no thì: $\left[\begin{array}{l} |I - A| \neq 0 \\ 2 \text{ cột của } A \text{ ĐLTT} \end{array} \right.$

Ta có: $(I - A) = \begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{pmatrix}$

$|I - A| \neq 0 \Leftrightarrow 1 - (a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

$\Leftrightarrow (1 - a_{11}) - a_{22}(1 - a_{11}) - a_{12}a_{21} \neq 0$

Lại: $|I - A| = \begin{vmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 - a_{11} - a_{21} & 1 - a_{22} - a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{vmatrix}$

$= (1 - a_{11} - a_{21})(1 - a_{22}) + (1 - a_{12} - a_{22}) a_{21}$

Gsử $|I - A| = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 - a_{22} = 0 \\ a_{21} = 0 \end{cases} \Rightarrow a_{22} = 1$ (mt)

Bài 3: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ TM đa thức $x^4 - 2x^3 - 1$ bằng $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)$

a) CMR: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ đôi một $\neq$ nhau

b) CMR: $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3, \delta^3$ ____________

c) Tính $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3$

Bài làm

a) Gsử PT có 2 no = nhau = a

$\Rightarrow x^4 - 2x^3 - 1 = (x-a)^2 Q(x)$

$\Rightarrow P'(x) \vdots (x-a) \Rightarrow P'(a) = 0$

$\rightarrow 4x^3 - 6x^2 = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{3}{2} \end{array}\right. \rightarrow$ Mâu thuẫn

Lý thuyết: a là no bội 2 của P

$\rightarrow$ a là no bội 1 của P'

b) Gsử: $\alpha^3 = \beta^3$

α, β là no $\rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha^4 - 2\alpha^3 - 1 = 0 \\ \beta^4 - 2\beta^3 - 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \alpha^4 = \beta^4$

Do 0 k° là no của $P(x) \Rightarrow \alpha, \beta \neq 0$

$\rightarrow \frac{\alpha^4}{\alpha^3} = \frac{\beta^4}{\beta^3} \Rightarrow \alpha = \beta$ (trái vs a)

Lưu ý (: tập phức $\alpha^3 = \beta^3 \not\rightarrow \alpha = \beta$

c) $x^4 - 2x^3 - 1 = 0$

$\Rightarrow x^4 = 2x^3 + 1$ Đặt $y = x^3$

$\Rightarrow x^4 = 2y + 1$

$\Rightarrow (x^4)^3 = (2y+1)^2$

$\Leftrightarrow y^4 = 8y^3 + 12y^2 + 6y + 1$

$\Rightarrow y^4 - 8y^3 - 12y^2 - 6y - 1 = 0$

Theo Vi-ét: $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 = 8$

Bài 4: c) Tồn tại hay k° 1 ma trận vuông A cấp 2 vs phtử là các số thực sao cho

$$\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 2023 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gsử $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

④ Nếu A chéo hoá đc

⇔ ∃ 2 GTR phức λ_1, λ_2 (có thể = nhau) và 2 VTR phức tg ứng : x_1, x_2 → T mtrận làm chéo

TM : $T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = T \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T^{-1}$

$\Rightarrow \sin A = T \cdot \begin{pmatrix} \sin\lambda_1 & 0 \\ 0 & \sin\lambda_2 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2023 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (*)

ý 1 : $T = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\lambda_1 & 0 \\ 0 & \sin\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2023 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

ý 2 : $\det(VT) = |T| \cdot \sin\lambda_1 \cdot \sin\lambda_2 \cdot |T^{-1}|$
$= \sin\lambda_1 \cdot \sin\lambda_2$

$\det(VP) = 1 \Rightarrow \sin\lambda_1 \cdot \sin\lambda_2 = 1$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\lambda_1 = \sin\lambda_2 = 1 \\ \sin\lambda_1 = \sin\lambda_2 = -1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} T \cdot I \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2023 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ T \cdot (-I) \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2023 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right.$ (Vô lý)

ý 3 : $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} =$

(*) ⇒ sinA chéo hoá đc

→ Ktra xem sinA có chéo hoá đc k⁰?

$|\sin A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2023 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \lambda = 1$ → KGR có 2 chiều × CS là $x_1, x_2 \to E(x_1, x_2)$
⇒ Chéo hoá đc ! $T^{-1} \sin A \, T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

→ KGR có 1 chiều

⇒ K' chéo hoá đc

→ Gần chéo hoá (Jordan)

⇒ sin A k' chéo hoá đc

KLONG

(*) Nếu A k° chéo hoá đc thì ∃ T khả nghịch

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & 0 \\ & \boxed{J_2} \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_n} \end{pmatrix}$$ – Ma trận Jordan

với $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$ – khối Jordan ứng vs GTR λ_i

Do A là MT vuông cấp 2 ⇒ ∃ T khả nghịch

$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ (Dạng chuẩn tắc Jordan)

$$\Rightarrow \sin A = \sin\left(T \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} T^{-1}\right)$$

$$= T \cdot \begin{pmatrix} \sin\lambda & \cos\lambda \\ 0 & \sin\lambda \end{pmatrix} \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2023 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} y' 1 \\ y' 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} \sin\lambda = \pm 1 \\ \cos\lambda = 0 \end{matrix}$

$\Rightarrow \sin A$ chéo hoá đc (Mâu thuẫn)

Bài 5! P_n là tập các MT khả nghịch A cấp n mà mỗi phần tử của A và A^{-1} đều = 0 or 1

a) Với n = 3 hãy tìm tất cả các MT ∈ P_3

b) Tính số phần tử của P_n vs n là số (+) tuỳ ý

Bài làm

a) Tìm $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ $a_i, b_i, c_i \in \{0, 1\}$

sao cho $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$ $C_1, A_1, B_1 \in \{0, 1\}$

KLONG

Chuyên đề : ĐA THỨC

I| Kiến thức trọng tâm:

_ ĐN: Cho $f \in R[x]$ và số $\alpha \in R$

Tgọi α là 1 no thực của f nếu $f(\alpha) = 0$

Ta gọi α là no bội k của $f(x)$ nếu $f(x) \vdots (x-\alpha)^k$ nh. k. chia hết cho $(x-\alpha)^{k+1}$ ng~ là:

$$f(x) = (x-\alpha)^k . g(x) \quad \forall x \in R \text{ và } g(\alpha) \neq 0$$

hay $\begin{cases} f(\alpha) = 0, f^1(\alpha) = 0, \ldots, f^{(k-1)}(\alpha) = 0 \\ f^{(k)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

$f'(x) = 0$ nhận α là no bội $k-1$

(*) Định lý BEZOUT: α là no của $f(x)$ khi và chỉ khi $f(x) \vdots (x-\alpha)$

(1.1) N° hữu tỷ, n° nguyên:

Cho $f \in Z[x]$, $\deg f = n$, $a_i \in Z$

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \quad a_0 \neq 0$$

Nghiệm hữu tỷ nếu có $x = \frac{p}{q}$ với $(p,q) = 1$ thì p là ước của HS tự do và q là ước của HS cao I':

$$p \mid a_n, \; q \mid a_0$$

(1.2) Định lý Vi-ét:

Nếu f có n nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (p biệt hay ≡ nhau)

Thì: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = \pm \dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_2}{a_0} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\dfrac{a_3}{a_0} \\ \ldots \end{cases}$

và $x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n . \dfrac{a_n}{a_0}$

KLONG

Đảo lại, nếu n số $x_1, \dots, x_n$ có tổng các tích chập k của n số x_i là S_k thì $x_1, x_2, \dots, x_n$ là n. nếu có của PT:

$$X^n + S_1 . X^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} S_{n-1} X + (-1)^n S_n = 0$$

⊛ Định lý liên tục:

Nếu đa thức $f(x)$ x 2 gtrị trái dấu trên $[a, b]$ là $f(a) . f(b) < 0$ thì đa thức $f(x)$ có ít I' 1 n.

$x = c \in (a, b)$

⊛ Định lý LAGRANGE

∀ đa thức $f(x)$ trên $[a, b]$ thì có $c \in (a, b)$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Đbiệt nếu $f(a) = f(b) = 0$ hay chỉ cần $f(a) = f(b)$ thì $f'(c) = 0$ tức là:

$f'(x) = 0$ có 1 n. $\in (a, b)$

⊛ Định lý ROLE

Giữa 2 n. của đa thức $f(x)$ thì có 1 n. của $f'(x)$

Nếu f có n nghiệm pbiệt thì f' có $n-1$ n. pbiệt

f'' có $n-2$ n. pbiệt, ... $f^{(k)}$ có $n-k$ n. pbiệt, ...

1.3 Phân tích nhân tử theo n.

Cho $f \in R[x]$ có n. $x_1, x_2, \dots, x_n$ với bội tg ứng $k_1, k_2, \dots, k_n$ thì ∃ $g \in R[x]$

$$f(x) = (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_n)^{k_n} g(x)$$

Hay $f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)^{k} g(x)$ với $\sum_{i=1}^{n} k_i \le n$

Nếu f bậc n có đủ n n. pbiệt hay ≡ nhau thì:

$$f(x) = A(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = A \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

(1.4) P tích ra nhân tử của $f \in R[x]$

Các x tử của f chỉ là nhị thức bậc I 'or đa thức bậc hai VN:

$$f(x) = a_0 \prod_{i=1}^{m} (x - d_i) \prod_{k=1}^{s} (x^2 + b_k x + c_k)$$

Với các HS $d_1, b_k, c_k \in R$, $2s + m = \deg f$, $b_k^2 - 4c_k < 0$ và cách p tích này là duy I

(1.5) Ptích ra nhân tử của $f(z) \in C[z]$, $\deg f = n$

$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$, $a_0 \neq 0$

Theo ĐL D'ALEMNBERT thì f có đủ n nghiệm phức $z_1, z_2, \dots, z_n$ nên:

$$f(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) = a_0 \prod_{i=1}^{n} (z - z_i)$$

(*) Chú ý:

1) SL nghiệm:
- Mỗi đa thức HS thực bậc n đều có k° quá n no
- Đa thức có VSN là đa thức 0
- Nếu 1 đa thức có bậc $\leq n$ và có quá n nghiệm là đa thức 0

2)
- Nếu đa thức có bậc $\leq n$ và nhận n+1 gtrị như nhau tại n+1 đ' ≠ nhau của biến là đa thức hằng $f \equiv C$
- Hai đa thức có bậc $\leq n$ và nhận n+1 gtrị như nhau tại n+1 đ' ≠ nhau của biến thì đồng I' nhau, $f \equiv g$

(*) Qtắc dấu DESCARTE

$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$, $a_0 \neq 0$

Gọi D là số n. dg (kể cả bội)

L là số lần đổi dấu (.) dãy hệ số ≠ 0 từ $a_0 \to a_n$ (bỏ đi các pt hsố $a_i = 0$)

Thì $D \leq L$ và $L - D$ là số chẵn hay $L = D + 2m$ $(m \in N^*)$

KLONG

(*) Đưa đa thức vào giả thiết các số bất kỳ

Cho n số bất kỳ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thì ta xét đa thức nhận n số đó làm n.

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$. Từ đó ta

khai các quan hệ về no, Viette, hệ số, ĐH, ...

II | Các dạng toán thg gặp:

1. Xác định đa thức:

Bài 1: X lđ $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + c$ biết rằng nó chia hết cho $(x-1)(x+1)(x-2)$

Giải

Có $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-b+c=6 \\ 4a+2b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 2 \end{cases}$

Bài 2. Tìm tất cả các đa thức P(x) bậc 5 TM các ĐK đa thức $P(x)+1 \,\vdots\, (x-1)^3$ và $P(x)-1 \,\vdots\, (x+1)^3$

Giải

$P'(x) = (x-1)^2(x+1)^2 . A$

$= A(x^2-2x+1)(x^2+2x+1)$
$= A\ (x^4 - 2x^2 + 1)$

$\Rightarrow P(x) = A\left(\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3 + x\right) + d$

$P(1) = -1$
$P(-1) = 1$ $\Rightarrow \begin{cases} \frac{8}{15}A + d = -1 \\ -\frac{8}{15}A + d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{15}{8} \\ d = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow P(x) = \frac{-15}{8}\left(\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3 + x\right) + d$

Bài 3. Tìm đa thức bậc 3 dạng

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ sao cho $f(x) \vdots (x-2)$ và chia cho (x^2-1) thì dư $2x$

Giải

$g(x) = f(x) - 2x \;\vdots\; x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

$= x^3 + ax^2 + (b-2)x + c$

$\Rightarrow \begin{cases} 8 + 4a + 2b + c = 0 \\ 1 + a + b - 2 + c = 0 \\ -1 + a - b + 2 + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{-10}{3} \\ b = 1 \\ c = \dfrac{10}{3} \end{cases}$

Vậy $f(x) = x^3 - \dfrac{10}{3}x^2 + x + \dfrac{10}{3}$

Bài 4: Cho a, b là các số thực. Tìm tất cả các $P(x)$ TM ĐK:

$x \cdot P(x-a) = (x-b)P(x)$

Giải

+) $a = b \neq 0$

$\Rightarrow x \cdot P(x-a) = (x-a)P(x)$

$\Rightarrow x = 0,\ x = a$ là n₀

Dạng 2: Tính toán và sd ĐL Viete

Bài 1: Cho PT $x^3 - x + 1 = 0$ có 3 n₀ pbiệt. Tính tổng luỹ thừa bậc 8 của 3 n₀

Giải

Đặt $A = x_1^8 + x_2^8 + x_3^8$

Theo ĐL Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 . x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = -1 \\ x_1 x_2 x_3 = -1 \end{cases}$

Ta có: $x_k^3 = x_k - 1$

$\Rightarrow x_k^6 = x_k^2 - 2x_k + 2$

$\Rightarrow x_k^8 = x_k^4 - 2x_k^3 + x_k^2$

$= x_k^4 - 2(x_k - 1) + x_k^2$

$= (x_k - 1)x_k - 2(x_k - 1) + x_k^2$

$= 2x_k^2 - 3x_k + 2$

$A = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 3(x_1 + x_2 + x_3) + 6$

$= 2(0^2 - 2(-1)) - 3.0 + 6 = 10$

Bài 2: Gsử đa thức có $P(x) = x^5 + x^2 + 1$ có 5 n₀ r_1, r_2, r_3, r_4, r_5. Đặt $Q(x) = x^2 - 2$

Tính tích: $Q(r_1).Q(r_2).Q(r_3).Q(r_4).Q(r_5)$

Giải

Từ gthiết: $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)(x - r_5)$

Mặt ≠: $A = (r_1^2 - 2)(r_2^2 - 2)(r_3^2 - 2)(r_4^2 - 2)(r_5^2 - 2)$

$= [(\sqrt{2} - r_1)(\sqrt{2} - r_2) \dots (\sqrt{2} - r_5)][(-\sqrt{2} - r_1)(-\sqrt{2} - r_2) \dots (-\sqrt{2} - r_5)]$

$= P(\sqrt{2}) * P(-\sqrt{2})$

$= -23$

KLONG

Bài 3: Chứng tỏ đa thức: $x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 5x^3 + x^2 + 4x - 1$ (1)

có đúng 5 no x_i, $i = \overline{1,5}$. Tính tổng:

$$S = \sum_{i=1}^{5} \frac{x_i + 1}{2x_i^5 - x_i^4 - 2}$$

Giải Đặt $f(x) = \ldots$

Ta có: $f(-2).f\left(\frac{-3}{2}\right) < 0 \Rightarrow \exists$ no $x \in \left(-2, \frac{-3}{2}\right)$

$f\left(\frac{-3}{2}\right).f(-1) < 0 \Rightarrow \exists$ no $x \in \left(\frac{-3}{2}, -1\right)$

$f(0).f\left(\frac{3}{5}\right) < 0 \Rightarrow$ — $\in \left(0, \frac{3}{5}\right)$

$f\left(\frac{3}{5}\right).f(1) < 0 \Rightarrow$ — $\in \left(\frac{3}{5}, 1\right)$

$f(2).f\left(\frac{5}{2}\right) < 0 \Rightarrow$ — $\in \left(2, \frac{5}{2}\right)$

Mà $f(x)$ là đa thức bậc 5 do đó: $f(x) = 0$ có tối đa 5 no

Ta có: $x_i^5 - \frac{1}{2}x_i^4 - 5x_i^3 + x_i^2 + 4x_i - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2x_i^5 - x_i^4 - 2 = 10x_i^3 - 2x_i^2 - 8x_i$

$\Leftrightarrow 2x_i^5 - x_i^4 - 2 = 2x_i(x_i - 1)\left(x_i + \frac{4}{5}\right)$

Do đó: $S = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{2} \cdot \frac{x_i + 1}{x_i(x_i - 1)\left(x_i + \frac{4}{5}\right)}$

Xét bthức: $g(x) = \frac{x_i + 1}{x_i(x_i - 1)\left(x_i + \frac{4}{5}\right)}$

Ta có: $\frac{x_0 + 1}{x(x-1)\left(x + \frac{4}{5}\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x + \frac{4}{5}}$

$\Rightarrow \begin{cases} A = \frac{-1}{4} \\ B = \frac{3}{9} \\ C = \frac{1}{36} \end{cases}$

Do đó: $S = \frac{-1}{8}\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i} + \frac{1}{18}\sum_{i=1}^{5}\frac{3}{x_i - 1} + \frac{1}{72}\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i + \frac{4}{5}}$