

Câu 1. (4 điểm)

a) Cho dãy số $\{a_n\}$ được xác định bởi: $a_1 = a_2 = 1$; $a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + a_n, \forall n \geq 1$.

Tính $a_{2019} = ?$

b) Tính giới hạn $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{2018} + 2^{2018} + \dots + n^{2018}}{n^{2019}}$.

Câu 2. (4 điểm)

a) Cho hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-2018)(x-2019)$, tính $f'(2019)$.

b) Cho hàm số $f(x) = \frac{5}{x^2 - 5x + 6}$, tính $f^{(n)}(x)$.

Câu 3. (3 điểm)

Tìm tất cả các giá trị của a để hàm số $f(x) = |x-1|(a^3 x^3 - 6ax + 5)$ khả vi tại $x=1$.

Câu 4. (3 điểm) Cho $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ là những số thực dương. Chứng minh rằng nếu $x_1 x_2 x_3 \dots x_n = 1$ thì tổng $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \geq n$.

Câu 5. (3 điểm)

Tìm tất cả các hàm số thực f có đạo hàm cấp hai liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn

$$f(0) = f'(0) = 1, f''(x) \geq 0, \forall x \in (0;1) \text{ và } \int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{2}.$$

Câu 6. (3 điểm)

Tìm tất cả các hàm số thực f khả vi liên tục trên $[0,1]$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(1) = ef(0), \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 dx \leq 1.$$