Một cách sáng tác các bài toán Giải tích cho kỳ thi Olympic Toán sinh viên

Vũ Tiến Việt, Phan Quang Huy - HMS(1)

Trong bài viết này xin giới thiệu một cách sáng tác các bài toán Giải tích cho kỳ thi Olympic Toán sinh viên.

1. Cho hàm f khả vi trên $[0,1]$ và thỏa mãn $f(0)=0, f(1)=1$.

   Chứng minh rằng với $\alpha, \beta > 0$ tồn tại $c_1, c_2 \in (0,1), c_1 \neq c_2$ sao cho

$$\frac{\alpha}{f'(c_1)} + \frac{\beta}{f'(c_2)} = \alpha + \beta.$$

   Lời giải. Xét hàm $g(x) = f(x) - \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$.

   Ta thấy $g(0) = -\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} < 0,\ g(1) = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} > 0$.

   Suy ra tồn tại $c \in (0,1)$ để $g(c) = 0$, tức $f(c) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$.

   Dùng định lý Lagrange cho f trên $[0,c]$ thì tồn tại $c_1 \in (0,c)$ sao cho

$$f'(c_1) = \frac{f(c)-f(0)}{c-0} = \frac{\alpha}{(\alpha+\beta)c}.$$

   Dùng định lý Lagrange cho f trên $[c,1]$ thì tồn tại $c_2 \in (c,1)$ sao cho

$$f'(c_2) = \frac{f(1)-f(c)}{1-c} = \frac{\beta}{(\alpha+\beta)(1-c)}.$$

   Dẫn tới

$$\frac{\alpha}{f'(c_1)} = (\alpha+\beta)c,\ \frac{\beta}{f'(c_2)} = (\alpha+\beta)(1-c).$$

   Từ đây rõ ràng $c_1 \neq c_2$ và suy ra điều phải chứng minh.

   Lấy $\beta = 1-\alpha$ ta sẽ có bài thi OLP-2008 tại Nha Trang.

   • (OLP-2008, Nha Trang). Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$, khả vi trong $(0,1)$ và thỏa mãn $f(0)=0, f(1)=1$.

   Chứng minh rằng với mỗi $\alpha \in (0,1)$ tồn tại $x_1, x_2 \in (0,1), x_1 \neq x_2$ sao cho

$$\frac{\alpha}{f'(x_1)} + \frac{1-\alpha}{f'(x_2)} = 1.$$

(1)Hội Toán học Hà Nội

• Có thể mở rộng bài toán như sau:

Cho hàm $f(x)$ khả vi trên $[0,1]$ thỏa mãn $f(0)=0, f(1)=1$.

Chứng minh rằng với các số dương $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ cho trước, tồn tại các điểm phân biệt $x_1, x_2, ..., x_n \in [0,1]$ sao cho

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{f'(x_k)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

• Bài toán tương tự:

Cho hàm $f(x)$ khả vi trên $[0,1]$ thỏa mãn $f(0)=0, f(1)=1$.

1) Chứng tỏ với mỗi $n \in \mathbb{N}$ tồn tại $x_1, x_2, ..., x_n \in [0,1]$ phân biệt sao cho

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} + \cdots + \frac{1}{f'(x_n)} = n.$$

2) Chứng tỏ với $n \in \mathbb{N}$ tồn tại $c_1, c_2, ..., c_n \in (0,1)$ phân biệt sao cho

$$f'(c_1)f'(c_2)\cdots f'(c_n) = 1.$$

2. Cho đa thức $P(x)$ với bậc $n \geq 2$ có các nghiệm đều thực (tính cả bội).

Chứng minh rằng đa thức $Q(x) = P(x) + (a+b)P'(x) + abP''(x)$, trong đó $a, b \in \mathbb{R}$ cũng có các nghiệm đều thực (tính cả bội).

Lời giải. Ta chứng minh bổ đề: Nếu đa thức $P(x)$ với bậc $n \geq 1$ có các nghiệm đều thực (tính cả bội), thì đa thức $R(x) = P(x) + \alpha P'(x)$ với $\alpha \in \mathbb{R}$ cũng có các nghiệm đều thực (tính cả bội).

Thật vậy: Với $\alpha = 0$ bổ đề là hiển nhiên. Với $\alpha \neq 0$ xét hàm số $f(x) = e^{\frac{x}{\alpha}}P(x)$.

Rõ ràng tập hợp nghiệm của đa thức $P(x)$ và tập hợp nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ là trùng nhau.

Đa thức $P(x)$ với bậc $\deg(P) = n \geq 1$ có các nghiệm đều thực, nên số nghiệm của nó là n (tính cả bội).

Sử dụng định lý Rolle cho hàm $f(x)$ ta suy ra phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất $n-1$ nghiệm thực (tính cả bội). Mặt khác

$$f'(x) = \frac{1}{\alpha}e^{\frac{x}{\alpha}}P(x) + e^{\frac{x}{\alpha}}P'(x) = \frac{1}{\alpha}e^{\frac{x}{\alpha}}[P(x) + \alpha P'(x)] = \frac{1}{\alpha}e^{\frac{x}{\alpha}}R(x)$$

nên tập hợp nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ và tập hợp nghiệm của đa thức $R(x)$ là trùng nhau.

Đa thức $R(x)$ với bậc $\deg(R) = n$ có ít nhất $n-1$ nghiệm thực (tính cả bội) là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ nói trên.

Thế mà $R(x)$ phải có đủ n nghiệm (tính cả bội và tính cả nghiệm phức), đồng thời số nghiệm phức (nếu có) phải là số chẵn và là các cặp số phức liên hợp. Vì thế một nghiệm còn lại của $R(x)$ phải là nghiệm thực. Bổ đề được chứng minh!

Áp dụng bổ đề với đa thức $P(x)$ đã cho ta suy ra đa thức $R(x) = P(x) + aP'(x)$ có các nghiệm đều thực (tính cả bội). Lại áp dụng bổ đề với đa thức $R(x)$ trên ta suy ra đa thức $R(x) + bR'(x)$ có các nghiệm đều thực (tính cả bội).

Thế mà $R'(x) = [P(x) + aP'(x)]' = P'(x) + aP''(x)$, nên

$$\begin{aligned} R(x) + bR'(x) &= P(x) + aP'(x) + b\Big[P'(x) + aP''(x)\Big] \\ &= P(x) + (a+b)P'(x) + abP''(x) = Q(x). \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh!

• (OLP-2011, Quy Nhơn). Cho đa thức $P(x)$ với bậc $n \geq 2$ có các nghiệm đều thực (tính cả nghiệm bội). Tìm điều kiện cần và đủ cho $u, v \in \mathbb{R}$ để $Q(x) = P(x) + uP'(x) + vP''(x)$ có các nghiệm đều thực (tính cả nghiệm bội).

3. Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ $(b > a > 0)$, khả vi trong (a,b).

   Chứng minh rằng tồn tại $\alpha, \beta, \gamma \in (a,b)$ sao cho

$$f'(\alpha) = \frac{a+b}{4}.\frac{f'(\beta)}{\beta} + \frac{a^2+ab+b^2}{6}.\frac{f'(\gamma)}{\gamma^2}.$$

Lời giải. Theo định lý Lagrange với hàm $f(x)$ trên $[a,b]$, tồn tại $\alpha \in (a,b)$ sao cho

$$f'\alpha) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Theo định lý Cauchy cho $f(x)$ và $g(x) = x^2$ trên $[a,b]$ thì tồn tại $\beta \in (a,b)$ sao cho

$$\frac{f'(\beta)}{g'(\beta)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \quad \text{hay} \quad \frac{f'(\beta)}{2\beta} = \frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}$$

nên suy ra $f'(\alpha) = \dfrac{a+b}{2}.\dfrac{f'(\beta)}{\beta}$.

Dùng định lý Cauchy cho $f(x)$ và $h(x) = x^3$ trên $[a,b]$ thì tồn tại $\gamma \in (a,b)$ sao cho

$$\frac{f'(\gamma)}{h'(\gamma)} = \frac{f(b)-f(a)}{h(b)-h(a)} \quad \text{hay} \quad \frac{f'(\gamma)}{3\gamma^2} = \frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}$$

nên suy ra $f'(\alpha) = \dfrac{a^2+ab+b^2}{3}.\dfrac{f'(\gamma)}{\gamma^2}$. Do đó dẫn đến kết luận của bài toán.

• Lấy $[a,b] \equiv [0,1]$ ta sẽ được bài toán của kỳ thi OLP-2015 tại Huế.

(OLP-2015, Huế). Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là một hàm khả vi liên tục.

Chứng minh rằng tồn tại các số $x_1, x_2, x_3 \in (0,1)$ sao cho

$$\frac{f'(x_1)}{4x_1} + \frac{f'(x_2)}{6x_2^2} = f'(x_3).$$

4. • Xét không gian $E = C[0,1]$ (thực ra có thể xét $C[a,b]$).

Với tích vô hướng của $f, g \in E$ là

$$< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx, \ \|f\| = \sqrt{< f, f >}.$$

Như thế E trở thành không gian vector tuyến tính ó tích vô hương (không gian Hilbert).

Xét $e_1(x) = 1, e_2(x) = \sqrt{3}(2x-1) \in E$. Ta dễ thấy

$< e_1, e_2 >= 0, \|e_1\| = \|e_2\| = 1$ và $\{e_1, e_2\}$ độc lập tuyến tính.

Gọi F là không gian con của E sinh bởi cơ sở trực chuẩn $\{e_1, e_2\}$, tức là $F = \text{span}(\{e_1, e_2\})$. Khi đó lấy bất kỳ $h \in E$ thì hình chiếu vuông góc của h trên F là

$$h_F =< e_1, h > e_1 + < e_2, h > e_2.$$

Rõ ràng là $\|h_F\| \leq \|h\|$, nên suy ra

$$| < e_1, h > |^2 + | < e_2, h > |^2 \leq \|h\|^2 \tag{1}$$

• Lấy hàm $g \in E$ khả vi liên tục, thì $g' \in E$ và ta có

$$\begin{aligned}
< e_1, g' > &= \int_0^1 g'(x)dx = g(1) - g(0),\\
< e_2, g' > &= \sqrt{3}\int_0^1 (2x-1)g'(x)dx\\
&= \sqrt{3}(2x-1)g(x)\Big|_0^1 - 2\sqrt{3}\int_0^1 g(x)dx\\
&= \sqrt{3}\Big[(g(1) + g(0) - 2\int_0^1 g(x)dx\Big].
\end{aligned}$$

Áp dụng (1) cho $h = g'$ ta được

$$[g(1) - g(0)]^2 + 12\Big[\frac{g(1)+g(0)}{2} - \int_0^1 g(x)dx\Big]^2 \leq \int_0^1 [g'(x)]^2 dx \tag{2}$$

Từ đây chỉ việc chọn các giá trị $g(0), g(1)$ thích hợp, ta sẽ được một loạt các bất đẳng thức đẹp về tích phân.

• Chẳng hạn: Cho hàm $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục và $g(0) = g(1) = -\frac{1}{6}$. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 [g'(x)]^2 dx \geq 2\int_0^1 g(x)dx + \frac{1}{4}.$$

Áp dụng (2) cho g với $g(0) = g(1) = -\frac{1}{6}$ ta được

$$12\Big[\frac{1}{6} + \int_0^1 g(x)dx\Big]^2 \leq \int_0^1 [g'(x)]^2 dx \tag{3}$$

Do (3) thì ta chỉ việc chứng minh

$$12\Big[\frac{1}{6} + \int_0^1 g(x)dx\Big]^2 \geq 2\int_0^1 g(x)dx + \frac{1}{4},$$

điều này hoàn toàn dễ dàng.

• Bài tập:

1) Cho hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục và $f(0) = 0, f(1) = 1$. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + \frac{4}{3} \geq 3\int_0^1 f(x)dx.$$

2) Cho hàm $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục và $g(0) = 1, g(1) = 3$. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 [g'(x)]^2 dx + 23 \geq 12\int_0^1 g(x)dx.$$

5. Cho hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx$.

1) Chứng minh rằng tồn tại điểm $\alpha \in (0,1)$ sao cho $\int_0^\alpha f(x)dx = 0$.

Từ đó suy ra với mỗi số $a \in \mathbb{R}$ tồn tại điểm $c \in (0,1)$ sao cho

$$f(c) = a\int_0^c f(x)dx.$$

2) Chứng minh rằng với mỗi số $a \in \mathbb{R}$ tồn tại điểm $c \in (0,1)$ sao cho

$$cf(c) + a\int_0^c f(x)dx = 0.$$

Lời giải. 1) Xét hàm $g(t) = t\int_0^t f(x)dx - \int_0^t xf(x)dx, t \in [0,1]$.

Ta có $g(0) = g(1) = 0$ và $g'(t) = \int_0^t f(x)dx$.

Theo định lý Rolle tồn tại $\alpha \in (0,1)$ sao cho $g'(\alpha) = 0$, hay $\int_0^\alpha f(x)dx = 0$.

Lại xét hàm $h(t) = e^{-at}\int_0^t f(x)dx, t \in [0,1]$.

Ta có $h(0) = h(\alpha) = 0$ và $h'(t) = e^{-at}\Big[f(t) - a\int_0^t f(x)dx\Big]$.

Theo định lý Rolle $\exists c \in (0,\alpha) \subset (0,1)$ sao cho $h'(c) = 0$, hay $f(c) = a\int_0^c f(x)dx$.

• Chọn a thích hợp sẽ được các bài thi Olympic.

Chẳng hạn với $a = 2018$ là bài thi OLP-2018 (bảng B) tại Quảng Bình.

2) Xét hàm $F(x) = \int_0^x f(t)dt, x \in [0,1]$. Ta có $F(0) = 0$, $F'(x) = f(x)$ và

$$\begin{aligned} F(1) &= \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x) = \int_0^1 xF'(x)dx \\ &= xF(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 F(x)dx = F(1) - \int_0^1 F(x)dx. \end{aligned}$$

Do đó $\int_0^1 F(x)dx = 0 \quad (*)$.

Hàm $F(x)$ liên tục trên $[0,1]$. Ta nhận thấy rằng nếu $F(x) > 0, \forall x \in (0,1)$ thì $\int_0^1 F(x)dx > 0$, nếu $F(x) < 0, \forall x \in (0,1)$ thì $\int_0^1 F(x)dx < 0$, đều trái với $(*)$.

Vậy phải tồn tại $b \in (0,1)$ để $F(b) = 0$.

Lại xét hàm $g(x) = x^aF(x)$. Ta có $g'(x) = ax^{a-1}F(x) + x^af(x)$, $g(0) = g(b) = 0$.

Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (0,b) \subset (0,1)$ sao $g'(c) = 0$. Từ đó

$$ac^{a-1}\int_0^c f(x)dx + c^af(c) = 0 \qquad \text{hay} \qquad cf(c) + a\int_0^c f(x)dx = 0.$$

Chọn a thích hợp sẽ được các bài thi Olympic.

6. Cho hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ khả vi thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx$.

Chứng minh rằng với mỗi số $a \in \mathbb{R}$ tồn tại điểm $c \in (0,1)$ sao cho

$$f(c) = af'(c)\int_0^c f(x)dx.$$

Lời giải. Xét hàm $g(t) = e^{-af(t)} \int_0^t f(x)dx, t \in [0,1]$.

Theo bài 5 tồn tại $\alpha \in (0,1)$ để $\int_0^\alpha f(x)dx = 0$. Ta có $g(0) = g(\alpha) = 0$ và

$$g'(t) = e^{-af(t)}\Big[f(t) - af'(t)\int_0^t f(x)dx\Big].$$

Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (0,\alpha) \subset (0,1)$ sao cho $g'(c) = 0$.

Do đó $f(c) = af'(c)\int_0^c f(x)dx$.

• Chọn a thích hợp sẽ được các bài thi Olympic.

Chẳng hạn với $a = 2018$ là bài thi OLP-2018 (bảng A) tại Quảng Bình.

7. Cho hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ khả vi thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = k$.

   Chứng minh rằng tồn tại điểm $c \in (0,1)$ sao cho $f'(c) = 6k$.

   Lời giải. Xét hàm $g(x) = 6kx - 2k$. Dễ dàng thấy $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 xg(x)dx = k$.

   Suy ra $\int_0^1 [f(x) - g(x)]dx = 0$. Hàm $h(x) = f(x) - g(x)$ liên tục trên $[0,1]$ và có tích phân $\int_0^1 h(x)dx = 0$, nên không thể xảy ra trường hợp $h(x) > 0, \forall x \in (0,1)$ hoặc trường hợp $h(x) < 0, \forall x \in (0,1)$.

   Như thế phương trình $h(x) = 0$ phải có ít nhất một nghiệm trong $(0,1)$.

   Giả sử rằng $h(x) = 0$ chỉ có một nghiệm $x = a \in (0,1)$.

   Xảy ra hai khả năng sau:

   +) Nếu $h(x) < 0, \forall x \in (0,a)$, thì $h(x) > 0, \forall x \in (a,1)$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xf(x)dx - k &= \int_0^1 xf(x)dx - \int_0^1 xg(x)dx \\
&= \int_0^1 x[f(x) - g(x)]dx = \int_0^1 xh(x)dx \\
&= \int_0^a xh(x)dx + \int_a^1 xh(x)dx \\
&> \int_0^a ah(x)dx + \int_a^1 ah(x)dx \\
&= a\Big[\int_0^a h(x)dx + \int_a^1 h(x)dx\Big] = a\int_0^1 h(x)dx = 0.
\end{aligned}$$

   Suy ra $\int_0^1 xf(x)dx > k$, mâu thuẫn với giả thiết của đề bài!

Do vậy $G(t)$ đơn điệu tăng trên $[0,1]$, nên $G(1) > G(0) = 0$.

Mặt khác $F(1) = \int_0^1 f(x)dx = 0$ nên $g(1) = F(1) - G(1) = -G(1) < 0$, mâu thuẫn với giả thiết $g(t) > 0, \forall t \in (0,1]$.

Vậy phải tồn tại $a \in (0,1]$ để $g(a) = 0$. Lúc này áp dụng định lý Rolle cho $g(t)$ thì tồn tại $\xi \in (0,a) \subset (0,1)$ sao cho

$$0 = g'(\xi) = \frac{\xi^{n+1} f(\xi) - n\int_0^\xi x^n f(x)dx}{\xi^{n+1}}.$$

Dẫn tới điều cần chứng minh.

- Lấy n thích hợp sẽ được đề bài cho kỳ thi Olympic Toán sinh viên.

Tài liệu tham khảo

1. Hội Toán học Việt Nam.

Tuyển tập và Kỷ yếu thi Olympic Toán sinh viên từ năm 1993 đến năm 2019.

2. Nguyễn Văn Mậu, Lê Ngọc Lăng, Phạm Thế Long, Nguyễn Minh Tuấn.

Tuyển tập Olympic Toán sinh viên toàn quốc 1993 - 2005. Hà Nội 2006.

3. Vũ Tiến Việt. *Tài liệu ôn tập Olympic Toán sinh viên.*

Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2017.

4. Vũ Tiến Việt (chủ biên), Phan Thế Hải.

Một số chuyên đề ôn tập thi Olympic Toán sinh viên - Phần 2. Giải tích.

Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2021.