Câu 1. (3 điểm)

a) Tìm tất cả các số phức z thỏa mãn $1 + z + z^2 + \cdots + z^{99} = 0$.

b) Tìm tích của tất cả các số phức tìm được trong câu (a).

Lời giải.

a) Giả thiết suy ra $z^{100} = 1$ với $z \neq 1$, hay $z \in \{z_k\}_{k=1}^{99}$ với $z_k = \cos\frac{k2\pi}{100} + i\sin\frac{k2\pi}{100}$.

b) Theo định lý Viète ta có $z_1 \dots z_{99} = -1$.

Câu 2. (3 điểm) Cho các đa thức $P(x) = x^{2022} - 1$ và $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

a) Hãy phân tích $P(x)$ thành tích của các đa thức hệ số thực bậc một hoặc bậc hai.

b) Tìm đa thức dư khi chia $P(x)$ cho $Q(x)$.

Lời giải.

a) $P(x)$ có các nghiệm $1, -1$ và các cặp nghiệm phức liên hợp $x_k = \cos\frac{k2\pi}{2022} + i\sin\frac{k2\pi}{2022}, \overline{x_k} = \cos\frac{k2\pi}{2022} - i\sin\frac{k2\pi}{2022}$, với $k = 1, \dots, 1010$. Do đó $P(x)$ có các nhân tử bậc một là $x - 1, x + 1$ và các nhân tử bậc hai là

$$(x - x_k)(x - \overline{x_k}) = x^2 - 2\cos\frac{k2\pi}{2022}x + 1.$$

Phân tích của $P(x)$ như sau

$$P(x) = (x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{1010}\left(x^2 - 2\cos\frac{k2\pi}{2022}x + 1\right).$$

b) Giả sử $P(x) = Q(x)H(x) + R(x) = x(x-1)^2H(x) + ax^2 + bx + c$.

Ta có $\begin{cases} P(0) = c \\ P(1) = a + b + c \\ P'(1) = 2a + b \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ a + b + c = 0 \\ 2022 = 2a + b \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = 2021 \\ b = -2020 \\ c = -1 \end{cases}.$

Suy ra $R(x) = 2021x^2 - 2020x - 1$.

Câu 3. (4 điểm) Tìm số thực x thỏa mãn

$$\det\begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2-x & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+x & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2022 & 2022 & 2022 & \cdots & 2022-x \end{pmatrix} = 0.$$

Lời giải.

Vì $1 - 2 + 3 - \cdots - 2022 = -1011$ nên

$$VT = \det\begin{pmatrix} -1011+x & -1011+x & -1011+x & \cdots & -1011+x \\ 2 & 2-x & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+x & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2022 & 2022 & 2022 & \cdots & 2022-x \end{pmatrix}$$

$$= (x-1011).\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2-x & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+x & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2022 & 2022 & 2022 & \cdots & 2022-x \end{pmatrix}$$

$$= (x-1011).\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x \end{pmatrix} = -x^{2021}(x-1011) = 0.$$

Vậy $x \in \{0;\ 1011\}$.

Câu 4. (4 điểm) Cho số nguyên dương $n > 1$ và ma trận $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Tìm tất cả giá trị riêng của A^n.

b) Tìm một ma trận B thỏa mãn $B^2 = A$.

Lời giải.

a) A có ba giá trị riêng là $1, 4, 9$. Đồng thời ta chứng minh được λ là giá trị riêng của A khi và chỉ khi λ^n là giá trị riêng của A^n. Vậy tập giá trị riêng của A^n là $1, 4^n, 9^n$.

b) Chéo hóa A ta có

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Như vậy có thể chọn

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Câu 5. (3 điểm) Cho V là không gian các đa thức $f(x)$ hệ số thực có bậc không vượt quá 5. Gọi $T: V \longrightarrow V$ là ánh xạ xác định bởi $T(f) = g$ sao cho

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt.$$

a) Chứng minh rằng T là ánh xạ tuyến tính.

b) Ký hiệu $T^2(f) = T(T(f))$ và $T^n(f) = T(T^{n-1}(f))$ với $n \geq 3$. Tìm ma trận chính tắc của ánh xạ T^n.

Lời giải.

a) Ta có $T(af_1 + bf_2) = aT(f_1) + bT(f_2)$ nên T là ánh xạ tuyến tính.

b) Xét ảnh của T qua cơ sở $\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ ta có ma trận chính tắc của T là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Vậy ma trận chính tắc của T^n là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6^n \end{pmatrix}.$$

Câu 6. (3 điểm) Một nhóm có 12 cầu thủ bóng chuyền trong đó:

(i) có 1 cầu thủ chơi được cả ba vị trí: trung tâm, tấn công và phòng ngự;

(ii) có 5 cầu thủ chỉ chơi được hai vị trí: tấn công và trung tâm;

(iii) có 6 cầu thủ chỉ chơi được vị trí phòng ngự.

Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một đội bóng chuyền gồm 5 cầu thủ, trong đó: có 1 cầu thủ chơi ở trung tâm, 2 cầu thủ chơi tấn công và 2 cầu thủ chơi phòng ngự?

Lời giải.

Gọi cầu thủ chơi được cả ba vị trí là a; tập 5 cầu thủ chơi được đúng hai vị trí tấn công và trung tâm là B; tập 6 cầu thủ chơi được đúng một vị trí phòng ngự là C.

Nếu a chơi trung tâm, hai cầu thủ của B chơi tấn công, hai cầu thủ của C chơi phòng ngự thì ta có $1.C_5^2.C_6^2 = 150$ cách.

Nếu một cầu thủ của B chơi trung tâm, hai cầu thủ của B chơi tấn công, hai cầu thủ của C chơi phòng ngự thì ta có $5.C_4^2.C_6^2 = 450$ cách.

Nếu một cầu thủ của B chơi trung tâm, a và một cầu thủ của B chơi tấn công, hai cầu thủ của C chơi phòng ngự thì ta có $5.4.C_6^2 = 300$ cách.

Nếu một cầu thủ của B chơi trung tâm, hai cầu thủ của B chơi tấn công, a và một cầu thủ của C chơi phòng ngự thì ta có $5.C_4^2.6 = 180$ cách.

Đáp số: 1080 cách.