1.2 Bảng B

BÀI 1.

(a) Cho x là một số thực. Tính định thức của ma trận sau theo x:

$$A = \begin{pmatrix} x & 2022 & 2023 \\ 2022 & 2023 & x \\ 2023 & x & 2022 \end{pmatrix}.$$

(b) Tìm các số thực x sao cho hạng của ma trận A nhỏ hơn 3. Tính hạng của ma trận A với x vừa tìm được.

BÀI 2. Giả sử $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ là ánh xạ tuyến tính cho bởi:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + \lambda x_2 - x_3 + 2x_4, 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 + 5x_4, x_1 + 10x_2 - 6x_3 + x_4),$$

trong đó $\lambda \in \mathbb{R}$ là tham số.

(a) Với $\lambda = 3$, hãy tìm

(a1) Một cơ sở và số chiều của không gian hạt nhân $\mathrm{Ker}(f)$.

(a2) Một cơ sở và số chiều của không gian ảnh $\mathrm{Im}(f)$.

(b) Tìm số chiều của không gian ảnh $\mathrm{Im}(f)$ như một hàm số của λ.

BÀI 3. Cho đa thức $P(x) = x^4 - 2x^3 - 1$.

(a) Biết rằng phương trình $P(x) = 0$ có 4 nghiệm phức (kể cả bội), ký hiệu bởi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Chứng minh rằng các nghiệm phức nói trên đôi một phân biệt.

(b) Chứng minh rằng các lũy thừa $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3, \delta^3$ cũng là các số đôi một phân biệt.

(c) Tìm một đa thức bậc 4 nhận các số $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3, \delta^3$ là nghiệm.

BÀI 4. Với mỗi ma trận vuông A có phần tử là các số phức, ta định nghĩa:

$$e^A = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{A^n}{n!}.$$

(Ở đây quy ước $0! = 1$, A^0 là ma trận đơn vị, ma trận giới hạn ở vế phải có phần tử là giới hạn của phần tử tương ứng của các ma trận tổng $S_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{A^n}{n!}$. Ma trận giới hạn này luôn tồn tại.)

(a) Với A là ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

hãy tìm một ma trận khả nghịch C sao cho $C^{-1}AC$ là ma trận đường chéo.

(b) Tìm các phần tử của ma trận e^A với A là ma trận cho ở phần (a).

BÀI 5. Ký hiệu P_n là tập hợp tất cả các ma trận khả nghịch A cấp n sao cho các phần tử của A và A^{-1} đều bằng 0 hoặc 1.

(a) Với $n = 3$ hãy tìm tất cả các ma trận thuộc P_3.

(b) Chứng minh rằng tồn tại một song ánh giữa P_n và tập S_n các hoán vị trên n phần tử. Từ đó hãy tính số phần tử của P_n với n là số nguyên dương tùy ý.

2 Giải tích

2.1 Bảng A

BÀI 1. Cho $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{4^k}\right) = \left(1+\frac{1}{4^1}\right)\left(1+\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{4^n}\right) \quad \forall n \geq 1.$$

(a) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $u_n > 5/4$.

(b) Chứng minh rằng $u_n \leq 2023$ với mọi số nguyên dương n.

(c) Chứng minh rằng dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ và xác định giới hạn của dãy số chính xác đến 1 chữ số sau dấu phẩy thập phân.

BÀI 2. Cho $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ là hàm số được xác định bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} & \text{nếu } x \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}, \\ x & \text{nếu } x \in [-1,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Chứng minh rằng hàm f liên tục tại 0.

(b) Hàm f có khả vi tại 0 không?

(c) Hàm f có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1,1]$ không?

1.2 Bảng B

BÀI 1. (a) Đặt $a = 2022$, ký hiệu định thức của ma trận cần tìm là $f(x)$. Cộng hàng 2 và hàng 3 vào hàng 1 suy ra

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x+2a+1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & x \\ a+1 & x & a \end{pmatrix}, \\ &= -(x+2a+1)\left(x^2-(2a+1)x+a^2+a+1\right), \\ &= -(x+4045)\left(x^2-4045x+4090507\right). \end{aligned}$$

(b) Hạng của ma trận nhỏ hơn 3 khi và chỉ khi định thức $f(x) = 0$. Vì biệt thức

$$\Delta = (2a+1)^2 - 4(a^2+a+1) < 0,$$

nên phương trình $x^2-(2a+1)x+a^2+a+1 = 0$ không có nghiệm thực. Do đó có duy nhất một số thực $x = -2a-1 = -4045$ để $f(x) = 0$. Vậy số thực duy nhất để hạng của ma trận nhỏ hơn 3 là $x = -4045$. Lúc đó hạng của ma trận bằng hạng của

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2022 & 2023 & -4045 \\ 2023 & -4045 & 2022 \end{pmatrix}.$$

Vậy hạng của ma trận A khi đó bằng 2.

BÀI 2. Ánh xạ tuyến tính đề bài cho có ma trận trong cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$ và $\mathbb{R}^3$ là

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a1) Với $\lambda = 3$, hạt nhân $\operatorname{Ker}(f)$ là không gian nghiệm của phương trình thuần nhất với ma trận hệ số là

$$A(3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dùng biến đổi sơ cấp suy ra số chiều $\dim \operatorname{Ker}(f) = 2$ với một cơ sở

$$(-8,5,7,0);(-17,1,0,7).$$

(a2) Từ phần (a1), dùng công thức $\dim \operatorname{Im}(f) = n - \dim \operatorname{Ker}(f)$ suy ra số chiều của không gian ảnh bằng $4-2 = 2$.

Mặt khác mỗi vectơ thuộc $\operatorname{Im}(f)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ cột của $A(3)$. Do đó ảnh của ánh xạ f là không gian con sinh bởi các vectơ cột. Chuyển vị ma trận A rồi dùng các phép biến đổi sơ cấp hàng suy ra một cơ sở của $\mathrm{Im}(f)$ là $(1,2,1),(0,1,-1)$.

(b) Số chiều của ảnh chính là hạng của ma trận:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dùng biến đổi sơ cấp hàng thu được

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & \lambda-10 & 5 & 1 \\ 0 & -21 & \lambda+12 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & -21 & \lambda+12 & 3 \\ 0 & \lambda-10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & -21 & \lambda+12 & 3 \\ 0 & 0 & \dfrac{(\lambda+5)(\lambda-3)}{21} & \dfrac{\lambda-3}{7} \end{pmatrix}.$$

Vậy $\mathrm{Rank}A = 2$ nếu $\lambda = 3$, và $\mathrm{Rank}A = 3$ nếu $\lambda \neq 3$. Do đó số chiều của không gian ảnh $\mathrm{Im}(f)$ bằng 2 nếu $\lambda = 3$, và bằng 3 nếu $\lambda \neq 3$.

BÀI 3. (a) Nhận thấy đa thức đạo hàm $P'(x) = 4x^3 - 6x^2 = x^2(4x-6)$ chỉ có hai nghiệm $x = 0$ (bội 2) và $x = \frac{3}{2}$ (bội 1). Các nghiệm này đều không phải là nghiệm của phương trình ban đầu $P(x) = 0$. Do đó các nghiệm của $P(x) = 0$ là phân biệt.

(b) Nhận thấy $P(x) = 0$ khi và chỉ khi $x^4 = 2x^3 + 1$. Do đó nếu giả sử $\alpha^3 = \beta^3$ thì $\alpha^4 = \beta^4$. Từ đó suy ra $\alpha = \beta$.

(c) Đặt $y = x^3$, suy ra $x^4 = 2y + 1$. Lũy thừa 3 cả hai vế suy ra $x^{12} = (2y+1)^3$, suy ra $y^4 = (2y+1)^3$. Do đó

$$y^4 - 8y^3 - 12y^2 - 6y - 1 = 0.$$

Vậy kết hợp với (b) phương trình $y^4 - 8y^3 - 12y^2 - 6y - 1 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3, \delta^3$.

BÀI 4. (a) Đa thức đặc trưng $P_A(X) = (X-1)(X-2)$. Các giá trị riêng là 1 và 2. Các vectơ riêng tương ứng là $(1,0)^T$, $(-1,1)^T$. Vậy với ma trận

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

thì

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Từ phần (a) suy ra

$$A = C\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}C^{-1}.$$

Cùng với tính kết hợp của phép nhân ma trận suy ra

$$e^A = C\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}C^{-1} = \begin{pmatrix} e & e-e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

BÀI 5. (a) Đặt $A = \left(a_{ij}\right)_{3\times 3}$, và $A^{-1} = \left(b_{ij}\right)_{3\times 3}$. Kết hợp với việc A và A^{-1} đều khả nghịch, ta có mỗi hàng cũng như cột của nó có ít nhất một số 1. Với $1 \le k \le 3$ ta có

$$1 = a_{k1}b_{1k} + a_{k2}b_{2k} + a_{k3}b_{3k}.$$

Vậy tồn tại duy nhất $m \in \{1,2,3\}$ sao cho $a_{km} = b_{mk} = 1$. Nói riêng mỗi hàng của A có đúng một số 1. Nếu có hai số 1 thuộc cùng một cột thì sẽ có một cột gồm toàn số 0, suy ra vô lý. Vậy mỗi hàng, mỗi cột của A có đúng một số 1. Nghịch đảo của A lúc đó cũng gồm toàn các số $0,1$. Tập P_3 bao gồm các ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Ta chỉ ra tồn tại một song ánh giữa P_n và tập S_n các hoán vị trên n phần tử. Đặt $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, và $A^{-1} = \left(b_{ij}\right)_{n\times n}$. Kết hợp với việc A và A^{-1} đều khả nghịch, ta có mỗi hàng cũng như cột của nó có ít nhất một số 1. Với $1 \le k \le n$ ta có:

$$1 = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}b_{jk}. \tag{1}$$

Vậy tồn tại $m \in \{1,2,\ldots,n\}$ sao cho $a_{km} = b_{mk} = 1$. Ta chỉ ra số m như vậy là duy nhất. Thật vậy, giả sử có một số $m' \neq m$ sao cho $a_{km'} = 1$. Thế thì từ (1) suy ra $b_{m'k} = 0$. Vì hàng thứ m' của A^{-1} có ít nhất một số 1 nên tồn tại $l \neq k$ sao cho $b_{m'l} = 1$. Do đó $\left(AA^{-1}\right)_{kl} \geq 1$. Điều này vô lý vì $k \neq l$. Vậy số m ứng với k như vậy là duy nhất, ký hiệu bởi $m = \sigma(k)$. Vì mỗi cột của A đều có ít nhất một số 1, nên σ là toàn ánh từ $\{1,2,\ldots,n\}$ vào chính nó. Do đó σ (phụ thuộc vào A) là một song ánh (hoán vị) trên $\{1,2,\ldots,n\}$. Tương ứng từ $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ vào σ cho bởi $a_{k\sigma(k)}$ là phần tử bằng 1 duy nhất trên hàng thứ k xác định một đơn ánh từ P_n vào S_n. Ta chỉ ra ánh xạ này là một toàn ánh. Thật vậy cho trước hoán vị $\sigma \in S_n$, xét $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ là ma trận mà hàng thứ k bất kỳ có phần tử $a_{k\sigma(k)} = 1$, các phần tử còn lại đều bằng 0. Ký hiệu $B = \left(b_{ij}\right)_{n\times n}$ là ma trận mà hàng thứ k bất kỳ có phần tử $b_{k\sigma^{-1}(k)} = 1$, các phần tử còn lại đều bằng 0. Thế thì B là nghịch đảo của A. Do đó $A \in P_n$. Vậy tương ứng giữa A và σ cho một song ánh giữa P_n và S_n. Do đó số phần tử của P_n bằng $n!$.