TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI OLYMPIC NĂM 2012
MÔN THI: ĐẠI SỐ
Thời gian: 180 phút

Câu 1. Tính định thức cấp n sau

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Câu 2. Cho A là một ma trận vuông và I là ma trận đơn vị cùng cấp với A. Chứng minh rằng, nếu tồn tại $k \in N^*$sao cho $A^k = 0$ thì $det(A + I) = 1$.

Câu 3. Tìm A^{2012}, trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Câu 4. Tìm điều kiện khả nghịch và ma trận nghịch đảo nếu có của ma trận vuông cấp n sau

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a \end{pmatrix}.$$

Câu 5. Cho đa thức $P(x)$ bậc n có n nghiệm thực phân biệt $x_1, x_2, \dots, x_n$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(x_i)} = 0.$$

Câu 6. Tìm đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn

$$P(x + 2012) = P(x) + \frac{x}{2012} + 1.$$

Chú ý: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT | ĐÁP ÁN THI OLYMPIC NĂM 2012

BỘ MÔN TOÁN | **MÔN THI: ĐẠI SỐ**

Câu 1.Tínhđịnhthứccấpn sau

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Lờigiải(4 điểm). Khaitriểnđịnhthứctheohàng 1 ta được

$$\Delta_n = 3\Delta_{n-1} - 2.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Khaitriểnđịnhthứctheocột 1 ta lạicó

$$\Delta_n = 3\Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2}.$$

Từđó, $\Delta_n - \Delta_{n-1} = 2(\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2})$, cứnhưvậy ta được

$$\Delta_n - \Delta_{n-1} = 2(\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}) = 2^2(\Delta_{n-2} - \Delta_{n-3}) = \cdots = 2^{n-2}(\Delta_2 - \Delta_1)$$

$$= 2^{n-2}\left(\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 3\right) = 4.2^{n-2} = 2^n.$$

Do đó, $\Delta_n = (\Delta_n - \Delta_{n-1}) + (\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}) + \cdots + (\Delta_2 - \Delta_1) + \Delta_1 =$

$$= (2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2^2) + 3 = 2^{n+1} - 1.$$

Câu 2. Cho A là một ma trậnvuôngvàI là ma trậnđơnvịcùngcấpvớiA. Chứng minh rằng, nếutồntại$k \in N^*$ sao cho $A^k = 0$ thì $\det(A + I) = 1$.

Lờigiải (3 điểm). Giảsửλ là giá trị riêngcủa ma trậnA, khi đó tồntại$x \neq 0$ sao cho $Ax = \lambda x$. Bằng qui nạpsuyra$A^k x = \lambda^k x$. Do đó, $\lambda^n = 0$, nên mọigiátrịriêngcủaA đềubằng 0.

Vìvậy, đathứcđặctrưngcủaA phảicódạng$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n.\lambda^n$

Cho $\lambda = -1$, ta suy ra, $P_A(-1) = \det(A+I) = (-1)^n.(-1)^n = 1$.

Câu 3.Tìm A^{2012}, trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lời giải (3 điểm). Phân tích $A = 2.I + B$ với

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do I là ma trận đơn vị nên nó giao hoán với mọi ma trận khác, còn ma trận B có tính chất

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B^k = 0 \ (\forall k \geq 3).$$

$$A^{2012} = 2^{2012}I + 2012\,.\,2^{2011}.B + \frac{2011.2012}{2}.2^{2010}.B^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$(a = 2^{2012};\ b = 2012\,.\,2^{2011};\ \ c = 2012.2011.2^{2009}).$$

Câu 4.Tìmđiềukiệnkhảnghịchvà ma trậnnghịchđảonếucócủa ma trậnvuôngcấpn sau

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a \end{pmatrix}.$$

Lờigiải (4 điểm).Lập ma trận$(A|I)$. Cộnghàng 1 vớitấtcảcáchàngcònlại, ta thấyđiềukiệncầnđểA khả nghịchlà $a + n \neq 0$. Chia hàng 1 cho$a + n$ ta đượchàngtoàn 1.

Lấycáchànglầnlượttrừđihàng 1 ta cóđiềukiệncầntiếptheolà$a \neq 0$.Chia cáchàngthứ 2 trởđicho$a$, ta thấytrênđườngchéocủaA toàn 1.

Trừhàng 1 chotổngtấtcảcáchàngcònlại, ta được ma trậnnghịchđảolà

$$A^{-1} = \frac{-1}{a(a+n)} \begin{pmatrix} 1-a-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-a-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-a-n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-a-n \end{pmatrix}$$

Điềukiệnkhảnghịch:$a \neq 0, a \neq -n$.

Câu 5. Cho đathức$P(x)$ bậcn có n nghiệmthựcphânbiệt$x_1, x_2, \dots, x_n$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(x_i)} = 0.$$

Lờigiải (3 điểm). Giảsửa là hệ sốđầucủa$P(x)$, thì

$$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

$$\rightarrow P'(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i(x)\text{, với}w_i(x) = \frac{a}{(x-x_i)}\prod_{j=1}^{n}(x-x_j), \quad (i = \overline{1,n}).$$

Xétđathứcbậc$n-1$

$$G(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i(x)}{w_i(x_i)} \rightarrow G(x_i) = 1\ (i = \overline{1,n}) \rightarrow G(x) \equiv 1.$$

Đồngnhấthệsốcủax^{n-1} ta được

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{w_i(x_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(x_i)} = 0.$$

Câu 6.Tìmđathứcchệsốthực$P(x)$ thỏamãn

$$P(x+2012) = P(x) + \frac{x}{2012} + 1.$$

Lờigiải (3 điểm).Đặt$Q(x) = P(2012x)$, từ giảthiết ta có

$$Q\left(\frac{x}{2012}+1\right) = Q\left(\frac{x}{2012}\right) + \frac{x}{2012} + 1 \ \rightarrow Q(x+1) = Q(x) + x + 1\ (\forall x).$$

Do đó, $Q(n) = Q(n-1) + n = Q(n-2) + n + (n-1) = \cdots$

$$... = Q(0) + n + (n-1) + \cdots + 1 = Q(0) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + c \quad (\forall n \in N^*).$$

Vìhaiđathứcbằngnhautạivôsốđiểmthìtrùngnhaunên

$$Q(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + c \ \rightarrow P(x) = \frac{1}{2.\,2012^2}x^2 + \frac{1}{2.2012}x + c.$$

------ Hết -----