Chuyên đề: Ứng dụng của đlý Halminton

Định lý. Cho A là ma trận vuông cấp n, đa thức đặc trưng của A là:

$$P_A(x) = \det(A - \overset{A}{x}.I) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$P_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} tr(A) x^{n-1} + (-1)^{n-2} C_2(A) x^{n-2} + \cdots + \det(A)$$

Khi đó, ta có:

- Đa thức đặc trưng nhận các giá trị riêng và ma trận A làm nghiệm.
- Nếu A là ma trận cấp 2, thì $P_A(x) = x^2 - tr(A).x + \det(A)$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Viết đa thức đặc trưng của A.

<u>C1</u>. $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 5\lambda - 2$

<u>C2</u>. (Halminton) $\det(A-\lambda I) = \lambda^2 - 5\lambda + (-2)$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Viết đa thức đặc trưng của A.

<u>C1</u>. $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 4 & 5-\lambda & 6 \\ 7 & 8 & 9-\lambda \end{vmatrix} = \ldots$ (dài)

<u>C2</u>. (Halminton) $\det(A-\lambda I) = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \right)\lambda + 0$

$= -\lambda^3 + 15\lambda^2 + 18\lambda$

A cấp 3 $\Rightarrow \det(A-\lambda I) = -\lambda^3 + Tr(A).\lambda^2 - C_2(A).\lambda + \det A$

Dạng 1. Tính lũy thừa ma trận

1. Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^{10}.

* $P_A(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$
* Đặt $x^{10} = (x^2-5x+6)P(x) + (ax+b)$
* Thay $\left.\begin{array}{l} x=2 \Rightarrow 2^{10} = 2a+b \\ x=3 \Rightarrow 3^{10} = 3a+b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 3^{10} - 2^{10} \\ b = 2^{10} - 2(3^{10}-2^{10}) = -2.3^{10} + 3.2^{10} \end{array}$
* Vậy $A^{10} = a.A + b = (3^{10} - 2^{10})A + (-2.3^{10} + 3.2^{10})I$

2. Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^{10}.

* $P_A(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$
* Đặt $x^{10} = (x-2)^2 P(x) + (ax+b)$

  $10x^9 = 2(x-2)P(x) + (x-2)^2 P'(x) + a$
* Thay $x = 2$ vào 2PT trên: $2^{10} = 2a + b$

  $10.2^9 = a \Rightarrow b = 2^{10} - 20.2^9 = 2.2^9 - 20.2^9 = -18.2^9$
* Vậy $A^{10} = 10.2^9 A - 18.2^9.I$

3. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Tính A^{10}.

* $P_A(x) = -x^3 + 3x^2 - \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \right) x + (-27)$

  $= -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$

  $= -x^2(x-3) + 9(x-3)$

  $= (x-3)(9-x^2) = -(x-3)^2(x+3)$
* Đặt $x^{10} = -\underline{(x-3)^2(x+3)}P(x) + ax^2 + bx + c$ (1)

  $10x^9 = -\left[2(x-3)(x+3) + (x-3)^2\right]P(x) - (x-3)^2(x+3)P'(x) + 2ax + b$ (2)

* Đặt $x^{10} = -\underbrace{(x-3)^2(x+3)}\,P(x) + ax^2 + bx + c$ ①

$10x^9 = -\left[2(x-3)(x+3) + (x-3)^2\right]P(x) - (x-3)^2(x+3)P'(x) + 2ax + b$ ③

* Thay $x = 3, -3$ vào ①: $3^{10} = 9a + 3b + c$ ④ $\Rightarrow b = 0$

$3^{10} = 9a - 3b + c$ ⑤ $\Rightarrow a = \dfrac{10.3^9}{6} = 5.3^8$

Thay $x = 3$ vào ②: $10.3^9 = 6a + b$ ⑥ $\Rightarrow c = 3^{10} - \underbrace{9.5.3^8} = 3^{10} - 5.3^{10}$

$= -4.3^{10}$

* Vậy $A^{10} = 5.3^8.A^2 - 4.3^{10}.I$ với $A^2 = ...$

4. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Tính A^{100}.

* $P_A(x) = -x^3 - \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\right)x + (-1) = -x^3 - 1$

* Thay $x = A$: $-A^3 - I = 0 \Rightarrow A^3 = I \Rightarrow A^{100} = A.A^{99} = A.(\underline{A^3})^{33} = A.I = A$

5. Cho $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Tính $A^{\underline{10000}} + A^{\underline{9998}}$.

* $P_A(x) = -x^3 - x^2 - \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\right)x + (-1)$

$= -x^3 - x^2 - x - 1$

* Thay $x = A$: $-\underbrace{A^3 - A^2 - A} - I = 0 \Rightarrow A^3 + A = A^2 + I$

$\Rightarrow A^{10000} + A^{9998} = A^{9997}(A^3 + A) = A^{9997}(A^2 + I) = A^{9999} + A^{9997} = ... = A^2 + I$

6. Tồn tại hay không ma trận vuông cấp 2 thỏa mãn $A^{2010} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1-e \end{pmatrix}$.

* Gọi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow P_A(x) = x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$

* Đặt $x^{2010} = P_A(x).P(x) + (mx + n)$

$\Rightarrow A^{2010} = mA + nI = m\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma+n & mb \\ mc & md+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1-e \end{pmatrix}$

* Đặt $x^{2010} = P_A(x).P(x) + (mx+n)$

$$\Rightarrow A^{2010} = mA + nI = m\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma+n & mb \\ mc & md+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1-e \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ma+n = -1 & (1) \\ mb = 0 & (2) \\ mc = 0 & (3) \\ md+n = -1-e & (4) \end{cases}$$

* Lấy (1) - (4) $\Rightarrow m(a-d) = +e \neq 0$

$\Rightarrow m \neq 0$

$\overset{(2)(3)}{\Rightarrow} b = c = 0$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A^{2010} = \begin{pmatrix} a^{2010} & 0 \\ 0 & d^{2010} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1-e \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ vô lý $\Rightarrow \nexists A$ tmãn

Dạng 2. Tính đa thức ma trận

7. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Tính $p(A)$ với $p(x) = 2x^8 - 3x^5 + x^4 + x^2 - 4$.

* $P_A(x) = -x^3 + 2x - 1$
* $2x^8 - 3x^5 + x^4 + x^2 - 4 \quad \big| \; -x^3 + 2x - 1$

$$
\begin{array}{l|l}
2x^8 - 3x^5 + x^4 + x^2 - 4 & -x^3 + 2x - 1 \\
\hline
-\;2x^8 - 4x^6 + 2x^5 & -2x^5 - 4x^3 + 5x^2 - 9x + 14 \\
\hline
4x^6 - 5x^5 + x^4 + x^2 - 4 & \\
-\;4x^6 \quad - 8x^4 + 4x^3 & \\
\hline
-5x^5 + 9x^4 - 4x^3 + x^2 - 4 & \\
-\;-5x^5 + 10x^3 \quad - 5x^2 & \\
\hline
9x^4 - 14x^3 + 6x^2 - 4 & \\
-\;9x^4 \quad - 18x^2 + 9x & \\
\hline
-14x^3 + 24x^2 - 9x - 4 & \\
-14x^3 \quad + 28x - 14 & \\
\hline
24x^2 - 37x + 10 &
\end{array}
$$

Vậy $P(A) = 24A^2 - 37A + 10I$

8. Cho $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Chứng minh $A^2 - A + I = 0$, từ đó tính

$$f(A) = I + \sum_{k=1}^{2013} (-1)^k A^k$$

* $P_A(x) = x^2 - x + 1 \Rightarrow A^2 - A + I = 0$
* $f(A) = I - A^1 + A^2 - A^3 + A^4 - A^5 + \dots - A^{2011} + A^{2012} - A^{2013}$ (2014 số hạng)

$= I - (A^1 - A^2 + A^3) + (A^4 - A^5 + A^6) + \dots - (A^{2011} - A^{2012} + A^{2013})$

$= I - A(I - A + A^2) + A^4(I - A + A^2) + \dots - A^{2011}(I - A + A^2)$

$= I$

Dạng 3. Tìm ma trận nghịch đảo

9. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận nghịch đảo A^{-1}.

* $P_A(x) = x^2 - 5x - 2 \Rightarrow A^2 - 5A + 2I = 0$

* Nhân $A^{-1} \Rightarrow A^2A^{-1} - 5AA^{-1} + 2A^{-1} = 0$

$\Rightarrow A - 5I + 2A^{-1} = 0$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}(5I - A) = \frac{1}{2}\left[5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

10. Cho $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận nghịch đảo.

* $P_A(x) = -x^3 + x^2 + x - 1 \Rightarrow -A^3 + A^2 + A - I = 0$

* Nhân $A^{-1} \Rightarrow -A^3A^{-1} + A^2A^{-1} + AA^{-1} - A^{-1} = 0$

$\Rightarrow -A^2 + A + I - A^{-1} = 0$

$\Rightarrow A^{-1} = -A^2 + A + I$

* $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Rightarrow A^{-1} = A$

11. Cho A là ma trận vuông thỏa mãn $\det(A - xI) = (4 - x)(4 + x^2)$. Chứng minh rằng A không suy biến và $A^{-1} = \frac{1}{16}A^2 - \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}I$.

* Thay $x = 0$ vào gt $\Rightarrow \det A = 16 \neq 0 \Rightarrow A$ ⊘ suy biến

* $P_A(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x + 16 \Rightarrow -A^3 + 4A^2 - 4A + 16I = 0$

* Nhân $A^{-1} \Rightarrow -A^3A^{-1} + 4A^2A^{-1} - 4AA^{-1} + 16A^{-1} = 0$

$\Rightarrow -A^2 + 4A - 4I + 16A^{-1} = 0$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{16}A^2 - \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}I$ (đpcm)

Dạng 4. Tính giới hạn

12. Cho $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$. Tính $\lim a_{ij}(n)$ với $A^n = \begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) & a_{13}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) & a_{23}(n) \\ a_{31}(n) & a_{32}(n) & a_{33}(n) \end{pmatrix}$

* $P_A(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{6}\right)$
* Đặt $x^n = P_A(x).P(x) + ax^2 + bx + c$

Thay $x = 1/2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = a.\frac{1}{4} + b.\frac{1}{2} + c$

$x = 1/3 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n = a.\frac{1}{9} + b.\frac{1}{3} + c \Rightarrow$

$x = 1/6 \Rightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^n = a.\frac{1}{36} + b.\frac{1}{6} + c$

$a = 18\left(\frac{1}{2^n} - \frac{2}{3^n} + \frac{1}{6^n}\right).$

$b = -3\left(\frac{3}{2^n} - \frac{8}{3^n} + \frac{5}{6^n}\right).$

$c = \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{3}{6^n}\right).$

* Vì $\lim a = \lim b = \lim c = 0 \Rightarrow \lim A^n = \lim (aA^2 + bA + c) = 0 \Rightarrow \lim a_{ij} = 0$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

1. Cho $A = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tính A^{10}.

2. Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tính A^{10}.

3. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Tính $p(A)$ với $p(x) = x^{2020} - 3x + 2$.

4. Cho ma trận A vuông thỏa mãn $\det(A - xI) = (1 - x)(x^2 + x - 12)$. Tìm ma trận nghịch đảo của A theo A.

5. Cho $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2012} & 2013 \\ 0 & \frac{1}{2014} \end{pmatrix}$ và $A^n = \begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) \end{pmatrix}$. Tính $\lim a_{ij}(n)$.

6. Tồn tại hay không ma trận vuông cấp 2 thỏa mãn:

$$A^{2014} = \begin{pmatrix} -2012 & 2014 \\ 0 & -2011 \end{pmatrix}$$