Ôn tập trước kỳ thi
Olympic Toán học sinh viên toàn quốc 2025

1 Danh sách các bài toán

Lưu ý. Các bài toán thuộc mỗi mục được sắp xếp theo thứ tự mức độ khó tăng dần (bài toán 1 dễ nhất, bài toán 10 khó nhất). Tuy nhiên, đánh giá này chỉ dựa trên lời giải của tác giả và chỉ mang tính tương đối. Tác giả mong muốn bạn đọc hãy thử vận dụng sự sáng tạo của bản thân và đưa ra những lời giải đẹp, gọn gàng nhất có thể.

1.1 Đại Số

Bài toán 1. Cho $\mathcal{P}$ là tập hợp gồm năm điểm đôi một phân biệt trong không gian $\mathbb{R}^3$. Giả sử rằng bình phương khoảng cách của hai điểm bất kỳ thuộc $\mathcal{P}$ luôn là số hữu tỷ. Chứng minh rằng tỷ số thể tích của hai hình tứ diện bất kỳ mà có các đỉnh là các điểm thuộc $\mathcal{P}$ cũng luôn là số hữu tỷ.

Bài toán 2. Cho n là số nguyên dương và các số phức $z_1, z_2, \ldots, z_n, w_1, w_2, \ldots, w_n$ thỏa mãn $z_i w_j \neq 1$ với mọi chỉ số $1 \leq i \leq n$ và $1 \leq j \leq n$. Gọi $\boldsymbol{A}$ là ma trận kích thước $n \times n$ với phần tử nằm ở hàng thứ i, cột thứ j xác định bởi

$$a_{ij} = \frac{1}{1 - z_i w_j}.$$

Tính định thức của ma trận $\boldsymbol{A}$.

Bài toán 3. Cho số nguyên dương n và Γ là tập hợp gồm hữu hạn các ma trận phức kích thước $n \times n$. Giả sử rằng Γ cùng với phép toán nhân hai ma trận tạo thành một nhóm. Chứng minh rằng

$$\det\left(\sum_{\boldsymbol{A} \in \Gamma} \boldsymbol{A}\right)$$

là một số nguyên không âm.

Bài toán 4. Cho n và k là các số nguyên dương với k là số lẻ, $\boldsymbol{U}$ là ma trận thực kích thước $n \times k$ thỏa mãn $\boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{U}$ là ma trận đơn vị, $\boldsymbol{Q}$ là ma trận thực kích thước $n \times n$ trực giao. Chứng minh rằng mỗi số ± 1 là giá trị riêng của ít nhất một trong hai ma trận $\boldsymbol{Q}$ và $(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^\top)\boldsymbol{Q}$.

Bài toán 5. Cho n là số nguyên dương và $p(z)$ là đa thức với các hệ số phức và có bậc n. Giả sử rằng mọi không điểm của đa thức $p(z)$ có mô-đun không quá 1. Chứng minh rằng mọi không điểm của đa thức $np(z) + (1 - z)p'(z)$ cũng có mô-đun không quá 1.

Bài toán 6. Cho V là không gian véc-tơ hữu hạn chiều và $f, g \colon V \to V$ là các ánh xạ tuyến tính. Giả sử rằng các không gian ảnh của V qua ánh xạ $f \circ g$ và $g \circ f$ có số chiều bằng nhau. Chứng minh rằng $f \circ g \circ g \circ f = f \circ g$ khi và chỉ khi $g \circ f \circ f \circ g = g \circ f$.

Bài toán 7. Cho n là số nguyên dương, $\boldsymbol{A}$ và $\boldsymbol{B}$ là các ma trận phức kích thước $n \times n$. Giả sử rằng tồn tại số nguyên $k \geq 2$ thỏa mãn $\boldsymbol{A}^k \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$. Chứng minh rằng $\boldsymbol{A}^{k-j} \boldsymbol{B} \boldsymbol{A}^j = \boldsymbol{A}$ với mọi số nguyên j thỏa mãn $1 \leq j \leq k - 1$.

Bài toán 8. Cho n là số nguyên dương và $\boldsymbol{A}$ là ma trận phức kích thước $n \times n$. Giả sử rằng mọi định thức con chính của $\boldsymbol{A}$ đều bằng 0. Chứng minh rằng $\boldsymbol{A}$ là ma trận lũy linh.

Bài toán 9. Cho R là vành giao hoán gồm hữu hạn phần tử. Giả sử rằng mọi phần tử thuộc R đều biểu diễn được bởi tích của hai phần tử (không nhất thiết phân biệt) cũng thuộc R. Chứng minh rằng R là vành giao hoán có đơn vị, nghĩa là, tồn tại $e \in R$ thỏa mãn $ex = xe = x$ với mọi $x \in R$.

Bài toán 10. Cho m và n là các số nguyên thỏa mãn $1 \leq m < n$. An và Bình cùng nhau chơi một trò chơi với luật chơi như sau: Xuất phát với bộ số nguyên $\sigma_1 = (1, 2, \ldots, n)$, An sẽ chơi trước; Với mỗi số nguyên dương k, ở lượt chơi thứ k, An sẽ đổi chỗ hai số nguyên trong bộ số σ_{2k-1} để thu được bộ số mới là σ_{2k} thỏa mãn $|\sigma_{2k}(i) - i| \leq m$ với mọi chỉ số $1 \leq i \leq n$, rồi chuyển lượt chơi cho Bình; Sau đó, Bình sẽ đổi chỗ hai số nguyên trong bộ số σ_{2k} để thu được bộ số mới là σ_{2k+1} thỏa mãn $|\sigma_{2k+1}(i) - i| \leq m$ với mọi chỉ số $1 \leq i \leq n$, rồi chuyển lại lượt chơi cho An; Hơn nữa, bộ số thu được trong mỗi lượt chơi không được trùng với các bộ số đã xuất hiện trong những lượt chơi trước đó của cả hai bạn; Người chơi nào không có nước đi hợp lệ sẽ là người thua cuộc. Giả sử rằng An và Bình đều chơi với chiến thuật tối ưu. Ai sẽ là người thắng cuộc trong trò chơi này (câu trả lời có thể phụ thuộc vào m và n)?

1.2 Giải Tích

Bài toán 1. Một con châu chấu xuất phát tại điểm 0 trên trục số thực. Biết rằng khi nhảy từ điểm $x \in \mathbb{R}$ tới điểm $y \in \mathbb{R}$ thì con châu chấu phải bỏ ra $e^{-x}|x - y|$ đơn vị năng lượng. Xác định hằng số $C > 0$ lớn nhất thỏa mãn tính chất sau: Bất kể con châu chấu thực hiện các lượt nhảy để đi từ điểm 0 tới điểm 1 như thế nào, tổng đơn vị năng lượng mà nó phải bỏ ra trong tất cả các lượt nhảy là không nhỏ hơn C.

Bài toán 2. Cho $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy gồm tất cả các nghiệm thực không âm và được sắp xếp theo thứ tự tăng dần của phương trình $\tan x = x$. Tính giới hạn $\lim_{n\to+\infty}(x_{n+1} - x_n)$.

Bài toán 3. Cho số thực $\delta \in (0, \frac{1}{2})$. Xác định theo δ hằng số $C > 0$ lớn nhất thỏa mãn tính chất sau: với mọi hàm $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục cấp một trên $(0, 1)$ và thỏa mãn

$$\int_\delta^{1-\delta} f(x)\mathrm{d}x = 0$$

thì bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$\int_0^1 f'(x)^2\mathrm{d}x \geq C\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

Bài toán 4. Cho hàm $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ khả vi trên $(0, +\infty)$. Giả sử rằng tồn tại hằng số $\alpha > 0$ thỏa mãn $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = +\infty$. Chứng minh rằng

$$\liminf_{x\to+\infty}\left|\frac{f'(x)}{f(x)^{1+\frac{1}{\alpha}}}\right| = 0.$$

Bài toán 5. Cho $n \geq 2$ là số nguyên và hàm $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ khả vi cấp n trên $(0, +\infty)$. Giả sử rằng giới hạn $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ tồn tại hữu hạn và $\lim_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) = 0$. Chứng minh rằng $\lim_{x\to+\infty} f^{(k)}(x) = 0$ với mọi số nguyên k thỏa mãn $1 \leq k \leq n - 1$.

Bài toán 6. Cho hàm $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ khả vi trên $(0, +\infty)$ và thỏa mãn

$$f'(x) = 1 - \frac{f(x)^2}{x^2} \cdot \frac{x^2 + 1}{f(x)^2 + 1}$$

với mọi $x \in (0, +\infty)$. Xác định hằng số $\alpha > 0$ sao cho giới hạn $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha}$ tồn tại và nhận giá trị dương hữu hạn, hoặc chỉ ra rằng hằng số này không tồn tại.

Bài toán 7. Cho hàm $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $w(0) = 0$ và w' là hàm tăng ngặt trên $\mathbb{R}$. Xác định theo w hàm $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[0, 1]$ sao cho biểu thức

$$\int_0^1 w(x) f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 x w\big(f(x)\big)\mathrm{d}x$$

đạt giá trị lớn nhất.

Bài toán 8. Xác định tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, nếu $\sqrt{2} \le x - y \le \sqrt{3}$ thì $\sqrt{2} \le f(x) - f(y) \le \sqrt{3}$.

Bài toán 9. Cho $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy số thực thỏa mãn tính chất sau: với mọi số thực $\alpha > 1$ thì dãy con $(x_{\lfloor \alpha^n \rfloor})_{n\in\mathbb{N}}$ luôn tồn tại giới hạn hữu hạn và bằng 0. Có thể kết luận rằng dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cũng tồn tại giới hạn hữu hạn và bằng 0 hay không?

Bài toán 10. Cho hàm $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ thỏa mãn giới hạn bên trái $f(x^-) = \lim_{y\to x^-} f(y)$ và giới hạn bên phải $f(x^+) = \lim_{y\to x^+} f(y)$ luôn tồn tại hữu hạn với mọi $x \in (0, 1)$. An và Bình cùng nhau chơi một trò chơi với luật chơi như sau: Xuất phát với $a_0 = 0$ và $b_0 = 1$, An sẽ chơi trước; Với mỗi số nguyên dương n, ở lượt chơi thứ n, An sẽ chọn một số thực a_n bất kỳ thuộc khoảng (a_{n-1}, b_{n-1}), rồi chuyển lượt chơi cho Bình; Sau đó, Bình sẽ chọn một số thực b_n bất kỳ thuộc khoảng (a_n, b_{n-1}), rồi chuyển lại lượt chơi cho An. Trò chơi sẽ diễn ra với vô hạn đếm được các lượt chơi để xây dựng được dãy số thực $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ xác định bởi $x_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Gọi $\ell \in (0, 1)$ là giới hạn của dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ta thừa nhận rằng giới hạn này tồn tại). An sẽ là người chiến thắng nếu f không liên tục tại ℓ, ngược lại, Bình sẽ là người chiến thắng nếu f liên tục tại ℓ. Giả sử rằng An và Bình đều chơi với chiến thuật tối ưu. Ai sẽ là người thắng cuộc trong trò chơi này?

2 Lời giải

2.1 Đại số

Bài toán 1. Cho $\mathcal{P}$ là tập hợp gồm năm điểm đôi một phân biệt trong không gian $\mathbb{R}^3$. Giả sử rằng bình phương khoảng cách của hai điểm bất kỳ thuộc $\mathcal{P}$ luôn là số hữu tỷ. Chứng minh rằng tỷ số thể tích của hai hình tứ diện bất kỳ mà có các đỉnh là các điểm thuộc $\mathcal{P}$ cũng luôn là số hữu tỷ.

Lời giải. Gọi S, T, U, V, W là các điểm của tập hợp $\mathcal{P}$. Không mất tính tổng quát, giả sử hai tứ diện mà ta chọn ra là $SUVW$ và $TUVW$. Đặt $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}'$ theo thứ tự là véc-tơ cột kích thước 3×1 biểu diễn cho $\overrightarrow{SU}, \overrightarrow{SV}, \overrightarrow{SW}, \overrightarrow{TU}, \overrightarrow{TV}, \overrightarrow{TW}$. Khi đó thể tích của hai tứ diện $SUVW$ và $TUVW$ sẽ được cho bởi

$$\mathcal{V}_{SUVW} = \left|\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{pmatrix}\right|; \quad \mathcal{V}_{TUVW} = \left|\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}' & \boldsymbol{v}' & \boldsymbol{w}'\end{pmatrix}\right|.$$

Trước hết, ta sẽ chỉ ra rằng tích vô hướng của hai véc-tơ tạo bởi các điểm thuộc $\mathcal{P}$ mà có chung đầu mút luôn là số hữu tỷ. Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử hai véc-tơ này là $\boldsymbol{u}$ và $\boldsymbol{v}$ (với điểm chung là S). Ta có

$$\boldsymbol{u}^\intercal \boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\left((\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})^\intercal(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{u}^\intercal\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}^\intercal\boldsymbol{v}\right).$$

Do $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})^\intercal(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$, $\boldsymbol{u}^\intercal\boldsymbol{u}$ và $\boldsymbol{v}^\intercal\boldsymbol{v}$ đều là bình phương khoảng cách giữa hai điểm thuộc $\mathcal{P}$ nên chúng là các số hữu tỷ, dẫn tới $\boldsymbol{u}^\intercal\boldsymbol{v}$ cũng là số hữu tỷ. Từ đây, ta có thể chỉ ra thêm rằng tích vô hướng của hai véc-tơ tạo bởi các điểm thuộc $\mathcal{P}$ mà không có đầu mút chung cũng luôn là số hữu tỷ. Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử hai véc-tơ này là $\boldsymbol{u}$ và $\boldsymbol{v}'$. Ta có $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}' = \overrightarrow{ST}$, viết lại thành $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}$. Nhân vô hướng vào hai vế của đẳng thức bởi véc-tơ $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}'$, ta thu được

$$\boldsymbol{u}^\intercal\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{u}^\intercal\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}'^\intercal\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{u}'^\intercal\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}'^\intercal\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}^\intercal\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}^\intercal\boldsymbol{v}',$$

hay

$$\boldsymbol{u}^\intercal\boldsymbol{v}' = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{u}'^\intercal\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}'^\intercal\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}^\intercal\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}^\intercal\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{u}^\intercal\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}'^\intercal\boldsymbol{v}'\right).$$

Do $\boldsymbol{u}^\intercal\boldsymbol{u}$ và $\boldsymbol{v}'^\intercal\boldsymbol{v}'$ đều là bình phương khoảng cách giữa hai điểm thuộc $\mathcal{P}$ nên chúng là các số hữu tỷ. Hơn nữa, do $\boldsymbol{u}'^\intercal\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}'^\intercal\boldsymbol{v}'$, $\boldsymbol{v}^\intercal\boldsymbol{u}$ và $\boldsymbol{v}^\intercal\boldsymbol{v}'$ đều là tích vô hướng của hai véc-tơ tạo bởi các điểm thuộc $\mathcal{P}$ mà có chung đầu mút, nên chúng cũng là các số hữu tỷ. Như vậy $\boldsymbol{u}^\intercal\boldsymbol{v}'$ là số hữu tỷ.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh tỷ số thể tích của hai tứ diện là số hữu tỷ. Biến đổi,

$$\frac{\mathcal{V}_{SUVW}}{\mathcal{V}_{TUVW}} = \frac{\left|\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{pmatrix}\right|}{\left|\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}' & \boldsymbol{v}' & \boldsymbol{w}'\end{pmatrix}\right|}$$

$$= \frac{\left|\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{pmatrix}\right|}{\left|\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}' & \boldsymbol{v}' & \boldsymbol{w}'\end{pmatrix}\right|}$$

$$= \left|\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{u}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{v} & \boldsymbol{u}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{w}\\ \boldsymbol{v}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{v} & \boldsymbol{v}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{w}\\ \boldsymbol{w}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{w}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{w}\end{pmatrix}\right| \left|\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{u}' & \boldsymbol{u}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{v}' & \boldsymbol{u}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{w}'\\ \boldsymbol{v}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{u}' & \boldsymbol{v}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{v}' & \boldsymbol{v}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{w}'\\ \boldsymbol{w}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{u}' & \boldsymbol{w}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{v}' & \boldsymbol{w}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{w}'\end{pmatrix}\right|^{-1}.$$

Như đã chỉ ra trước đó, tất cả các phần tử ở cả hai ma trận kích thước 3×3 trên đều là số hữu tỷ. Do đó định thức của chúng là các số hữu tỷ, dẫn tới tỷ số thể tích cũng là số hữu tỷ. Phép chứng minh hoàn tất.

Bài toán 2. Cho n là số nguyên dương và các số phức $z_1, z_2, \ldots, z_n, w_1, w_2, \ldots, w_n$ thỏa mãn $z_i w_j \neq 1$ với mọi chỉ số $1 \leq i \leq n$ và $1 \leq j \leq n$. Gọi $\boldsymbol{A}$ là ma trận kích thước $n \times n$ với phần tử nằm ở hàng thứ i, cột thứ j xác định bởi

$$a_{ij} = \frac{1}{1 - z_i w_j}.$$

Tính định thức của ma trận $\boldsymbol{A}$.

Lời giải. Với số nguyên $n \geq 1$, gọi $\boldsymbol{A}_n$ là ma trận kích thước $n \times n$ tương ứng. Với chỉ số i lần lượt bằng $1, 2, \ldots, n-1$, trừ đi hàng thứ n khỏi hàng thứ i của $\boldsymbol{A}_n$, ta được ma trận mới $\boldsymbol{A}_n^{(1)}$ với phần tử nằm ở hàng thứ i, cột thứ j là

$$a_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{w_j(z_i - z_n)}{(1-z_i w_j)(1-z_n w_j)} & \text{nếu } 1 \leq i \leq n-1 \text{ và } 1 \leq j \leq n \\ \frac{1}{1-z_n w_j} & \text{nếu } i = n \text{ và } 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Để ý rằng, hàng thứ $i \neq n$ có nhân tử chung là $z_i - z_n$, cột thứ j có nhân tử chung là $\frac{1}{1-z_n w_j}$. Đặt các nhân tử chung ra ngoài định thức, ta thu được

$$\det\left(\boldsymbol{A}_n^{(1)}\right) = \det\left(\boldsymbol{A}_n^{(2)}\right) \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{n} \frac{z_i - z_n}{1 - z_n w_j},$$

trong đó, ma trận $\boldsymbol{A}_n^{(2)}$ có phần tử nằm ở hàng thứ i, cột thứ j là

$$a_{ij}^{(2)} = \begin{cases} \frac{w_j}{1-z_i w_j} & \text{nếu } 1 \leq i \leq n-1 \text{ và } 1 \leq j \leq n \\ 1 & \text{nếu } i = n \text{ và } 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Tiếp theo, với chỉ số j lần lượt bằng $1, 2, \ldots, n-1$, trừ đi cột thứ n khỏi cột thứ j của ma trận $\boldsymbol{A}_n^{(2)}$, ta được ma trận mới $\boldsymbol{A}_n^{(3)}$ với phần tử nằm ở hàng thứ i, cột thứ j là

$$a_{ij}^{(3)} = \begin{cases} \frac{w_j - w_n}{(1-z_i w_j)(1-z_i w_n)} & \text{nếu } 1 \leq i \leq n-1 \text{ và } 1 \leq j \leq n-1 \\ 0 & \text{nếu } i = n \text{ và } 1 \leq j \leq n-1 \\ \frac{w_n}{1-z_i w_n} & \text{nếu } 1 \leq i \leq n-1 \text{ và } j = n \\ 1 & \text{nếu } i = n \text{ và } j = n. \end{cases}$$

Lại để ý rằng, hàng thứ $i \neq n$ có nhân tử chung là $\frac{1}{1-z_i w_n}$, cột thứ $j \neq n$ có nhân tử chung là $w_j - w_n$. Một lần nữa, đặt các nhân tử chung ra ngoài định thức, ta thu được

$$\det\left(\boldsymbol{A}_n^{(3)}\right) = \det\left(\boldsymbol{A}_n^{(4)}\right) \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{w_j - w_n}{1 - z_i w_n},$$

trong đó, ma trận $\boldsymbol{A}_n^{(4)}$ có phần tử nằm ở hàng thứ i, cột thứ j là

$$a_{ij}^{(4)} = \begin{cases} \frac{1}{1-z_i w_j} & \text{nếu } 1 \le i \le n-1 \text{ và } 1 \le j \le n-1 \\ 0 & \text{nếu } i = n \text{ và } 1 \le j \le n-1 \\ w_n & \text{nếu } 1 \le i \le n-1 \text{ và } j = n \\ 1 & \text{nếu } i = n \text{ và } j = n. \end{cases}$$

Sử dụng công thức khai triển Laplace theo hàng thứ n cho $\det\left(\boldsymbol{A}_n^{(4)}\right)$, định thức thu được chính là $\det(\boldsymbol{A}_{n-1})$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{A}_n) &= \det\left(\boldsymbol{A}_n^{(1)}\right) \\ &= \det\left(\boldsymbol{A}_n^{(2)}\right) \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{n} \frac{z_i - z_n}{1 - z_n w_j} \\ &= \det\left(\boldsymbol{A}_n^{(3)}\right) \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{n} \frac{z_i - z_n}{1 - z_n w_j} \\ &= \det\left(\boldsymbol{A}_n^{(4)}\right) \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{\ell=1}^{n-1} \frac{w_\ell - w_n}{1 - z_k w_n} \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{n} \frac{z_i - z_n}{1 - z_n w_j} \\ &= \det(\boldsymbol{A}_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(z_i - z_n)(w_i - w_n)}{(1 - z_i w_n)(1 - z_n w_i)}. \end{aligned}$$

Đây chính là công thức truy hồi cho $\det(\boldsymbol{A}_n)$ với giá trị đầu là $\det(\boldsymbol{A}_1) = \frac{1}{1-z_1 w_1}$. Như vậy

$$\det(\boldsymbol{A}_n) = \frac{1}{1 - z_1 w_1} \prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} \frac{(z_i - z_j)(w_i - w_j)}{(1 - z_i w_j)(1 - z_j w_i)} = \frac{\prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (z_i - z_j)(w_i - w_j)}{\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} (1 - z_i w_j)}.$$

Nhận xét 2.1. Ma trận trong bài toán trên có dạng tương tự như ***ma trận Cauchy***, là ma trận $\boldsymbol{C}$ với phần tử nằm ở hàng thứ i, cột thứ j xác định bởi

$$c_{ij} = \frac{1}{z_i - w_j}$$

trong đó $z_1, z_2, \ldots, z_n, w_1, w_2, \ldots, w_n$ là các số phức thỏa mãn $z_i - w_j \neq 0$ với mọi chỉ số $1 \le i \le n$ và $1 \le j \le n$. Bằng các phép biến đổi sơ cấp hoàn toàn tương tự, ta có thể tính được giá trị định thức của ma trận $\boldsymbol{C}$ là

$$\det(\boldsymbol{C}) = \frac{\prod_{i=2}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} (z_i - z_j)(w_j - w_i)}{\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} (z_i - w_j)}.$$

Bài toán 3. Cho số nguyên dương n và Γ là tập hợp gồm hữu hạn các ma trận phức kích thước $n \times n$. Giả sử rằng Γ cùng với phép toán nhân hai ma trận tạo thành một nhóm. Chứng minh rằng

$$\det\left(\sum_{\boldsymbol{A} \in \Gamma} \boldsymbol{A}\right)$$

là một số nguyên không âm.

Lời giải. Vì Γ cùng với phép nhân ma trận tạo thành một nhóm nên với mỗi $\boldsymbol{P} \in \Gamma$ cố định thì $\boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{PA}$ là song ánh từ Γ vào chính nó. Do đó

$$\sum_{\boldsymbol{A} \in \Gamma} \boldsymbol{A} = \sum_{\boldsymbol{A} \in \Gamma} \boldsymbol{PA},$$

vì đây bản chất chỉ là hoán đổi vị trí của các hạng tử trong tổng. Từ đó suy ra

$$\left(\sum_{\boldsymbol{A} \in \Gamma} \boldsymbol{A}\right)^2 = \sum_{\boldsymbol{P} \in \Gamma} \boldsymbol{P} \sum_{\boldsymbol{A} \in \Gamma} \boldsymbol{A} = \sum_{\boldsymbol{P} \in \Gamma} \sum_{\boldsymbol{A} \in \Gamma} \boldsymbol{PA} = \sum_{\boldsymbol{P} \in \Gamma} \sum_{\boldsymbol{A} \in \Gamma} \boldsymbol{A} = |\Gamma| \sum_{\boldsymbol{A} \in \Gamma} \boldsymbol{A}.$$

Lấy định thức hai vế, ta thu được

$$\det\left(\sum_{\boldsymbol{A} \in \Gamma} \boldsymbol{A}\right)^2 = |\Gamma|^n \det\left(\sum_{\boldsymbol{A} \in \Gamma} \boldsymbol{A}\right),$$

hay $\det\left(\sum_{\boldsymbol{A} \in \Gamma} \boldsymbol{A}\right) \in \left\{0, |\Gamma|^n\right\}$. Trong cả hai trường hợp thì định thức của $\sum_{\boldsymbol{A} \in \Gamma} \boldsymbol{A}$ đều là số nguyên không âm. Phép chứng minh hoàn tất.

Bài toán 4. Cho n và k là các số nguyên dương với k là số lẻ, $\boldsymbol{U}$ là ma trận thực kích thước $n \times k$ thỏa mãn $\boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{U}$ là ma trận đơn vị, $\boldsymbol{Q}$ là ma trận thực kích thước $n \times n$ trực giao. Chứng minh rằng mỗi số ± 1 là giá trị riêng của ít nhất một trong hai ma trận $\boldsymbol{Q}$ và $(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^\top)\boldsymbol{Q}$.

Lời giải. Trước hết, ta sẽ xem xét một số tính chất của ma trận $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^\top$. Dễ thấy $\boldsymbol{P}$ là ma trận đối xứng. Do $\boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{U}$ là ma trận đơn vị nên

$$\boldsymbol{P}^2 = (\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^\top)^2 = \boldsymbol{I} - 4\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^\top + 4\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^\top\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^\top = \boldsymbol{I} - 4\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^\top + 4\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^\top = \boldsymbol{I}.$$

Hơn nữa, sử dụng đẳng thức Sylvester[1], ta có

$$\det(\boldsymbol{P}) = \det(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^\top) = \det(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{U}^\top\boldsymbol{U}) = \det(-\boldsymbol{I}) = (-1)^k = -1.$$

[1]Đẳng thức Sylvester: Với mọi ma trận phức $\boldsymbol{A}$ kích thước $m \times n$ và ma trận phức $\boldsymbol{B}$ kích thước $n \times m$ thì $\det(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{BA})$, trong đó $\boldsymbol{I}$ là ma trận đơn vị với kích thước tương ứng.

Từ các tính chất trên, ta sẽ chỉ ra rằng các ma trận $(\boldsymbol{PQ}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{I})$ và $(\boldsymbol{PQ}-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{I})$ đều có định thức bằng 0, để từ đó suy ra ít nhất một trong hai đa thức đặc trưng của $\boldsymbol{Q}$ và $\boldsymbol{PQ}$ nhận mỗi giá trị 1 và -1 là nghiệm. Ta có các biến đổi sau,

$$\begin{aligned}
\det\left((\boldsymbol{PQ}\pm\boldsymbol{I})(\boldsymbol{Q}\pm\boldsymbol{I})\right) &= \det\left((\boldsymbol{PQ}\pm\boldsymbol{I})(\boldsymbol{Q}^\intercal\pm\boldsymbol{I})\right)\\
&= \det\left(\boldsymbol{PQQ}^\intercal\pm\boldsymbol{Q}^\intercal\pm\boldsymbol{PQ}+\boldsymbol{I}\right)\\
&= \det\left(\boldsymbol{P}\pm\boldsymbol{Q}^\intercal\pm\boldsymbol{PQ}+\boldsymbol{I}\right)\\
&= \det\left(\boldsymbol{P}\pm\boldsymbol{P}^2\boldsymbol{Q}^\intercal\pm\boldsymbol{PQ}+\boldsymbol{P}^2\right)\\
&= \det\left(\boldsymbol{P}\right)\det(\boldsymbol{I}\pm\boldsymbol{PQ}^\intercal\pm\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{P})\\
&= -\det\left(\boldsymbol{I}\pm\boldsymbol{PQ}^\intercal\pm\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{PQ}^\intercal\boldsymbol{Q}\right)\\
&= -\det\left((\boldsymbol{PQ}^\intercal\pm\boldsymbol{I})(\boldsymbol{Q}\pm\boldsymbol{I})\right)\\
&= -\det\left((\boldsymbol{QP}\pm\boldsymbol{I})(\boldsymbol{Q}\pm\boldsymbol{I})\right)\\
&= -\det\left((\boldsymbol{PQ}\pm\boldsymbol{I})(\boldsymbol{Q}\pm\boldsymbol{I})\right),
\end{aligned}$$

với chú ý rằng ta một lần nữa sử dụng đẳng thức Sylvester ở dấu bằng cuối cùng. Như vậy, định thức của $(\boldsymbol{PQ}\pm\boldsymbol{I})(\boldsymbol{Q}\pm\boldsymbol{I})$ luôn bằng 0, đây chính là điều phải chứng minh.

Nhận xét 4.1. Xét trường hợp đặc biệt là với $k=1$, lúc này $\boldsymbol{U}$ đóng vai trò như một véc-tơ đơn vị $\boldsymbol{u}$ trong không gian $\mathbb{R}^n$ với $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{uu}^\intercal$ là ***ma trận Householder*** tương ứng. Như đã chỉ ra ở phía trên, ta có định thức của $\boldsymbol{P}$ bằng -1 và $\boldsymbol{P}^2$ là ma trận đơn vị. Hơn nữa, ± 1 là các giá trị riêng của $\boldsymbol{P}$. Thật vậy, vì $\boldsymbol{u}$ là véc-tơ đơn vị nên ta có $\boldsymbol{Pu}=-\boldsymbol{u}$, kéo theo -1 là giá trị riêng tương ứng với $\boldsymbol{u}$ là véc-tơ riêng của $\boldsymbol{P}$. Hơn nữa, với $\boldsymbol{v}$ là véc-tơ trực giao với $\boldsymbol{u}$ thì $\boldsymbol{Pv}=\boldsymbol{v}$, kéo theo 1 là giá trị riêng tương ứng với $\boldsymbol{v}$ là véc-tơ riêng của $\boldsymbol{P}$.

Ma trận Householder được sử dụng rộng rãi trong lĩnh vực Đại số tuyến tính ứng dụng. Một ứng dụng làm nổi bật tầm quan trọng của các ma trận Householder là ***phân rã QR*** của ma trận: cho trước $\boldsymbol{A}$ là ma trận thực, vuông, ta cần biểu diễn $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QR}$, trong đó $\boldsymbol{Q}$ là ma trận vuông cùng cấp và trực giao, $\boldsymbol{R}$ là ma trận vuông cùng cấp và có dạng tam giác trên.

Bài toán 5. Cho n là số nguyên dương và $p(z)$ là đa thức với các hệ số phức và có bậc n. Giả sử rằng mọi không điểm của đa thức $p(z)$ có mô-đun không quá 1. Chứng minh rằng mọi không điểm của đa thức $np(z)+(1-z)p'(z)$ cũng có mô-đun không quá 1.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh mệnh đề bằng phản chứng. Giả sử trái lại, tồn tại $w\in\mathbb{C}$ thỏa mãn $|w|>1$ và $np(w)+(1-w)p'(w)=0$. Gọi $z_1,z_2,\ldots,z_n$ là các nghiệm (không nhất thiết phân biệt) của đa thức $p(z)$. Biểu diễn $p(z)=\prod_{i=1}^n(z-z_i)$, lưu ý rằng ta đang giả sử hệ số có bậc cao nhất trong đa thức $p(z)$ là 1 mà không làm giảm tính tổng quát. Viết lại giả thiết $np(w)+(1-w)p'(w)=0$ thành

$$n\prod_{i=1}^n(w-z_i)+(1-w)\sum_{i=1}^n\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n(w-z_j)=0.$$

Với mọi chỉ số i thỏa mãn $1\le i\le n$, do $|z_i|\le 1<|w|$ nên ta có $w\neq z_i$. Do đó ta có thể chia hai vế của đẳng thức trên cho $\prod_{i=1}^{n}(w-z_i)$ để thu được đẳng thức tương đương là

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{w-z_i}=\frac{1}{w-1}. \tag{1}$$

Xét phép biến hình $z\mapsto \frac{1}{w-z}$, biến hình tròn đơn vị đóng $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\le 1\}$ thành hình tròn $D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\ge |wz-1|\}$. Nhận thấy rằng điểm $\frac{1}{w-1}$ nằm trên biên của D và tất cả các số phức $\frac{1}{w-z_i}$ đều thuộc D. Tuy nhiên, theo đẳng thức (1), khi biểu diễn trên mặt phẳng phức thì điểm biểu diễn số phức $\frac{1}{w-1}$ phải nằm trong bao lồi của của các điểm biểu diễn số phức $\frac{1}{w-z_i}$. Điều này chỉ có thể xảy ra khi tất cả các điểm $\frac{1}{w-z_i}$ trùng với điểm $\frac{1}{w-1}$, hay $z_i=1$ (mâu thuẫn). Như vậy giả sử ban đầu sai, ta được điều phải chứng minh.

Bài toán 6. Cho V là không gian véc-tơ hữu hạn chiều và $f,g\colon V\to V$ là các ánh xạ tuyến tính. Giả sử rằng các không gian ảnh của V qua ánh xạ $f\circ g$ và $g\circ f$ có số chiều bằng nhau. Chứng minh rằng $f\circ g\circ g\circ f=f\circ g$ khi và chỉ khi $g\circ f\circ f\circ g=g\circ f$.

Lời giải. Do vai trò của f và g là như nhau nên ta chỉ cần chứng minh chiều thuận là đủ. Lưu ý rằng $f(V)\subseteq V$ và $g(V)\subseteq V$. Dựa vào giả thiết $f\circ g\circ g\circ f=f\circ g$, ta có

$$\operatorname{Im}(f\circ g)=\operatorname{Im}(f\circ g\circ g\circ f)\subseteq \operatorname{Im}(f\circ g\circ g)\subseteq \operatorname{Im}(f\circ g).$$

Để điều trên xảy ra thì bắt buộc phải có dấu đẳng thức giữa các không gian ảnh, ta thu được $\operatorname{Im}(f\circ g\circ g)=\operatorname{Im}(f\circ g)$. Từ đó suy ra $\dim\operatorname{Ker}(f\circ g\circ g)=\dim\operatorname{Ker}(f\circ g)$ theo Định lý hạng. Tuy nhiên, ta lại có $\operatorname{Ker}(f\circ g)\subseteq\operatorname{Ker}(f\circ g\circ g)$. Để điều này xảy ra thì ta phải có

$$\operatorname{Ker}(f\circ g)=\operatorname{Ker}(f\circ g\circ g). \tag{2}$$

Mặt khác, tiếp tục dựa vào giả thiết $f\circ g\circ g\circ f=f\circ g$, ta có

$$\operatorname{Ker}(f\circ g)=\operatorname{Ker}(f\circ g\circ g\circ f)\supseteq\operatorname{Ker}(g\circ f).$$

Tuy nhiên, từ giả thiết $\operatorname{Im}(f\circ g)=\operatorname{Im}(g\circ f)$, ta suy ra $\dim\operatorname{Ker}(f\circ g)=\dim\operatorname{Ker}(g\circ f)$ theo Định lý hạng. Để điều này xảy ra thì ta phải có

$$\operatorname{Ker}(f\circ g)=\operatorname{Ker}(g\circ f). \tag{3}$$

Từ (2) và (3), ta thu được

$$\operatorname{Ker}(f\circ g\circ g)=\operatorname{Ker}(g\circ f). \tag{4}$$

Hơn nữa, lại dựa vào giả thiết $f\circ g\circ g\circ f=f\circ g$, ta có $f\circ g\circ g\circ f\circ g=f\circ g\circ g$, hay nói cách khác, $f\circ g\circ g\circ(f\circ g-\mathrm{id}_V)=0$. Từ đó suy ra

$$\operatorname{Im}(f\circ g-\mathrm{id}_V)\subseteq\operatorname{Ker}(f\circ g\circ g) \tag{5}$$

Từ (4) và (5), ta được $\operatorname{Im}(f\circ g-\mathrm{id}_V)\subseteq\operatorname{Ker}(f\circ g)$. Như vậy, $g\circ f\circ(f\circ g-\mathrm{id}_V)=0$, hay nói cách khác, $g\circ f\circ f\circ g=g\circ f$. Phép chứng minh hoàn tất.

Bài toán 7. Cho n là số nguyên dương, $\boldsymbol{A}$ và $\boldsymbol{B}$ là các ma trận phức kích thước $n \times n$. Giả sử rằng tồn tại số nguyên $k \geq 2$ thỏa mãn $\boldsymbol{A}^k \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$. Chứng minh rằng $\boldsymbol{A}^{k-j} \boldsymbol{B} \boldsymbol{A}^j = \boldsymbol{A}$ với mọi số nguyên j thỏa mãn $1 \leq j \leq k-1$.

Lời giải. Giả sử $\lambda \neq 0$ là một giá trị riêng tương ứng với véc-tơ riêng $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ của $\boldsymbol{A}^\intercal$, nghĩa là $\boldsymbol{A}^\intercal \boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$. Khi đó $\lambda \boldsymbol{v}^\intercal = \boldsymbol{v}^\intercal \boldsymbol{A} = \boldsymbol{v}^\intercal \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{B} = \lambda^k \boldsymbol{v}^\intercal \boldsymbol{B}$, hay $\boldsymbol{B}^\intercal \boldsymbol{v} = \lambda^{1-k} \boldsymbol{v}$. Nói cách khác, nếu $(\lambda, \boldsymbol{v})$ là cặp giá trị riêng và véc-tơ riêng khác không của $\boldsymbol{A}^\intercal$ thì $(\lambda^{1-k}, \boldsymbol{v})$ là cặp giá trị riêng và véc-tơ riêng khác không của $\boldsymbol{B}^\intercal$. Đặt $r = \operatorname{rank}(A) \leq n$ và gọi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ là tất cả các giá trị riêng khác 0 (có thể lặp lại) của $\boldsymbol{A}^\intercal$. Khi đó tồn tại ma trận $\boldsymbol{P}$ kích thước $n \times n$ không suy biến thỏa mãn

$$\boldsymbol{A}^\intercal = \boldsymbol{P}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U} & \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N} \end{pmatrix} \boldsymbol{P}, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{B}^\intercal = \boldsymbol{P}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}' & \boldsymbol{V}' \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N}' \end{pmatrix} \boldsymbol{P}, \tag{7}$$

trong đó $\boldsymbol{U}$ là ma trận tam giác trên kích thước $r \times r$ với các phần tử trên đường chéo chính là $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$; $\boldsymbol{U}'$ là ma trận tam giác trên kích thước $r \times r$ với các phần tử trên đường chéo chính là $\lambda_1^{1-k}, \lambda_2^{1-k}, \ldots, \lambda_r^{1-k}$; $\boldsymbol{N}$ là ma trận kích thước $(n-r) \times (n-r)$ lũy linh (ta có thể xây dựng những ma trận trên dựa vào dạng chuẩn Jordan của $\boldsymbol{A}^\intercal$ và $\boldsymbol{B}^\intercal$). Từ giả thiết $\boldsymbol{A}^k \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$, viết lại thành $\boldsymbol{B}^\intercal (\boldsymbol{A}^\intercal)^k = \boldsymbol{A}^\intercal$ và để từ đó ta được

$$\boldsymbol{P}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}' & \boldsymbol{V}' \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U} & \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N} \end{pmatrix}^k \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U} & \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N} \end{pmatrix} \boldsymbol{P}. \tag{8}$$

Để ý rằng các ma trận $\boldsymbol{P}^{-1}$ và $\boldsymbol{P}$ ở hai vế có thể được triệt tiêu. Ngoài ra, không khó để chứng minh bằng quy nạp theo số nguyên dương k rằng lũy thừa mũ k của ma trận khối $\left(\begin{smallmatrix} \boldsymbol{U} & \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N} \end{smallmatrix}\right)$ có dạng $\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N}^k \end{smallmatrix}\right)$. Khai triển toàn bộ vế trái, ta được đẳng thức mới có dạng

$$\begin{pmatrix} * & * \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N}'\boldsymbol{N}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{U} & \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N} \end{pmatrix}.$$

Điều này kéo theo $\boldsymbol{N}'\boldsymbol{N}^k = \boldsymbol{N}$, nhưng vì $\boldsymbol{N}$ lũy linh nên ta phải có $\boldsymbol{N}$ là ma trận không. Thật vậy, giả sử trái lại. Gọi ℓ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $\boldsymbol{N}^\ell$ là ma trận không. Ta không thể có $\ell \leq k$, vì nếu vậy thì $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}'\boldsymbol{N}^k = \boldsymbol{N}'\boldsymbol{N}^{k-\ell}\boldsymbol{N}^\ell = \boldsymbol{0}$, mâu thuẫn với giả sử $\boldsymbol{N} \neq \boldsymbol{0}$. Nhưng nếu ta có $\ell > k$ thì $\boldsymbol{N}^{\ell-k+1} = \boldsymbol{N}'\boldsymbol{N}^k\boldsymbol{N}^{\ell-k} = \boldsymbol{N}'\boldsymbol{N}^\ell = \boldsymbol{0}$, điều này kéo theo $\ell - k + 1 \geq \ell$ nhờ tính nhỏ nhất của ℓ, hay $k \leq 1$, mâu thuẫn với giả thiết $k \geq 2$. Như vậy, giả sử $\boldsymbol{N} \neq \boldsymbol{0}$ là sai. Bây giờ, thay $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}$ vào (8) rồi rút gọn, ta được

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{U}'\boldsymbol{U}^k & \boldsymbol{U}'\boldsymbol{U}^{k-1}\boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{U} & \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}.$$

Điều này kéo theo $\boldsymbol{U}'\boldsymbol{U}^k = \boldsymbol{U}$. Tuy nhiên, ta có $\boldsymbol{U}$ khả nghịch vì là ma trận tam giác trên với các phần tử trên đường chéo chính khác 0, do đó $\boldsymbol{U}' = \boldsymbol{U}^{1-k}$. Cuối cùng, thay $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}$

vào (6), $\boldsymbol{U}' = \boldsymbol{U}^{1-k}$ vào (7) và áp dụng các biểu diễn này cho ma trận $(\boldsymbol{A}^{k-j}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{j})^\intercal$, với j là số nguyên bất kỳ thỏa mãn $1 \le j \le k-1$, ta được

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}^{k-j}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{j})^\intercal &= (\boldsymbol{A}^\intercal)^j \boldsymbol{B}^\intercal (\boldsymbol{A}^\intercal)^{k-j} \\
&= \boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{U} & \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}^{j} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}^{1-k} & \boldsymbol{V}' \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U} & \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}^{k-j} \boldsymbol{P} \\
&= \boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{U}^j & \boldsymbol{U}^{j-1}\boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}^{1-k} & \boldsymbol{V}' \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}^{k-j} & \boldsymbol{U}^{k-j-1}\boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \boldsymbol{P} \\
&= \boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{U} & \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \boldsymbol{P} \\
&= \boldsymbol{A}^\intercal,
\end{aligned}$$

hay nói cách khác, $\boldsymbol{A}^{k-j}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{j} = \boldsymbol{A}$.

Bài toán 8. Cho n là số nguyên dương và $\boldsymbol{A}$ là ma trận phức kích thước $n \times n$. Giả sử rằng mọi định thức con chính của $\boldsymbol{A}$ đều bằng 0. Chứng minh rằng $\boldsymbol{A}$ là ma trận lũy linh.

Lời giải. Với mỗi chỉ số $1 \le i \le n$ và $1 \le j \le n$, gọi a_{ij} là phần tử nằm ở hàng thứ i, cột thứ l của $\boldsymbol{A}$. Với mỗi phép hoán vị $\pi \in S_n$, định nghĩa ma trận hoán vị $\boldsymbol{\Pi}$ kích thước $n \times n$ với phần tử nằm ở hàng thứ i, cột thứ j xác định bởi

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \pi(i) = j, \\ 0 & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

Hiển nhiên rằng $\boldsymbol{\Pi}$ là ma trận khả nghịch với mọi $\pi \in S_n$. Xét ma trận $\boldsymbol{\Pi}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Pi}$ với phần tử nằm ở hàng thứ i, cột thứ j của ma trận này là $a_{\pi(i)\pi(j)}$. Do ma trận $\boldsymbol{\Pi}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Pi}$ bản chất chỉ là ma trận $\boldsymbol{A}$ nhưng được hoán đổi các hàng và các cột theo một cách nào đó, nên cũng giống như $\boldsymbol{A}$, mọi định thức con chính của $\boldsymbol{\Pi}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Pi}$ đều bằng 0. Chú ý rằng, đường chéo chính của $\boldsymbol{A}$ và cũng như của $\boldsymbol{\Pi}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Pi}$ gồm toàn số 0. Lại có $(\boldsymbol{\Pi}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Pi})^k = \boldsymbol{\Pi}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\Pi}$ với mọi số nguyên dương k, do đó $\boldsymbol{A}$ lũy linh khi và chỉ khi $\boldsymbol{\Pi}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Pi}$ cũng lũy linh.

Ta sẽ chứng minh tồn tại phép hoán vị $\pi \in S_n$ tương ứng với ma trận hoán vị $\boldsymbol{\Pi}$ sao cho $\boldsymbol{\Pi}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Pi}$ là ma trận tam giác trên, và từ đó phép chứng minh được hoàn tất. Thật vậy, xét đồ thị có hướng G với tập đỉnh $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, tập cạnh $E(G)$ gồm các cạnh nối từ đỉnh v_i tới đỉnh v_j mà $a_{ij} \ne 0$. Đồ thị G lúc này sẽ không chứa chu trình. Thật vậy, giả sử trái lại, gọi $\ell \ge 1$ là độ dài của chu trình ngắn nhất trong G, ta có thể giả sử thêm rằng chu trình này đi qua các đỉnh $v_{i_k} \in V(G)$ với các chỉ số $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell \le n$ mà không làm giảm tính tổng quát. Gọi $\hat{\pi} \in S_n$ là phép hoán vị thỏa mãn $a_{i_k i_{\hat{\pi}(k)}} \ne 0$ với mọi $k \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$. Khi đó

$$\forall \pi \in S_n \setminus \{\hat{\pi}\}, \exists k \in \{1, 2, \ldots, \ell\} \colon a_{i_k i_{\pi(k)}} = 0,$$

vì nếu trái lại, tức là

$$\exists \pi \in S_n \setminus \{\hat{\pi}\}, \forall k \in \{1, 2, \ldots, \ell\} \colon a_{i_k i_{\pi(k)}} \ne 0,$$

thì nghĩa là ta đã tìm được một chu trình mới cũng đi qua các đỉnh $v_{j_k} \in V$ nhưng có thứ tự đỉnh khác với chu trình ban đầu, đây là điều vô lý vì từ hai chu trình này ta sẽ tìm được một chu trình khác có độ dài nhỏ hơn ℓ, mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của ℓ. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
0 &= \det\left(a_{i_j i_k}\right)_{1\le j,k\le \ell} \\
&= \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{k=1}^{\ell} a_{i_k i_{\pi(k)}} \\
&= \operatorname{sgn}(\hat{\pi}) \prod_{k=1}^{\ell} a_{i_k i_{\hat{\pi}(k)}} + \sum_{\pi\in S_n\setminus\{\hat{\pi}\}} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{k=1}^{\ell} a_{i_k i_{\pi(k)}} \\
&= (\pm 1) \prod_{k=1}^{\ell} a_{i_k i_{\hat{\pi}(k)}} \neq 0,
\end{aligned}$$

và đây lại một lần nữa là điều vô lý. Như vậy giả sử ban đầu sai, đồ thị G không thể chứa chu trình. Từ đó ta có thể tìm ra một phép hoán vị $\pi \in S_n$ thỏa mãn nếu có cạnh nối từ đỉnh $v_{\pi(i)}$ tới đỉnh $v_{\pi(j)}$ thì $i < j$. Phép hoán vị này hiển nhiên sẽ tương ứng với ma trận hoán vị $\mathbf{\Pi}$ thỏa mãn $\mathbf{\Pi}^{-1} \boldsymbol{A} \mathbf{\Pi}$ là ma trận tam giác trên. Ta được điều phải chứng minh.

Bài toán 9. Cho R là vành giao hoán gồm hữu hạn phần tử. Giả sử rằng mọi phần tử thuộc R đều biểu diễn được bởi tích của hai phần tử (không nhất thiết phân biệt) cũng thuộc R. Chứng minh rằng R là vành giao hoán có đơn vị, nghĩa là, tồn tại $e \in R$ thỏa mãn $ex = xe = x$ với mọi $x \in R$.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh mệnh đề bằng quy nạp mạnh theo số phần tử của R. Với $|R| = 1$ thì hiển nhiên $R = \{0\}$, do đó 0 là phần tử đơn vị theo phép nhân của R. Giả sử mệnh đề đúng với $|R| \in \{1, 2, \dots, n\}$, ta sẽ chứng minh mệnh đề vẫn đúng với $|R| = n + 1$. Đặt $R = \{0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Trước hết, ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại $a \in R \setminus \{0\}$ thỏa mãn $a^k \neq 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Thật vậy, giả sử trái lại rằng với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tồn tại $k_i \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $x_i^{k_i} = 0$. Cố định $x_i \in R$. Với số nguyên dương m tùy ý, sau một số hữu hạn bước phân tích một phần tử thành tích của hai phần tử, ta sẽ phân tích được x_i thành

$$x_i = \prod_{j\in J} x_j^{m_j},$$

trong đó J là một tập con khác rỗng nào đó của $\{1, 2, \dots, n\}$ và $\{m_j\}_{j\in J}$ là tập hợp các số nguyên dương thỏa mãn $\max_{j\in J} m_j \ge m$. Chọn $m > \max_{1\le i\le n} k_i$, lúc này $m_j \ge m > k_j$ với mọi $j \in J$. Từ đó suy ra

$$x_i = \prod_{j\in J} x_j^{m_j} = \prod_{j\in J} x_j^{k_j} x_j^{m_j-k_j} = \prod_{j\in J} 0 x_j^{m_j-k_j} = 0,$$

mâu thuẫn. Do đó, sự tồn tại của $a \in R$ thỏa mãn $a^k \neq 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}$ được đảm bảo. Bây giờ, vì R là vành hữu hạn nên tồn tại các số nguyên dương k, ℓ với $k < \ell$ thỏa mãn $a^k = a^\ell$.

Đặt $t = \ell - k$, ta dễ dàng chỉ ra được bằng quy nạp rằng $a^k = a^{k+mt}$ với mọi $m \in \mathbb{N}$. Chọn m đủ lớn thỏa mãn $mt > k$, khi đó

$$\left(a^{mt}\right)^2 = a^{k+mt}a^{mt-k} = a^k a^{mt-k} = a^{mt},$$

hay nói cách khác, $e = a^{mt} \in R \setminus \{0\}$ là phần tử lũy đẳng của R. Xét các tập hợp

$$I = \{ex \mid x \in R\} \quad \text{và} \quad I' = \{x - ex \mid x \in R\}.$$

Không khó để chỉ ra rằng mỗi tập hợp I, I' đóng kín với phép cộng và phép nhân trong R, do đó chúng là các vành con của R. Hơn nữa, nhờ tính lũy đẳng của e mà ta thấy ngay e là phần tử đơn vị theo phép nhân của vành I. Ta sẽ chỉ ra rằng mọi phần tử của I' đều biểu diễn được thành tích của hai phần tử cũng thuộc I'. Thật vậy, theo giả thiết thì với mọi $x \in R$, tồn tại $y, z \in R$ thỏa mãn $x - ex = yz$. Khi đó

$$\begin{aligned}
x - ex - (y - ey)(z - ez) &= yz - (y - ey)(z - ez) \\
&= yz - (yz - eyz - eyz + e^2yz) \\
&= eyz + eyz - e^2yz \\
&= eyz + eyz - eyz \\
&= eyz \\
&= e(x - ex) \\
&= ex - e^2x \\
&= ex - ex \\
&= 0,
\end{aligned}$$

hay $x - ex = (y - ey)(z - ez)$, và chú ý thêm rằng $y - ey \in I'$ và $z - ez \in I'$. Áp dụng giả thiết quy nạp mạnh cho vành hữu hạn I' với $|I'| \leq n$, tồn tại $e' \in I'$ là phần tử đơn vị theo phép nhân của I', nghĩa là $e'(x - ex) = x - ex$, hay $(e + e' - ee')x = x$ với mọi $x \in R$. Như vậy, $e + e' - ee'$ là phần tử đơn vị theo phép nhân của R. Phép chứng minh hoàn tất.

Nhận xét 9.1. Dễ dàng chỉ ra được rằng I và I' là các i-đê-an[1] của R. Hơn nữa, ta còn có

$$R = I \oplus I',$$

hay nói cách khác, mọi $x \in R$ đều có biểu diễn duy nhất dưới dạng $x = y + y'$, trong đó $y \in I$ và $y' \in I'$. Thật vậy, hiển nhiên rằng $y = ex \in I$ và $y' = x - ex \in I'$ là một cách biểu diễn thỏa mãn. Để có được tính duy nhất, ta chỉ cần chứng minh $I \cap I' = \{0\}$ là đủ. Hiển nhiên rằng $0 \in I \cap I'$, hay $I \cap I' \supseteq \{0\}$. Bây giờ, giả sử rằng tồn tại $ex \neq 0$ là một phần tử thuộc $I \cap I'$. Khi đó, tồn tại $x' \in R$ thỏa mãn $ex = x' - ex'$, hay $e(x + x') = x'$. Nhân hai vế với e và sử dụng tính chất $e^2 = e$, ta được $e(x + x') = ex'$, hay $ex = 0$, mâu thuẫn. Do đó ta phải có $I \cap I' = \{0\}$.

[1] I được gọi là ***i-đê-an*** của vành giao hoán R nếu nó thỏa mãn hai tính chất sau: (1) $(I, +)$ là nhóm con của $(R, +)$; (2) Với mọi $x \in R$ và mọi $y \in I$ thì $xy \in I$.

Bài toán 10. Cho m và n là các số nguyên thỏa mãn $1 \leq m < n$. An và Bình cùng nhau chơi một trò chơi với luật chơi như sau: Xuất phát với bộ số nguyên $\sigma_1 = (1, 2, \ldots, n)$, An sẽ chơi trước; Với mỗi số nguyên dương k, ở lượt chơi thứ k, An sẽ đổi chỗ hai số nguyên trong bộ số σ_{2k-1} để thu được bộ số mới là σ_{2k} thỏa mãn $|\sigma_{2k}(i) - i| \leq m$ với mọi chỉ số $1 \leq i \leq n$, rồi chuyển lượt chơi cho Bình; Sau đó, Bình sẽ đổi chỗ hai số nguyên trong bộ số σ_{2k} để thu được bộ số mới là σ_{2k+1} thỏa mãn $|\sigma_{2k+1}(i) - i| \leq m$ với mọi chỉ số $1 \leq i \leq n$, rồi chuyển lại lượt chơi cho An; Hơn nữa, bộ số thu được trong mỗi lượt chơi không được trùng với các bộ số đã xuất hiện trong những lượt chơi trước đó của cả hai bạn; Người chơi nào không có nước đi hợp lệ sẽ là người thua cuộc. Giả sử rằng An và Bình đều chơi với chiến thuật tối ưu. Ai sẽ là người thắng cuộc trong trò chơi này (câu trả lời có thể phụ thuộc vào m và n)?

Trước đó, tác giả nghĩ rằng đã giải quyết được bài toán này, tuy nhiên lời giải đó không chính xác. Vậy nên bài toán này cho tới thời điểm hiện tại vẫn chưa có lời giải hoàn chỉnh. Tác giả sẽ bổ sung lời giải cho bài toán này trong tương lai. Kính mong bạn đọc thông cảm!

Lời giải.

2.2 Giải Tích

Bài toán 1. Một con châu chấu xuất phát tại điểm 0 trên trục số thực. Biết rằng khi nhảy từ điểm $x \in \mathbb{R}$ tới điểm $y \in \mathbb{R}$ thì con châu chấu phải bỏ ra $e^{-x}|x - y|$ đơn vị năng lượng. Xác định hằng số $C > 0$ lớn nhất thỏa mãn tính chất sau: Bất kể con châu chấu thực hiện các lượt nhảy để đi từ điểm 0 tới điểm 1 như thế nào, tổng đơn vị năng lượng mà nó phải bỏ ra trong tất cả các lượt nhảy là không nhỏ hơn C.

Lời giải. Ta gọi một bước nhảy từ điểm $x \in \mathbb{R}$ tới điểm $y \in \mathbb{R}$ là *tiến* nếu $x < y$, là *lùi* nếu $x > y$. Để tổng đơn vị năng lượng phải bỏ ra là nhỏ nhất có thể, con châu chấu sẽ không thực hiện bước nhảy lùi nào. Thật vậy, xét hai bước nhảy liên tiếp của con châu chấu mà bước nhảy trước là lùi từ x_1 về x_0, còn bước nhảy sau là tiến từ x_0 tới x_2, ở đây $x_0 < \min\{x_1, x_2\}$. Tổng đơn vị năng lượng mà con châu chấu bỏ ra trong hai lượt nhảy này là

$$E = e^{-x_1}|x_1 - x_0| + e^{-x_0}|x_0 - x_2|.$$

Tuy nhiên, con châu chấu có thể *gộp* hai bước nhảy trên bằng cách nhảy trực tiếp từ x_1 tới x_2, với tổng đơn vị năng lượng là

$$E' = e^{-x_1}|x_1 - x_2|.$$

Bước nhảy này thực sự tiết kiệm năng lượng hơn vì

$$E = e^{-x_1}|x_1 - x_0| + e^{-x_0}|x_0 - x_2| > e^{-x_1}|x_1 - x_0| + e^{-x_1}|x_0 - x_2| \geq e^{-x_1}|x_1 - x_2| = E'.$$

Như vậy, cho trước quá trình gồm các bước nhảy xuất phát tại điểm 0 và kết thúc tại điểm 1, ta có thể xây dựng một quá trình mới với tổng đơn vị năng lượng nhỏ hơn bằng cách gộp hai bước nhảy lùi–tiến liên tiếp cho tới khi không còn bước nhảy lùi nào.

Với số nguyên dương n tùy ý, xét quá trình gồm các bước nhảy tiến từ điểm x_i tới điểm x_{i+1} với $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ và $x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$. Tổng đơn vị năng lượng trong quá trình này là

$$E = \sum_{i=1}^{n} e^{-x_{i-1}}(x_i - x_{i-1}).$$

Vì $x \mapsto e^{-x}$ là hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $e^{-x} > e^{-x_{i-1}}$ với mọi $x \in (x_i, x_{i-1})$ với mọi $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Do đó,

$$E = \sum_{i=1}^{n} e^{-x_{i-1}}(x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{e}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng $C = 1 - \frac{1}{e}$ là hằng số lớn nhất cần tìm. Thật vậy, giả sử trái lại rằng tồn tại $\varepsilon > 0$ để $C' = 1 - \frac{1}{e} + \varepsilon$ là hằng số lớn nhất thỏa mãn. Chọn $x_i = \frac{i}{n}$ với mọi $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Lúc này tổng đơn vị năng lượng sẽ là

$$E = \sum_{i=1}^{n} e^{-\frac{i-1}{n}} \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{-\frac{i-1}{n}}.$$

Vì tổng $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{-\frac{i-1}{n}}$ tiến tới $\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{e}$ khi $n \to +\infty$ nên ta có thể chọn $n \in \mathbb{N}$ đủ lớn sao cho $E < 1 - \frac{1}{e} + \frac{\varepsilon}{2} < C'$. Lúc này hằng số C' không còn thỏa mãn.

Nhận xét 1.1. Bằng lập luận tương tự, ta cũng có thể chứng minh được một kết quả tổng quát hơn như sau: Cho trước $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và khả tích Riemann trên $[a, b]$. Khi đó, nếu số đơn vị năng lượng mà con châu chấu phải bỏ ra khi nhảy từ điểm $x \in \mathbb{R}$ tới điểm $y \in \mathbb{R}$ là $f(x)|x - y|$, thì bất kể con châu chấu thực hiện các lượt nhảy để đi từ điểm a tới điểm b như thế nào, tổng đơn vị năng lượng mà nó phải bỏ ra trong tất cả các lượt nhảy là không nhỏ hơn $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Bài toán 2. Cho $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy gồm tất cả các nghiệm thực không âm và được sắp xếp theo thứ tự tăng dần của phương trình $\tan x = x$. Tính giới hạn $\lim_{n\to+\infty}(x_{n+1} - x_n)$.

Lời giải. Hiển nhiên rằng $x_0 = 0$ vì đây là nghiệm không âm nhỏ nhất của phương trình $\tan x = x$. Ta sẽ chứng minh

$$\left|x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{1}{n\pi} \tag{9}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Thật vậy, để ý rằng với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ cố định thì hàm số $f(x) = \tan x - x$ xác định và đồng biến trên khoảng $(n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2})$. Hơn nữa, ta còn có $f(n\pi) = -n\pi < 0$ và $\lim_{x\to(n\pi+\frac{\pi}{2})^-} = +\infty$. Do đó, trong khoảng $(n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2})$ thì hàm số $f(x)$ tồn tại duy nhất nghiệm, và nghiệm này chính là x_n. Sử dụng bất đẳng thức $x < \tan x$ với mọi $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, ta được

$$0 < n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n < \tan\left(n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n\right) = \cot x_n = \frac{1}{x_n} < \frac{1}{n\pi},$$

đây chính là bất đẳng thức (9). Sử dụng kết quả vừa chứng minh cùng với bất đẳng thức tam giác, ta được

$$0 \le |x_{n+1} - x_n - \pi| \le \left|x_{n+1} - (n+1)\pi - \frac{\pi}{2}\right| + \left|x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{1}{(n+1)\pi} + \frac{1}{n\pi}.$$

Như vậy ta được $\lim_{n\to+\infty} |x_{n+1} - x_n - \pi| = 0$ theo nguyên lý giới hạn kẹp, và từ đó suy ra $\lim_{n\to+\infty}(x_{n+1} - x_n) = \pi$.

Bài toán 3. Cho số thực $\delta \in (0, \frac{1}{2})$. Xác định theo δ hằng số $C > 0$ lớn nhất thỏa mãn tính chất sau: với mọi hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục cấp một trên $(0,1)$ và thỏa mãn

$$\int_{\delta}^{1-\delta} f(x)\mathrm{d}x = 0$$

thì bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$\int_0^1 f'(x)^2 \mathrm{d}x \ge C \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \right)^2.$$

Lời giải. Xét hàm $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\varphi(x) = \begin{cases} -x & \text{nếu } x \in [0,\delta), \\ \frac{2\delta}{1-2\delta}x - \frac{\delta}{1-2\delta} & \text{nếu } x \in [\delta, 1-\delta), \\ 1-x & \text{nếu } x \in [1-\delta, 1]. \end{cases}$$

Dễ dàng tính được

$$\int_0^1 \varphi(x)^2 \mathrm{d}x = \frac{\delta^2}{3}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được

$$\begin{aligned} \int_0^1 f'(x)^2 \mathrm{d}x &= \frac{3}{\delta^2} \left(\int_0^1 \varphi(x)^2 \mathrm{d}x \right) \left(\int_0^1 f'(x)^2 \mathrm{d}x \right) \\ &\ge \frac{3}{\delta^2} \left(\int_0^1 \varphi(x) f'(x) \mathrm{d}x \right)^2 \\ &= \frac{3}{\delta^2} \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{1-2\delta} \int_{\delta}^{1-\delta} f(x)\mathrm{d}x \right)^2 \\ &= \frac{3}{\delta^2} \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \right)^2 \end{aligned}$$

Lưu ý rằng, dấu bằng thứ hai có được nhờ việc tách tích phân trên $[0,1]$ thành tổng của ba tích phân trên $[0,\delta)$, $[\delta, 1-\delta)$ và $[1-\delta, 1]$, sau đó sử dụng công thức tích phân từng phần. Dấu đẳng thức của đánh giá trên xảy ra khi $f'(x) = \alpha\varphi(x)$ với hằng số $\alpha \in \mathbb{R}$ tùy ý. Cùng với điều kiện $\int_{\delta}^{1-\delta} f(x)\mathrm{d}x = 0$, hàm f thỏa mãn dấu đẳng thức tương ứng với hằng số $C = \frac{3}{\delta^2}$ sẽ được xác định (hơn nữa, hàm này sẽ xác định duy nhất với mỗi hằng số α cố định). Ta kết luận $C = \frac{3}{\delta^2}$ là hằng số cần tìm.

Bài toán 4. Cho hàm $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ khả vi trên $(0, +\infty)$. Giả sử rằng tồn tại hằng số $\alpha > 0$ thỏa mãn $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} f(x) = +\infty$. Chứng minh rằng

$$\liminf_{x\to+\infty} \left| \frac{f'(x)}{f(x)^{1+\frac{1}{\alpha}}} \right| = 0.$$

Lời giải. Xét hàm số $g(x) = f(x)^{-\frac{1}{\alpha}}$. Hiển nhiên rằng $g(x) > 0$ với mọi $x > 0$. Sử dụng giả thiết $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} f(x) = +\infty$, ta thu được $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$. Từ đó suy ra

$$0 \le \frac{|g(2x) - g(x)|}{x} \le 2\frac{g(2x)}{2x} + \frac{g(x)}{x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0,$$

hay $\lim_{x\to+\infty} \frac{|g(2x)-g(x)|}{x} = 0$. Hơn nữa, theo Định lý giá trị trung bình, ta có

$$\frac{|g(2x) - g(x)|}{x} \ge \inf_{y\in(x,2x)} |g'(y)| \ge \inf_{y>x} |g'(y)|.$$

Từ đó suy ra $\lim_{x\to+\infty} \inf_{y>x} |g'(y)| = 0$. Lại có $g'(y) = -\frac{1}{\alpha} f(y)^{-1-\frac{1}{\alpha}} f'(y)$, do đó

$$\lim_{x\to+\infty} \inf_{y>x} \left| \frac{f'(y)}{f(y)^{1+\frac{1}{\alpha}}} \right| = 0.$$

Đây chính là điều phải chứng minh.

Bài toán 5. Cho $n \ge 2$ là số nguyên và hàm $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ khả vi cấp n trên $(0, +\infty)$. Giả sử rằng giới hạn $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ tồn tại hữu hạn và $\lim_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) = 0$. Chứng minh rằng $\lim_{x\to+\infty} f^{(k)}(x) = 0$ với mọi $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Lời giải. Với mọi $x > 0$ lớn tùy ý và mọi $\delta \in (0, 1]$, sử dụng khai triển Taylor, ta có

$$f(x+\delta) - f(x) - \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\delta^n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\delta^k$$

trong đó $c \in (x, x+\delta)$. Cố định $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý. Vì giới hạn $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ tồn tại hữu hạn nên tồn tại $M_1 > 0$ thỏa mãn $|f(x+\delta) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ với mọi $x > M_1$. Hơn nữa, vì

$\lim_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) = 0$ nên tồn tại $M_2 > 0$ thỏa mãn $|f^{(n)}(x)| < \frac{n!\varepsilon}{2}$ với mọi $x > M_2$. Khi đó, với mọi $x > M_3 = \max\{M_1, M_2\}$ và mọi $\delta \in (0, 1]$ thì

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\delta^k\right| \le |f(x+\delta) - f(x)| + \frac{|f^{(n)}(c)|}{n!}\delta^n < \frac{\varepsilon}{2}(1+\delta^n) \le \varepsilon.$$

Do đó,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{|f^{(k)}(x)|}{k!} \le C \max_{\delta\in(0,1]} \left|\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\delta^k\right| \le C\varepsilon$$

với mọi $x > M_3$, trong đó $C > 0$ là hằng số chỉ phụ thuộc vào n. Theo Định lý giới hạn kẹp, điều này kéo theo $\lim_{x\to+\infty} f^{(k)}(x) = 0$ với mọi $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Phép chứng minh hoàn tất.

Bài toán 6. Cho hàm $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ khả vi trên $(0, +\infty)$ và thỏa mãn

$$f'(x) = 1 - \frac{f(x)^2}{x^2} \cdot \frac{x^2+1}{f(x)^2+1}$$

với mọi $x \in (0, +\infty)$. Xác định hằng số $\alpha > 0$ sao cho giới hạn $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha}$ tồn tại và nhận giá trị dương hữu hạn, hoặc chỉ ra rằng hằng số này không tồn tại.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh $\alpha = \frac{1}{3}$ là hằng số cần tìm. Xét hàm $g(x) = \frac{1}{3}f(x)^3 + f(x)$ xác định trên $(0, +\infty)$. Khi đó

$$g'(x) = f'(x)\left(f(x)^2 + 1\right) = 1 - \frac{f(x)^2}{x^2} \le 1$$

với mọi $x > 0$. Cố định hằng số $M_1 > 0$ bất kỳ, ta có

$$g(x) = g(M_1) + \int_{M_1}^{x} g'(t)\mathrm{d}t \le g(M_1) + \int_{M_1}^{x} \mathrm{d}t = x + g(M_1) - M_1$$

với mọi $x > M_1$, hay nói cách khác, hàm $g(x) - x$ bị chặn trên khi $x \to +\infty$. Hơn nữa,

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(M_1) + \int_{M_1}^{x} f'(t)\mathrm{d}t \\
&= f(M_1) + \int_{M_1}^{x} \left(1 - \frac{t^2+1}{t^2} \cdot \frac{f(t)^2}{f(t)^2+1}\right)\mathrm{d}t \\
&\ge f(M_1) - \int_{M_1}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\
&= f(M_1) + \frac{1}{x} - \frac{1}{M_1} > f(M_1) - \frac{1}{M_1}
\end{aligned}$$

với mọi $x > M_1$, hay nói cách khác, hàm $f(x)$ bị chặn dưới khi $x \to +\infty$. Kết hợp lại hai điều trên và đặt $M_2 = \min\left\{0, g(M_1) - M_1 + \frac{1}{M_1}\right\}$, khi đó

$$\frac{1}{3}f(x)^3 - x = g(x) - x - f(x) < g(M_1) - M_1 + \frac{1}{M_1} < M_2$$

với mọi $x > M_1$. Từ đó suy ra $f(x) < (3(x + M_2))^{\frac{1}{3}} < (6x)^{\frac{1}{3}}$ với mọi $x > M_2$, kéo theo $\frac{f(x)}{x} \to 0$ khi $x \to +\infty$. Không những vậy, ta còn có $\limsup_{x \to +\infty} x^{-\frac{1}{3}} f(x) \leq 6^{\frac{1}{3}} < +\infty$, dựa vào đây mà ta có thể dự đoán rằng $\alpha = \frac{1}{3}$. Để kiểm chứng điều này, để ý rằng $\frac{f(x)}{x} \to 0$ dẫn tới $g'(x) \to 1$ và $g(x) \to +\infty$ khi $x \to +\infty$. Sử dụng công thức L'Hôpital cho dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$, ta thu được $\frac{g(x)}{x} \to 1$ khi $x \to +\infty$, hay

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} + \frac{f(x)^3}{3x} \right) = 1.$$

Tuy nhiên, như đã lập luận ở trên thì $\frac{f(x)}{x} \to 0$. Do đó $\frac{f(x)^3}{3x} \to 1$, hay $x^{-\frac{1}{3}} f(x) \to 3^{\frac{1}{3}}$ khi $x \to +\infty$.

Nhận xét 6.1. Việc tìm ra nghiệm giải tích cho hầu hết các phương trình vi phân trong thực tế là điều gần như không thể. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp thì ta vẫn có thể biết được dáng điệu của nghiệm $f(x)$ khi x đủ lớn. Vậy nên, thay vì cố gắng tìm ra nghiệm giải tích, ta thường quan tâm tới ***dáng điệu tiệm cận*** của hàm số cho bởi nghiệm của phương trình vi phân: với $f(x)$ là nghiệm của một phương trình vi phân cho trước, ta cần tìm một hàm $g(x)$ có cấu trúc đơn giản hơn mà $f(x) \sim g(x)$, nghĩa là

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Việc xác định dáng điệu tiệm cận đóng vai trò quan trọng khi xây dựng phương pháp giải xấp xỉ phương trình vi phân, cũng như đánh giá sự hội tụ và tính ổn định của phương pháp đó.

Trong bài toán trên, mặc dù ta không biết được biểu diễn tường minh của $f(x)$, nhưng ta vẫn biết được rằng $f(x) \sim (3x)^{\frac{1}{3}}$.

Bài toán 7. Cho hàm $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $w(0) = 0$ và w' là hàm tăng ngặt trên $\mathbb{R}$. Xác định theo w hàm $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[0, 1]$ sao cho biểu thức

$$\int_0^1 w(x) f(x) \mathrm{d}x - \int_0^1 x w\big(f(x)\big) \mathrm{d}x$$

đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải. Với mỗi $x \in (0, 1]$ cố định, xét hàm số $\phi_x(y) = y w(x) - x w(y)$. Hiển nhiên rằng ϕ_x khả vi liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\phi_x'(y) = w(x) - x w'(y)$. Theo Định lý giá trị trung bình, ta có

$$w(x) = w(x) - w(0) = x w'(c_x), \tag{10}$$

trong đó $c_x \in (0, x)$ là hằng số chỉ phụ thuộc vào x. Do đó $\phi'_x(y) = x\,(w'(c_x) - w'(y))$. Vì w' tăng ngặt trên $\mathbb{R}$ nên $\phi'_x(y) = 0$ khi và chỉ khi $y = c_x$, hơn nữa, $\phi'_x(y)$ nhận giá trị dương trên $(-\infty, c_x)$ và nhận giá trị âm trên $(c_x, +\infty)$. Từ đó suy ra $y = c_x$ là điểm cực đại của ϕ_x trên $\mathbb{R}$, hay nói cách khác, $\phi_x(y) \le \phi_x(c_x)$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Hơn nữa, nhờ vào (10) cùng với tính đơn điệu chặt của w', ta thu được

$$c_x = (w')^{-1}\left(\frac{w(x)}{x}\right).$$

Xét hàm $f_w\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f_w(x) = \begin{cases} (w')^{-1}\left(\frac{w(x)}{x}\right) & \text{nếu } x \in (0,1] \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Lưu ý rằng $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} c_x = 0$, do đó f liên tục tại 0. Như vậy, f_w liên tục trên $[0,1]$ và thỏa mãn

$$\phi_x\big(f(x)\big) = w(x)f(x) - xw\big(f(x)\big) \le \phi_x\big(f_w(x)\big)$$

với mọi $x \in [0,1]$. Ta kết luận f_w là hàm số cần tìm.

Nhận xét 7.1. Trong giả thiết của hàm w, ta không nhất thiết phải nêu rõ rằng w' liên tục trên $\mathbb{R}$. Thực chất, ta có thể chứng minh được rằng nếu hàm w khả vi trên $\mathbb{R}$ và có w' đơn điệu trên $\mathbb{R}$ thì w' liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài toán 8. Xác định tất cả các hàm $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, nếu $\sqrt{2} \le x - y \le \sqrt{3}$ thì $\sqrt{2} \le f(x) - f(y) \le \sqrt{3}$.

Lời giải. Ta sẽ chỉ ra rằng các hàm cần tìm phải có dạng $f(x) = x + c$, với $c \in \mathbb{R}$ là hằng số tùy ý. Trước hết, ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo cặp số nguyên không âm (m, n) rằng với mọi số nguyên không âm m và n thì mệnh đề sau luôn đúng

$$y + m\sqrt{2} - n\sqrt{3} \le x \le y + m\sqrt{3} - n\sqrt{2} \tag{11}$$
$$\to f(y) + m\sqrt{2} - n\sqrt{3} \le f(x) \le f(y) + m\sqrt{3} - n\sqrt{2}. \tag{12}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Hiển nhiên rằng trường hợp $(m, n) = \{(0,0), (1,0)\}$ được thỏa mãn. Viết lại mệnh đề (11) → (12) thành

$$x + n\sqrt{2} - m\sqrt{3} \le y \le x + n\sqrt{3} - m\sqrt{2}$$
$$\to f(x) + n\sqrt{2} - m\sqrt{3} \le f(y) \le f(x) + n\sqrt{3} - m\sqrt{2},$$

sau đó đổi chỗ x và y cho nhau, ta thấy ngay nếu mệnh đề ban đầu đúng với (m, n) thì cũng sẽ đúng với (n, m). Do đó với $(m, n) \in \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$ hay $m + n \in \{0, 1\}$ thì mệnh đề (11) → (12) đúng. Giả sử mệnh đề đúng với $m + n = N$, ta sẽ chứng minh mệnh đề vẫn đúng với $m + n = N + 1$. Theo giả thiết quy nạp, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ thì

$$y + \sqrt{2} + (m-1)\sqrt{2} - n\sqrt{3} \le x \le y + \sqrt{3} + (m-1)\sqrt{3} - n\sqrt{2} \tag{13}$$

$$\to f\left(y+\sqrt{2}\right)+(m-1)\sqrt{2}-n\sqrt{3} \le f(x) \le f\left(y+\sqrt{3}\right)+(m-1)\sqrt{3}-n\sqrt{2}. \quad (14)$$

Hơn nữa, từ mệnh đề (11) $\to$ (12) với trường hợp $(m,n)=(1,0)$ (đây cũng chính là giả thiết ban đầu của hàm f), lần lượt thay $x=y+\sqrt{2}$ và $x=y+\sqrt{3}$, ta thu được

$$f(y)+\sqrt{3} \ge f\left(y+\sqrt{3}\right), \quad (15)$$

$$f(y)+\sqrt{2} \le f\left(y+\sqrt{2}\right). \quad (16)$$

Kết hợp (14), (15) và (16), ta được

$$f(y)+m\sqrt{2}-n\sqrt{3} \le f(x) \le f(y)+m\sqrt{3}-n\sqrt{2},$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn (13). Như vậy mệnh đề (11) $\to$ (12) đúng với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ theo nguyên lý quy nạp. Bây giờ, cố định các số thực x, y thỏa mãn $x < x+\sqrt{2} \le y$. Dựa vào tính trù mật trong $\mathbb{R}$ của tập hợp gồm các số thực có dạng $m\sqrt{3}-n\sqrt{2}$ với $m,n \in \mathbb{N}$, với mọi $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý và mọi $N > 0$ lớn tùy ý, luôn tồn tại các số nguyên $m,n > N$ thỏa mãn

$$y-x \le m\sqrt{3}-n\sqrt{2} < y-x+\varepsilon. \quad (17)$$

Hơn nữa, với lưu ý rằng $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$, ta còn có

$$\begin{aligned} m\sqrt{2}-n\sqrt{3} &= \frac{\sqrt{6}}{3}\left(m\sqrt{3}-n\sqrt{2}\right)+\frac{1}{3}\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)n \\ &< \frac{\sqrt{6}}{3}(y-x+\varepsilon)-\frac{1}{3}\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)N. \end{aligned}$$

Tới đây, ta có thể chọn N đủ lớn để các số nguyên $m,n > N$ như trên thỏa mãn thêm rằng $m\sqrt{2}-n\sqrt{3} \le y-x$. Như vậy, ta đã tìm được các số nguyên dương m,n thỏa mãn

$$m\sqrt{2}-n\sqrt{3} \le y-x \le m\sqrt{3}-n\sqrt{2} < y-x+\varepsilon,$$

hay

$$x+m\sqrt{2}-n\sqrt{3} \le y \le x+m\sqrt{3}-n\sqrt{2} < y+\varepsilon.$$

Áp dụng mệnh đề (11) $\to$ (12), ta được

$$f(x)+m\sqrt{2}-n\sqrt{3} \le f(y) \le f(x)+m\sqrt{3}-n\sqrt{2} < f(x)+y-x+\varepsilon,$$

rút ra được $f(y) < f(x)+y-x+\varepsilon$. Vì ε được chọn tùy ý nên ta có thể cho $\varepsilon \to 0^+$ để thu được $f(y) \le f(x)+y-x$, hay

$$f(y)-y \le f(x)-x. \quad (18)$$

Mặt khác, bằng lập luận tương tự nhưng thay vì sử dụng bất đẳng thức (17), ta sử dụng

$$x-y \le n\sqrt{3}-m\sqrt{2} < x-y+\varepsilon,$$

thu được

$$f(x)-x \le f(y)-y. \quad (19)$$

Kết hợp (18) và (19), ta được $f(x)-x = f(y)-y$ với mọi $x < y$, hay nói cách khác, $g(x)=f(x)-x$ là hàm hằng trên $\mathbb{R}$.

Bài toán 9. Cho $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy số thực thỏa mãn tính chất sau: với mọi số thực $\alpha > 1$ thì dãy con $(x_{\lfloor \alpha^n \rfloor})_{n\in\mathbb{N}}$ luôn tồn tại giới hạn hữu hạn và bằng 0. Có thể kết luận rằng dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cũng tồn tại giới hạn hữu hạn và bằng 0 hay không?

Lời giải. Câu trả lời là có. Để chỉ ra điều này, ta sẽ cần tới các kết quả phụ sau đây:

Bổ đề 9.1. Với α và β là các số thực tùy ý thỏa mãn $1 < \alpha < \beta$, tồn tại số thực $M > 1$ sao cho

$$(M, +\infty) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\alpha^n, \beta^n - 1].$$

Chứng minh Bổ đề 9.1. Theo giả thiết, ta có $1 < \alpha < \beta$ nên $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \to 0$ khi $n \to +\infty$. Khi đó, tồn tại $N > 0$ đủ lớn thỏa mãn với mọi $n > N$ thì $\alpha^{n+1} < \beta^n - 1$. Chọn $M = \alpha^N$, ta được điều phải chứng minh. □

Bổ đề 9.2. Với $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ là dãy tăng thực sự gồm các số nguyên dương tùy ý, tồn tại số thực $\alpha > 1$ thỏa mãn hai dãy $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ và $(\lfloor \alpha^k \rfloor)_{k\in\mathbb{N}}$ có vô hạn phần tử chung.

Chứng minh Bổ đề 9.2. Chọn các số thực α_0 và β_0 tùy ý thỏa mãn $1 < \alpha_0 < \beta_0$. Theo Bổ đề 9.1, tồn tại $\ell_0 \in \mathbb{N}$ thỏa mãn đoạn $[\alpha_0^{\ell_0}, \beta_0^{\ell_0} - 1]$ chứa một số phần tử của dãy $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Gọi k_0 là một trong các phần tử như vậy, khi đó với mọi $x \in [\alpha_0, \beta_0]$ thì $\lfloor x^{\ell_0} \rfloor = k_0$. Bây giờ, lần lượt với mỗi $i = 1, 2, \ldots,$ đặt

$$\alpha_i = k_{i-1}^{\frac{1}{\ell_{i-1}}} \quad \text{và} \quad \beta_i = \left(k_{i-1} + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\ell_{i-1}}}.$$

Theo Bổ đề 9.1, tồn tại $m_i \in \mathbb{N}$ thỏa mãn đoạn $[\alpha_i^{\ell_i}, \beta_i^{\ell_i} - 1]$ chứa một số phần tử của dãy $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Gọi k_i là một trong các phần tử như vậy, khi đó với mọi $x \in [\alpha_i, \beta_i]$ thì $\lfloor x^{\ell_i} \rfloor = k_i$. Để ý rằng trong quá trình trên, ta có $\alpha_i < \alpha_{i+1} < \beta_{i+1} < \beta_i$ với mọi $i \in \mathbb{N}$, hay nói cách khác, $[\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}] \subseteq [\alpha_i, \beta_i]$ với mọi $i \in \mathbb{N}$. Do đó, theo Định lý Cantor về các tập đóng lồng nhau và thắt dần,

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} [\alpha_i, \beta_i] \neq \varnothing.$$

Chọn $\alpha \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} [\alpha_i, \beta_i]$, khi đó $\lfloor \alpha^{\ell_i} \rfloor = k_i$ với mọi $i \in \mathbb{N}$. Phép chứng minh hoàn tất. □

Trở lại bài toán. Giả sử trái lại, dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không có giới hạn bằng 0 (có thể không tồn tại giới hạn). Khi đó ta có thể chọn ra một dãy con $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mà có giới hạn (hữu hạn hoặc vô hạn) khác 0. Tuy nhiên, theo Bổ đề 9.2 thì tồn tại một dãy con của $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ có vô hạn phần tử chung với dãy $(x_{\lfloor \alpha^k \rfloor})_{k\in\mathbb{N}}$ mà có giới hạn bằng 0, với số thực $\alpha > 1$ nào đó. Điều này dẫn tới $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ có giới hạn bằng 0 (mâu thuẫn). Như vậy, giả sử ban đầu sai, ta kết luận dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ phải có giới hạn bằng 0.

Bài toán 10. Cho hàm $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ thỏa mãn giới hạn bên trái $f(x^-) = \lim_{y \to x^-} f(y)$ và giới hạn bên phải $f(x^+) = \lim_{y \to x^+} f(y)$ luôn tồn tại hữu hạn với mọi $x \in (0,1)$. An và Bình cùng nhau chơi một trò chơi với luật chơi như sau: Xuất phát với $a_0 = 0$ và $b_0 = 1$, An sẽ chơi trước; Với mỗi số nguyên dương n, ở lượt chơi thứ n, An sẽ chọn một số thực a_n bất kỳ thuộc khoảng (a_{n-1}, b_{n-1}), rồi chuyển lượt chơi cho Bình; Sau đó, Bình sẽ chọn một số thực b_n bất kỳ thuộc khoảng (a_n, b_{n-1}), rồi chuyển lại lượt chơi cho An. Trò chơi sẽ diễn ra với vô hạn đếm được các lượt chơi để xây dựng được dãy số thực $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ xác định bởi $x_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Gọi $\ell \in (0,1)$ là giới hạn của dãy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ta thừa nhận rằng giới hạn này tồn tại). An sẽ là người chiến thắng nếu f không liên tục tại ℓ, ngược lại, Bình sẽ là người chiến thắng nếu f liên tục tại ℓ. Giả sử rằng An và Bình đều chơi với chiến thuật tối ưu. Ai sẽ là người thắng cuộc trong trò chơi này?

Lời giải. Trước hết, ta xét trò chơi tổng quát với $A \subseteq (0,1)$ là tập hợp gồm tất cả các giá trị chiến thắng của An, nghĩa là, An sẽ là người chiến thắng nếu $\ell \in A$, ngược lại, Bình sẽ là người chiến thắng nếu $\ell \in B = (0,1) \setminus A$. Lưu ý rằng giới hạn ℓ luôn tồn tại và thuộc khoảng $(0,1)$ theo Định lý hội tụ đơn điệu. Hơn nữa, vì tính chất thắt dần của các khoảng (a_n, b_n), nghĩa là,

$$(0,1) \supsetneq (a_1, b_1) \supsetneq (a_2, b_2) \supsetneq \ldots,$$

ta có $\ell \in (a_n, b_n)$ với mọi số nguyên dương n. Trong trò chơi tổng quát này, nếu A có lực lượng không quá đếm được thì chiến thắng sẽ chắc chắn thuộc về Bình, bất kể An chọn số như thế nào. Thật vậy, ta đánh số thứ tự cho các phần tử của A bởi $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Chiến thuật giành lấy chiến thắng của Bình là tại mỗi lượt sẽ chọn ra một số thực để đảm bảo được một phần tử của A không thể là giới hạn của dãy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, và khi quá trình này diễn ra sau vô hạn đếm được nước đi thì Bình đã loại được mọi phần tử của A ra khỏi khả năng chiến thắng của An. Cụ thể hơn, ở lượt chơi thứ $n \geq 1$, sau khi An chọn ra số thực a_n:

(1) Nếu $a_n \geq \alpha_n$ thì Bình chọn $b_n \in (a_n, b_{n-1})$ tùy ý.

(2) Nếu $a_n < \alpha_n$ thì Bình chọn $b_n \in (a_n, \alpha_n) \subsetneq (a_n, b_{n-1})$.

Trong cả hai trường hợp, Bình đều chọn ra số thực b_n thỏa mãn $\alpha_n \notin (a_n, b_n)$. Nhưng vì $\ell \in (a_n, b_n)$ nên $\ell \neq \alpha_n$. Với chiến thuật này thì sau vô hạn đếm được nước đi, ta có $\ell \neq \alpha_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, hay nói cách khác, $\ell \notin A$ và Bình sẽ giành chiến thắng. Với chiến thuật hoàn toàn tương tự, nếu B có lực lượng không quá đếm được thì chiến thắng sẽ chắc chắn thuộc về An.

Trở lại trò chơi ban đầu với hàm f. Gọi D là tập hợp gồm tất cả các điểm không liên tục của hàm f trong khoảng $(0,1)$, cũng chính là tập hợp gồm tất cả các giá trị chiến thắng của An. Với mỗi $x \in D$ thì $f(x^-) \neq f(x^+)$ hoặc $f(x^-) = f(x^+) \neq f(x)$. Đặt

$$N = \{x \in (0,1) \mid f(x) \neq f(x^-)\},$$
$$P = \left\{x \in (0,1) \mid f(x) \neq f(x^+)\right\}.$$

Khi đó $D = N \cup P$. Ta sẽ chứng minh N và P cùng có lực lượng không quá đếm được, dẫn tới D cũng có lực lượng không quá đếm được, và từ đó suy ra chiến thắng chắc chắn sẽ thuộc về Bình. Vì lập luận cho tập hợp P với hàm số $f(x)$ là hoàn toàn tương tự như tập hợp N với hàm số $f(1-x)$, do đó ta chỉ cần xét với tập hợp P là đủ. Với mỗi $k \in \mathbb{N}$, định nghĩa

$$P_k = \left\{ x \in P \,\middle|\, |f(x^+) - f(x)| \geq \frac{1}{2^k} \right\}.$$

Ta thấy rằng $P = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k$. Cố định $k \in \mathbb{N}$. Với mỗi $x \in P_k$, vì $f(x^+) = \lim_{y \to x^+} f(x)$ nên tồn tại $\varepsilon_x > 0$ đủ nhỏ sao cho với mọi $y \in (x, x + \varepsilon_x)$ thì $|f(y) - f(x^+)| < \frac{1}{2^{k+1}}$. Khi đó, với mọi $y, z \in (x, x + \varepsilon_x)$ thì

$$|f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f(x^+)| + |f(x^+) - f(z)| < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k}.$$

Vì z được chọn tùy ý nên ta có thể cho $z \to y^+$ để thu được $|f(y) - f(y^+)| < \frac{1}{2^k}$ với mọi $y \in (x, x + \varepsilon_x)$, hay nói cách khác, $P_k \cap (x, x + \varepsilon_x) = \varnothing$. Từ đây, ta có thể chỉ ra được rằng P_k có lực lượng không quá đếm được. Thật vậy, giả sử trái lại. Với mỗi $x \in P_k$, chọn bất kỳ một phần tử $q_x \in \mathbb{Q} \cap (x, x + \varepsilon_x)$ tương ứng. Vì các khoảng $(x, x + \varepsilon_x)$ với $x \in P_k$ là đôi một rời nhau nên các số hữu tỷ q_x với $x \in P_k$ là đôi một phân biệt. Hơn nữa, theo giả sử P_k có lực lượng vô hạn không đếm được thì $\{q_x\}_{x \in P_k}$ cũng có lực lượng vô hạn không đếm được. Rõ ràng đây là điều vô lý vì ta biết rằng $\mathbb{Q}$ là tập hợp có lực lượng vô hạn đếm được. Như vậy, P_k phải có lực lượng không quá đếm được. Từ đó suy ra $P = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k$ cũng có lực lượng không quá đếm được.

3 Lời kết

Qua 20 bài toán trên, hy vọng các bạn sinh viên đã học hỏi được nhiều kinh nghiệm, nâng cao kỹ năng giải toán và rèn luyện tư duy để chuẩn bị cho kỳ thi **Olympic Toán học sinh viên toàn quốc 2025**. Mỗi bài toán không chỉ mang đến những thử thách thú vị, mà còn giúp các bạn học được thêm nhiều phương pháp và hướng tiếp cận mới để giải quyết vấn đề dưới một góc nhìn thật sáng tạo.

Toán học không chỉ là những con số hay công thức khô khan, mà còn là một hành trình khám phá đầy cảm hứng. Tác giả mong rằng tài liệu này sẽ trở thành một người bạn đồng hành hữu ích, giúp các bạn tự tin hơn trên con đường chinh phục đỉnh cao tri thức.

Chúc các bạn sinh viên học tập hiệu quả và đạt được những mục tiêu của bản thân trong kỳ thi **Olympic Toán học sinh viên toàn quốc 2025**, cũng như trong sự nghiệp học tập và nghiên cứu sau này. Hẹn gặp lại các bạn trong "*Ôn tập trước kỳ thi Olympic Toán học sinh viên toàn quốc 2026*"!

Hà Nội, ngày 16 tháng 2 năm 2025

Lê Nguyên Bách