TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI OLYMPIC NĂM 2013
MÔN THI: ĐẠI SỐ
Thời gian: 180 phút

Câu 1. Cho $a_0, d \in R$ và $a_i = a_0 + id, (i = \overline{1, n})$. Hãy tính định thức sau

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \end{vmatrix}.$$

Câu 2. Cho A, B là các ma trận vuông cấp n ($n \ge 2$), I là ma trận đơn vị cấp n. Giả sử $AB + 2012A + 2013B = I$. Chứng minh rằng $AB = BA$.

Câu 3. Cho X là ma trận vuông cấp n không suy biến và có các cột là $X_1, X_2, ..., X_n$ $(n \ge 2)$. Cho Y là ma trận có các cột là $X_2, X_3, ..., X_n, 0$.

a) Tìm ma trận J thỏa mãn $Y = X.J$.

b) Chứng minh rằng các ma trận $A = Y.X^{-1}; B = X^{-1}.Y$ chỉ có giá trị riêng là 0 và đều có hạng bằng $n - 1$.

Câu 4. Cho ma trận A vuông cấp n có tất cả các phần tử bằng 1 hoặc -1. Chứng minh rằng với $n \ge 3$ thì $|\det(A)| \le (n-1)(n-1)!$.

Câu 5. Tìm điều kiện của n nguyên dương để đa thức $P(x) = x^n + 4$ phân tích được thành tích của 2 đa thức hệ số nguyên có bậc nhỏ hơn n.

Câu 6. Tìm tất cả các đa thức P(x) hệ số thực thỏa mãn

$$P(x^2) - P^2(x) = 2x[x - P(x)].$$

Chú ý: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.