MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TẾ CỦA ĐSTT.

Bài toán 1.

Ba giàn khoan G_1, G_2, G_3 cần khai thác ba loại dầu khác nhau: dầu nhẹ, dầu trung bình và dầu nặng. Khối lượng dầu cần khai thác ở mỗi giàn là khác nhau và mỗi loại dầu được khai thác từ hai mỏ dầu M_1, M_2 với chi phí khai thác khác nhau tại mỗi mỏ. Mục tiêu là xác định mỏ nào nên lựa chọn để tối ưu hóa chi phí khai thác cho từng giàn khoan.

Dữ liệu:

Khối lượng dầu cần khai thác (đơn vị: tấn):

Loại dầu	Giàn khoan G_1	Giàn khoan G_2	Giàn khoan G_3
Dầu nhẹ	10	8	12
Dầu trung bình	15	20	18
Dầu nặng	5	6	7

Chi phí khai thác tại mỗi mỏ (đơn vị: triệu VNĐ/tấn):

Loại dầu	Mỏ M_1	Mỏ M_2
Dầu nhẹ	1.2	1.0
Dầu trung bình	1.5	1.8
Dầu nặng	2.0	1.7

Nghĩ:

Lnh: Tạo 2 ma trận

+) Nhu cầu khai thác P

+) Chi phí khai thác Q

$\Rightarrow$ Tổng chi phí: $R = P \times Q$

Giải

Gọi P là ma trận nhu cầu khai thác

$$P = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 5 \\ 8 & 20 & 6 \\ 12 & 18 & 7 \end{bmatrix}$$

Gọi Q là ma trận chi phí khai thác

$$Q = \begin{bmatrix} 1{,}2 & 1{,}0 \\ 1{,}5 & 1{,}8 \\ 2{,}0 & 1{,}7 \end{bmatrix}$$

Ma trận tổng chi phí $R = P \times Q$.

(trong đó R_{ij} là chi phí để giàn khoan G_i khai thác tại mỏ M_j)

R_{11}

$$\text{Tính } R = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 5 \\ 8 & 20 & 6 \\ 12 & 18 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1{,}2 & 1{,}0 \\ 1{,}5 & 1{,}8 \\ 2{,}0 & 1{,}7 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \\ \left[\begin{array}{c} 44{,}5 \\ 51{,}6 \\ 55{,}4 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} 45{,}5 \\ 54{,}2 \\ 56{,}3 \end{array}\right] \end{array}$$

44,5: là chi phí để giàn khoan G_1 khai thác tại mỏ M_1

Do chi phí khai thác tại M_1 nhỏ hơn nên ...... M_1

Bài toán 2.

Một công ty muốn dự đoán doanh thu từ quảng cáo trên ba nền tảng: truyền hình, radio và mạng xã hội. Dữ liệu về chi phí quảng cáo và doanh thu được thu thập như sau

Chi phí TV	Chi phí Radio	Chi phí Mạng xã hội	Doanh thu
230	37	69	22
44	12	9	10
17	3	5	5
151	41	45	18
180	15	67	20

Sử dụng đại số tuyến tính và giải tích, hãy tìm một mô hình tuyến tính dạng:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{w}$$

Với $\mathbf{X}$ là ma trận chi phí, $\mathbf{y}$ là vector doanh thu, và $\mathbf{w}$ là vector trọng số cần tìm.

Nghĩ

$y = X w \rightarrow$ cần tìm?

X = ma trận chi phí   doanh thu

$$X = \begin{bmatrix} 230 & 37 & 69 \\ 44 & 12 & 9 \\ 17 & 3 & 5 \\ 151 & 41 & 45 \\ 180 & 15 & 67 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 22 \\ 10 \\ 5 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Bài toán: $y = X \cdot w + \varepsilon$

? Vector trọng số w có dạng gì?

Tìm w sao cho: $S(w) = \|y - Xw\|^2$ nhỏ nhất.

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n) \mapsto \|\varepsilon\|^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2$$

Ta có: $S(w) = (y - Xw)^T \cdot (y - Xw)$

$= (y^T - w^T X^T) \cdot (y - Xw)$

$= y^T y - \underbrace{y^T X w - w^T X^T y}_{} + w^T X^T X w$

$= y^T y \underbrace{- 2 y^T X w}_{b^T w} + \underbrace{w^T X^T X w}_{w^T A w}$

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$(A.B)^T = B^T . A^T$

$(A^T)^T = A$

$$\|w\|^2 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2$$

$$w^T . w = (w_1 \ \ w_2 \ \ w_3) \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2$$

$(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd$

Không đổi thứ tự

Muốn $S(w)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Tìm w.

* là 1 số, lấy ch' vị:

$(w^T . X^T . y)^T = y^T . X . w$

$\Rightarrow w^T X^T y = y^T X w$

Đạo hàm của $S(w)$ theo w:

$$\frac{\partial S(w)}{\partial w} = -2 X^T y + 2 X^T X w$$

Cho đạo hàm = 0 để tìm nghiệm tối ưu:

$$-2 X^T y + 2 X^T X w = 0.$$

$$\underbrace{X^T y}_{B} = \underbrace{X^T X}_{A} w.$$

$A . X = B \Rightarrow X = A^{-1} B$

$C . X . D = A \Rightarrow X = C^{-1} . A . D^{-1}$

? Tìm w từ pt này $\boxed{w = (x^T.x)^{-1}.\ x^T y}$ $(x^T x) = \begin{bmatrix} 110326 & 17980 & 35206 \\ 17980 & 3428 & 5526 \\ 35206 & 5526 & 11381 \end{bmatrix}$

$\hookrightarrow \underbrace{(x^T x)^{-1} = ?\ ;\ x^T y = ?}$

Tìm w:

$$X = \begin{bmatrix} 230 & 37 & 69 \\ 44 & 12 & 9 \\ 17 & 3 & 5 \\ 151 & 41 & 45 \\ 180 & 15 & 67 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 22 \\ 10 \\ 5 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow w = \begin{bmatrix} 0,060324 \\ 0,129551 \\ 0,08178 \end{bmatrix}$$

Chứng minh ct đạo hàm của ma trận Lê Minh Khoa K68

① Đạo hàm của: $w^T A w = f(w)$ (A là mtrận đối xứng : $A^T = A$)

$$\frac{\partial (w^T A w)}{\partial w} = 2Aw$$

② Đạo hàm của: $b^T w$.

$$\frac{\partial (b^T w)}{\partial w} = b$$

cm①: G/s: $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \Rightarrow w^T = [w_1 \quad w_2]$; $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Ta có: $f(w) = [w_1 \quad w_2] . \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$

$$= [w_1 a_{11} + w_2 a_{21} \ ;\ w_1 a_{12} + w_2 a_{22}] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$= (w_1 a_{11} + w_2 a_{21}).w_1 + (w_1 a_{12} + w_2 a_{22}).w_2$$

$$= w_1^2 a_{11} + w_1 w_2 a_{21} + w_1 w_2 a_{12} + w_2^2 a_{22}$$

$$= w_1^2 a_{11} + 2 w_1 w_2 a_{12} + w_2^2 a_{22}$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial w_1} \\ \frac{\partial f}{\partial w_2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial w} = \begin{bmatrix} 2w_1 a_{11} + 2w_2 a_{12} \\ 2w_1 a_{12} + 2w_2 a_{22} \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

có bằng

Vậy $\boxed{\frac{\partial f}{\partial w} = 2Aw}$

② $\frac{\partial (b^T w)}{\partial w} = b$? $\quad b^T = (b_1 \quad b_2)$; $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

$b^T W$ ②

$W^T A W$ ①

Tcó: $b^T w = b_1 w_1 + b_2 w_2$

$$\Rightarrow \frac{\partial (b^T w)}{\partial w} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b$$

Vậy $\boxed{\frac{\partial (b^T w)}{\partial w} = b}$

$$S(w) = y^T y - 2y^T X \cdot w + w^T \cdot X^T \cdot X \cdot w$$

$$\Rightarrow \frac{\partial S(w)}{\partial w} = 0 - 2(y^T X)^T + 2X^T X w$$

$$= \boxed{-2X^T y + 2X^T X w}$$

Bài toán 1: Mã hóa dòng chữ "HELP" thành một thông điệp bí mật bằng phương pháp ma trận.

Quy ước mã hóa ký tự:

- Gán mỗi chữ cái trong bảng chữ cái tiếng Anh một số thứ tự; $A = 1, B = 2, \ldots, Z = 26$.
- Khoảng trống hoặc ký tự đặc biệt có thể được gán là 0 (hoặc bỏ qua nếu không cần thiết).

Quy trình mã hóa:

- Biểu diễn dòng chữ dưới dạng vector số.
- Nhân vector này với một ma trận mã hóa **M** (là một ma trận vuông đã chọn trước, có định thức khác 0 để đảm bảo khả năng giải mã).

Giải mã:

Dùng ma trận nghịch đảo $\mathbf{M}^{-1}$ để giải mã thông điệp.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Bảng chữ cái TAnh

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...

Chuyển các kí tự thành số: $H = 8 \quad L = 12$

$E = 5 \quad P = 16$

Biểu diễn các số thành vector: $\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix} = v$

Vì ma trận mã hoá: $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow v$ chia thành $v_1; v_2$

$v_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \end{bmatrix}$

Mã hoá: Nhân từng vector với ma trận mã hoá:

$$v_1' = M.v_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$v_2' = M.v_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 \\ 76 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow v' = \begin{bmatrix} 31 \\ 28 \\ 72 \\ 76 \end{bmatrix}$ BT ngược: Giải mã. Biết v' ↳ Tìm v ↳ dòng chữ

$$\boxed{\begin{aligned} v_1 &= M^{-1}.v_1' \\ v_2 &= M^{-1}.v_2' \end{aligned}}$$

Vì $v_1' = M.v_1$
Nhân M^{-1} vào 2 vế <trước>

VN: $v' \Rightarrow v \Rightarrow$ dòng chữ.

Bài toán:

Một mạng xã hội đơn giản có 3 người dùng A, B và C. Mối quan hệ giữa họ được mô tả bởi ma trận liên kết sau:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{array}$$

↳ $P = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$

Trong đó:

Một phần tử $A_{ij} = 1$ nếu người dùng i theo dõi người dùng j, và $A_{ij} = 0$ nếu ngược lại.

Ví dụ: $A_{1,2} = 1$ nghĩa là A theo dõi B.

Hãy ước tính mức độ quan trọng (Pagerank) của mỗi người dùng.

Vector Pagerank $\mathbf{v} = [v_A, v_B, v_C]^T$ là vector ổn định thỏa mãn:

$$\mathbf{v} = \mathbf{P} \times \mathbf{v},$$

Trong đó $\mathbf{P}$ là ma trận chuyển đổi xác suất.

KHÔNG GIAN VECTOR ↳ gtri: r ↳ vtơ

(VN:)

Bài toán:

Trong một thị trấn, số lượng phụ nữ kết hôn và độc thân thay đổi theo các tỷ lệ sau:

- Mỗi năm, **30% số phụ nữ đã kết hôn** ly hôn và trở thành phụ nữ độc thân.
- Mỗi năm, **20% số phụ nữ độc thân** kết hôn và trở thành phụ nữ đã kết hôn.

Ban đầu, thị trấn có:

- $M_0 = 8000$ phụ nữ đã kết hôn.
- $S_0 = 2000$ phụ nữ độc thân.

Giả sử tổng số phụ nữ trong thị trấn không thay đổi theo thời gian, hãy xác định:

1. Số lượng phụ nữ đã kết hôn và độc thân sau **một năm**.
2. Số lượng phụ nữ đã kết hôn và độc thân sau **hai năm**.
3. Biểu thức tổng quát để xác định số lượng phụ nữ đã kết hôn và độc thân sau **n năm**.

Bước 1: Lập hệ phương trình truy hồi

Gọi:

- M_n là số phụ nữ đã kết hôn sau n năm.
- S_n là số phụ nữ độc thân sau n năm.

Ta có các mối quan hệ sau:

- Sau mỗi năm, 30% số phụ nữ đã kết hôn ly hôn: $0.3M_n$ người chuyển sang nhóm độc thân.
- Sau mỗi năm, 20% số phụ nữ độc thân kết hôn: $0.2S_n$ người chuyển sang nhóm đã kết hôn.

Do đó, hệ phương trình truy hồi là:

$$M_{n+1} = 0.7M_n + 0.2S_n$$
$$S_{n+1} = 0.3M_n + 0.8S_n$$

Với điều kiện ban đầu:

$$M_0 = 8000, \quad S_0 = 2000$$

Bước 2: Tính số phụ nữ kết hôn và độc thân sau 1 năm

Thay $n = 0$ vào hệ phương trình:

$$M_1 = 0.7(8000) + 0.2(2000) = 5600 + 400 = 6000$$
$$S_1 = 0.3(8000) + 0.8(2000) = 2400 + 1600 = 4000$$

Sau 1 năm, số phụ nữ:

- **Kết hôn:** 6000 người
- **Độc thân:** 4000 người

Bước 3: Tính số phụ nữ kết hôn và độc thân sau 2 năm

Tiếp tục với $n = 1$:

$$M_2 = 0.7(6000) + 0.2(4000) = 4200 + 800 = 5000$$
$$S_2 = 0.3(6000) + 0.8(4000) = 1800 + 3200 = 5000$$

Sau 2 năm, số phụ nữ:

- **Kết hôn:** 5000 người
- **Độc thân:** 5000 người

Bước 4: Tổng quát hóa công thức cho n năm

Hệ phương trình có thể được viết dưới dạng **ma trận**:

$$\begin{bmatrix} M_{n+1} \\ S_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_n \\ S_n \end{bmatrix}$$

Ta đặt:

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$V_n = \begin{bmatrix} M_n \\ S_n \end{bmatrix}$$

Khi đó, ta có công thức tổng quát:

$$V_n = A^n V_0$$

TQuat: Liên quan đến btoán tìm A^n?

với:

$$V_0 = \begin{bmatrix} 8000 \\ 2000 \end{bmatrix}$$

BTVN

Ta có thể tính A^n để tìm công thức cho M_n và S_n theo n, nhưng dự đoán rằng sau một số năm, hệ thống sẽ tiến đến trạng thái cân bằng, tức là:

$$M_n \to 5000, \quad S_n \to 5000 \quad \text{khi } n \to \infty$$

Tức là, về lâu dài, số lượng phụ nữ kết hôn và độc thân sẽ **ổn định ở mức 5000 người mỗi nhóm**.