

ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN 2024

Môn: Giải Tích

Thời gian 90 phút

Câu 1: Tính $I = \int_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx) dx$ với $n \in \mathbb{N}$.

Câu 2: Cho $f(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$. Tính $f^{(n)}(0)$.

Câu 3: Cho hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $|f(a) - f(b)| < |a - b|$ với mọi $a \neq b$.

Chứng minh rằng nếu $f(f(f(0))) = 0$ thì $f(0) = 0$. *Handwritten: $f(x) > \frac{x}{2}$*

Câu 4: Cho $f(x) = 2x^2 - 1$ và kí hiệu $f_2(x) = f(f(x))$, $f_3(x) = f(f_2(x))$, ...,

$$f_n(x) = f(f_{n-1}(x)).$$

$$x = \frac{1}{12} \sqrt[n-1]{a \sqrt[n-1]{a \sqrt[n-1]{a \dots \sqrt[n-1]{a}}}} \quad \alpha = \frac{\sqrt{2} + 1}{12}$$

n-1 dấu căn

Giải phương trình $f_n(x) = 0$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ cùng các đạo hàm $f'(x)$, $f''(x)$ liên tục trên đoạn $[0, 1]$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int_0^1 (f''(x))^2 dx$ với điều kiện $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) = 1$.

Câu 6: Giả sử x_1, x_2, \dots, x_n là n nghiệm của phương trình

$$x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1 = 0.$$

Tính $\sum_{k=1}^n \frac{1}{1-x_k}$.

Ngô Phạm Hồng Anh

-----Hết-----

- Sinh viên không được sử dụng tài liệu.
- Giám thị không giải thích gì thêm.