TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BỘ MÔN TOÁN

ĐÁP ÁN THI OLYMPIC NĂM 2013

MÔN THI: ĐẠI SỐ

Câu 1 (3 điểm). Cộng cột đầu vào cột cuối cùng ta có

$$\Delta=(a_0+a_n)\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & 1 \\ a_1 & a_0 & a_1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Lấy hàng n+1 trừ đi hàng n, hàng n trừ đi hàng n – 1, …, hàng 2 trừ hàng 1 rồi khai triển theo cột cuối ta có

$$\Delta=(-1)^n(a_0+a_n)\begin{vmatrix} d & -d & -d & \dots & -d \\ d & d & -d & \dots & -d \\ d & d & d & \dots & -d \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d & d & d & \dots & d \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n(a_0+a_n)\begin{vmatrix} 2d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2d & 2d & 0 & \dots & 0 \\ 2d & 2d & 2d & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d & d & d & \dots & d \end{vmatrix}=(-1)^n(a_0+a_n)2^{n-1}d^n.$$

Câu 2 (3 điểm). Bổ đề: Nếu AB = I thì AB = BA = I. (1 điểm)

Từ giả thiết: AB + 2012A + 2013B + 2012.2013.I = k.I (với k = 2012.2013 – 1)

Suy ra (A+2013I)(B + 2012I) = kI = (B+2012I)(A+2013I) .

Khai triển rút ra được AB = BA (đpcm). (2 điểm)

Câu 3 (4 điểm).

a) Xét ma trận $J=(a_{ij})_{n\times n}$ trong đó $\begin{cases} a_{ij}=1, & (i=j+1) \\ a_{ij}=0, & (i\neq j+1) \end{cases}$. Khi đó Y = X.J. (2 điểm)

b) Nhận xét: Nếu hai ma trận đồng dạng thì chúng có cùng hạng và cùng tập giá trị riêng.

Dễ có r(J) = n – 1 và J chỉ có giá trị riêng là 0. Mặt khác $A = XJX^{-1}$ đồng dạng với J còn

B = J nên ta có điều phải chứng minh. (2 điểm)

Câu 4 (4 điểm). Ta chứng minh bằng quy nạp.

Với n = 3: hoán vị dòng, cột; nhân các dòng với – 1 ta có thể biến đổi định thức (mà không làm thay đổi giá trị tuyệt đối) về dạng

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \text{ hoặc } \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \text{ (thỏa mãn).}$$ (2 điểm)

Giả sử điều phải chứng minh đúng đến n – 1; Khai triển định thức cấp n của A theo hàng 1

$$|\det(A)| = |C_{11} \pm C_{12} \pm ... \pm C_{1n}| \le |C_{11}| + ... + |C_{1n}| \le n(n-2)(n-2)! < (n-1)(n-1)!$$

Theo giả thiết quy nạp ta có điều phải chứng minh. (2 điểm)

Câu 5 (3 điểm). Giả sử $x^n + 4 = P(x).Q(x)$ với P, Q có hệ số nguyên và bậc nhỏ hơn n. Khi đó mọi nghiệm của P, Q cũng là nghiệm của $x^n + 4$ nên đều có mô đun bằng $\sqrt[n]{4}$.

Do tích các nghiệm của P và tích các nghiệm của Q là số hữu tỷ (theo Viet) nên

$4^{\frac{\deg P}{n}}; 4^{\frac{\deg Q}{n}}$ là các số hữu tỷ. Suy ra $n \mid 2\deg P;\ n \mid 2\deg Q$. Hay $\deg P = \deg Q = \frac{n}{2}$.

* Nếu n/2 lẻ thì P và Q đều có bậc lẻ nên đều có nghiệm thực, dẫn tới $x^n + 4$ có nghiệm thực (vô lý vì n chẵn).

* Nếu n/2 chẵn thì 4|n hay n = 4k ($k \in N^*$). Khi đó

$$x^n + 4 = (x^{2k} + 2x^{2k} + 2)(x^{2k} - 2x^{2k} + 2). \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy điều kiện cần và đủ là 4|n hay n = 4k ($k \in N^*$).

Câu 6 (3 điểm). Từ giả thiết suy ra $P(x^2) - x^2 = [P(x) - x]^2$.

Đặt Q(x) = P(x) – x ta có $Q(x^2) = [Q(x)]^2$ (*). Dễ thấy $Q(x) = x^n \, (n \ge 0)$ đều thỏa mãn. Ta chứng minh có duy nhất một đa thức bậc n thỏa mãn (*). Thật vậy giả sử có 2 đa thức F(x) và G(x) bậc n thỏa mãn (*). Từ (*) dễ thấy hệ số đầu của F, G đều là 1.

Giả sử G(x) = F(x) + H(x) với degH < n.

Suy ra $F(x^2) + H(x^2) = [F(x) + H(x)]^2 \to H(x^2) = 2.F(x).H(x) + [H(x)]^2$. Điều này mâu thuẫn vì bậc ở vế trái là 2degH nhỏ hơn bậc ở vế phải là n + degH. Ta có điều phải chứng minh.

-------------------------Hết------------------------