TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT
ĐỀ CHÍNH THỨC
=======****************========

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN OLYMPIC
TOÁN SINH VIÊN NĂM 2016
Môn: Giải tích (vòng 2)
Thời gian: 180 phút

Câu 1.

a) Cho dãy số $\{a_n\}$ được xác định như sau $a_1 = \alpha$, $a_n = \frac{n+1}{n}a_n - \frac{2}{n}$, với $n = 1, 2, 3...$ Tìm α để dãy $\{a_n\}$ hội tụ.

b) Tính $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}$, trong đó $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} k\cos\frac{\pi}{k}.$

Câu 2. Cho hàm số $f(\mathrm{x})$ thỏa mãn các điều kiện liên tục trên $[a,b]$, có đạo hàm cấp hai trên (a,b), $f(a) = f(b) = 0$ và c là một điểm cho trước nằm trong (a,b). CMR tồn tại ít nhất một điểm $d \in (a,b)$ sao cho $f(c) = (c-a)(c-b)\frac{f''(d)}{2}$.

Câu 3. Cho hàm số $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ là hàm khả vi có đạo hàm liên tục và không âm. CMR tồn tại ít nhất một điểm $x_0 \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ sao cho $(f(x_0))^2 + (f'(x_0))^2 \le 1$.

Câu 4. Tính $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx^n}{2016+x^n}dx$.

Câu 5. Cho $f(\mathrm{x})$ liên tục $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ và thỏa mãn $f(0) > 0$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} < 1$.

Chứng minh rằng phương trình $f(\mathrm{x}) = \sin\mathrm{x}$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0,\frac{\pi}{2})$.

Câu 6. Tìm hàm $f(x)$ khả vi thỏa mãn với mọi $x \ne 0$

$$3x^2 f'(x) + x^3 f''(x) = -1,\ \ f(1) = 1,\ f(-2) = -1.$$

Câu 7.

Giả sử hàm $f(\mathrm{x})$ có đạo hàm cấp hai trên $[0,1]$, $f(0) = f(1) = 0$, $\min\limits_{0\le x\le 1} f(x) = -1$.

Chứng minh rằng $\sup\limits_{0\le x\le 1}|f''(x)| \ge 8.$