

Câu 1. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & -a & a & -a \\ -a & a+1 & -a & a \\ a & -a & a+1 & -a \\ -a & a & -a & a+1 \end{pmatrix}.$$

- a) Tính định thức của ma trận khi $a = 2$.
 b) Tìm a để hạng của ma trận nhỏ hơn 4.
 c) Với giá trị của a trong câu (b). Tìm cơ sở và số chiều của không gian các nghiệm $X \in \mathbb{R}^4$ của hệ thuần nhất $AX = 0$.

Câu 2. Cho ma trận

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Tìm các vec tơ riêng và giá trị riêng của C .
 b) Tính C^n với số nguyên dương n .
 c) Tìm một đa thức $P(x)$ có bậc 2025 sao cho

$$P(C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Câu 3. Cho dãy số x_n, y_n thỏa mãn $x_1 = 1, y_1 = 1$ và với mọi $n \geq 1$ ta có

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \sqrt{3} y_n \\ y_{n+1} = \sqrt{3} x_n + y_n \end{cases}$$

- a) Tính x_7 và y_7 .
 b) Tính x_{2025} và y_{2025} .

Câu 4. Mỗi viên gạch hoa có dạng bảng ô vuông $3 \times n$ (gồm 3 hàng và n cột). Mỗi cột trong n cột có duy nhất một ô vuông được tô đen. Biết rằng nếu lát các viên gạch hoa giống nhau thành một mặt phẳng vô hạn như hình vẽ (không xoay các viên gạch) thì không có hai ô đen nào kề nhau theo hàng ngang hoặc theo hàng dọc.

- a) Hỏi có bao nhiêu cách tô màu cho viên gạch hoa nếu $n = 3$?
 b) Hỏi có bao nhiêu cách tô màu cho viên gạch hoa nếu $n = 10$?

| | | | | |
|-------------|-------------|------|--|--|
| | | | | |
| viên gạch 1 | viên gạch 2 | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |