TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ ĐỊA CHẤT

ĐÁP ÁN OLYMPIC NĂM 2014
Môn: Đại số
Thời gian: 180 phút

Câu 1. Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm không tầm thường

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_1 + ax_2 + ... + x_{n-1} + x_n = 0 \\ .... \\ x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + ax_n = 0 \end{cases}.$$

Lời giải. Định thức của ma trận của hệ là

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & 1 & ... & 1 \\ 1 & a & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+n-1 & a+n-1 & ... & a+n-1 \\ 1 & a & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & a-1 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a-1 \end{vmatrix} = (a+n-1)(a-1)^{n-1}.$$

Để hệ có nghiệm không tầm thường thì $\det(A) = 0 \Leftrightarrow a \in \{1, 1-n\}$.

Câu 2. Cho $n \geq 2$ là một số nguyên. A là ma trận cỡ $n \times n$ có các phần tử khác nhau nhận một trong các giá trị $1, 2, ..., n^2$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất có thể của r(A).

Lời giải. Giá trị nhỏ nhất của r(A) là 2 và giá trị lớn nhất của r(A) là n. Thật vậy:

Việc hoán đổi vị trí các hàng và cột không là thay đổi hạng của ma trận, nên ta có thể giả sử $1 = a_{11} < a_{21} < .. < a_{n1}; 1 = a_{11} < a_{12} < .. < a_{1n}$. Do đó $a_{n1} > n; a_{1n} > n$.

Xét định thức con $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{nn} - a_{1n}a_{n1} < 0$. Vậy $r(A) \geq 2$.

Xét ma trận

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ n+1 & n+2 & ... & 2n \\ ... & ... & ... & ... \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & ... & n^2 \end{pmatrix} \Rightarrow r(T) = r\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ 1 & 1 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ 1 & 1 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Xét ma trận Q gồm các phần tử từ 1 đến n^2 thỏa mãn: các số lẻ nằm trên đường chéo, phía trên đường chéo là các số chẵn, các phần tử phía dưới đường chéo là bất kì. Khi đó $\det(Q)$ là số lẻ, nên $\det(Q) \neq 0$. Vậy $r(Q) = n$.

Câu 3. Cho A là một ma trận cỡ $n\times n\,(n\geq 2)$ khả nghịch với các phần tử là các số thực dương. Chứng minh rằng số phần tử bằng 0 trong ma trận A^{-1} không vượt quá n^2-2n.

Lời giải. Ký hiệu a_{ij} và b_{ij} là các phần tử tương ứng của A và A^{-1}. Khi đó, với mỗi $k\neq m$ ta có $\sum_{i=1}^{n}a_{ki}b_{im}=0.$ Vì $a_{ij}>0$ nên có ít nhất một trong các b_{im} là số dương và ít nhất một trong các b_{im} là số âm. Do vậy trong mỗi cột của A^{-1} có ít nhất 2 phần tử khác 0. Từ đó suy ra số phần tử bằng 0 của A^{-1} không vượt quá n^2-2n.

Câu 4. Cho T là một ma trận vuông cấp n và véc tơ cột $x\in R^n$. Biết rằng $T^m x=0;\ T^{m-1}x\neq 0$ trong đó m là một số nguyên dương. Chứng minh rằng hệ véc tơ $x, Tx,\dots,T^{m-1}x$ độc lập tuyến tính trong R^n.

Lời giải. Giả sử tồn tại các số a_i thỏa mãn

$$a_0x+a_1Tx+\dots+a_{m-1}T^{m-1}x=0.$$

Nhân T^{m-1} vào bên trái cả hai vế ta có $a_0T^{m-1}x=0.$ Theo giả thiết $T^{m-1}x\neq 0$ nên $a_0=0.$ Khi đó ta có

$$a_1Tx+\dots+a_{m-1}T^{m-1}x=0.$$

Nhân T^{m-2} vào bên trái cả hai vế và làm tương tự như trên ta có $a_1=0.$

Cứ như vậy ta suy ra $a_0=\dots=a_{m-1}=0$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Câu 5. Cho ma trận $A=(a_{ij})_{n\times n}$ có các phần tử không âm thỏa mãn $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=1\quad (i=\overline{1,n})$ .Chứng minh rằng mọi giá trị riêng của A có trị tuyệt đối nhỏ hơn hoặc bằng 1.

Lời giải. Gọi m là một giá trị riêng của A và $x=(x_1,\dots,x_n)^T$ là véc tơ riêng tương ứng. Giả sử x_i là tọa độ lớn nhất trong các tọa độ của x.

$$mx_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\Rightarrow |m||x_i|\leq\sum_{j=1}^{n}a_{ij}|x_j|\leq |x_j|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=|x_i|.$$

Từ đó ta có $|m|\leq 1.$

Câu 6. Tìm đa thức P(x) thỏa mãn hệ thức sau

$$P(x)P(3x)+P^2(-x)=P^2(2x)\ (\forall x\in R).$$

Lời giải. Gọi bậc của P(x) là n và hệ số cao nhất của P(x) là $a\neq 0$. Thay vào biểu thức ta có

$$a(3^na)+a^2=(2^na)^2\Leftrightarrow 3^n+1=4^n\Leftrightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n=1\Leftrightarrow n=1.$$

Vậy $P(x)=ax+b$, thay vào biểu thức ta có b = 0. Nên P(x) = ax. Thử lại thấy đúng.