



**Bài 1:** Một nhà máy sản xuất một loại sản phẩm KPA từ ba nguyên liệu  $X, Y, Z$ ; biết rằng mỗi nguyên liệu là sự kết hợp của ba nguyên tố ( $P$ : Protein,  $Q$ : Carbohydrate và  $R$ ) theo một tỉ lệ khối lượng cố định và được cho như sau:

Tên thành tố Nguyên liệu	$P$	$Q$	$R$
$X$	0,6	0,2	0,2
$Y$	0,3	0,5	0,2
$Z$	0,4	0,3	0,3

Giả sử  $x, y, z$  lần lượt là tỉ lệ khối lượng của các nguyên liệu  $X, Y, Z$  có trong một sản phẩm KPA được sản xuất.

- Tính các tỉ lệ khối lượng của các thành tố  $P, Q, R$  chiếm trong một sản phẩm theo  $x, y, z$ .
- Tìm  $x, y, z$  biết rằng một sản phẩm có tỉ lệ khối lượng của các thành tố như sau: 40%  $P$ , 35%  $Q$  và phần còn lại là  $R$ .
- Gọi  $a, b$  lần lượt là tỉ lệ của các thành tố  $P, Q$  trong một sản phẩm. Chứng minh rằng:

$$\begin{cases} 0,7 \leq a + b \leq 0,8 \\ 1 \leq a + 2b \leq 1,3 \end{cases}$$

**Bài 2:** Cho toán tử tuyến tính  $f$  trong không gian  $V$  thỏa mãn  $f^3 = f$ . Chứng minh rằng  $V = \text{Im } f \oplus \ker f$ .

**Bài 3:** Cho các ma trận vuông cấp  $n$   $X, Y, Z$  khác ma trận  $O_n$  thỏa mãn  $X^2 = Y^2 = Z^2$ ,  $X^3 = YXZ + 2I_n$ . Chứng minh rằng:

- $(XY)^2 = (YX)^2$ .
- $Z^6 = I_n$ .

**Bài 4:** Một ma trận vuông cấp  $n$  được gọi là ma trận *Olympic* nếu đó là ma trận thỏa mãn các phần tử hệ số đều có các giá trị thuộc  $\{-1; 0; 1\}$  và tổng các phần tử trên cùng một dòng luôn bằng 0. Gọi  $O(n)$  là số ma trận *Olympic* thỏa mãn.

- Chứng minh rằng, mọi ma trận *Olympic* như trên luôn không khả nghịch.
- Tính  $O(3)$ .

**Bài 5:** Cho hai ma trận  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ . Ma trận cấp  $n$  dạng  $AB - BA$  được gọi là ma trận *giao hoán toán tử*.

- Chứng minh rằng, khi  $\text{rank}(AB - BA) = 1$  thì tồn tại một số tự nhiên  $k$  khác 0 sao cho ma trận *giao hoán toán tử* trên là một ma trận lũy linh.

- Giả sử  $\text{rank}(AB - BA + I_n) = 1$ . Tính  $\text{trace}((AB - BA)^3)$ .

**Bài 6:** Cho đa thức  $P(x)$  thỏa:

$$(x^2 - 4)P(x) = (x + 2)(x - 3)P(x - 1).$$

- Chứng minh rằng đa thức  $P(x)$  luôn có ít nhất hai nghiệm thực phân biệt.
- Tìm tất cả các đa thức  $P(x)$  hệ số thực thỏa mãn đồng nhất thức trên.