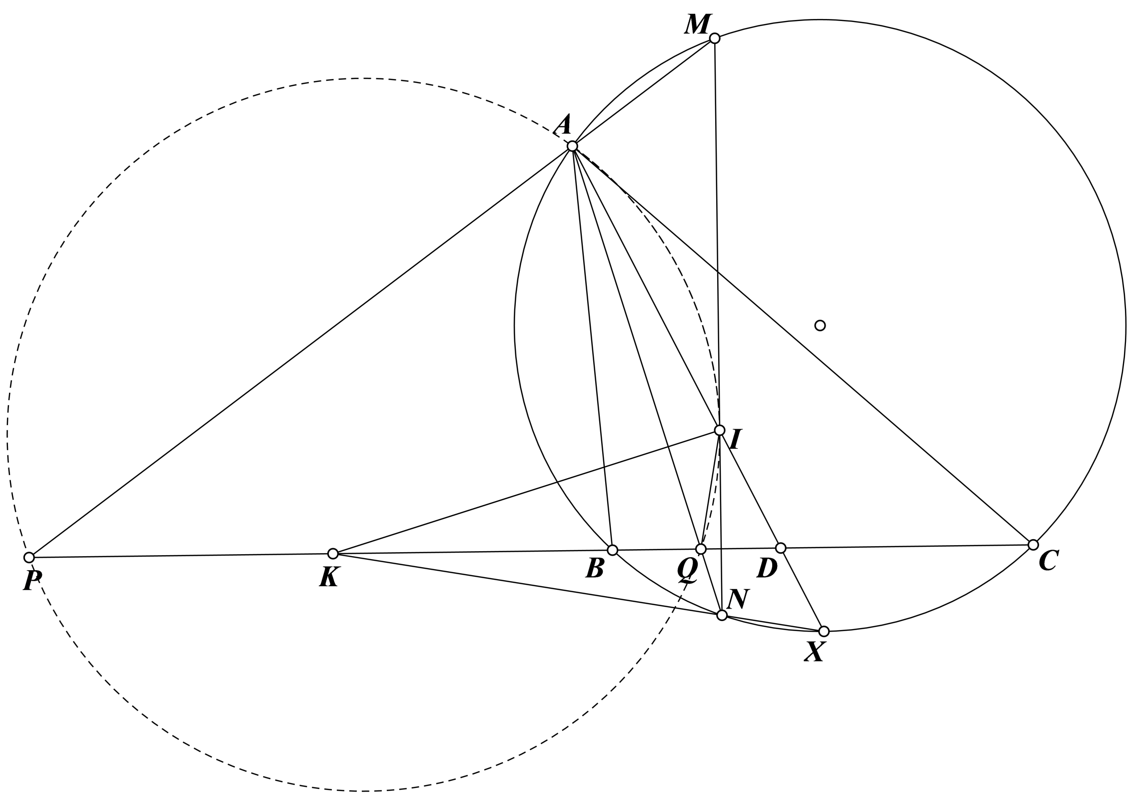
Bài giảng của thầy Trần Quang Hùng tại Trường Đông Toán học 2017

Nguyễn Kim Phương Trang

2018

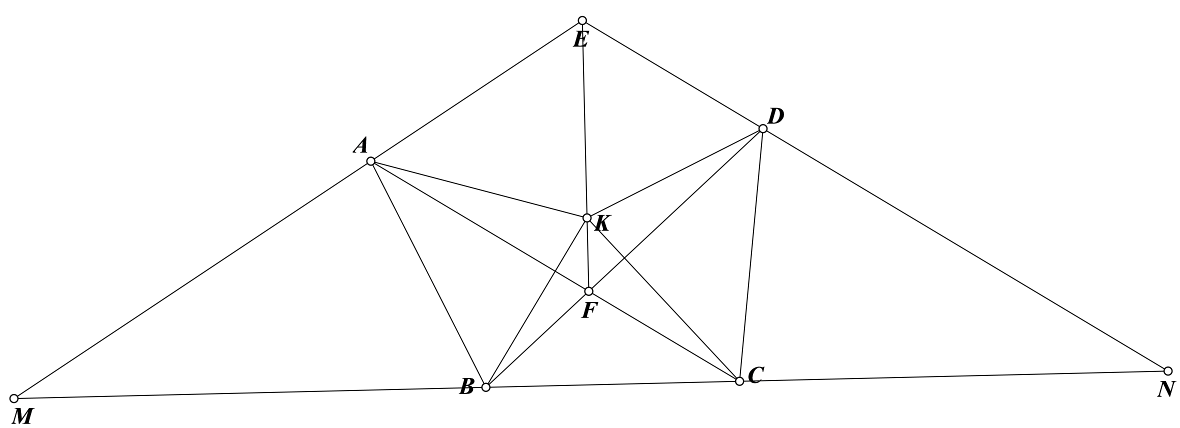
Bài viết là tổng hợp các bài tập hình học được thầy Trần Quang Hùng giảng dạy tại Phú Yên vào 2 ngày 25-26/11/2017

Bài 1: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Qua I kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt (O) lần lượt tại M, N. Các đường thẳng AM, AN cắt BC lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng A, I, P, Q cùng thuộc một đường tròn



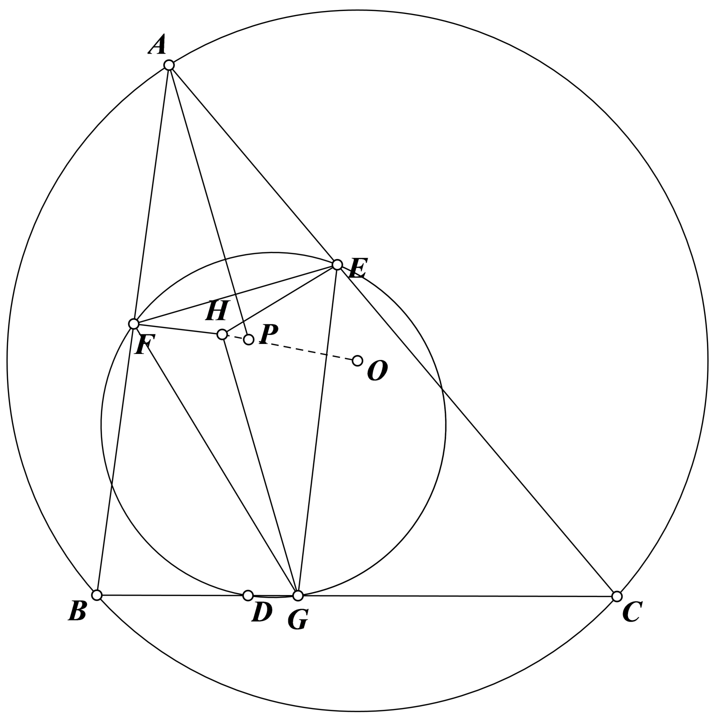
Gọi D, X lần lượt là giao điểm của AI với $BC, (O)$. XN giao BC tại K. $\angle ADK = \dfrac{1}{2}\angle BAC + \angle ACB = \angle ANK$ suy ra 4 điểm A, D, N, K cùng thuộc một đường tròn. Do đó $XN.XK = XD.XA = XI^2$
$\Rightarrow \angle KIX = \angle INX$. Ta có: $\angle ANI = \angle ANX - \angle INX = \angle KDX - \angle KIX = \angle IKQ \Rightarrow NQ \perp KI \Rightarrow Q$ là trực tâm của ΔIKN. Do đó $\angle IQC = \angle INK = 180 - \angle MNX = 180 - \angle MAX = \angle PAI$
Vậy A, I, P, Q cùng thuộc một đường tròn

Bài 2: Cho ngũ giác $ABCDE$ có $AB = BC = CD$, $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$. F là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng $EF \perp BC$

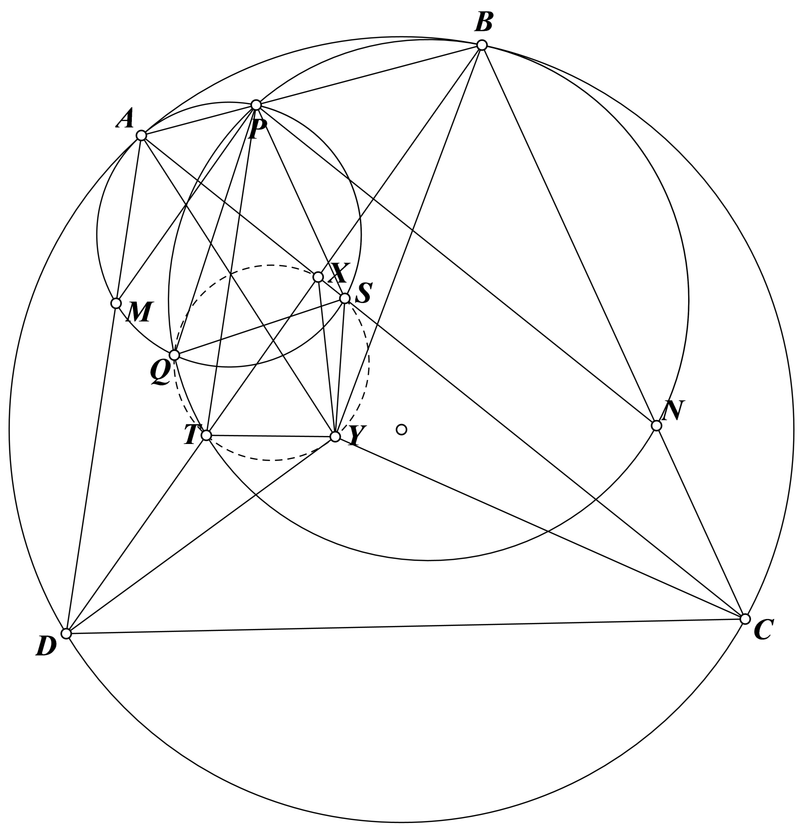


Gọi K là trực tâm của $\Delta BCF \Rightarrow KF \perp BC$. Ta có KB là đường trung trực của AC, KC là đường trung trực của BD suy ra KA là tia phân giác của $\angle BAE$, KD tia là phân giác của $\angle CDE$
Do đó KE là đường phân giác của $\angle AED$. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của AE, DE với đường thẳng BC. Dễ thấy $\Delta ABM = \Delta CDM$(g.c.g) $\Rightarrow \angle M = \angle N$ nên $EK \perp BC$. Vậy $EF \perp BC$

Bài 3: Cho ΔABC, P thuộc tia phân giác trong $\angle A$ trong tam giác. D, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. $(DEF) \cap BC = D, G$. H là trực tâm ΔGEF. Chứng minh rằng PH luôn đi qua điểm cố định khi P thay đổi

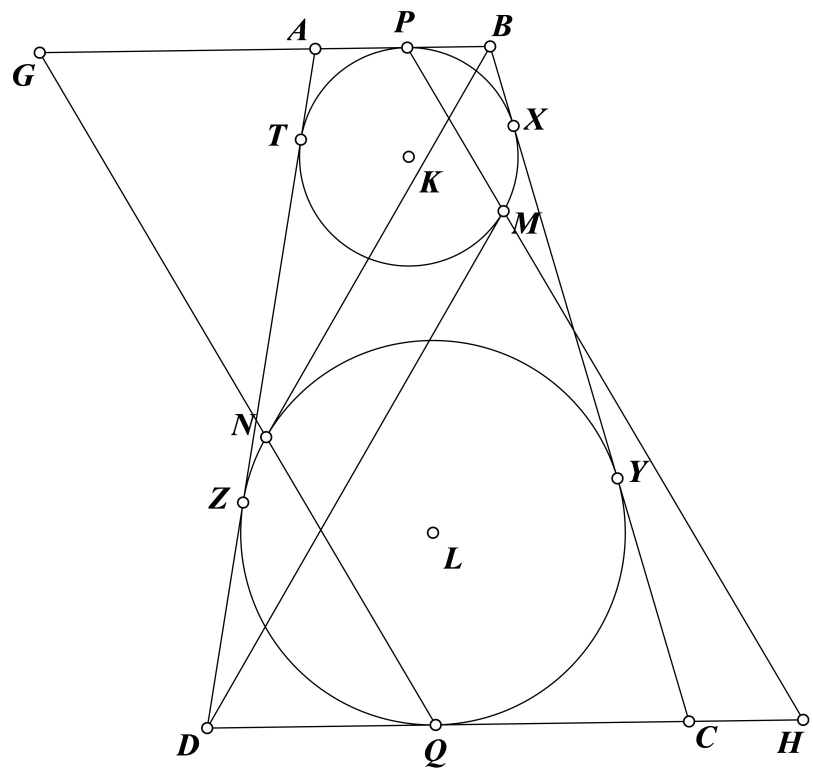


Bài 4: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), điểm P bất kỳ thay đổi trên đoạn AB. Các điểm M, N lần lượt thuộc đoạn AD, BC sao cho $PM//BD, PN//AC$. $(APM) \cap AC = A, S$; $(BPN) \cap BD = B, T$. $(APM) \cap (BPN) = P, Q$. Chứng minh rằng tâm của (QST) thuộc một đường thẳng cố định



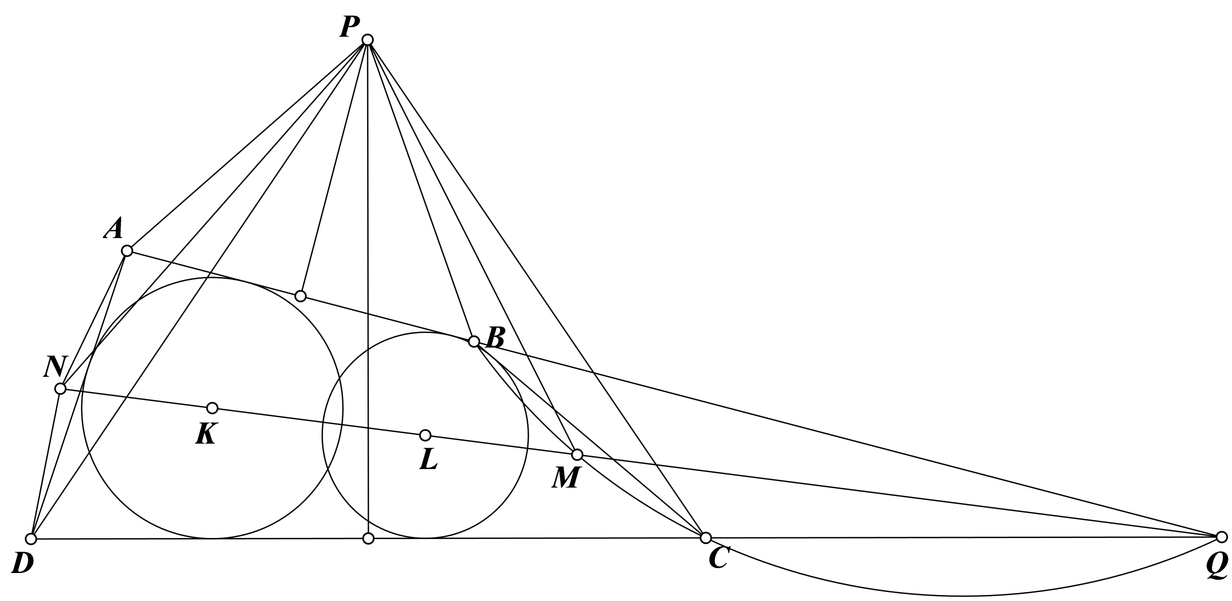
Gọi X là giao điểm của AC và BD. Ta có: $\angle TQS = \angle TQP - \angle SQP = 180 - \angle ABX - \angle BAX = \angle TXS$ suy ra $X \in (QST)$.
Mặt khác: $\angle ASP = \angle AMP = \angle ADB = \angle ACB$ nên $PS//BC$.
Tương tự: $PT//AD$ do đó: $\frac{SA}{SC} = \frac{PA}{PB} = \frac{TD}{TB}$. Gọi $(XAD) \cap$(XBC)=X,Y.
$\Delta YAC \sim \Delta YDB$(g.g) nên $\Delta YAS \sim \Delta YDT \Rightarrow \angle YXA = \angle YTD$ hay $Y \in (QST)$ nên tâm của (QST) thuộc đường trung trực của XY.
Vì X, Y cố định khi P thay đổi nên tâm của (QST) luôn thuộc một đường thẳng cố định khi P thay đổi

Bài 5: Cho hình thang $ABCD(AB//CD)$. Đường tròn (K) tiếp xúc với các cạnh DA, AB, BC; đường tròn (L) tiếp xúc với các cạnh BC, CD, DA. Gọi BN là tiếp tuyến của (L) xuất phát từ B khác BC; DM là tiếp tuyến của (K) xuất phát từ C khác DA. Chứng minh rằng $BN//DM$



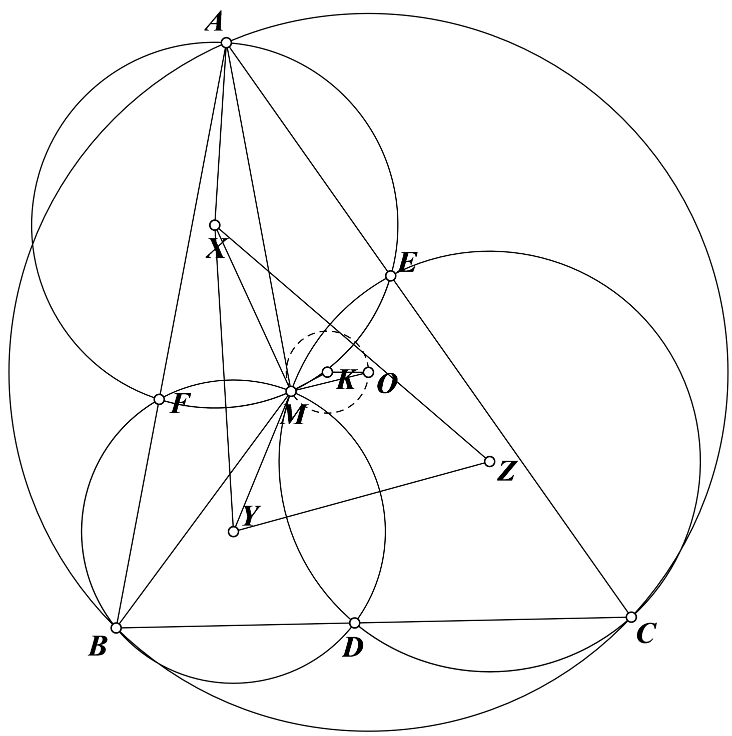
Gọi các tiếp điểm của 2 đường tròn $(K),(L)$ với các cạnh của hình thang như hình vẽ. NQ giao AB tại G, MP giao CD tại H.
Ta có: $\angle BGN = \angle DQN = \angle BNG$ hay ΔBGN cân tại B.
Do đó $GP = BG - BP = BN - BX = BY - BX = XY$.
Tương tự $HQ = ZT$ nên $GPHQ$ là hình bình hành $\Rightarrow \angle G = \angle H$ hay $\angle BNG = \angle DMH$. Vậy $BN//DM$

Bài 6: Cho tứ giác $ABCD$ có $AD = BC$. Đường tròn (K) tiếp xúc với các cạnh AB, AD, CD; đường tròn (L) tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CD. Chứng minh rằng đường trung trực của các đoạn thẳng AB, CD, KL đồng quy



Gọi Q là giao điểm của AB và CD. Ta có K, L, Q thẳng hàng vì cùng thuộc tia phân giác trong của $\angle AQD$. Gọi M là giao điểm thứ hai của (QBC) với $KL \Rightarrow MB = MC = ML$. Gọi N là giao điểm thứ hai của (QAD) với $KL \Rightarrow NA = ND = NK$. Ta có $\angle AND = 180 - \angle AQD = \angle BMC$. Lại có $AD = BC$ nên $\Delta ADN = \Delta BCM$(g.c.g) $\Rightarrow ML = NK$. Gọi P là giao điểm của 2 đường trung trực của AB và CD. Dễ chứng minh được $PM = PN$ nên P thuộc đường trung trực của KL.
Vậy các đường trung trực của AB, CD, KL đồng quy

Bài 7: Cho ΔABC, các điểm D, E, F bất kỳ thuộc các cạnh BC, CA, AB. Gọi X, Y, Z lần lượt là tâm của $(AEF), (BFD), (CDE)$. M là giao điểm của 3 đường tròn đó. Gọi K là tâm của (XYZ). Chứng minh rằng đường tròn (K, KM) luôn đi qua điểm cố định khi D, E, F thay đổi

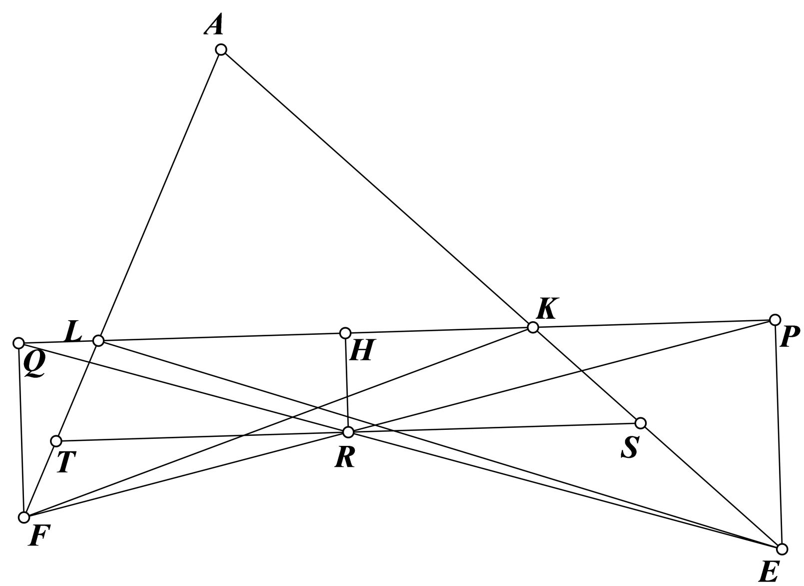


Ta có $\angle MXY = \angle MAB, \angle MYX = \angle MBA$ nên $\Delta MXY \sim \Delta MAB$(g.g). Tương tự $\Delta MYZ \sim \Delta MBC$, $\Delta MZX \sim \Delta MCA$. Do đó M là tâm đồng dạng biến ΔXYZ thành ΔABC nên biến K thành O, với O là tâm ngoại tiếp tam giác ABC. Suy ra $\Delta MXA \sim \Delta MKO$

$\Rightarrow \dfrac{KM}{KO} = \dfrac{XM}{XA} = 1$ nên O thuộc (K, KM). Vì O cố định khi D, E, F thay đổi nên (K, KM) luôn đi qua điểm cố định

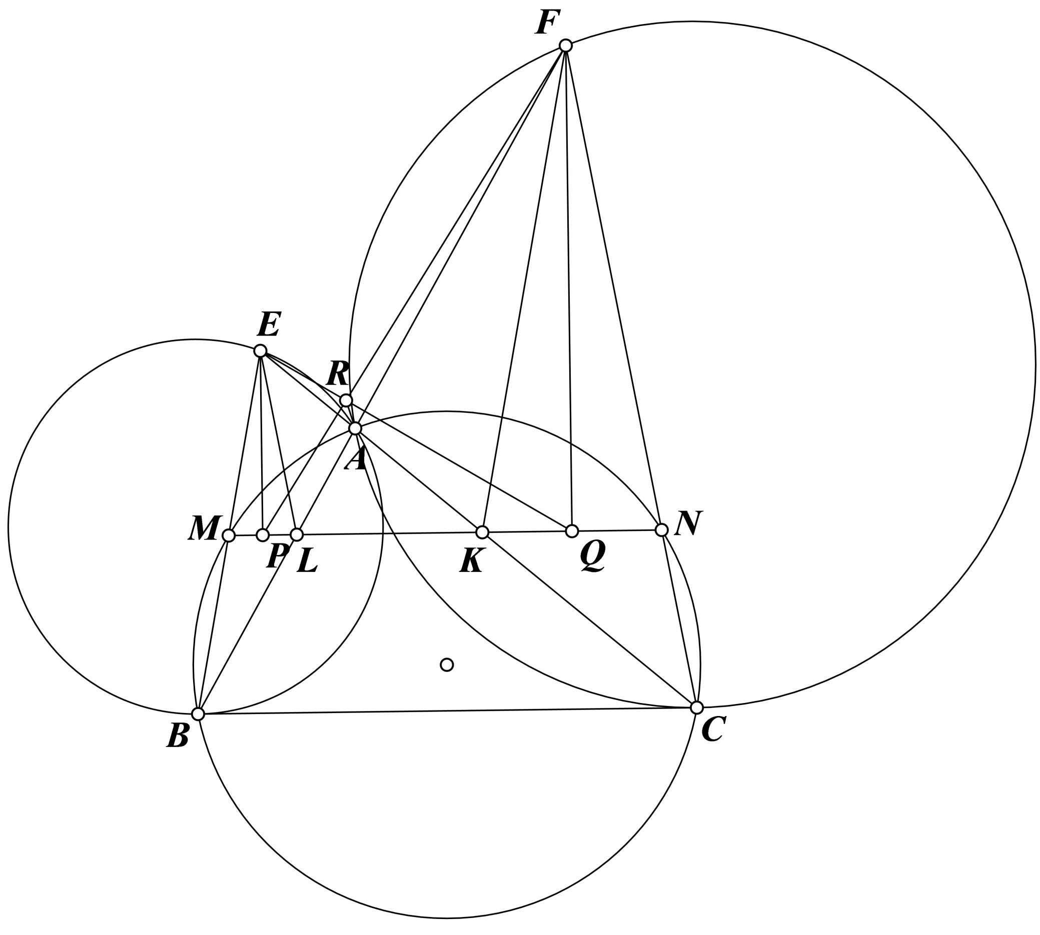
Bài 8: Cho ΔABC nội tiếp (O), đường tròn qua A, B và tiếp xúc với BC cắt CA tại E; đường tròn qua A, C và tiếp xúc với BC cắt BA tại F. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của BE, CF với (O). P, Q là hình chiếu của E, F lên MN. R là giao điểm của EQ và FP. Chứng minh rằng AR chia đôi BC

Bổ đề: Cho tam giác AKL, 2 điểm E, F thuộc đường thẳng AK, AL sao cho $\angle ELK = \angle FKL$. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của E, F lên KL. R là giao điểm của EQ và FP. Khi đó AR chia đôi KL



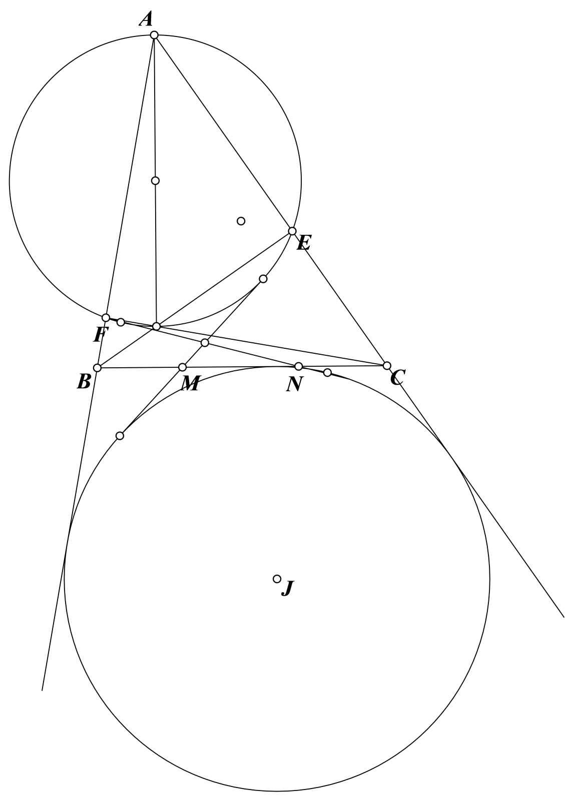
Qua R kẻ đường thẳng song song với KL cắt AK, AL tại S, T.
Gọi H là hình chiếu của R lên KL. Ta có: $\dfrac{RT}{PL} = \dfrac{FR}{FP} = \dfrac{QR}{QE} = \dfrac{RH}{EP}$.
Tương tự $\dfrac{RS}{QK} = \dfrac{RH}{FQ}$. Lại có $\Delta ELP \sim \Delta FKQ$(g.g) $\Rightarrow \dfrac{PE}{PL} = \dfrac{QF}{QK}$ suy ra $RS = RT$ nên AR chia đôi KL

Trở lại bài toán



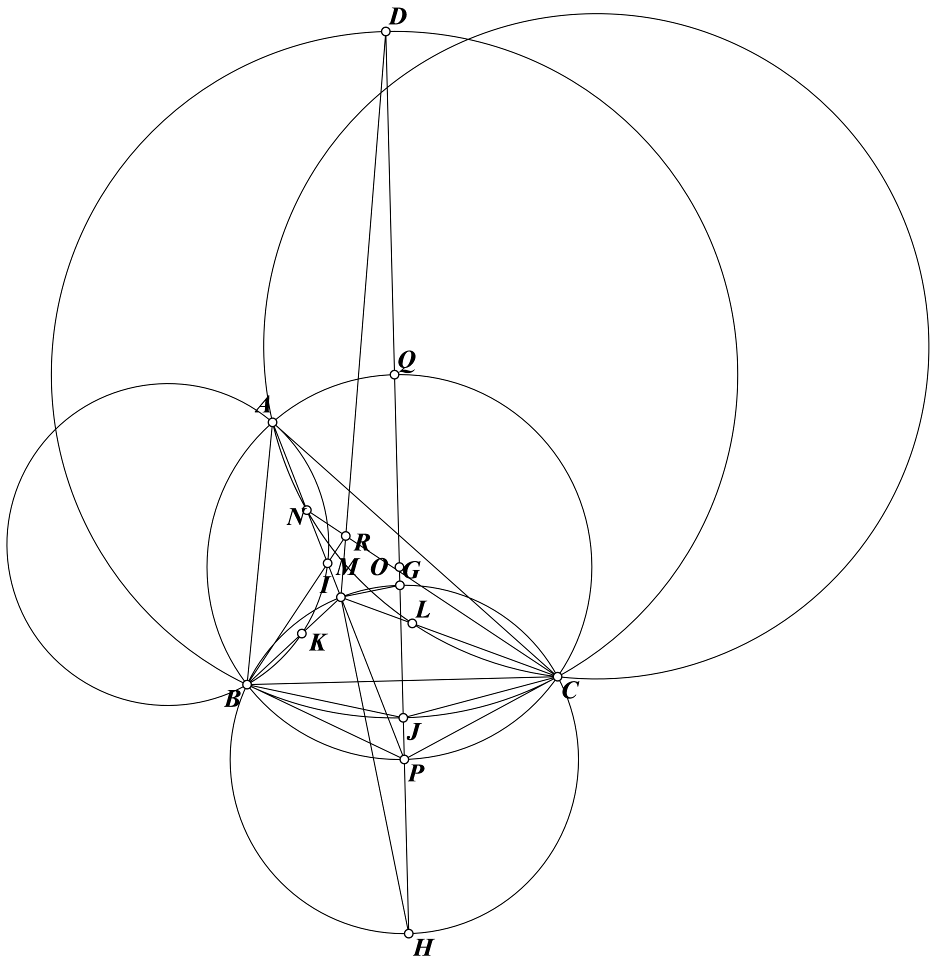
Ta có: $\angle EBC = \angle BAE = \angle FCB = \angle EMN$ nên $MN//BC$.
Gọi K, L lần lượt là giao điểm của MN với AC, AB khi đó $\angle AEM = \angle ABC = \angle ALK \Rightarrow$ Tứ giác $AEML$ nội tiếp. Tương tự: Tứ giác $AFNK$ nội tiếp, do đó $\angle ELK = 180 - \angle BAC = \angle FKL$. Áp dụng bổ đề trên ta có AR chia đôi KL. Vậy AR chia đôi BC

Bài 9: Cho ΔABC, đường cao BE, CF, (J) là đường tròn bàng tiếp góc A của ΔABC. Tiếp tuyến chung trong của (AEF) và (J) cắt BC tại M, N. Chứng minh rằng $BM = CN$



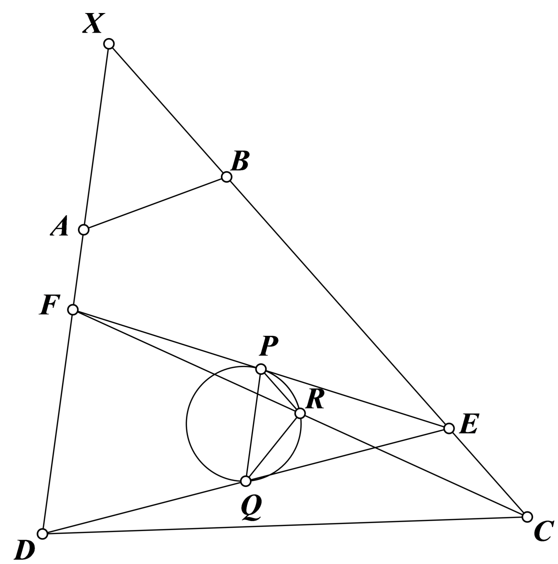
Tham khảo lời giải tại
https://nguyenvanlinh.files.wordpress.com/2017/08/sharygin-final-2017.pdf

Bài 10: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) cố định; B, C cố định, A di động. (I) là đường tròn nội tiếp tam giác. Gọi AK, AL lần lượt là đường phân giác trong của ΔIAB, ΔIAC. Gọi M, N là giao điểm thứ 2 của $(ABK), (ACL)$ với AI. BM cắt CN tại R. Chứng minh rằng IR luôn qua điểm cố định khi A di động trên (O)



AI giao (O) tại P, PO giao (O) tại Q. Gọi J là tâm nội tiếp ΔPBC.
Ta có: $\angle JBC = \angle IBR (= \dfrac{1}{4}\angle BAC)$, $\angle JCB = \angle ICR (= \dfrac{1}{4}\angle BAC)$ nên 2 điểm I, J liên hợp đẳng giác trong ΔIBC.
Mặt khác, Q là tâm của (JBC). Kẻ đường kính JD của (Q).
Gọi G, H là giao điểm của PQ với (IBC). Ta có $QG.QH = QB^2 = QD^2 \Rightarrow (DJ, GH) = -1$. Vì $IG \perp IH$ nên ID, IJ đối xứng nhau qua IG. Do đó $ID \equiv IR$. Vì D cố định khi A thay đổi trên (O) nên IR luôn qua điểm cố định

Bài 11: Cho tứ giác $ABCD$, 2 điểm E, F thay đổi thuộc các cạnh BC, AD. Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của EF, DE, FC. Giả sử (PQR) tiếp xúc với EF. Chứng minh rằng đường trung trực của EF đi qua điểm cố định



Gọi X là giao điểm của AD và BC. Ta có: $\angle PQR = \angle RPE = \angle XEF$, tương tự $\angle PRQ = \angle XFE$ nên $\Delta XEF \sim \Delta PQR$(g.g)

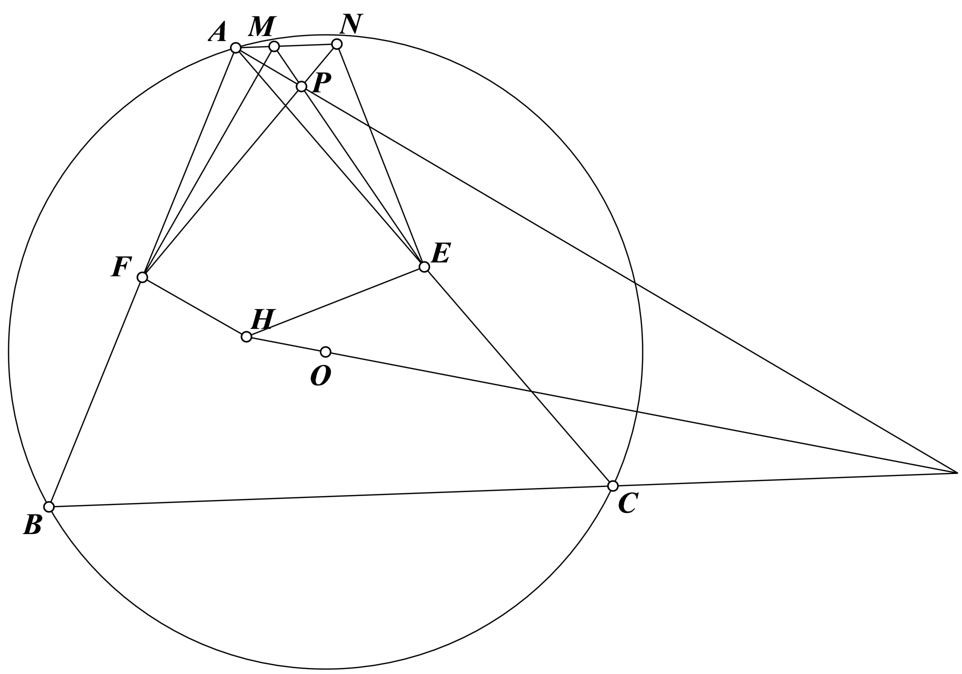
$\Rightarrow \dfrac{XE}{XF} = \dfrac{PQ}{PR} = \dfrac{DF}{EC}$ suy ra $EC.EX = FD.FX$.

Gọi O là tâm của (XCD) suy ra $OX^2 - OE^2 = OX^2 - OF^2$

$\Rightarrow OE = OF$ do đó O thuộc đường trung trực của EF.

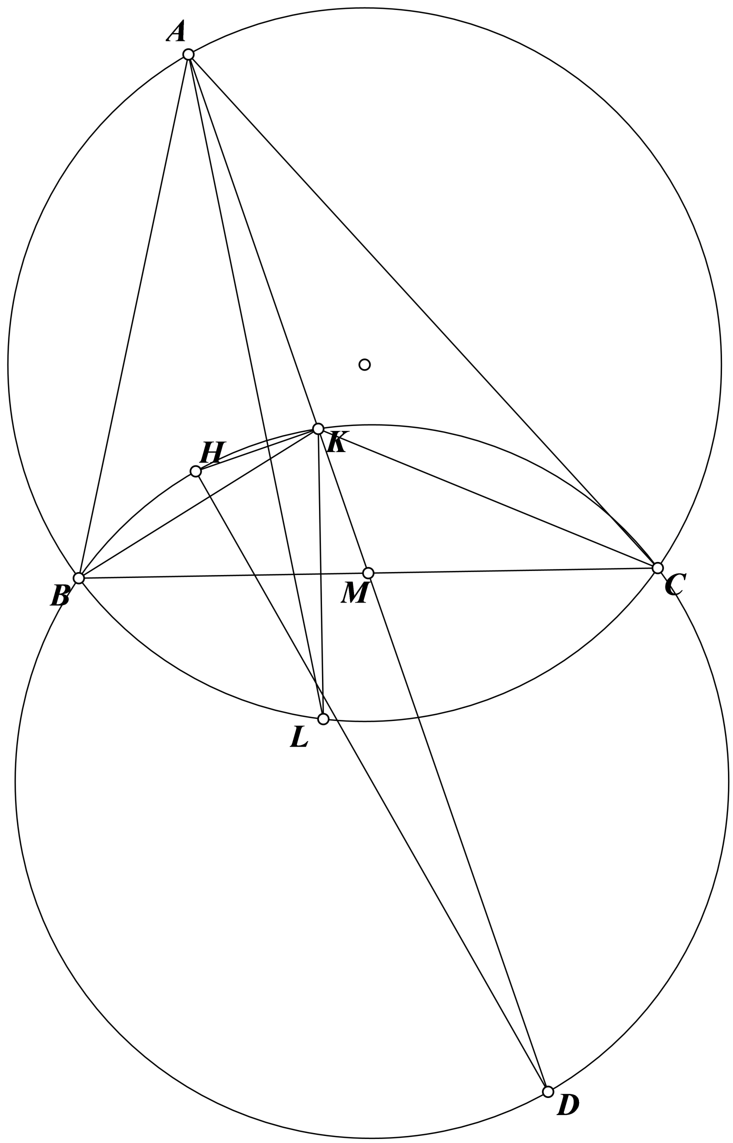
Vì O cố định khi E, F thay đổi nên đường trung trực của EF luôn đi qua điểm cố định

Bài 12: Cho ΔABC, H là trực tâm. Gọi E, F là trung điểm của AC, AB. Trên đường thẳng qua A song song với BC lấy M, N sao cho $FM \perp FH$, $EN \perp EH$. EM giao FN tại P. Chứng minh rằng AP, BC, đường thẳng Euler của tam giác ABC đồng quy

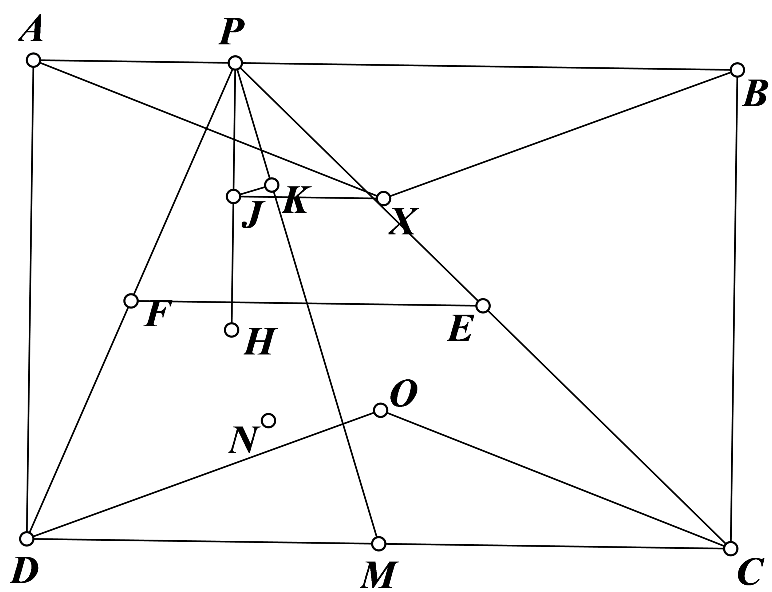


Tính chất: ΔABC, H là trực tâm, AM là trung tuyến, K là hình chiếu của H lên AM.

Gọi D đối xứng với A qua M, khi đó K, B, C thuộc (DH) và $\dfrac{KB}{AB} = \dfrac{KC}{AC}$. Gọi L đối xứng với K qua BC, khi đó L thuộc (ABC) và AL là đường đối trung của Δ ABC


A
H
K
B
M
C
L
D

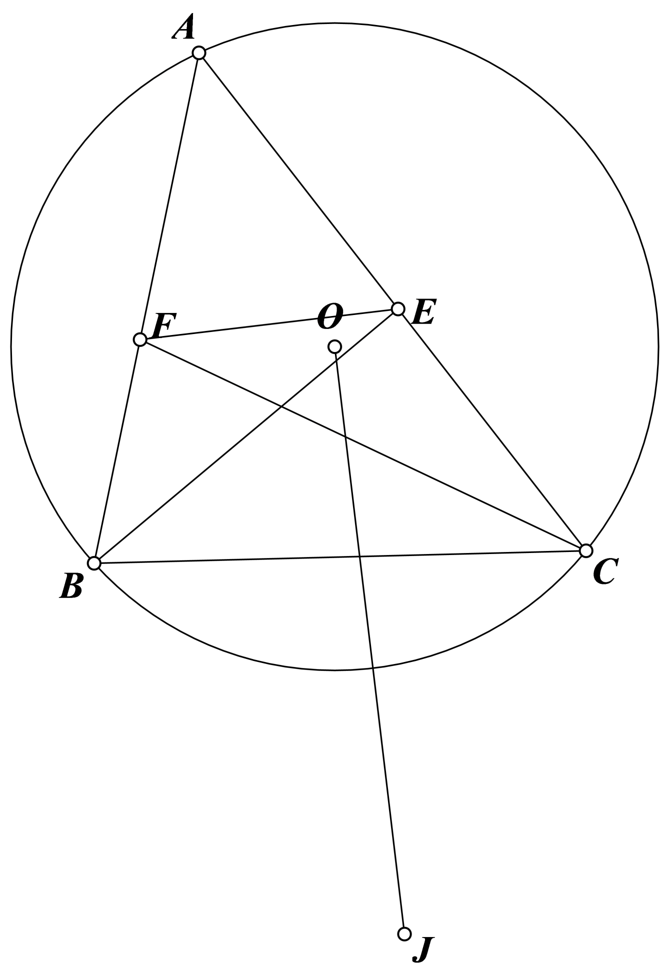
Bài 13: Cho hình chữ nhật $ABCD$, điểm P thuộc cạnh AB, M là trung điểm của CD. H là trực tâm của tam giác CDP. J là trung điểm của PH, K là hình chiếu của J lên MP. Chứng minh rằng đường trung trực của HP tiếp xúc với (KAB)



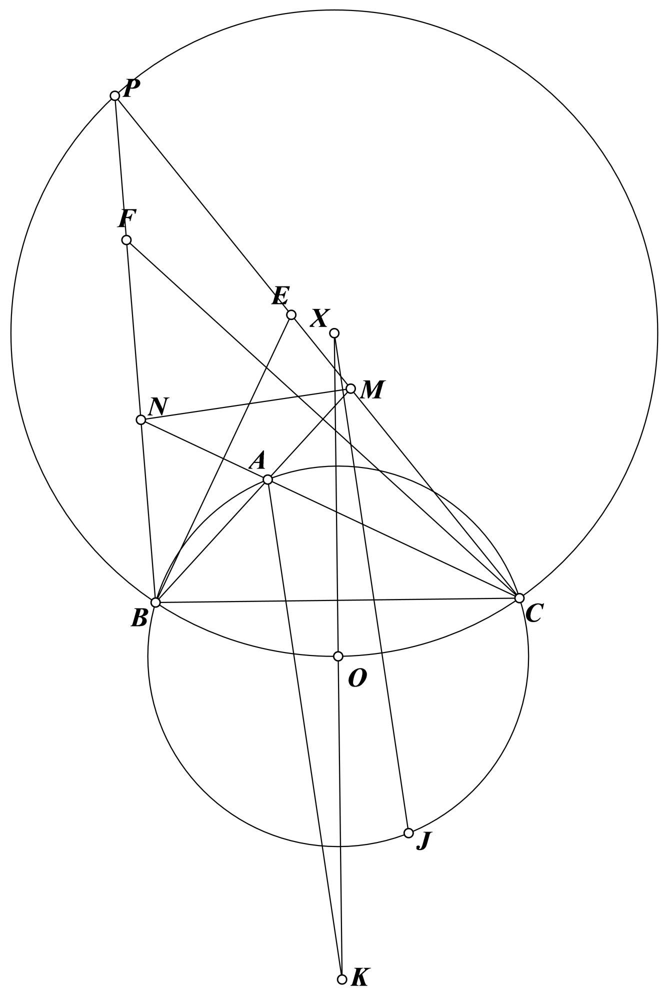
Đường trung trực của HP cắt đường trung trực của AB tại X.
Gọi E, F là trung điểm của PC, PD. Dễ thấy J là trực tâm ΔPEF. Gọi O là tâm của (PCD). Vì J và O đối xứng nhau qua trung điểm của EF nên X và O đối xứng nhau qua EF. Gọi N đối xứng với K qua EF. Theo *tính chất* trên: N thuộc (PEF), $\angle PNO$=90, PN là đường đối trung của ΔPCD nên N thuộc (OCD). Vì ΔXAB và ΔODC đối xứng nhau qua EF nên K thuộc (XAB). Vậy đường trung trực của HP tiếp xúc với (KAB)

Bài 14: Cho ΔABC nội tiếp (O) cố định, BC cố định, A di động trên (O). E, F lần lượt đối xứng với B, C qua AC, AB. CE cắt AB tại M, BF cắt AC tại N. Chứng minh rằng đường thẳng qua A vuông góc với MN luôn đi qua điểm cố định

Bổ đề: ΔABC nội tiếp (O). Đường phân giác BE, CF. (J) là đường tròn bàng tiếp góc A của ΔABC. Khi đó $OJ \perp EF$

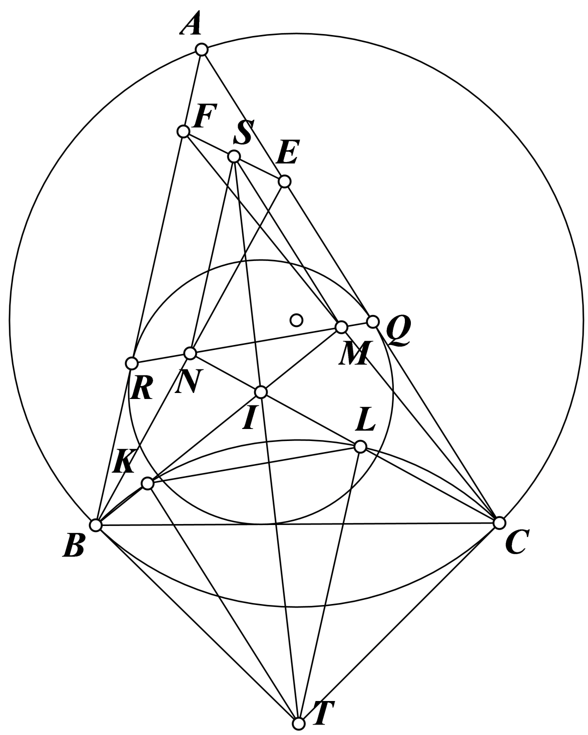


Trở lại bài toán



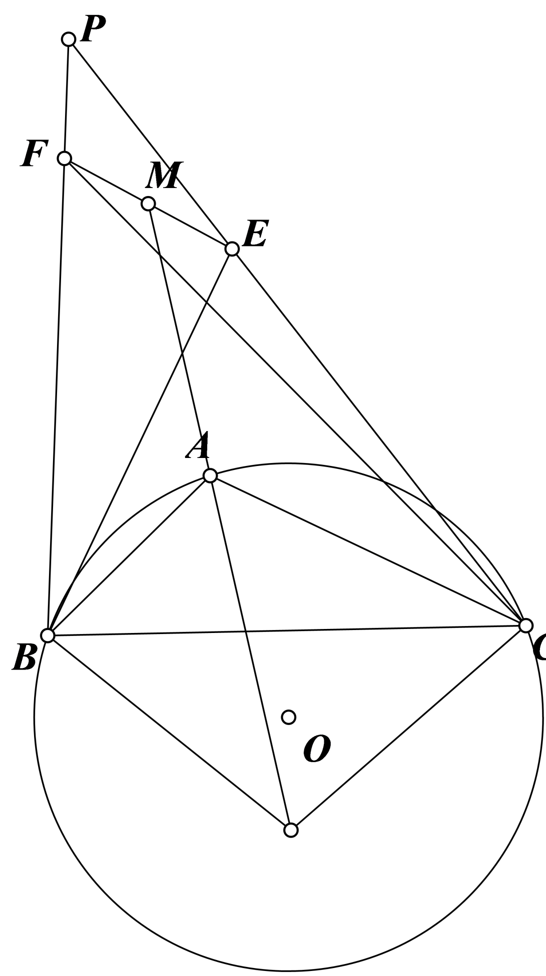
Gọi P là giao điểm của BF và CE. Khi đó A là tâm nội tiếp ΔPBC. Vì $\angle BPC = 180 - \angle BOC$ nên $P \in (OBC) = (X)$. Gọi J đối xứng với A qua O, khi đó J là tâm bàng tiếp góc P của ΔPBC.
Theo bổ đề $XJ \perp MN$. Gọi K đối xứng với X qua O
suy ra $AK \perp MN$. Vậy đường thẳng qua A vuông góc với MN luôn đi qua điểm đối xứng với tâm của (OBC) qua O.

Bài 15: Cho ΔABC nội tiếp (O) cố định, BC cố định, A di động trên (O). E, F thuộc tia CA, BA sao cho $CE = BC = BF$. S là trung điểm của EF. I là tâm nội tiếp của ΔABC. Chứng minh rằng IS đi qua điểm cố định



(I) tiếp xúc với AB, AC tại P, Q. IB, IC giao RQ tại M, N. Khi đó M, N lần lượt là trung điểm của CF, BE. Gọi T là giao điểm 2 tiếp tuyến tại B, C của (O). IB, IC giao (T, TB) tại K, L. Chứng minh được $\angle KBC = \dfrac{1}{2}\angle ABC = \dfrac{1}{2}\angle KTC$ nên $K \in (T, TB)$. Tương tự $L \in (T, TB)$. Ta có: $\angle MKL = \angle NCB = \angle BMN$ nên $MN // KL$. ΔSMN và ΔTKL có các cạnh tương ứng song song nên ST, MK, NL đồng quy. Vậy IS luôn đi qua giao 2 tiếp tuyến tại B, C của (O)

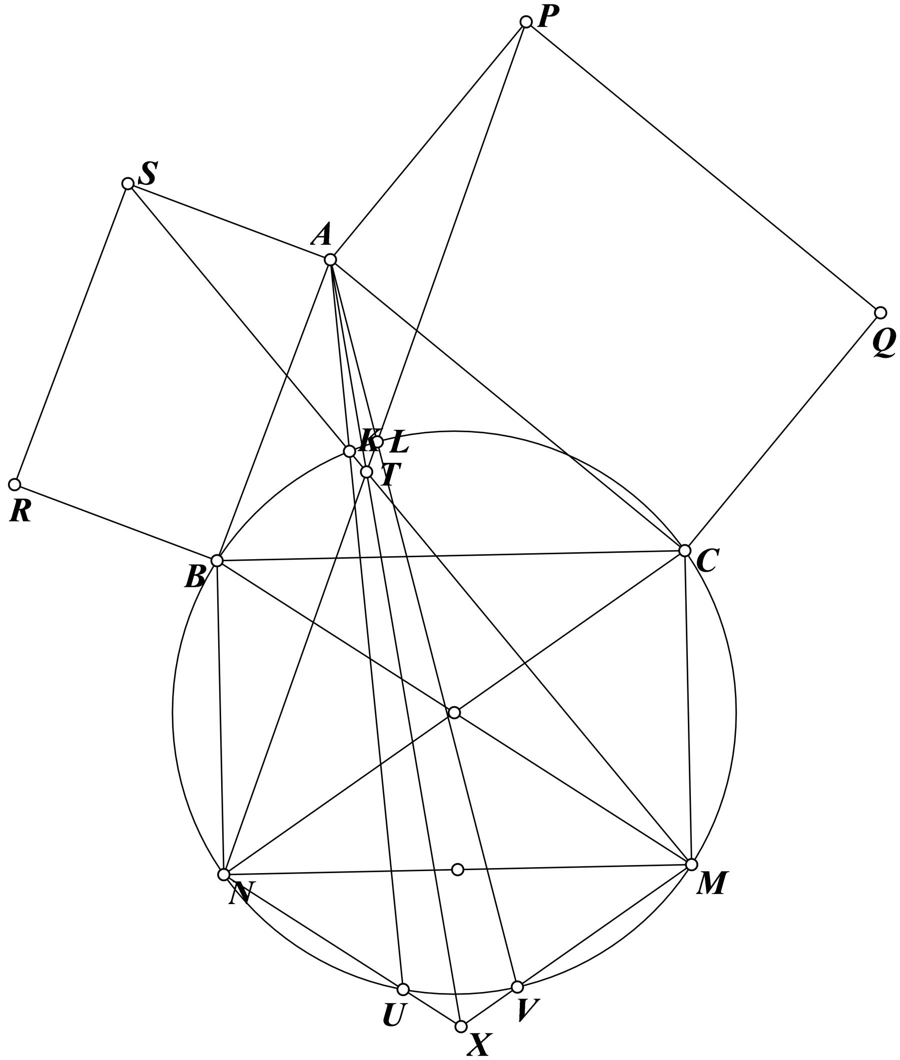
Bài 16: Cho ΔABC nội tiếp (O) cố định, BC cố định, A di động trên (O). E, F đối xứng với B, C qua CA, AB. M là trung điểm của EF. Chứng minh rằng AM luôn đi qua điểm cố định



Tương tự bài 15

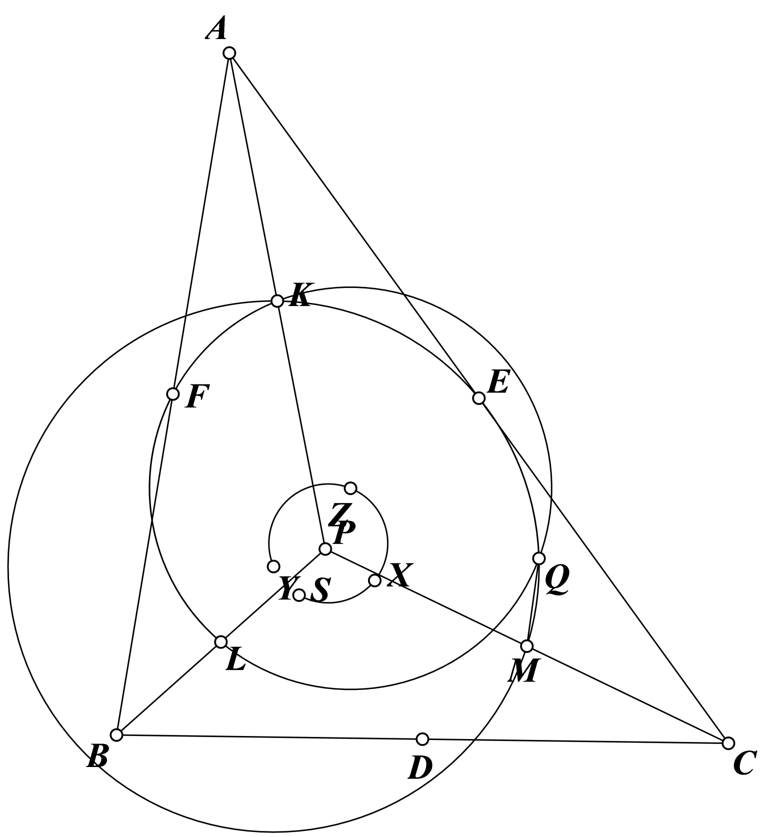
AM qua giao 2 tiếp tuyến tại B, C của (OBC)

Bài 17: Cho ΔABC, BC cố định, A di động. Hình chữ nhật $BCMN$ cố định. Dựng các hình chữ nhật $CAPQ$, $ABRS$ đồng dạng với $BCMN$. SM giao PN tại T. Chứng minh rằng AT luôn đi qua điểm cố định



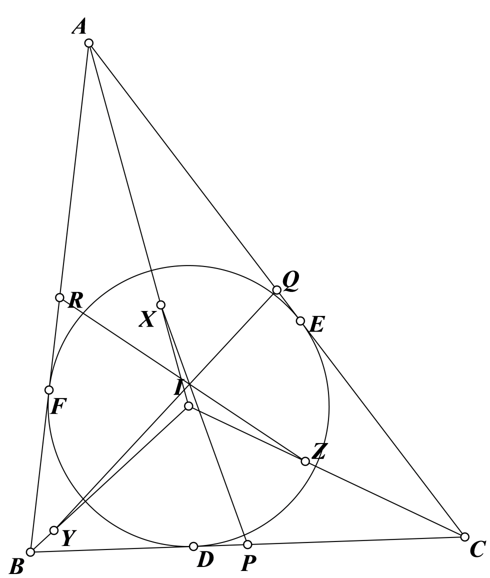
Gọi X là điểm đối xứng với tâm của $(BCMN)$ qua MN.
Hạ $BK \perp SM \Rightarrow K \in (ABRS)$. AK giao $(BCMN)$ tại điểm thứ hai là U. Ta có $\angle CNU = \angle CKU = 180 - \angle AKC = \angle AKS + \angle CKM = 2\angle CNM = \angle CNX$ nên $U \in NX$. Tương tự hạ $CL \perp PN$, AL giao $(BCMN)$ tại V thì $V \in MX$. Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm M, N, U, V, L, K suy ra A, T, X thẳng hàng. Vậy AT luôn đi qua điểm đối xứng với tâm của $(BCMN)$ qua MN

Bài 18: Cho ΔABC, điểm P bất kỳ. X, Y, Z là tâm đường tròn Euler của các tam giác PBC, PCA, PAB. Chứng minh rằng đường thẳng qua X, Y, Z vuông góc với PA, PB, PC đồng quy

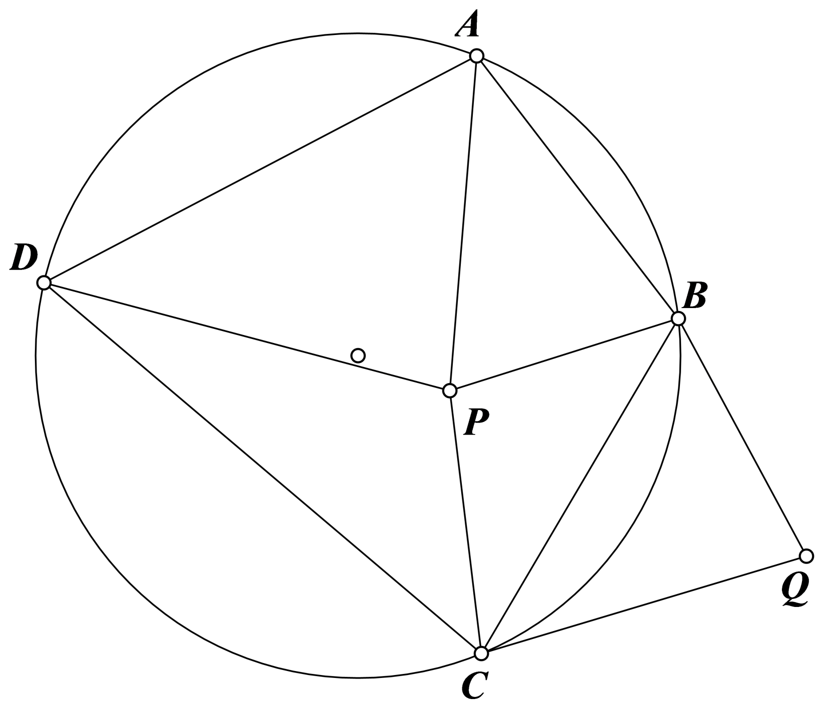


Gọi D, E, F, K, L, M lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB, PA, PB, PC. $(KFL) \cap (KEM) = K, Q$.
$(QL, QM) \equiv (QL, QK) + (QK, QM) \equiv (FL, FK) + (EK, EM) \equiv (PA, DM) + (DL, PA) \equiv (DL, DM)(mod\pi)$
$\Rightarrow Q \in (DLM)$ do đó $(X), (Y), (Z)$ đồng quy tại Q.
Ta có: $(XY, XZ) \equiv (QM, QL) \equiv (DM, DL) \equiv (PB, PC)(mod\pi)$.
Gọi S là giao điểm của đường thẳng qua Y vuông góc với PB và đường thẳng qua Z vuông góc với PC. Ta có: $(SY, SZ) \equiv (PB, PC) \equiv (XY, XZ)(mod\pi) \Rightarrow S \in (XYZ) \Rightarrow (SX, SZ) \equiv (YX, YZ) \equiv (PA, PC)$
$\Rightarrow (SX, PA) \equiv (SZ, PC) \equiv 90(mod\pi)$ suy ra $SX \perp PA$.
Vậy các đường thẳng qua X, Y, Z vuông góc với PA, PB, PC đồng quy

Bài 19: Cho ΔABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F. Gọi X, Y, Z lần lượt là trực tâm của ΔAEF, ΔBFD, ΔCDE. P, Q, R là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng PX, QY, RZ đồng quy
Bổ đề: Các đường thẳng Euler của ΔIBC, ΔICA, ΔIAB đồng quy

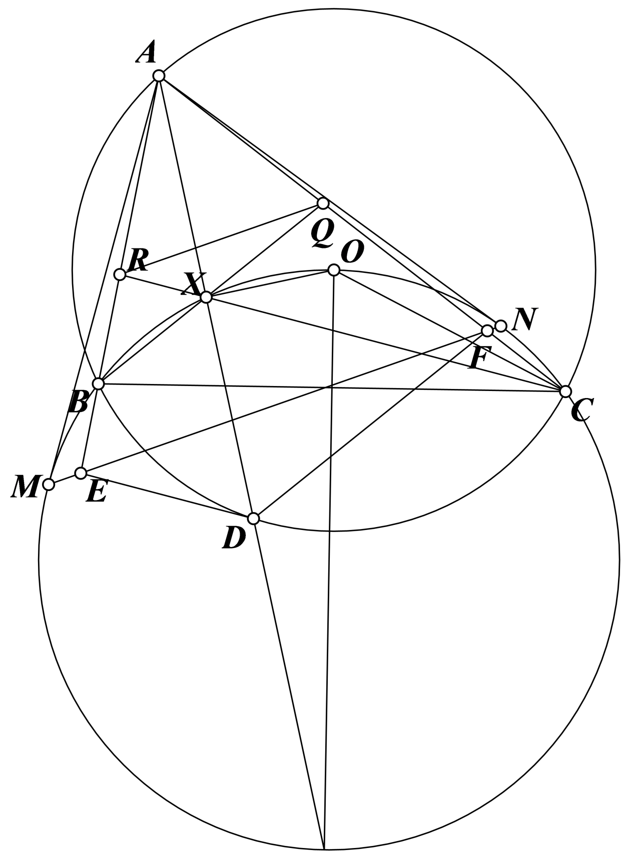


Bài 20: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Điểm P trong tứ giác thỏa $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCD = \angle PDA$. Chứng minh $ABCD$ là tứ giác điều hòa



Dựng $\Delta QBC \sim \Delta PAD$. $\angle PBQ = \angle DAB =$ 180-$\angle DCB =$ 180-$\angle PCQ \Rightarrow$ Tứ giác $BPCQ$ nội tiếp. Mà $\angle PBC = \angle BCQ \Rightarrow BPCQ$ là hình thang cân $\Rightarrow PQ = BC$. Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $BPCQ$: $BC.PQ = BP.CQ + BQ.CP$. Vì $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{CQ}{DP} = \dfrac{BQ}{AP}$ nên $BC.AD = PB.PD + PA.PD$. Tương tự: $AB.CD = PB.PD + PA.PC$ do đó $AB.CD = AD.BC$. Vậy $ABCD$ là tứ giác điều hòa

Bài 21: Cho ΔABC nội tiếp (O). D thuộc (O) thỏa AD là đường đối trung của ΔABC. AM, AN là tiếp tuyến của (OBC). MN giao AC, AB tại E, F. Chứng minh rằng DA là phân giác của $\angle EDF$



Dựng X trong ΔABC thỏa $\Delta XAB \sim \Delta XCA \Rightarrow \angle BXD = \angle CXD$ suy ra $X \in (OBC) \Rightarrow OX \perp AD \Rightarrow$ X là trung điểm của AD. CX giao AB tại R, BX giao AC tại Q. Vì $QA^2 = QX.QB$, $RA^2 = RX.RC$ nên RQ là trục đẳng phương của $(A, 0)$ và $(OBC) \Rightarrow R, Q$ lần lượt là trung điểm của AB, AC suy ra $RX//ED$, $QX//FD$. Kết hợp XA là phân giác của $\angle RXQ$. Vậy DA là phân giác của $\angle EDF$

Bài 22: Cho ΔABC, điểm P trong tam giác. D, E, F đối xứng với P qua BC, CA, AB. O_a, O_b, O_c là tâm ngoại tiếp của ΔPBC, ΔPCA, ΔPAB. K_a, K_b, K_c là tâm ngoại tiếp của ΔO_aBC, ΔO_bCA, ΔO_cAB. $PK_a \cap DO_a = X$. Điểm Y, Z xác định tương tự. Chứng minh rằng đường thẳng qua X, Y, Z vuông góc với PK_a, PK_b, PK_c cắt PA, PB, PC tại các điểm thẳng hàng