KARLSRUHER INSTITUT
FÜR TECHNOLOGIE
Institut für Operations Research
Lehrstuhl Prof. Dr. Oliver Stein

Karlsruhe, den 25. Mai 2022

2. Sonderübung zur Globalen Optimierung

Mit der Bearbeitung dieses Übungsblattes können bis zu zwei Bonuspunkte für die Klausur „Globale Optimierung I" erreicht werden. Details zum Bonussystem entnehmen Sie bitte dem Informationsblatt „Bonussystem" im Ilias-Kursordner zur Vorlesung.

Die Abgabe der Lösung muss bis **Sonntag, den 05.06.2022, um 23:59 Uhr**, erfolgen. Die Abgabe erfolgt digital im Ilias. Die Abgabeformalitäten finden Sie im Ilias und sind unbedingt einzuhalten. Verwenden Sie für die Programmierlösungen bitte die hochgeladenen Vorlagen.

In den Spalten der folgenden Tabelle ist für jedes Mitglied anzukreuzen, an der Lösung welcher Aufgaben es beteiligt war. **Nur für diese Aufgaben erhält das jeweilige Mitglied Punkte und nur diese Aufgaben müssen von dem Mitglied in der Sonderübung vorgerechnet werden können.**

	Vorname	Nachname	Matr.Nr.	BA/MA	A1	A2	A3
1. Mitglied							
2. Mitglied							
3. Mitglied							

Diese Tabelle wird im Zuge der Korrektur **vom Korrektoren-Team** ausgefüllt:

Aufgabe	1	2	Summe
Punkte	6	29	35
erreichte Punkte			

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Gegeben sei das lineare Optimierungsproblem

$$LP: \quad \min_{x\in\mathbb{R}^n} \; c^\top x \quad \text{s.t.} \quad Ax \le b$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$.

(a) (3 P) Geben Sie das Wolfe-Dual D zu LP an.

(b) (3 P) Zeigen Sie, dass D mit dem zu LP dualen Problem

$$D_{LP}: \quad \max_{\lambda\in\mathbb{R}^m} \; b^\top \lambda \quad \text{s.t.} \quad A^\top \lambda = c, \; \lambda \le 0$$

aus der LP-Dualitätstheorie übereinstimmt.

Aufgabe 2 (29 Punkte)
Wir betrachten ein Multiportfolioproblem. Ein Investor möchte in $n \in \mathbb{N}$ Aktien investieren und dabei eine möglichst geringe Varianz und eine hohe erwartete Rendite erzielen. Es sei $x \in M \subseteq \mathbb{R}^n$ die Entscheidungsvariable. Wir nehmen an, der Investor besitzt ein Budget von 1. Dann entspricht x_i, $i = 1, \ldots, n$, dem Anteil des Budgets, der in Aktie i investiert wird. Das Budget muss vollständig ausgegeben werden. Es gilt also

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n | \; e^\top x = 1, \; x \ge 0\}$$

wobei e den Vektor aus Einsen bezeichnet.

Der Vektor mit erwarteter Rendite sei $\mu \in \mathbb{R}^n$. Σ bezeichne die (n, n)-Kovarianzmatix. Es gilt $\Sigma \succeq 0$. Die Portfoliotheorie von Markowitz besagt, dass die Korrelation ein entscheidender Faktor bei der Risikobetrachtung ist. Ein Risikomaß des Portfolios ist damit gegeben durch $\frac{1}{2}x^\top \Sigma x$. Der Faktor $\lambda > 0$ geht als Gewicht in die Zielfunktion ein.

Das gesuchte Optimierungsproblem lautet damit

$$P: \quad \min_x \; -\mu^\top x + \frac{1}{2}\lambda x^\top \Sigma x \quad \text{s.t.} \quad x \in M.$$

Für die Teilaufgaben b) - d) sind in der Matlab- und Pythonvorlage Inputdaten für Σ, μ und λ gegeben.

(a) (4 P) Begründen Sie, dass P konvex ist und dass M kompakt ist.
<u>*Hinweis:*</u> *Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass* $\Sigma = \Sigma^\top \succeq 0$ *gilt und dass* $\alpha\Sigma \succeq 0$ *für jedes* $\alpha > 0$ *gilt. Verwenden Sie an dieser Stelle noch nicht die gegebenen Inputdaten, sondern zeigen Sie die Aussage allgemein.*

(b) (4 P) Zeigen Sie, dass die Zielfunktion von P mit den gegebenen Daten Σ, μ und λ gleichmäßig konvex ist.
<u>*Hinweis:*</u> *Sie dürfen Python oder Matlab verwenden, um Eigenwerte zu bestimmen.*

Für ein konvexes Optimierungsproblem mit einfach beschriebener, kompakter zulässiger Menge M (wie es hier der Fall ist), eignet sich das Frank-Wolfe-Verfahren als numerisches Lösungsverfahren zur Bestimmung von lokalen Minimalpunkten eines Problems P.

(c) (15 P) Implementieren Sie das Verfahren aus dem unten stehenden Algorithmus. Geben Sie am Ende aus, wie viel in welche Aktien investiert wird. Beachten Sie die unten stehenden Hinweise.

(d) (6 P) Lösen Sie P direkt mit Matlab oder Python und vergleichen Sie Ihren Optimalpunkt mit dem aus Teil c). Ist dieses Ergebnis hier zu erwarten? Verwenden Sie Aufgabenteil b).

Algorithmus 2.2: Verfahren von Frank-Wolfe

Input : Konvexes Minimierungsproblem P mit stetig differenzierbarer Zielfunktion und nichtleerer, kompakter zulässiger Menge M, Startpunkt $x^0 \in M$, Abbruchtoleranz $\varepsilon > 0$

Output : ε-minimaler zulässiger Punkt $\bar{x}$ von P, d. h. $\bar{x} \in M$ mit $v \leq f(\bar{x}) \leq v + \varepsilon$ (falls das Verfahren terminiert; Satz 2.8.4)

begin
  Setze $k = 0$.
  Bestimme einen Minimalpunkt y^0 und den Minimalwert v^0 von

$$Q^0: \quad \min_x \langle \nabla f(x^0), x - x^0 \rangle \quad \text{s.t.} \quad x \in M.$$

  while $v^k < -\varepsilon$ **do**
    Setze $d^k = y^k - x^k$.
    Wähle t^k als Minimalpunkt von

$$S(x^k, d^k): \quad \min_t \; f(x^k + t d^k) \quad \text{s.t.} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

    Setze $x^{k+1} = x^k + t^k d^k$.
    Ersetze k durch $k + 1$.
    Bestimme einen Minimalpunkt y^k und den Minimalwert v^k von

$$Q^k: \quad \min_x \langle \nabla f(x^k), x - x^k \rangle \quad \text{s.t.} \quad x \in M.$$

  end
  Setze $\bar{x} = x^k$.
end

<u>*Hinweise:*</u>

- *Die theoretischen Grundlagen zu diesem Verfahren werden in den folgenden Vorlesungen behandelt und müssen nicht erarbeitet werden, um diese Aufgabe zu implementieren.*
- *Die Inputdaten μ, Σ, λ und ε können Sie der Matlab- oder Pythonvorlage entnehmen.*
- *Wählen Sie einen geeigneten Startpunkt $x^0 \in M$.*