In [1]:

```
import numpy as np
from matplotlib import cm
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

Aufgabe 1

In [2]:

```
def func1a(x): return -(x**5)
def func1b(x,y): return (25*(x**2) - 10*x*(y**2) + y**4)
```

In [3]:

```
n = 10
p = 4
y_interval = np.linspace(-n**p,n**p,100)
x_interval = np.linspace(-n,n,100)
```

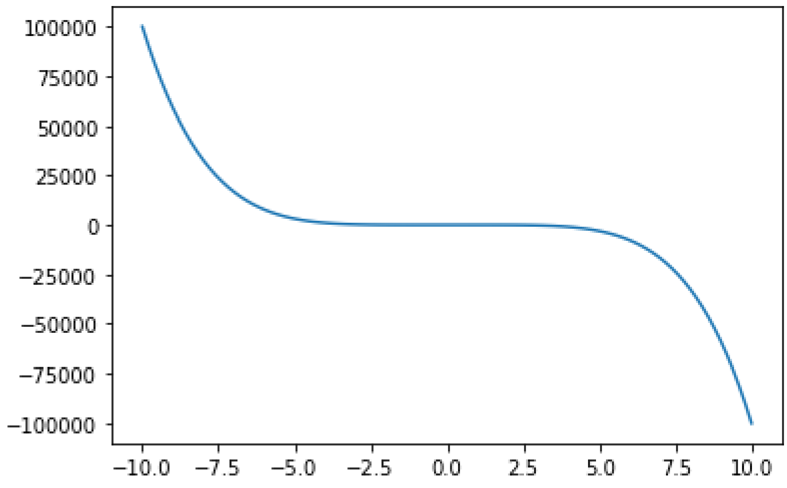
Aufgabe 1a

In [4]:

```
plt.plot(x_interval, func1a(x_interval))
```

Out[4]:

```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x11c509f10>]
```

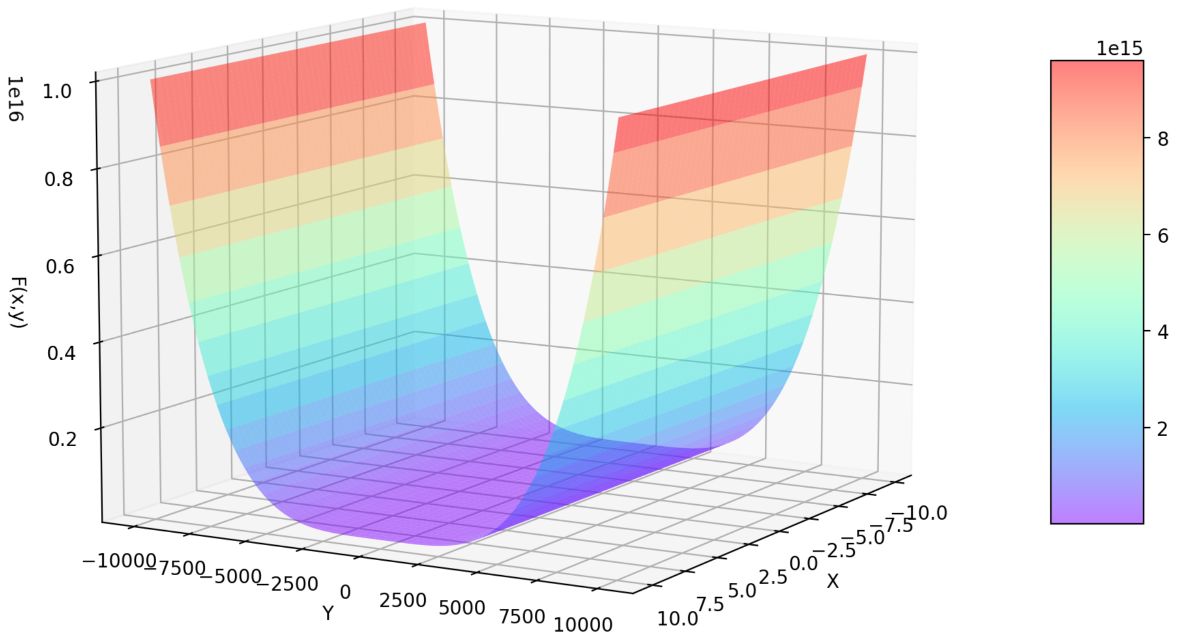


Aufgabe 1b

In [5]:

```
X, Y = np.meshgrid(x_interval, y_interval)
Z = func1b(X,Y)
fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={"projection": "3d"}, dpi=200)
fig.set_size_inches(16, 9)
surf = ax.plot_surface(
    X, Y, Z, cmap=cm.rainbow, linewidth=1, alpha=0.5, antialiased=True
)
fig.colorbar(surf, shrink=0.5, aspect=5)

ax.set_xlabel("X")
ax.set_ylabel("Y")
ax.set_zlabel("F(x,y)")
ax.view_init(10,30)
```



Aufgabe 2a

Die Funktion $f(x) = -x^5$ ist nicht koerziv auf $\mathbb{M} = (-\infty, 1)$. Gegenbeispiel: Die Folge $\{x^k\} = 1 - \frac{1}{k}$ mit $\lim_{k\to\infty}\{x^k\} = 1 \notin \mathbb{M}$ aber $\lim_{k\to\infty}\{f(x^k)\} = -1$

Aufgabe 2b

Die Funktion $f(x) = 25x^2 - 10x_1x_2 + x_2^4$ ist nicht koerziv auf $\mathbb{R}^2$.

Gegenbeispiel: Die Folge $\{x^k\} = \{(\frac{k^2}{5}, k)\} \implies f(x^k) = 0 \; \forall k \in \mathbb{N}$ obwohl $\lim_{k\to\infty} \parallel x^k \parallel = \infty$.

Aufgabe 2c

Das Optimierungsproblem

$$\mathbb{P} : \min_{x\in\mathbb{R}} 25x^2 - 10x_1x_2 + x_2^4$$

ist lösbar. Wir haben:

$f(x) = 25x_1^2 - 10x_1x_2^2 + x_2^4 = (5x_1 - x_2^2)^2 \geq 0$

$\bar{x} = 0 \in \mathbb{R}^2 \implies f(\bar{x}) = 0$

$\implies \inf f(x) = 0$

$\implies \bar{x}$ is ein globale Minimalpunkt.

Aufgabe 2d

wir habe ein Gegenbeispiel:

$f(x) = x^2$ und $\psi(y) = e^{-y} \implies (\psi \circ f)(x) = -e^{-x^2} < 0 \; \forall \; x \in \mathbb{R}$

und $\forall \{x^k\} \subset \mathbb{R} \implies (\psi \circ f)(x)$ nicht koerziv weil

$\{x^k\} = \{k\}$ und $\lim_{k\to\infty} \parallel x^k \parallel = \infty$ aber

$\lim_{k\to\infty} (\psi \circ f)(x^k) = 0$

In [112]:

```
def func_f(x): return x**2
def func_psi(y): return -np.exp(-(y))
```

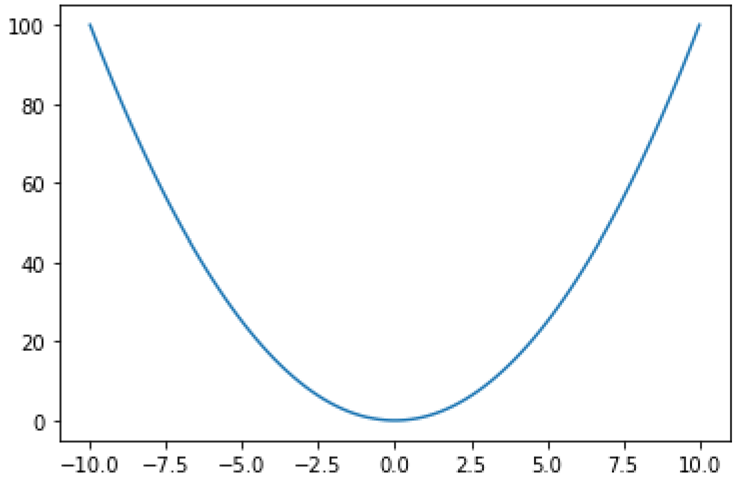
Plot $f(x) = x^2$ is koerziv

In [109]:

```
plt.plot(x_interval, func_f(x_interval))
```

Out[109]:

```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x117967b20>]
```



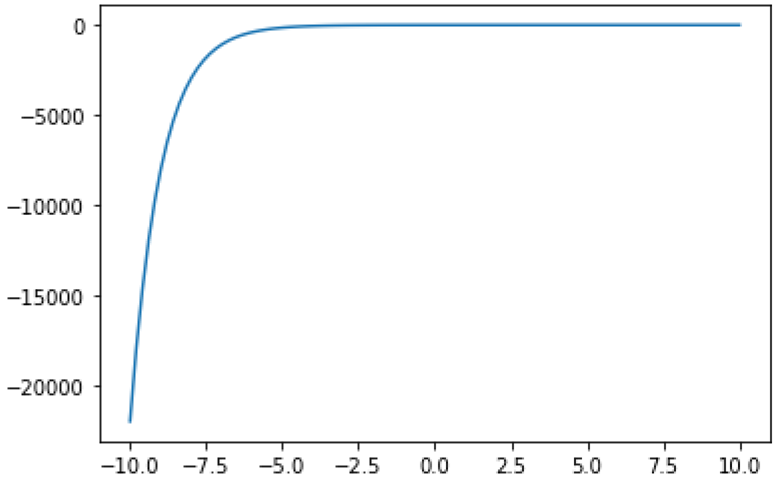
Plot $\psi(e^{-y})$ streng monoton wachsende Funktion

In [110]:

```
plt.plot(x_interval, func_psi(x_interval))
```

Out[110]:

```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x117a9bd30>]
```



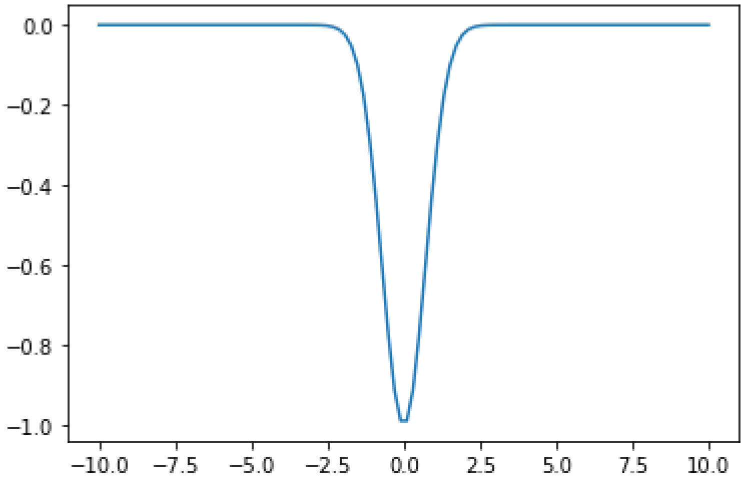
Plot $(\psi \circ f)(x)$ nicht koerziv

In [111]:

```
plt.plot(x_interval, func_psi(func_f(x_interval)))
```

Out[111]:

```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x117e08ac0>]
```



Aufgabe 3

Im ersten Schritt wird der Datensatz *cities* in Python geladen.

a) Das Problem ist konvex. Wie bewiesen in Aufgabe 4.5 ist die Norm-Funktion $\|\cdot\|$ konvex. Außerdem ist laut Aufgabe 4.1 die Summe von konvexen Funktionen multipliziert mit positiven Faktoren konve. Da $\lambda_i > 0$ ist somit $\lambda \|\cdot\|$ eine konvexe Funktion und die Summe von konvexen Funktionen $\sum_i (\lambda \ \| \cdot \|)_i$ ist auch konvex.

In [341]:

```
df = pd.read_excel('cities.xlsx')
df
```

Out[341]:

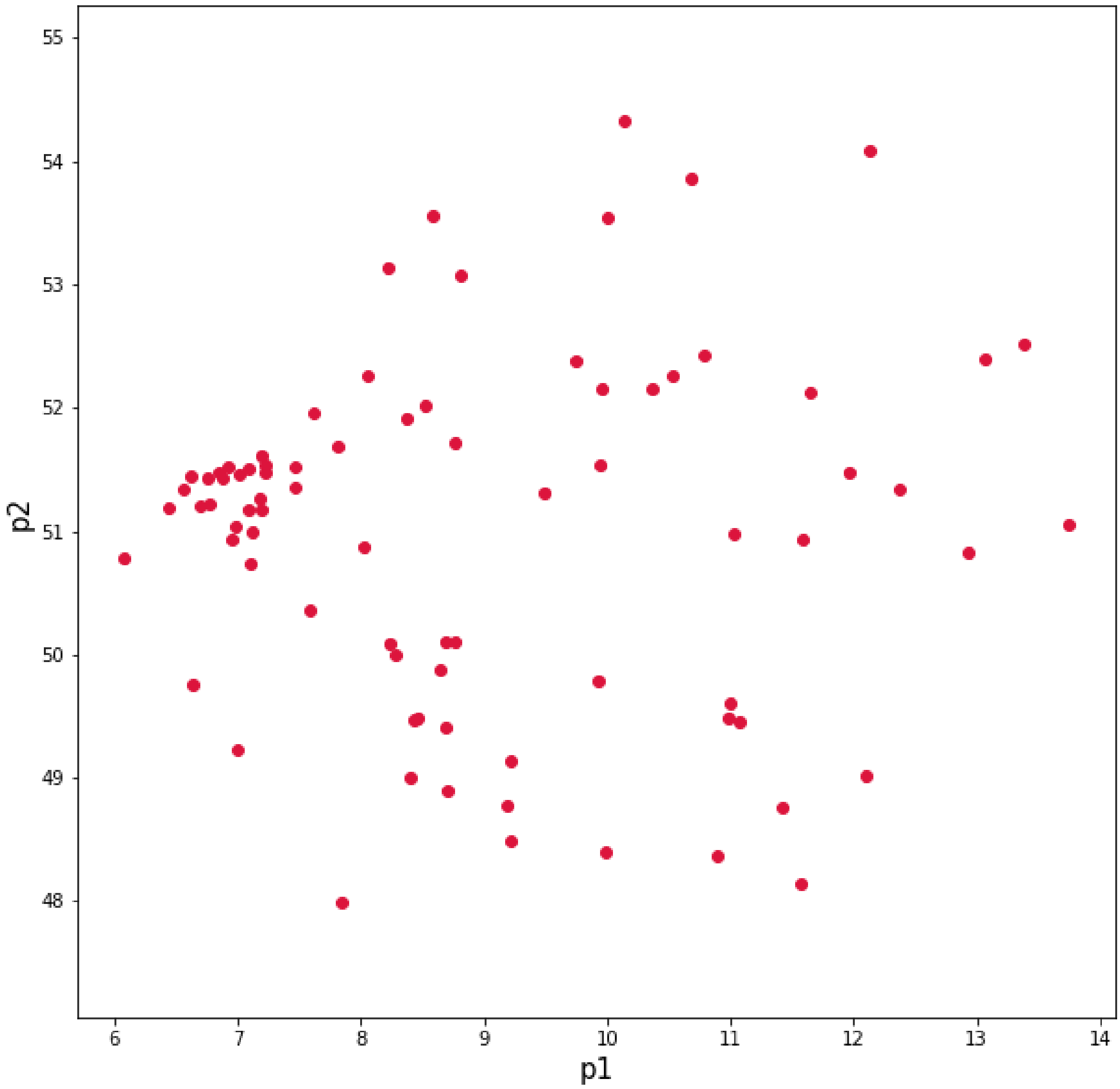
	Stadt	p1	p2	lambda
0	Berlin	13.388860	52.517037	4.877305e-02
1	Hamburg	10.000654	53.550341	4.696683e-02
2	München	11.575382	48.137108	4.520576e-02
3	Köln	6.959974	50.938361	4.348927e-02
4	Frankfurt am Main	8.682092	50.110644	4.181680e-02
...	...	...	...	...
75	Salzgitter	10.359315	52.150372	1.190748e-05
76	Moers	6.628430	51.451283	6.096632e-06
77	Siegen	8.022723	50.874980	2.572016e-06
78	Hildesheim	9.951305	52.152164	7.620790e-07
79	Gütersloh	8.378208	51.906400	9.525987e-08

80 rows × 4 columns

b) Plotten Sie die Koordinaten der Städte (x-Achse Längengrad, y-Achse Breitengrad)

In [378]:

```
plt.figure(figsize=(10,10))
plt.scatter(df['p1'], df['p2'], c='crimson')
plt.xlabel('p1', fontsize=15)
plt.ylabel('p2', fontsize=15)
plt.axis('equal')
plt.show()
```



c)

Optimierungsmodell Formen Sie das Problem $\mathbb{P}^l_\lambda$ für $l = \infty$ in ein lineares Problem um und begründen Sie Ihre Umformulierungen.

$\mathbb{P} : \min_{x\in\mathbb{R}^2} F(x) = \begin{bmatrix} \|z-p^1\|_\infty \\ \|z-p^2\|_\infty \\ \vdots \\ \|z-p^{80}\|_\infty \end{bmatrix}$ also $M \in \mathbb{R}^2$ und

$f(z) = max_{i=1,...,80} \|z-p^i\|_\infty$.

Als Epigraphumformulierung erhält man das äquivalente Problem

$\mathbb{P}_{epi} : \min_{z,\alpha}$ s.t $f(z) \leq \alpha,$

wobei die Nebenbedingung von $\mathbb{P}_{epi}$ ausgeschrieben

$\max_{i=1,..,80} \|z-p^i\|_\infty \leq \alpha$ lautet. Da das Maximum von 80 Zahlen genau dann unter der Schranke α liegt, wenn alle 80 Zahlen unter α liegen, lässt sich diese Restriktion äquivalent zu

$$\|z-p^i\|_\infty \leq \alpha, i = 1, \dots, m,$$

umformulieren und wir erhalten die Äquivalenz von $\mathbb{P}$ zu

$$\mathbb{P}_{epi} : \min_{(z,\alpha)} \alpha \quad s.t \quad \|z-p^i\|_\infty \leq \alpha, i = 1, \dots, m.$$

Fassr man α als Radius auf, so versucht man also die Kugel mit Mittelpunkt $\tilde{z}$ und minimalem Radius $\tilde{\alpha}$ zu finden, die alle Punkte $p^1, \dots, p^{80}$ enthält.

d) Optimierungsmodell

Hinweis: Für die Installation und den Umgang mit **gurobipy** oder **scipy** schauen Sie sich am besten die Einführungen im Ilias an.

Lösen Sie P^l_λ mit $I = 80$ und $l = \infty$.

Geben Sie einen optimalen Standort x^* an und plotten Sie diesen in ihrem Plot aus Teil b).

In [352]:

```
from scipy.optimize import minimize
from numpy import linalg as LA
def min_func(x):
    ps = df[['p1','p2']].values
    lambda_vec = df['lambda'].values
    norm_vec = LA.norm(x - ps, np.inf, axis=1)
    return np.sum(norm_vec*lambda_vec)
x0 = [0,0]
sol = minimize(min_func, x0, method='Nelder-Mead', tol=1e-6)
```

In [376]:

```
plt.figure(figsize=(10,10))
stadt = plt.scatter(df['p1'], df['p2'], c='crimson')
opt = plt.scatter(sol.x[0],sol.x[1], color='darkgreen', label= 'opt')
plt.xlabel('p1', fontsize=15)
plt.ylabel('p2', fontsize=15)
plt.legend((stadt, opt),
           ('stadt', 'opt'),
           scatterpoints=1,
           loc='lower left',
           ncol=3,
           fontsize=12)
plt.axis('equal')
plt.show()
```