گزارش پروژه پایانی شبیه سازی

نگین مشایخی(۹۸۲۴۳۰۵۴) و پارسا نوری(۹۸۲۴۳۰۶۷)

بخش اول) مقایسه ویژگی های Scale-Free، Erdos-Renyi، و Watts-Strogatz

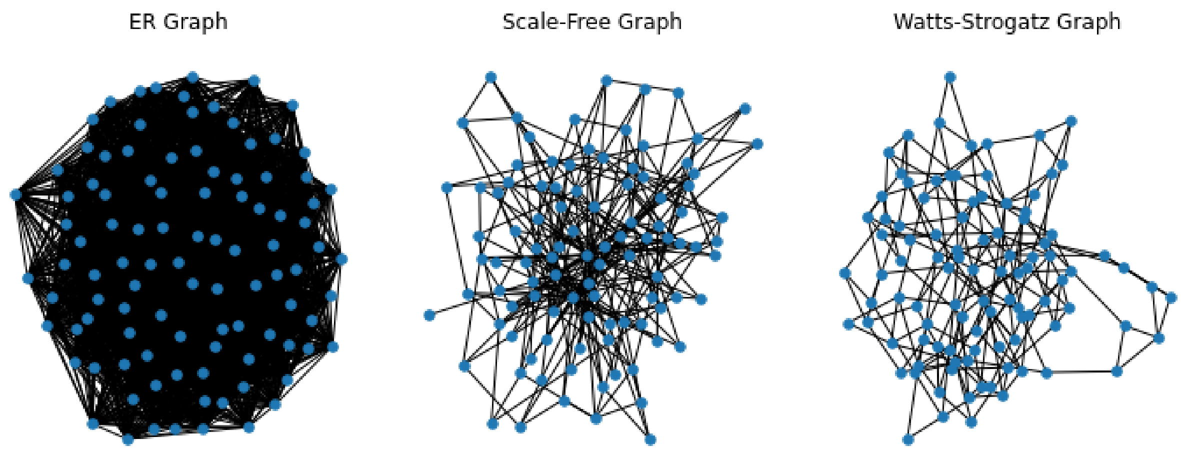
در میان مدل‌های نمودار داده شده (Scale-Free، Erdos-Renyi، و Watts-Strogatz)، تعیین اینکه کدام یک بدون مقادیر پارامتر خاصی بیشترین اتصال جبری را داشته باشد، دشوار است. اتصال جبری یک گراف نه تنها به درجه متوسط بلکه به سایر ویژگی های ساختاری مانند توزیع درجه ها، ضریب خوشه بندی و توپولوژی شبکه نیز بستگی دارد.

با این حال بنابر خواست سوال و با تنظیم پارامترهای داده شده مقدار این ویژگی برای ER از بقیه بیشتر است.

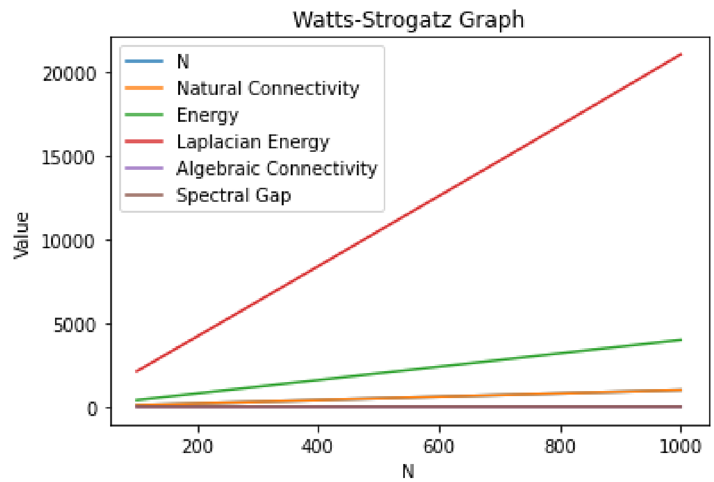
```
:ER Graph
Natural Connectivity: 1000.000000000001
Energy: 498460.0000000006
Laplacian Energy: 249193676.00000006
Algebraic Connectivity: 441.6579144335563
Spectral Gap: 468.1862612539235

:Scale-Free Graph
Natural Connectivity: 999.9999999999995
Energy: 5982.0
Laplacian Energy: 99688.0
Algebraic Connectivity: 1.2813750310921237
(Spectral Gap: (5.098657890670012+0j

:Watts-Strogatz Graph
Natural Connectivity: 1000.0000000000001
Energy: 4000.000000000002
Laplacian Energy: 21057.999999999996
Algebraic Connectivity: 0.22403023949332818
Spectral Gap: 0.23289373565012728
```

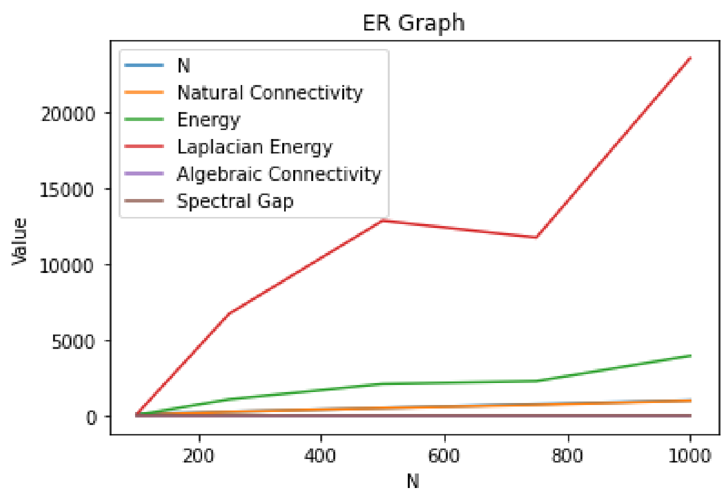
مقایسه پارامترهای دیگر نیز به این صورت خواهد بود:

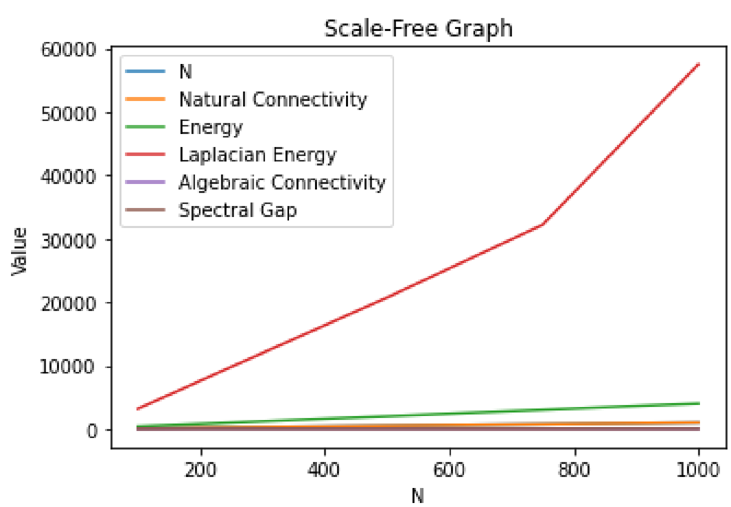
```
Natural Connectivity: ER=WS>SF
Energy: ER>SF>WS
Laplacian Energy: ER>SF>WS
Algebraic Connectivity: ER>SF>WS
Spectral Gap:  ER>SF>WS
```


ER Graph
Scale-Free Graph
Watts-Strogatz Graph

مقایسه برای سایز های مختلف گراف:(یکسان بودن میانگین درجه در گراف ها لحاظ شده است)





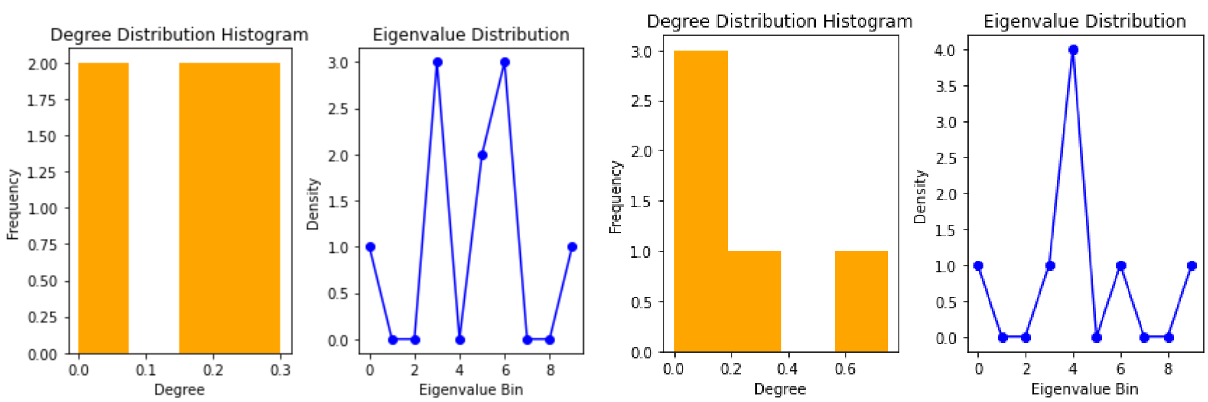


بخش دوم) پیاده سازی الگوریتم RSRBG

$$\begin{cases} n_1 = nd_2 / (d_1 + d_2) \\ n_2 = nd_1 / (d_1 + d_2) \end{cases}$$

پیچیدگی الگوریتم: O(n1*d1)

همچنین چند نمونه از مدل ساخته شده و ویژگی های خواسته شده آنها محاسبه شده و در جدول آمده است.



	nc	e	le	ac	sg
0	10.0	34.0	162.0	1.496607	2.365344
1	15.0	58.0	320.0	1.227868	2.177493
2	8.0	30.0	144.0	2.354249	3.000000

در حالت ناهمبند شدن گراف، الگوریتم تمام نمیشود.برای رفع این مشکل از یک مکانیسم تایم اوت استفاده کردیم که اگر مدت اجرای الگوریتم از ۴ ثانیه بیشتر شد الگوریتم از اول اجرا شود که این به معنای ناهمبند بودن است.الگوریتم تا زمانی اجرا میشود که یک گراف همبند تولید شود و الگوریتم تمام شود.بنابر این از تعداد دفعات تایم اوت شدن برای یک بار همبند شدن احتمال ناهمبندی را میتوان محاسبه کرد:

```
G_RSRBG, disconnected_count = RSRBG(50,50,15,15,draw_graph=False)
print(disconnected_count)
```

✓ 48.2s

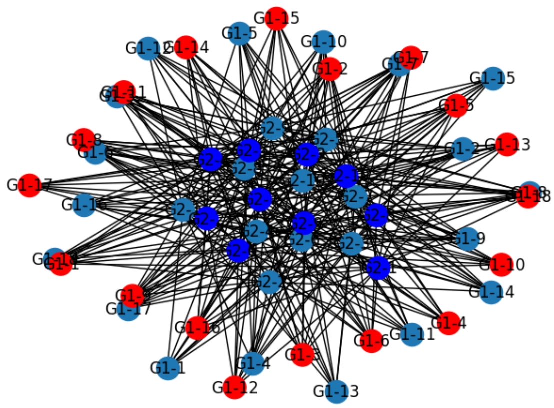
```
12
```

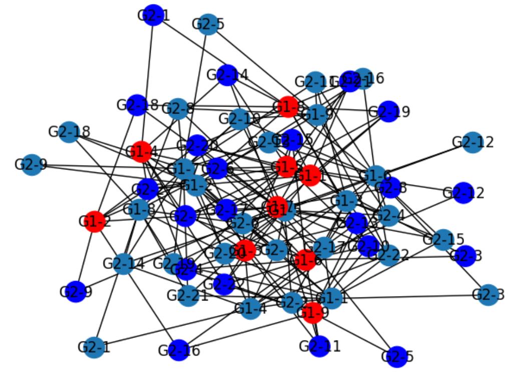
در اینجا احتمال 0.083 است.

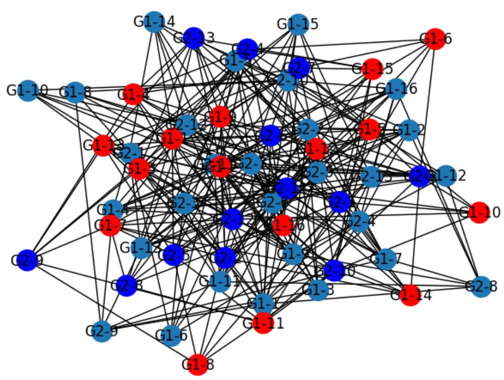
به طور میانگین برای گراف های مختلف این احتمال 0.1 است.

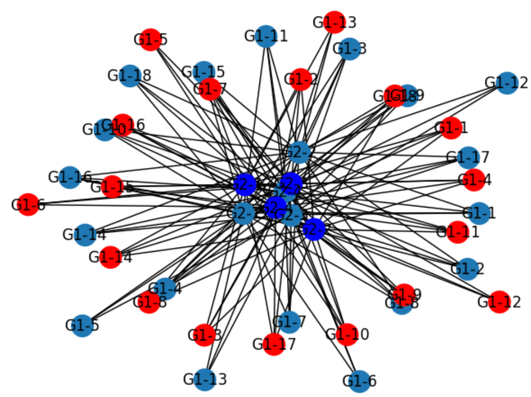
بخش سوم) پیاده سازی الگوریتم RSRG

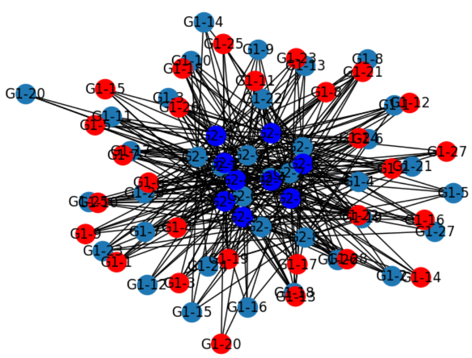
Complexity = O(n1*d1/p)

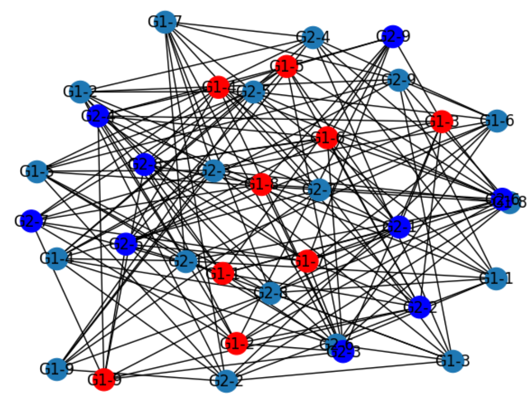




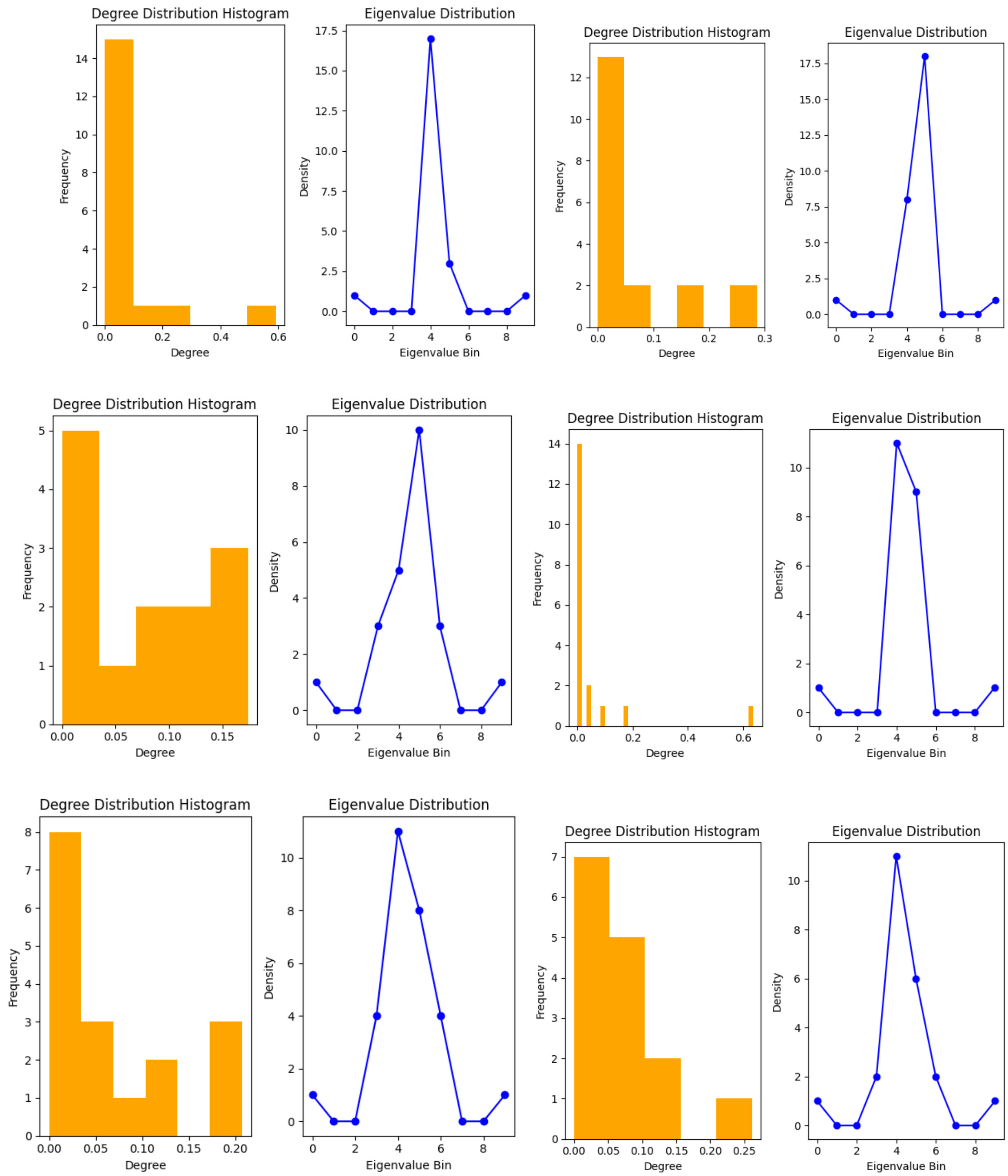








در اینجا نمودارهای برخی مدل های ساخته شده آورده شده است و باقی نمودارها در کد وجود دارد.



	n	d1	d2	p	nc	e	le	ac	sg
0	31.0	7.0	2.0	0.293274	31.0	91.0	2.146237	0.0	4.036559
1	28.0	8.0	2.0	0.664750	28.0	160.0	1.629630	0.0	9.505291
2	22.0	3.0	9.0	0.853872	22.0	68.0	1.722944	0.0	3.978355
3	23.0	5.0	2.0	0.625487	23.0	100.0	1.707510	0.0	7.339921
4	29.0	6.0	7.0	0.566979	29.0	140.0	1.822660	0.0	8.416256
5	18.0	4.0	8.0	0.541521	18.0	78.0	1.509804	0.0	8.398693
6	29.0	3.0	5.0	0.421813	29.0	123.0	1.896552	0.0	7.041872
7	40.0	7.0	8.0	0.431201	40.0	266.0	1.819231	0.0	11.662821
8	37.0	3.0	10.0	0.758030	37.0	167.0	1.879880	0.0	6.166667
9	32.0	6.0	9.0	0.775298	32.0	174.0	1.685484	0.0	7.798387

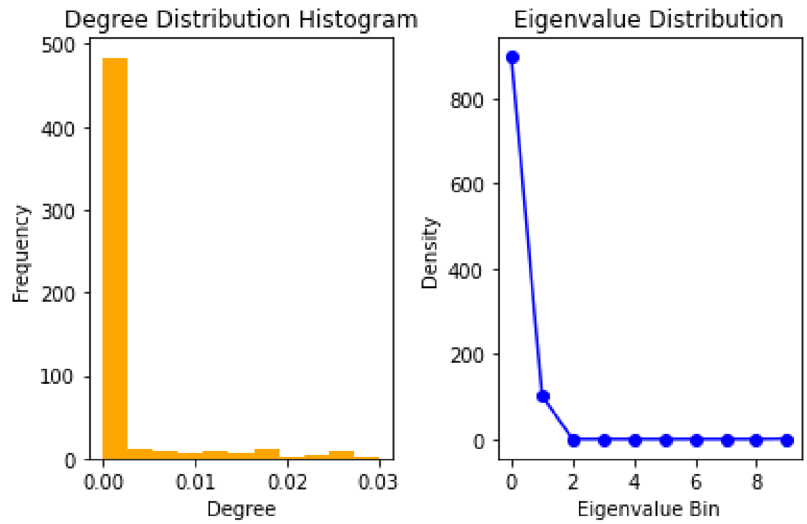
مقایسه با دوبخشی تصادفی شبه منتظم:

نمودار های این بخش دارای توزیع شبیه به توزیع نرمال برای مقدار ویژه هستند در صورتی که نمودارهای بخش ۲ پراکندگی مقدار ویژه بیشتری دارند.

از طرفی نمودار توزیع درجه نیز در بخش قبل به ۲ گروه درجه خاص محدود میشد در صورتی که پراکندگی در نمودارهای بخش ۳ بیشتر دیده میشود.

مقایسه با اردوش-رنی:

همچنان نمودار های توزیع درجه و مقدار ویژه برای ER هم رسم شده اند که میبینیم پراکندگی در هر دو نمودار در این حالت کمتر از نمودارهای تصادفی شبه منتظم است.



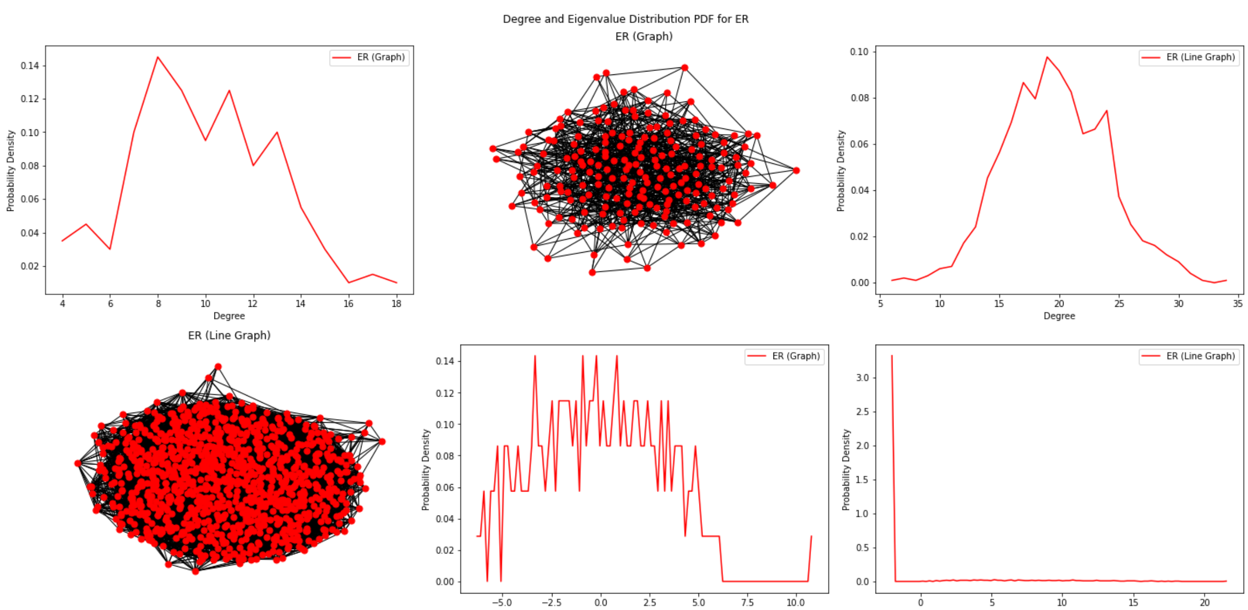
خواسته چهارم)

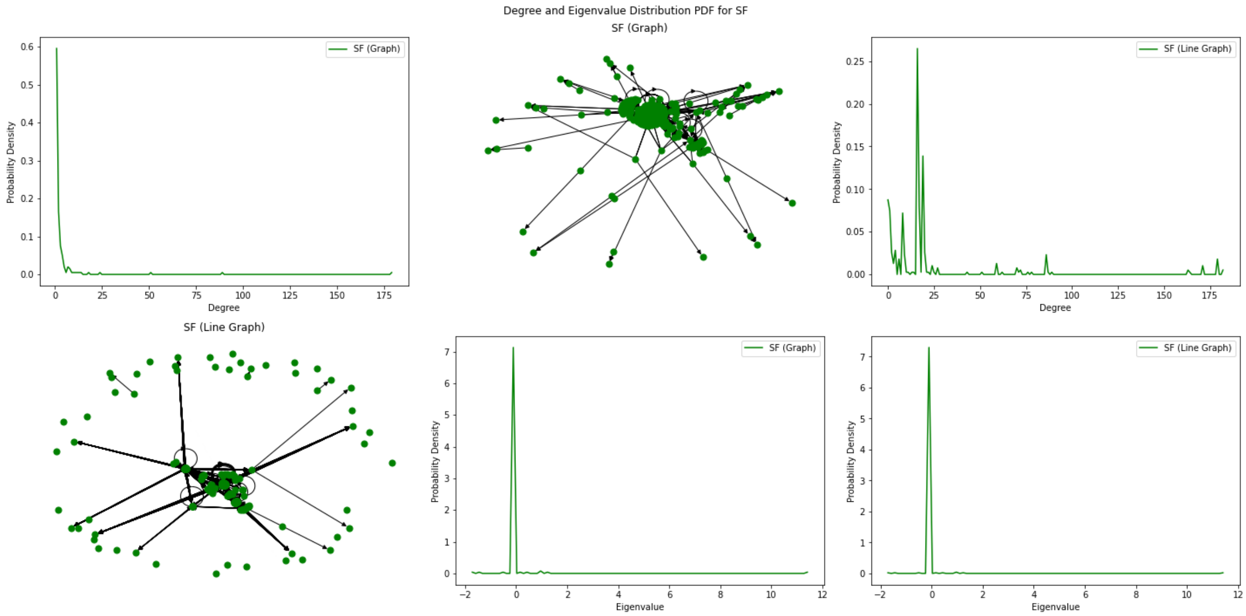
در شکل های زیر هر شبکه با یک رنگ مشخص شده.

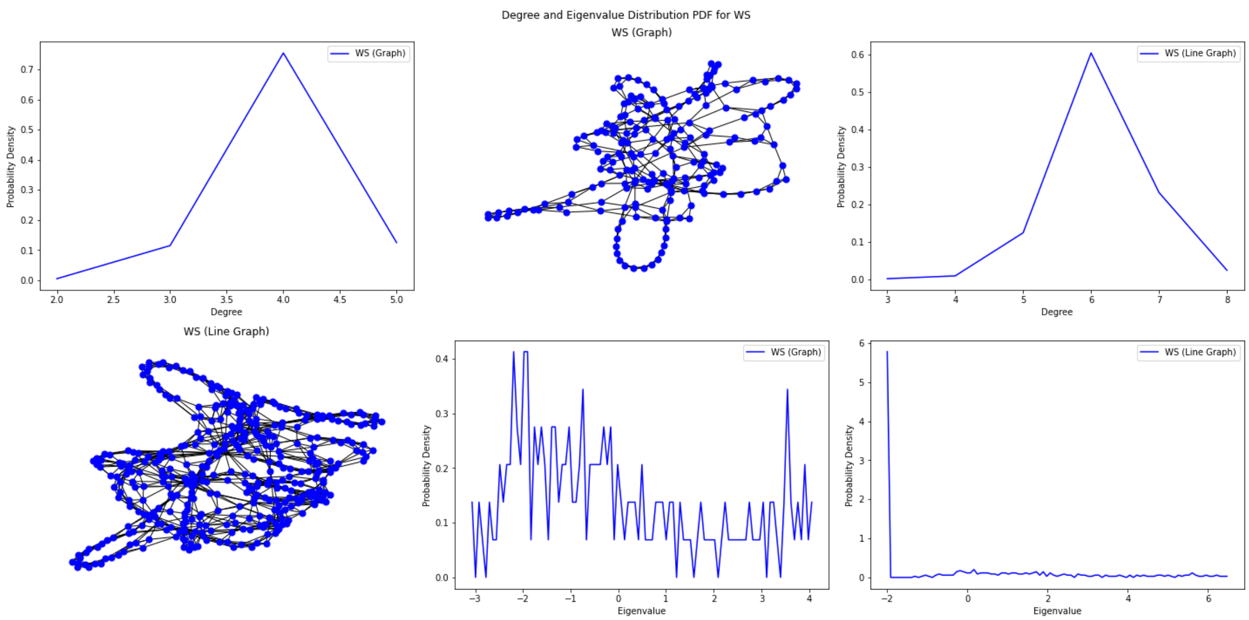
گراف اصلی در هر شبکه شباهت زیادی با گراف خط آن دارد.

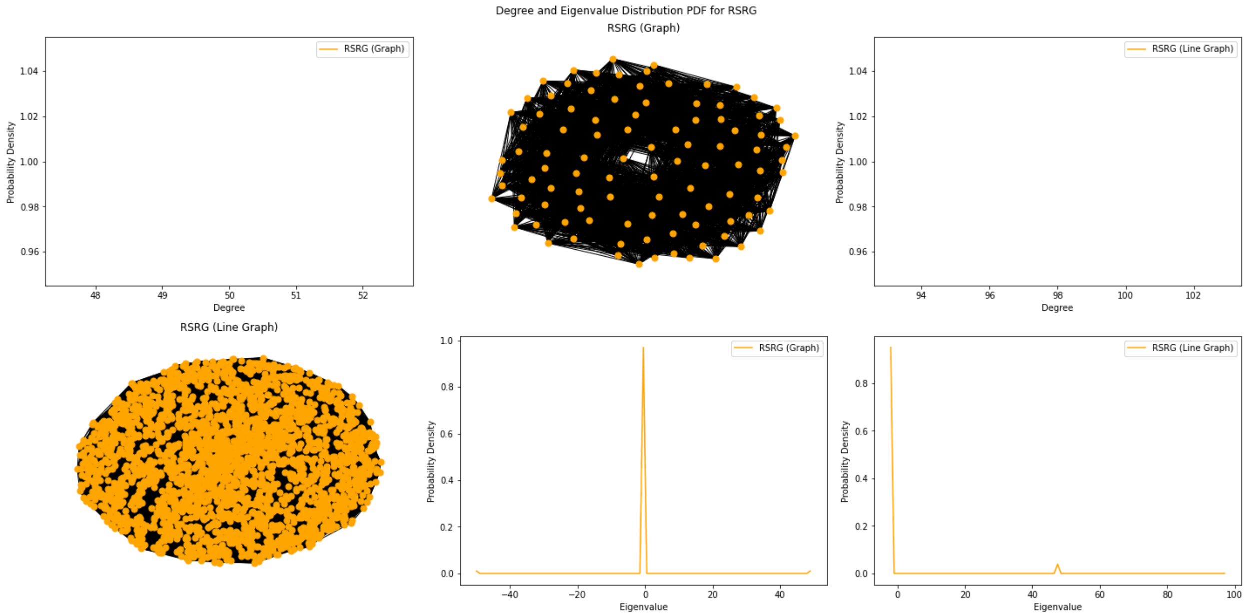
از طرفی با مقایسه توزیع درجه و مقایسه چگالی احتمال در هر دو گراف(گراف خط و گراف اصلی) متوجه شباهت زیاد آنها می شویم.

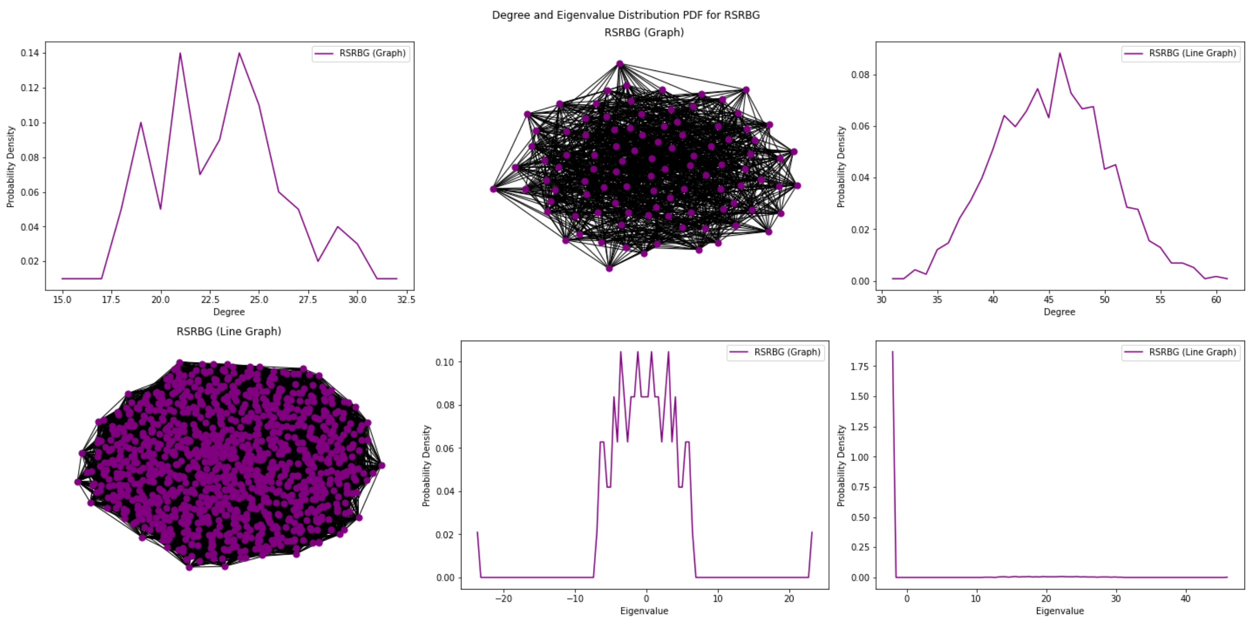
همانطور که خواسته شده سایز گراف ها ۲۰۰ فرض شده(که شرایط مشابه باشد) و احتمال ناهمبندی در مدل اردوش-رنی ۰.۰۵ است که از فرمول $p=2p_c$ ، $p_c=\ln n/n$ محاسبه شده است.




Degree and Eigenvalue Distribution PDF for SF
SF (Graph)
SF (Line Graph)
Probability Density
Degree
Eigenvalue

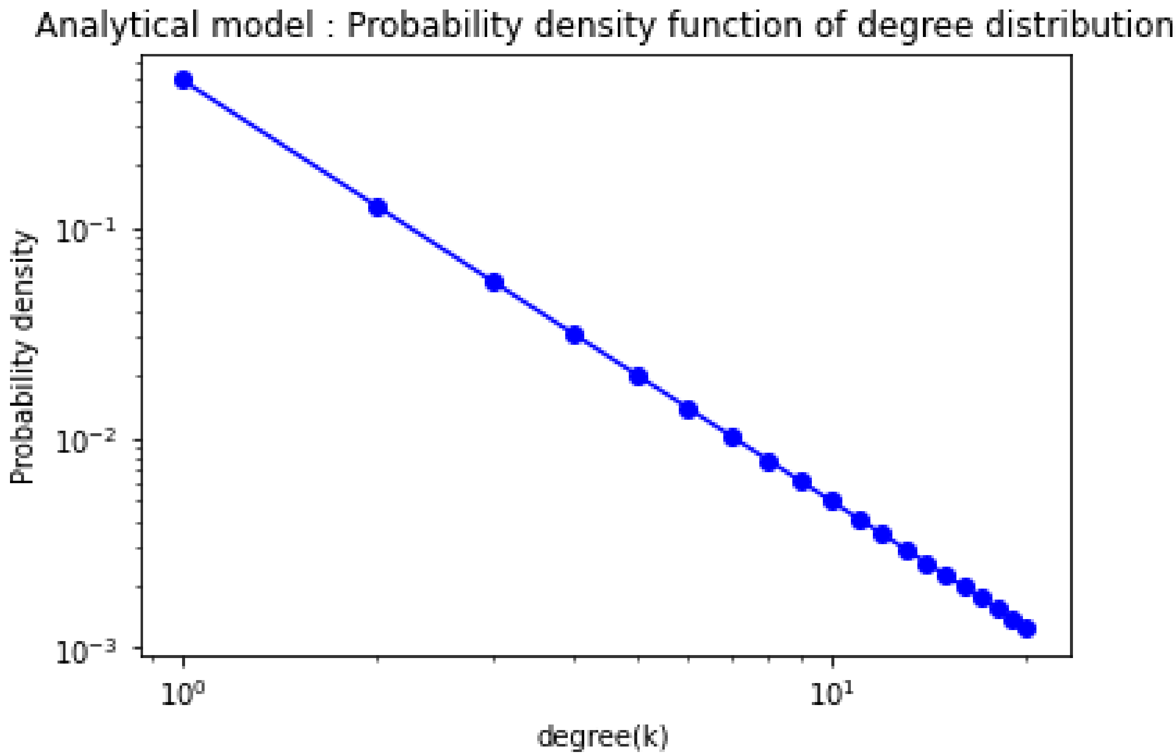

Degree and Eigenvalue Distribution PDF for WS
WS (Graph)
WS (Line Graph)
Probability Density
Degree
Eigenvalue



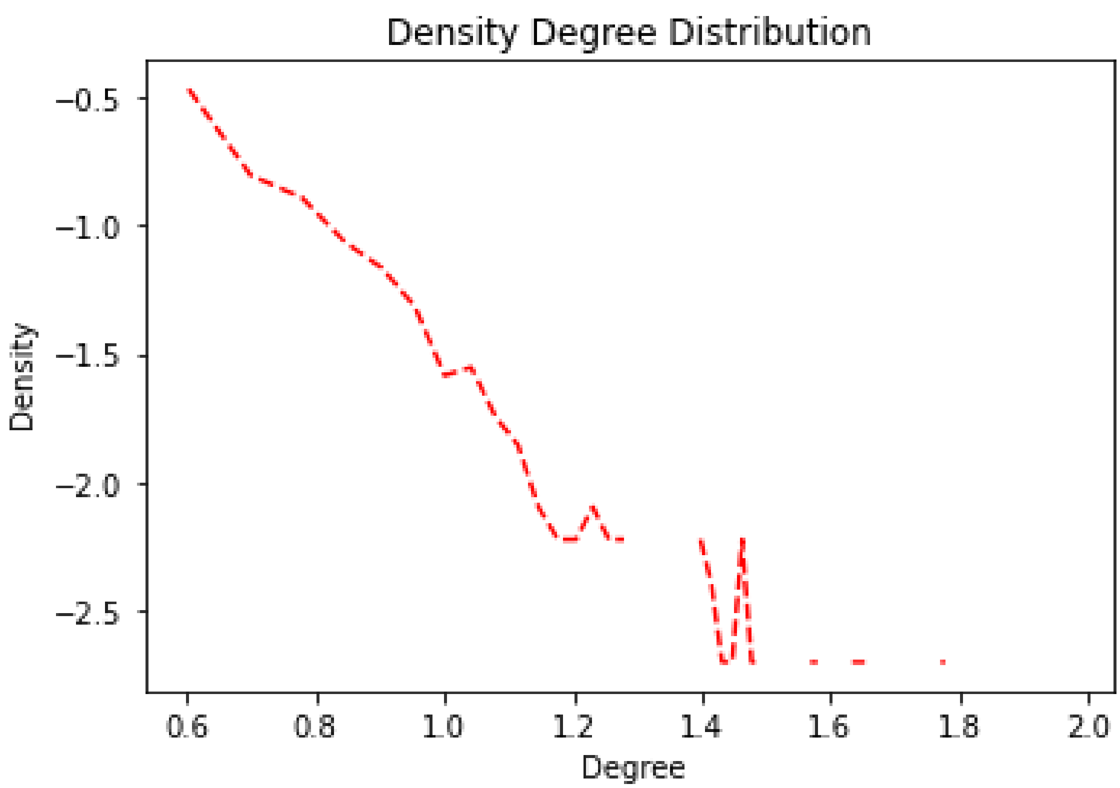


خواسته پنجم)

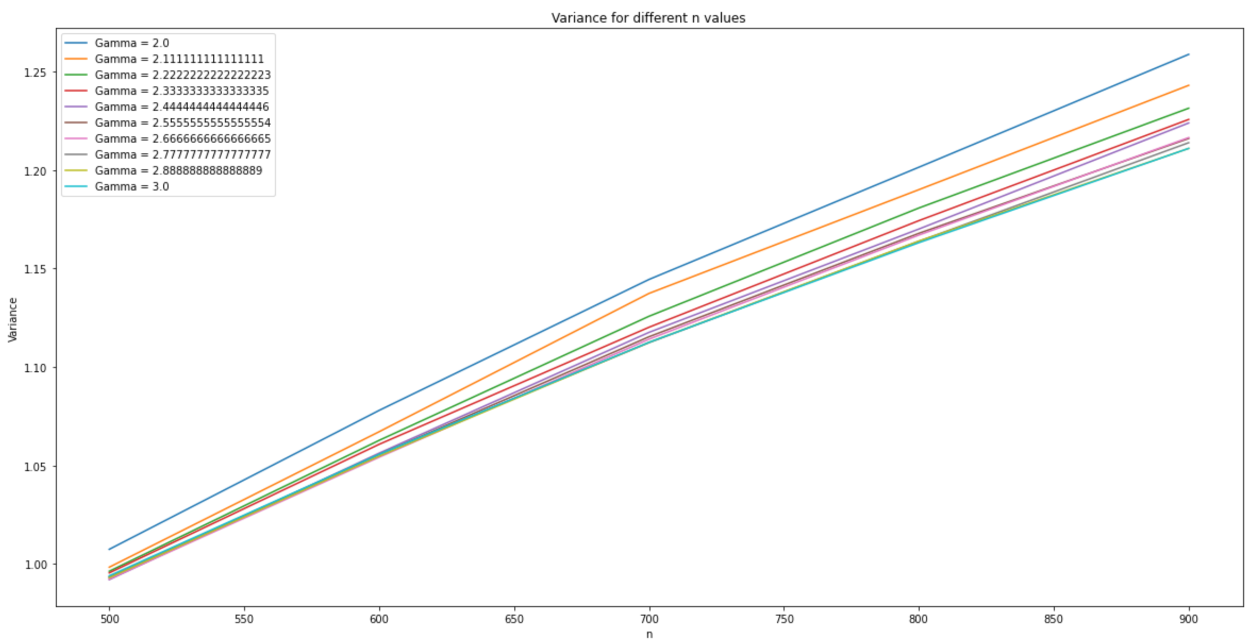
در این سوال ابتدا با استفاده از مدل تحلیلی چگالی توزیع درجه گراف را رسم میکنیم(این نمودار در هر دو محور لگاریتمی است)



سپس با پارامترهای n=500 و avg_degree=4 هم یکبار مدل را میسازیم و نمودار آن را رسم میکنیم.



همانطور که مشاهده میشود طبق انتظار روند کلی نمودار یکسان است اما اختلافی در مقادیرشان وجود دارد که ناشی از خطای شبیه سازی و عامل رندوم و ... میباشد.
برای محاسبه ی این اختلاف از واریانس فاصله استفاده میکنیم.همانطور که مشاهده میشود برای مقادیر گاما مختلف شبیه سازی را برای تعداد گره های مختلف انجام دادیم.(همچنین برای اینکه شبیه سازی درست باشد بیش از یکبار برای هم جفت تعداد گره و گاما واریانس فاصله را محاسبه کرده و میانگین گرفتیم.)
شکل زیر نتیجه شبیه سازی را برای گاما های مختلف با رنگ های متفاوت نشان میدهد.
قابل توجه است که تغییرات نمودار y نسبت به نمودار x بسیار کمتر است (برای نمایش واضح تر مقیاس های آنها متفاوت است اما نتایج حاکی از کم بودن واریانس میباشد)

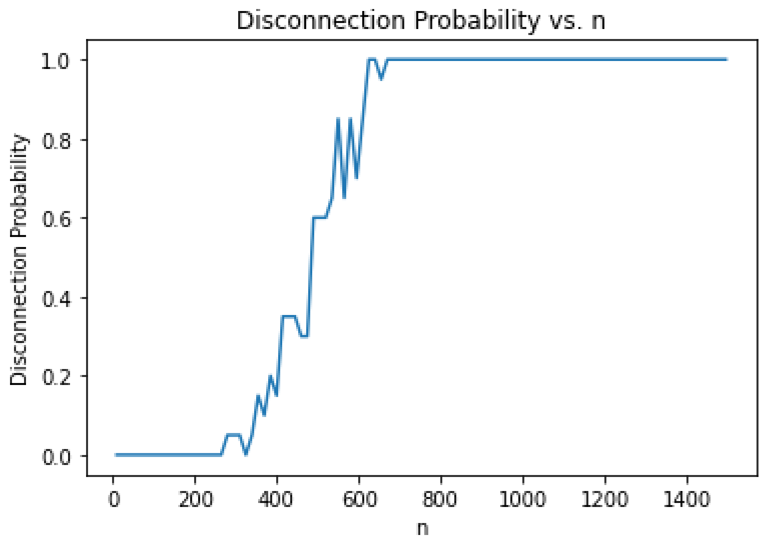


خواسته ششم)

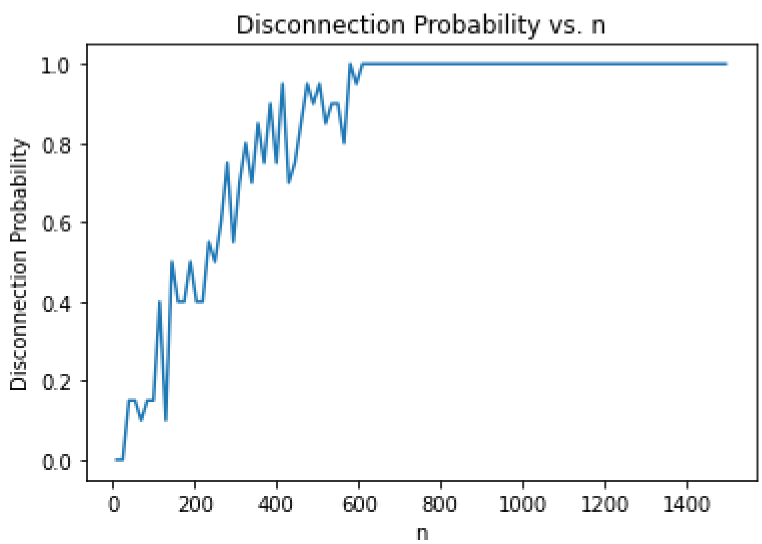
در این سوال ۲ گراف خواسته شده با تعداد نود ۵۰۰ و تعداد یال ۱۵۰۰ را میسازیم.برای هر تعداد از تعداد یال های قطع شده از گراف ،شبیه سازی را ۲۰ بار تکرار میکنیم و احتمال ناهمبندی را برای هر تعداد در یک نمودار نمایش میدهیم.

نمودار ها به شکل زیر هستند:

برای گراف منتظم:

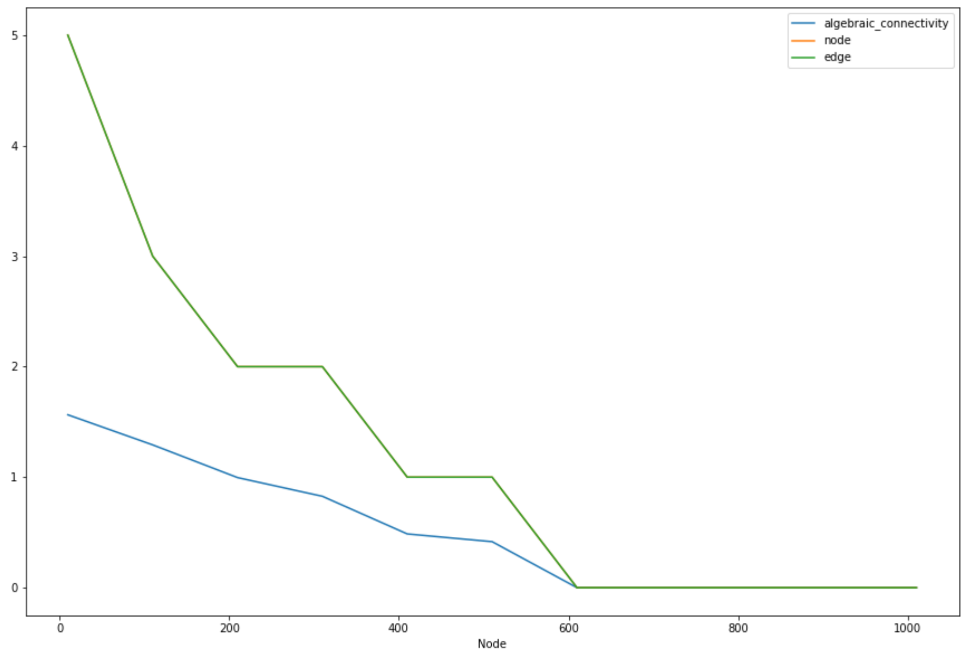


برای گراف RSRG :

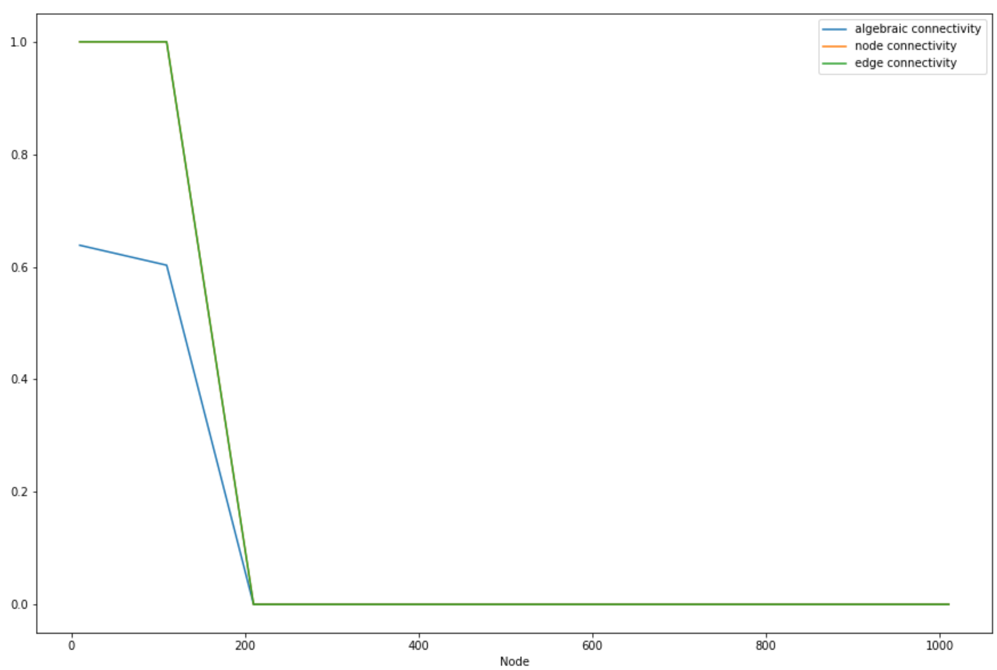


همچنین معیار های اتصال پذیری نود و یال و جبری نیز برای این دو گراف به طور میانگین برای تعداد یال های حذف شده رسم شده است.

گراف منتظم:



گراف RSRBG:



خواسته هفتم)

در این بخش گراف های بخش های قبل ساخته شده.برای یکسان بودن شرایط شبیه سازی سعی شده متوسط درجه همه گراف ها تقریبا برابر باشند که در کد زیر مشخص است.(با تنظیم پارامترهای مدل این کار امکان پذیر است)

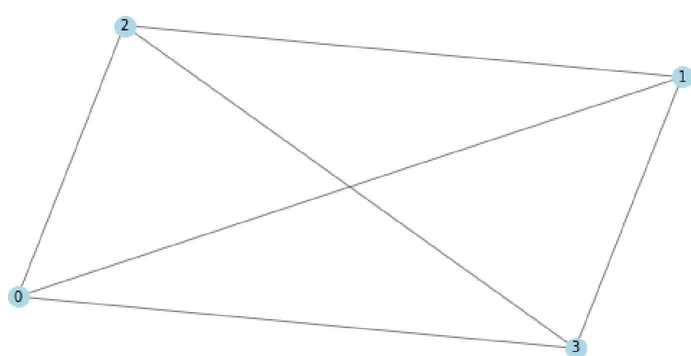
```
(,G_ER = nx.erdos_renyi_graph(n=500, p=0.01
(G_SF = nx.scale_free_graph(n=3000
G_WS = nx.watts_strogatz_graph(n=3000, k=6, p=0.1
G_RSRG = RSRG(150,1,2,0.5
G_RR = nx.random_regular_graph(6, 2000
(G_RSRBG = RSRBG(d1=2,d2=1,n1=50,n2=30
```

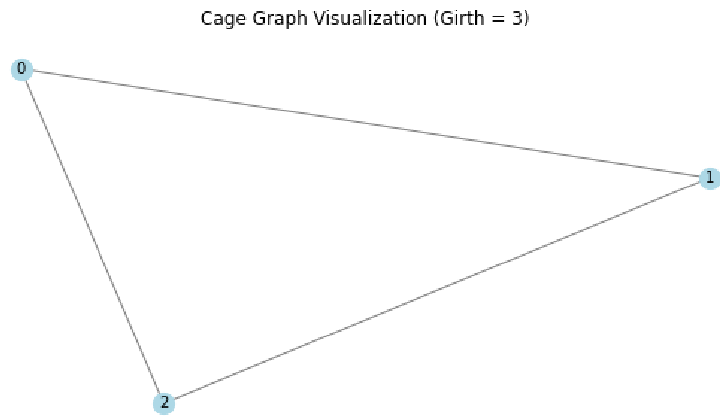
خروجی کمر برای گراف ها نوشته شده (برای یکبار شبیه سازی)

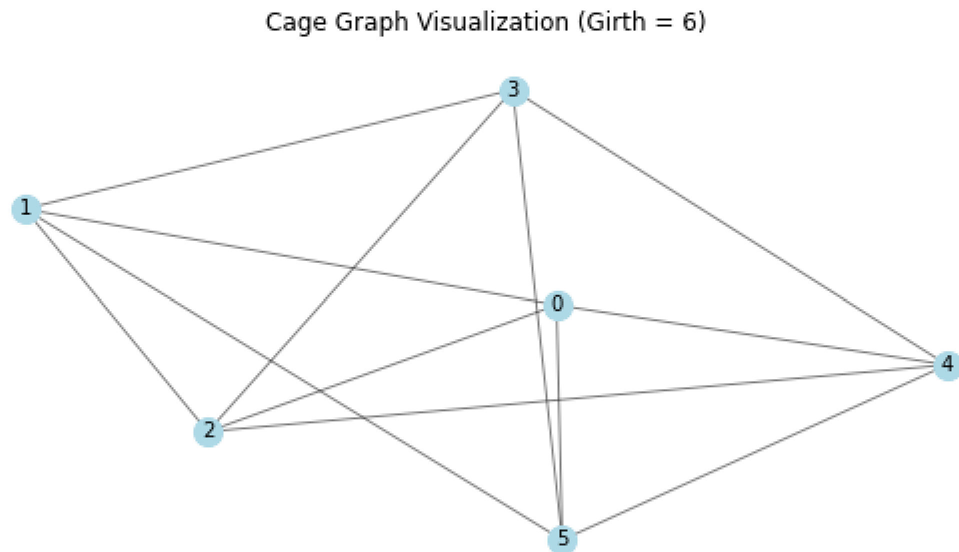
```
Girth of ER :  4 -> degrees:  4.92
Girth of SF :  3 -> degrees:  4.383333333333334
Girth of WS :  3 -> degrees:  6.0
Girth of RR :  3 -> degrees:  6.0
Girth of RSRG :  6 -> degrees:  7.6
Girth of RSRBG :  4 -> degrees:  6.4
```

همچنین شکل گراف cage برای هر کدام در زیر آمده است.

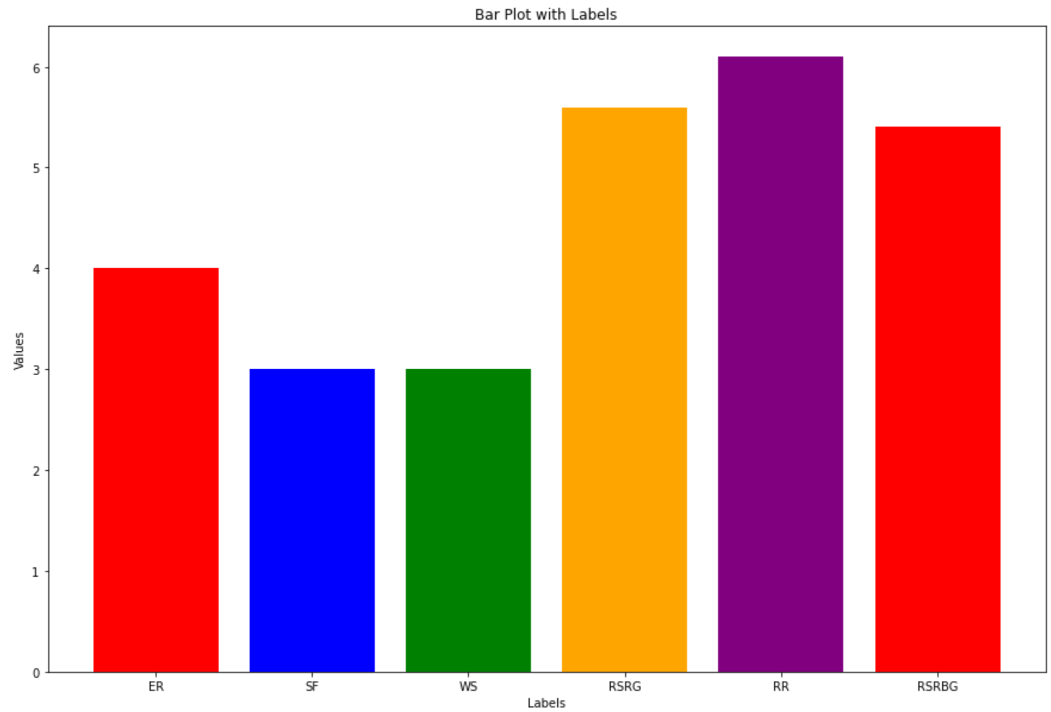
Cage Graph Visualization (Girth = 4)





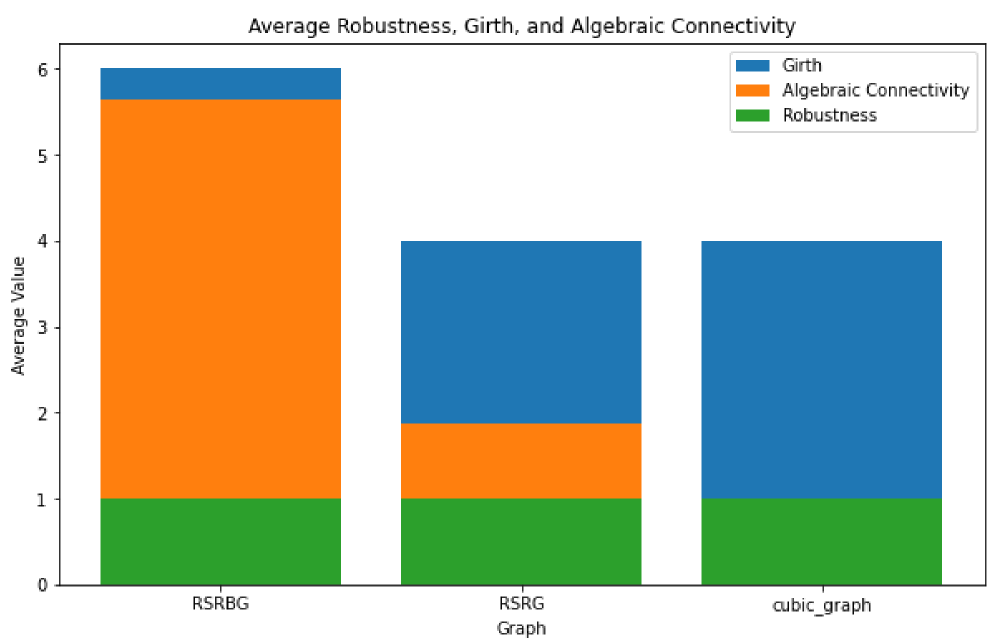


حال میخواهیم شبیه سازی را برای هر گراف به تعدادی مشخص تکرار کنیم تا نتایج قابل اعتماد تر باشند.از این روز برای گراف های نام برده شده شبیه سازی را مجدد به تعداد ۱۰ بار(به علت توان پردازشی از اجرای ۱۰۰۰ بار برای هر گراف معذورم) اجرا کرده و میانگین کمر را برای هر گراف رسم کردیم.



در گراف به طور کلی داشتن کمر بالاتر به معنای داشتن اتصال پذیری جبری بالاتر و استحکام بیشتر شبکه است.در این نمودار به خوبی مشاهده میشود که گراف منتظم دارای استحکام و کمر بیشتری است.

در ادامه برای ۳ گراف خواسته شده میانگین ۱۰ اجرای شبیه سازی برای مقادیر اتصال پذیری و کمر و robustness آمده است.



خواسته هشتم)

خواسته نهم)