

Décomposition d'images en ondelettes monogéniques

Introduction à la Recherche en Laboratoire

Alexis Breust

16 mai 2013

« Qui recherche la lune, ne voit pas les étoiles. » - *Proverbe français*

1 Un début à tout

1.1 Laboratoire et équipe

Cette *Introduction à la Recherche en Laboratoire* a pris place au sein du *Laboratoire Jean Kuntzmann* et sous la supervision de Valérie Perrier. Le très bon accueil qui m'a été fait ainsi que l'amabilité omniprésente ont rendu mon projet particulièrement agréable. Un ordinateur, et les ressources informatiques de calcul numérique, m'ont été mis à disposition très tôt, ce qui m'a permis de me consacrer au projet dès les premières heures. De plus, un badge et une clé m'ont autorisé à profiter de la souplesse d'un emploi du temps que je m'imposais régulièrement. C'est donc pour ses conseils et pour l'autonomie dans mon travail qu'elle m'a donné que je tiens à remercier particulièrement Valérie Perrier.

1.2 Objectifs

Force est de constater que la technologie — et par là-même l'image — a pris de l'ampleur ces dernières années. Qui ne se retrouve pas à regarder des photos sur son portable ou des vidéos sur son smartphone ? Et c'est avec l'essor du numérique (caméra, appareil photo) que l'on a déjà commencé à remplir les disques durs et les cartes mémoires. Il nous faut donc trou-

ver de nouveaux moyens de compression (signal/image/vidéo). Nous nous rendons compte que l'approche par une analyse multi-échelle, par la transformée en ondelettes par exemple, permet d'extraire des primitives à une échelle optimale. Ceci permettant une compression selon différents critères, plus poussée que les standards actuels.

Mon projet s'appuie principalement sur un article récent ([3], 2009) qui étend les ondelettes classiques à des signaux monogéniques dans le but de permettre la recherche d'objets directionnels. Mais nous allons dans un premier temps revenir sur la construction de la transformée en ondelettes continue classique des signaux et des images, avant de poursuivre son extension à des signaux monogéniques. Le tout a été codé sur MatLab, dont les résultats sont disponibles dans ce présent rapport et le code source sur la page web dédiée au projet¹. L'approche de ce rapport se veut avant tout pédagogique vis à vis du lecteur. Les étapes enchaînent les constructions mathématiques agrémentées d'un maximum d'exemples.

Ce rapport utilise également l'article [1] de novembre 2012 de Clausel, Oberlin et Perrier sur la démodulation d'images par transformée en ondelettes monogéniques synchrocompressées dans lequel je puise plus que de l'inspiration.

1. http://ensiwiki.ensimag.fr/index.php/BREUST:_Décomposition_d'image_en_ondelettes

2 Au cœur des images

2.1 Pour un problème d'échelle...

La traditionnelle transformée de Fourier 1D a trois défauts majeurs qu'on ne saurait ignorer :

- aucune information temporelle;
- peu économique;
- très instable.

Pour ce qui est de l'information temporelle, on se demande simplement quand la composante $\hat{s}(\nu)$ est arrivée. Information maintenant intemporelle : c'est arrivé, oui, mais je ne sais pas quand. La transformée de Fourier est peu économique dans le sens où même un signal constant (pas d'information contenue!) impose de réaliser une somme de séries infinies ou calcul intégral. Enfin, elle est très instable car la moindre perturbation locale aura de l'influence sur l'ensemble du spectre. C'est ce que nous montre la Figure 2.

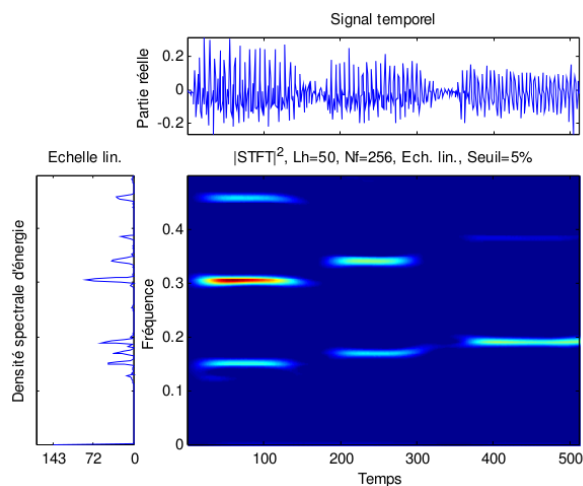
L'analyse de Fourier ne semble plus suffisante. La solution? Une représentation temps-fréquence, qui nécessite alors deux paramètres : un pour dire quoi, l'autre pour dire quand. Une représentation typique de temps-fréquence sont les partitions de musiques. La hauteur et la forme de la note donnent la fréquence et l'ordre des notes donne l'aspect temporel.



D'ici à dire que Mozart aurait été bon en traitement d'image, il n'y a qu'un pas que je ne franchirai pas.

2.2 ... on ajoute des barreaux!

De manière grossière, on va appeler multi-échelle une transformée capable de donner aussi bien des informations sur le local comme le global. C'est ainsi que naissent les ondelettes — dont on verra la formulation mathématique dans la partie suivante.



Ce graphique présente l'analyse typique que peuvent nous donner une analyse par une transformée en ondelettes. On y distingue le signal à traiter en haut, ainsi que l'information en deux dimensions en fréquence et en temps.

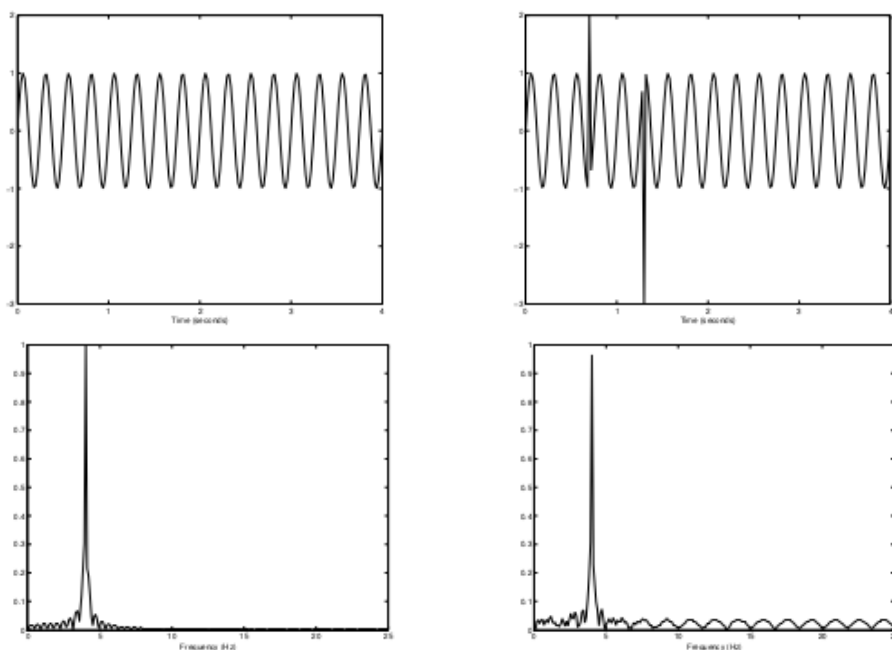


FIGURE 1 – En haut, un sinus pur et un perturbé. En bas, les transformées de Fourier correspondantes.

Chaque accord est représenté dans le temps et l'on distingue parfaitement les fréquences utilisées. Plus encore, ce graphique nous dévoile la notion d'énergie : on distingue un degré d'intensité dans chaque note.

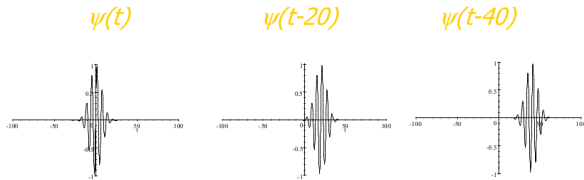
2.2.1 Une ondelette ?

On prend une fonction mère, oscillante et localisée dans le temps $\psi(t)$.

De cette fonction mère, nous pouvons créer une famille d'autres fonctions similaires par dilation.



Et également une autre famille par translation.



Nous obtenons un ensemble de fonctions de la forme $\psi_{a,b}(t) = \psi(\frac{t-b}{a})$ qui sont paramétrées par a et b , les coefficients de dilatation et de translation.

2.2.2 Une nouvelle dimension

Le problème, avec les images, est qu'on ne peut pas se servir de l'extension naturelle des ondelettes en 2D pour obtenir toutes les informations que l'on souhaite. Typiquement, la notion d'orientation est absente.

On se dit alors que le signal analytique, rappelé ci-après, est le moyen 1D pour accéder à l'information d'orientation. Ne pouvons-nous pas l'étendre à deux dimensions? Si, bien sûr, mais ce serait encore plus intéressant si on pouvait s'en servir avec nos bien pratiques ondelettes.

Et c'est ainsi que se forment les ondelettes monogéniques, chimère fille des ondelettes et du signal analytique.

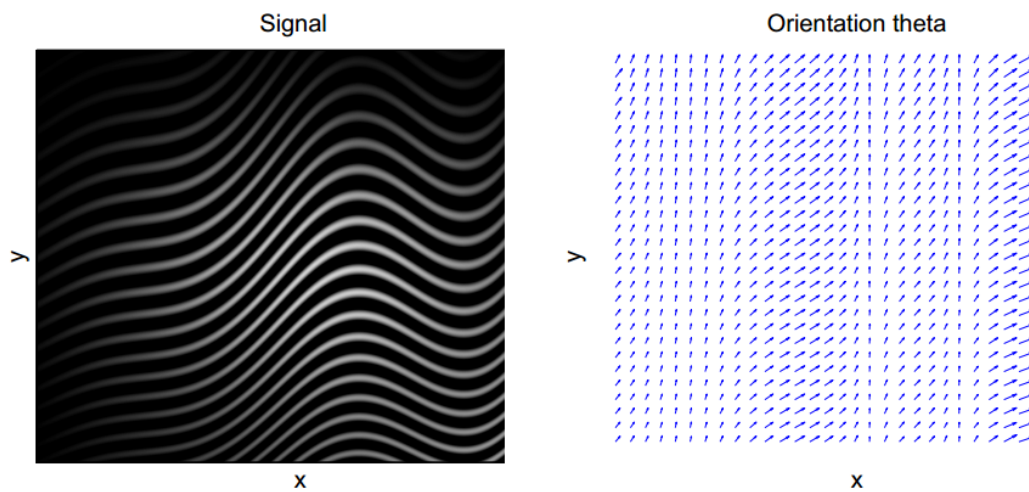


FIGURE 2 – Visualisation à droite de la composante θ de la transformée en ondelettes monogéniques du signal source à gauche. (Crédit : Kévin Polissano, 2012)

3 Au cœur des maths

Dans cette partie, nous retraçons l'évolution de la formulation mathématique des ondelettes monogéniques.

3.1 Signal analytique

3.1.1 Rappels sur la transformée de Fourier

On se place dans un contexte Hilbertien : on munit l'espace $L^2(\mathbb{C})$ du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int f \bar{g}$$

et sa norme associée

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

On définit alors la transformée de Fourier du signal s comme son produit scalaire avec $e^{i\omega \cdot}$, ce qui donne une fonction d'une fréquence :

$$\hat{s}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt$$

avec $\omega = 2\pi\nu$.

3.1.2 Transformée de Hilbert et signal analytique

Par construction, la transformée de Fourier d'un signal réel s est une fonction paire réelle \hat{s} . Si l'on décide de rassembler les fréquences négatives avec les positives, on crée alors

$$\hat{s}_{anal}(\omega) = \begin{cases} 2\hat{s}(\omega) & \text{si } \omega \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Quand on effectue la transformée de Fourier inverse de \hat{s}_{anal} , on obtient le signal original en partie réelle ainsi qu'une partie imaginaire.

$$s_{anal}(t) = s(t) + i\mathcal{H}_s(t)$$

Cette fonction, appelée signal analytique, est l'extension complexe d'un signal 1D, concept introduit par Gabor [2] en 1946. Sa partie imaginaire \mathcal{H}_s est la transformée de Hilbert de s , dont un simple calcul nous donne la transformée de Fourier

$$\widehat{\mathcal{H}_s}(\omega) = -i\varepsilon(\omega)\hat{s}(\omega)$$

où ε est la fonction signe.

L'avantage de cette représentation en tant que signal analytique est de permettre de retrouver des fonctions d'amplitude et de fréquence d'un signal. Par exemple, si $s(t) = A(t) \cos(2\pi\nu(t)t)$, alors $A(t) = |s_{anal}|$ et $\nu(t) = d \arg(s_{anal})/dt$. Ce sont ces propriétés que l'on retrouve dans le traitement des images.

3.2 Un peu de monogène

3.2.1 Transformée de Riesz

La transformée de Riesz est l'extension naturelle de la transformée de Hilbert à des espaces multi-dimensionnels. On s'intéresse ici à une image en 2D définie par $I(x)$ avec $x = (x_1, x_2)$. La transformée de Fourier du vecteur de la transformée de Riesz de notre image est donnée par

$$\widehat{\mathcal{R}_I}(\nu) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_I^1(\nu) \\ \mathcal{R}_I^2(\nu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\frac{\nu_1}{|\nu|} \hat{I}(\nu) \\ -i\frac{\nu_2}{|\nu|} \hat{I}(\nu) \end{pmatrix}$$

Celle-ci correspond à un signe près à la transformée de Hilbert selon chacun des paramètres. Une transformée de Fourier inverse nous permet de retrouver les composantes complexes de $\mathcal{R}_I(x)$.

Proposition 1. *La propriété clé de ce transformée est qu'elle est orientable. C'est-à-dire que pour tout $I \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a*

$$R_\theta(\mathcal{R}_I) = r_\theta^{-1} \mathcal{R}_{R_\theta I}$$

où R_θ est la rotation d'angle θ et r_θ la matrice de rotation $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Démonstration. En utilisant la définition de la transformée de Riesz, nous pouvons prouver dans le domaine de Fourier que $\widehat{\mathcal{R}_{R_\theta I}} = r_\theta \widehat{\mathcal{R}_I}$. Ce qui donne le résultat attendu. \square

3.3 Signal monogène

Étant donné l'image $I(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, on peut définir ce qu'on appelle signal monogène

$$\mathcal{M}_I(x) = \begin{pmatrix} I(x) \\ \mathcal{R}_I^1(x) \\ \mathcal{R}_I^2(x) \end{pmatrix}$$

Ce vecteur à trois dimensions peut être traité dans le corps (non-commutatif) des quaternions, voir l'Annexe A pour plus de détails sur ce corps. Le signal monogène est donc tri-dimensionnel, c'est un vecteur de Clifford. On peut l'écrire comme suit

$$\mathcal{M}_I = I + i\mathcal{R}_I^1 + j\mathcal{R}_I^2$$

où $(1, i, j, k)$ est la base canonique de l'algèbre \mathbb{H} des quaternions. On peut donc écrire

$$\mathcal{M}_I = A e^{\varphi t_\theta} = A(\cos \varphi + t_\theta \sin \varphi)$$

où A , l'amplitude, est une fonction de réels positifs et φ , la phase, et θ , l'orientation, deux fonctions réelles.

3.4 Ondelettes monogéniques

3.4.1 Transformée en ondelettes

Les ondelettes vont être l'outil multi-échelle dont on parlait dans la partie précédente. Elles réussissent cet exploit en créant à partir d'une ondelette source, tout une famille d'ondelettes de durée et position différentes.

Une fonction réelle $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ est dite ondelette admissible si elle vérifie

$$c_\psi = (2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{\psi}(\nu)|^2}{|\nu|^2} d\nu < +\infty \quad (1)$$

On peut alors définir une famille d'ondelettes par une dilatation D_a , une rotation R_α et une translation T_b :

$$\psi_{a,\alpha,b} = T_b R_\alpha D_a \psi$$

On peut alors définir les coefficients d'ondelette de n'importe quelle $I \in L^2(\mathbb{R}^2)$:

$$c_I(a, \alpha, b) = \int_{\mathbb{R}^2} I(x) \overline{\psi_{a,\alpha,b}(x)} dx$$

On remarquera que si l'ondelette est isotropique, les coefficients ne sont pas affectés par α . Dans ce cas, on s'autorisera alors à noter $c_I(a, b) = c_I(a, 0, b)$ et $\psi_{a,b} = \psi_{a,0,b}$.

Toute fonction $I \in L^2(\mathbb{R}^2)$ peut être retrouvée à partir

de ses coefficients d'ondelette par

$$I(x) = \frac{2\pi}{c_\psi} \int_b \int_\alpha \int_a c_I(a, \alpha, b) \psi_{a,\alpha,b}(x) \frac{da}{a^3} d\alpha db$$

3.4.2 Transformée en ondelettes monogéniques

On considère toujours notre ondelette admissible ψ dont on définit l'ondelette monogénique associée par

$$\psi^{(\mathcal{M})} = \mathcal{M}_\psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \mathcal{R}_\psi^1 \\ \mathcal{R}_\psi^2 \end{pmatrix}$$

Remarquons que $\psi^{(\mathcal{M})}$ est aussi une ondelette admissible (pour \mathbb{R}^3) car chacune de ses composantes vérifie l'équation (1). On définit ci-dessous les coefficients de l'ondelette monogénique d'une fonction réelle.

Définition 1. Soit $I \in L^2(\mathbb{R}^2)$, les coefficients de l'ondelette monogénique de I sont définis par

$$c_I^{(\mathcal{M})}(a, \alpha, b) = \int_{\mathbb{R}^2} I(x) \psi_{a,\alpha,b}^{(\mathcal{M})}(x) dx$$

où pour tout $(a, \alpha, b) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}^2$, on définit $\psi_{a,\alpha,b}^{(\mathcal{M})} = T_b R_\alpha D_a(\psi^{(\mathcal{M})})$.

C'est à partir de calculs similaires qu'Unser, Sage et Van De Ville exposent dans leur article [3] une méthode de détection d'orientations.

4 Cela étant dit – Conclusion

4.1 Résumé du rapport

Nous partons du problème qui nous dit que la transformée de Fourier n'est pas suffisante, en ceci qu'elle ne parvient pas à donner de position en temps et est très instable. Il nous faut alors développer un nouvel outil d'analyse. Hourra, les ondelettes viennent nous sauver.

Mais comment récupérer l'information d'orientation d'une image ? Comment réussir à extraire les différentes composantes d'une image ? Nous tentons de répondre à ces questions avec simplicité et clareté : la transformée en ondelettes monogéniques.

Tout cela avant de développer l'aspect mathématique concret de la fondation de cette transformée. Nous revisitons les étapes de création qui se veulent s'enchaîner avec rigueur.

4.2 Bilan du projet IRL

Le bilan général est très positif, quand bien même j'aurai un peu mis de côté la question de recherche d'objets directionnels — qui est particulièrement ardue. Peut-être m'y suis-je mis un peu tard pour pouvoir apporter quelque chose de véritablement personnel. J'admettrais volontiers que je n'ai pas été l'étudiant le plus appliqué à la tâche, mais j'en garderai néanmoins un très bon souvenir. Faire ce projet m'a même permis de prendre connaissance et d'assister à des conférences qui avaient lieu sur le site du laboratoire.

Ai-je les capacités pour devenir chercheur ? Je ne sais pas, mais ce projet m'aura permis de me poser la réelle question : est-ce que je veux faire de la recherche ? J'ai enfin trouvé ma réponse. L'ambiance de laboratoire de recherche en mathématiques me plaît beau-

coup. J'imagine qu'elle est bien différente suivant le lieu dans lequel on se trouve, mais l'accueil se voudra toujours aussi sympathique — du moins, je le souhaite.

Pour en revenir à la question, ma réponse est non, je ne pense pas vouloir devenir chercheur dans un premier temps. Déjà, parce que je ne souhaite pas continuer les études. Ensuite, parce que j'ai envie de voyager, occasion que j'espère avoir plus souvent comme employé d'une entreprise.

En un mot, ce n'est que du positif que je retire de cette expérience. Que ce soient mes nouvelles rencontres, ma mise à l'épreuve face à un problème réel et contemporain ou les conférences que je n'aurais pas vues sinon ; tout était absolument à faire. Et si je remontais le temps de quelques mois, j'irais me voir pour me dire : “Vas-y, fais-le. Tu ne regretteras pas.”

4.3 Perspective

Des résultats que nous avons obtenus, nous pouvons imaginer des algorithmes de compression/décompression qui prennent en compte les informations les plus pertinentes. Plus encore, l'imagerie médicale se sert de ces outils de représentation des images pour la reconstruction d'images du cancer du sein. L'analyse de textures est elle aussi largement basée sur le concept de signal monogénique.

Tout cela nous amène à penser que si le domaine est étudié et approfondi, nous aurons des résultats significatifs en matière de démodulation d'images. Et cela à partir de méthodes, j'imagine, fortement inspirées des ondelettes monogéniques. Le traitement d'image n'est pas prêt de dire son dernier mot.

A Calcul avec les quaternions

Dans cette annexe, nous donnons une rapide introduction au calcul quaternionique. Le lecteur se référera à d'autres ouvrages pour une présentation complète. Je rappelle ici que les notions dont nous nous servons avec le signal monogénique. C'est-à-dire jusqu'à la forme polaire d'un vecteur de Clifford et la construction de tout ce qui la précède.

\mathbb{H} est l'espace vectoriel quadri-dimensionnel engendré par $(1, i, j, k)$ dans lequel le produit algébrique est défini par $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$.

Pour un quaternion donné, qui est donc de la forme $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$, on peut définir

- sa partie réelle : $\text{Re}(q) = q_0$;
- sa partie vectorielle : $\text{Vect}(q) = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$.

Le conjugué d'un quaternion q est noté \bar{q} et défini par $\bar{q} = q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3$. Sa norme $|q|$ se définit par

$$|q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

Pour tout $(q, q') \in \mathbb{H}^2$, on a

$$\overline{qq'} = \bar{q}\bar{q'} \text{ et } |qq'| = |q||q'|$$

De plus, l'algèbre des quaternions admet un inverse pour tout quaternion non nul donné par

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$$

La fonction exponentielle sur l'algèbre peut être définie

comme

$$\exp : q \mapsto e^q = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^n}{n!}$$

qui converge car $\exp(|q|)$ converge. On peut dès lors créer l'extension quaternionique de l'exponentielle complexe pour tout $q \in \mathbb{H}$, tel que $|q| = 1$ et tel que $\text{Vect}(q) \neq 0$, on a

$$q = (\cos \varphi + t \sin \varphi) = e^{t\varphi}$$

où $t = \frac{\text{Vect}(q)}{|\text{Vect}(q)|}$ et $\cos \varphi = \text{Re}(q)$ et $\sin \varphi = |\text{Vect}(q)|$.

La forme polaire d'un quaternion q est donnée par

$$q = |q|(\cos \varphi + t \sin \varphi) = |q|e^{t\varphi}$$

avec t un quaternion pur tel que $|t| = 1$. On dit que φ est l'argument scalaire de q et t son orientation vectorielle.

Un quaternion q dont la quatrième composante q_4 est nulle est appelé un vecteur Clifford. Dans ce cas

$$t = ia + jb \text{ avec } a^2 + b^2 = 1$$

donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $t = i \cos \theta + j \sin \theta$. Alors q admet la forme polaire suivante

$$q = |q|(\cos \varphi + i \sin \varphi \cos \theta + j \sin \varphi \sin \theta) = |q|e^{\varphi(i \cos \theta + j \sin \theta)}$$

On dit alors que θ est l'orientation scalaire de q .

Références

- [1] M. Clausel, T. Oberlin, and V. Perrier. The monogenic synchrosqueezed wavelet transform : A tool for the decomposition/demodulation of am-fm images. *CoRR*, abs/1211.5082, 2012.
- [2] D. Gabor. Theory of communication. *J. Inst. Elect. Eng.*, 93 :429–457, 1946.
- [3] M. Unser, D. Sage, and D. Van De Ville. Multiresolution monogenic signal analysis using the Riesz-Laplace wavelet transform. *IEEE Transactions on Image Processing*, 18(11) :2402–2418, November 2009.