Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

ЗВІТ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ №2

З дисципліни "Чисельні методи"

Тема: Розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Виконав студент 3-го курсу
групи ТТП-31
Рісенгін Владислав

Київ-2024

1 Постановка задачі

Варіант № 3. Метод Гаусса, метод прогонки, метод Зейделя.

Згенерувати матрицю 4x4 з цілими елементами за модулем менше 10 та вектор правої частини з урахуванням обмежень та достатніх умов збіжності, що накладаються методами у вашому варіанті. Порахувати визначник матриці та обернену матрицю тими методами, що мають відповідне застосування. Для ітераційного методу бажану точність розв'язку СЛАР зробити параметром, який може вводити користувач.

2 Вступ

Метою цієї лабораторної роботи є вивчення методів розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які дають можливість вирішення багатьох наукових та інженерних задач. У процесі виконання роботи будуть досліджені та реалізовані методи Гауса, прогонки, Зейделя.

3 Деталі реалізації

Лабораторна робота виконана використовуючи мову програмування Python, а також бібліотеку numpy.

4 Теоретичний опис методів

4.1 Метод Гауса

Метод Гауса - це числовий метод розв'язання систем лінійних рівнянь. Цей метод базується на елементарних операціях над рядками матриці та зводить систему лінійних рівнянь до еквівалентної системи, де матриця є верхньотрикутною (трикутною формою). Після цього систему легко можна розв'язати методом зворотнього ходу.

Розглянемо систему лінійних рівнянь:

$$Ax = b$$

де A - коефіцієнтна матриця, x - вектор невідомих, b - вектор правої частини.

Основні етапи методу Гауса:

1. **Прямий хід (елімінація):**
   - Вибір ведучого елемента в першому стовпці і обмін рядками, якщо необхідно, для забезпечення ненульового ведучого елемента.
   - Використання елементарних операцій над рядками для зроблення нульовими всіх елементів під ведучим елементом в кожному стовпці.
   - Продовження процесу для кожного рядка і кожного стовпця, поки матриця не стане верхньотрикутною.
2. **Зворотній хід (зворотний хід):**
   - Розв'язання системи лінійних рівнянь, використовуючи зворотній хід.
   - Починаємо з останнього рядка і розв'язуємо для відомого x_n.
   - Потім використовуємо це значення для розв'язання попереднього рядка і так далі, до першого рядка.

Переваги методу Гауса:

- Загальний метод, який можна використовувати для різних систем лінійних рівнянь.
- Зручний для ручного розв'язання.

Застереження:

- Метод Гауса може бути витратним для великих систем лінійних рівнянь, особливо якщо багато нульових елементів.
- Якщо на шляху елімінації виникають нульові елементи на головній діагоналі, потрібно використовувати частковий вибір ведучого елемента.

Метод Гауса є важливим і широко використовується методом для розв'язання систем лінійних рівнянь і визначення оберненої матриці.

4.2 Метод прогонки (Томаса)

Метод прогонки — це ітераційний числовий метод для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, в яких коефіцієнтна матриця є трьохдіагональною (або багатодіагональною). Такі системи рівнянь часто виникають при розв'язанні диференціальних рівнянь у задачах математичної фізики, особливо в контексті чисельних методів.

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду $Ax = f$, де A — трьохдіагональна матриця:

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

де a_i, b_i, c_i — відомі коефіцієнти, x — вектор невідомих, а f — вектор правої частини системи.

Прямий хід (прогонка):

1. **Ініціалізація:**

$$\alpha_1 = -\frac{c_1}{b_1}, \quad \beta_1 = \frac{f_1}{b_1}$$

2. **Прогонка:**

$$\alpha_i = -\frac{c_i}{a_i \cdot \alpha_{i-1} + b_i}, \quad \beta_i = \frac{f_i - a_i \cdot \beta_{i-1}}{a_i \cdot \alpha_{i-1} + b_i}$$

Зворотній хід (прогін):

1. **Значення останньої невідомої:**

$$x_n = \beta_n$$

2. **Визначення інших невідомих:**

$$x_i = \alpha_i \cdot x_{i+1} + \beta_i$$

Застосування:

Метод прогонки застосовується тоді, коли коефіцієнтна матриця системи має особливий вигляд з тридіагональною (або багатодіагональною) структурою. Це може виникнути при апроксимації диференціальних рівнянь, зокрема у скінченно-різницевих методах.

Переваги методу:

- Швидкість розв'язання систем лінійних рівнянь з трьома діагоналями.
- Метод ефективний при чисельних розрахунках в задачах, де зустрічається така структура матриць.

Обмеження методу:

- Метод працює лише для систем лінійних рівнянь з трьома діагоналями.
- Збіжність методу може залежати від властивостей конкретної системи рівнянь.

Метод прогонки є ефективним інструментом при розв'язанні конкретних класів задач, де властивості системи дозволяють використовувати його для чисельного розв'язання.

4.3 Метод Зейделя

Метод Зейделя - це ітераційний метод для розв'язання систем лінійних рівнянь. Цей метод використовується для знаходження наближеного розв'язку системи лінійних рівнянь, коли важко або неможливо знаходити аналітичний розв'язок.

Система лінійних рівнянь може бути записана у вигляді:

$$Ax = b$$

де A - матриця коефіцієнтів системи, x - вектор невідомих, а b - вектор правих частин. Метод Зейделя вимагає подання системи у вигляді:

$$Lx^{(k+1)} = b - Ux^{(k)}$$

де L - нижній трикутний відрізок матриці A, U - верхній трикутний відрізок матриці A, $x^{(k)}$ - наближений розв'язок на k-тій ітерації.

Метод Зейделя використовує ітераційний процес, де на кожному кроці обчислюється нове наближене розв'язок $x^{(k+1)}$ за допомогою попереднього наближеного розв'язку $x^{(k)}$. Процес продовжується до тих пір, поки досягається необхідна точність або поки досягнута максимальна кількість ітерацій.

Метод Зейделя має тенденцію збігатися швидше, ніж прості ітерації, особливо для систем з добре умовленими матрицями. Проте, важливо враховувати, що збіжність методу Зейделя не гарантується для всіх систем лінійних рівнянь, і у деяких випадках він може розходитися.

Основна ідея методу Зейделя полягає в тому, що на кожній ітерації вектор невідомих x оновлюється на основі попереднього вектора x та поточного наближення. Кожен компонент нового вектора x обчислюється на основі попередніх та поточних значень, замінюючи в попередніх обчисленнях вже оновлені компоненти. Цей процес повторюється до тих пір, поки досягається необхідна точність або досягається максимальна кількість ітерацій.

В кінці програми виводиться отриманий розв'язок та кількість виконаних ітерацій. Також в коді є перевірка на збіжність, щоб визначити, коли можна завершити ітераційний процес.

5 Результати роботи програми

5.1 Метод Гауса

Задача полягає в тому, щоб розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса. Використовуючи елементарні перетворення рядків, ми приводимо розширену матрицю до верхньої трикутної форми.

Початкова матриця системи:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 14 & 0 & 2 & 8 & 5 \\ 0 & 30 & -3 & -9 & 9 \\ 3 & -4 & 12 & 2 & -6 \\ -6 & 7 & -2 & 33 & 26 \end{array}\right]$$

Давайте перевіримо діагональну перевагу

1. Для першого рядка:

$$|14| > |0| + |2| + |8| \quad \Rightarrow \quad 14 > 0 + 2 + 8 \quad \Rightarrow \quad 14 > 10 \quad (\text{вірно})$$

2. Для другого рядка:

$$|30| > |0| + |-3| + |-9| \quad \Rightarrow \quad 30 > 0 + 3 + 9 \quad \Rightarrow \quad 30 > 12 \quad (\text{вірно})$$

3. Для третього рядка:

$$|12| > |3| + |-4| + |2| \quad \Rightarrow \quad 12 > 3 + 4 + 2 \quad \Rightarrow \quad 12 > 9 \quad (\text{вірно})$$

4. Для четвертого рядка:

$$|33| > |-6| + |7| + |-2| \quad \Rightarrow \quad 33 > 6 + 7 + 2 \quad \Rightarrow \quad 33 > 15 \quad (\text{вірно})$$

Отже, матриця з діагональною перевагою.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 14 & 0 & 2 & 8 & 5 \\ 0 & 30 & -3 & -9 & 9 \\ 3 & -4 & 12 & 2 & -6 \\ -6 & 7 & -2 & 33 & 26 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 14 & 0 & 2 & 8 & 5 \\ 0 & 30 & -3 & -9 & 9 \\ 0 & -4 & 11.571 & 0.286 & -7.071 \\ 0 & 7 & -1.143 & 36.429 & 28.143 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 14 & 0 & 2 & 0 & -0.364 \\ 0 & 30 & -3 & 0 & 15.035 \\ 0 & 0 & 11.171 & -0.914 & -5.871 \\ 0 & 0 & 0 & 38.492 & 25.810 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 14 & 0 & 0 & 0 & 0.577 \\ 0 & 30 & 0 & 0 & 13.623 \\ 0 & 0 & 11.171 & 0 & -5.258 \\ 0 & 0 & 0 & 38.492 & 25.810 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 14 & 0 & 0 & 0 & 0.577 \\ 0 & 30 & 0 & 0 & 13.623 \\ 0 & 0 & 11.171 & 0 & -5.258 \\ 0 & 0 & 0 & 38.492 & 25.810 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 14 & 0 & 0 & 0 & 0.577 \\ 0 & 30 & 0 & 0 & 13.623 \\ 0 & 0 & 11.171 & 0 & -5.258 \\ 0 & 0 & 0 & 38.492 & 25.810 \end{array}\right]$$

Визначник

Звідси порахуємо визначник:
$det = 14.0 * 30.0 * 11.17142857142857 * 38.492327365728904 = 180606.00000000003$

Поділивши рядки матриці на елементи по діагоналі отримаємо розв'язок :
$x = (0.041227866183848, 0.454087904056344, -0.470698647885452, 0.670525896149629)$

Перевіримо підставивиши у початкове рівняння:

$$\begin{aligned}
14 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4 = 5 \\
0 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 - 9 \cdot x_4 = 9 \\
3 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 = -6 \\
-6 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 + 33 \cdot x_4 = 26
\end{aligned}$$

Для обрахунку результатів використовувались числа з початковою точністю.

$$\begin{aligned}
14 \cdot 0.0412 + 0 \cdot 0.4541 + 2 \cdot (-0.4707) + 8 \cdot 0.6705 = 5 \quad (5.0 = 5) \\
0 \cdot 0.0412 + 30 \cdot 0.4541 - 3 \cdot (-0.4707) - 9 \cdot 0.6705 = 9 \quad (9.0 = 9) \\
3 \cdot 0.0412 - 4 \cdot 0.4541 + 12 \cdot (-0.4707) + 2 \cdot 0.6705 = -6 \quad (-6.0 = -6) \\
-6 \cdot 0.0412 + 7 \cdot 0.4541 - 2 \cdot (-0.4707) + 33 \cdot 0.6705 = 26 \quad (25.999999999999996 = 26)
\end{aligned}$$

Отже, розв'язок задовольняє початковим умовам.

Обернена матриця

Допишемо одиничну матрицю справа, і застосуємо алгоритм Гауса

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 14 & 0 & 2 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -3 & -9 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 12 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 7 & -2 & 33 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0.14285714 & 0.57142857 & 0.07142857 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -3 & -9 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 11.57142857 & 0.28571429 & -0.21428571 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1.14285714 & 36.42857143 & 0.42857143 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0.14285714 & 0.57142857 & 0.07142857 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.1 & -0.3 & 0 & 0.03333333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11.17142857 & -0.91428571 & -0.21428571 & 0.13333333 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.44285714 & 38.52857143 & 0.42857143 & -0.23333333 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0.14285714 & 0.57142857 & 0.07142857 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.1 & -0.3 & 0 & 0.03333333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.08184143 & -0.01918159 & 0.01193521 & 0.08951407 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 38.49232737 & 0.42007673 & -0.22804774 & 0.03964194 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0.06780506 & 0.00174967 & -0.01338826 & -0.015149 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.00144513 & 0.03270102 & 0.0092688 & 0.00800638 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.01828843 & 0.01145034 & 0.08959835 & 0.00212618 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.01091326 & -0.0059245 & 0.00102987 & 0.0259792 \end{array}\right]$$

Обернена матриця:

$$\begin{bmatrix} 0.06780506 & 0.00174967 & -0.01338826 & -0.015149 \\ 0.00144513 & 0.03270102 & 0.0092688 & 0.00800638 \\ -0.01828843 & 0.01145034 & 0.08959835 & 0.00212618 \\ 0.01091326 & -0.0059245 & 0.00102987 & 0.0259792 \end{bmatrix}$$

5.2 Метод прогонки

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 11 & 8 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 9 & -8 & 22 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -19 \end{array}\right]$$

Перевіримо діагональну перевагу для кожного рядка:
1. Для першого рядка:

$$|11| > |8| + |0| + |0| \quad \Rightarrow \quad 11 > 8 + 0 + 0 \quad \Rightarrow \quad 11 > 8 \quad \text{(вірно)}$$

2. Для другого рядка:

$$|3| > |2| + |0| + |0| \quad \Rightarrow \quad 3 > 2 + 0 + 0 \quad \Rightarrow \quad 3 > 2 \quad \text{(вірно)}$$

3. Для третього рядка:

$$|9| > |0| + |0| + |-8| \quad \Rightarrow \quad 9 > 0 + 0 + 8 \quad \Rightarrow \quad 9 > 8 \quad \text{(вірно)}$$

4. Для четвертого рядка:

$$|3| > |0| + |0| + |2| \quad \Rightarrow \quad 3 > 0 + 0 + 2 \quad \Rightarrow \quad 3 > 2 \quad \text{(вірно)}$$

```
 rr > python program.py
Select algorighm:
1. Gauss
2. Siedel
3. Thomas
 > 3
[[ 11.   8.   0.   0.   7.]
 [  2.   3.   0.   0.  12.]
 [  0.   0.   9.  -8.  22.]
 [  0.   0.   2.   3. -19.]]
a:  [-0.72727273 -0.          0.88888889  0.        ]
b:  [ 0.63636364  6.94117647  2.44444444 -5.        ]
Thomas:  [-4.41176471  6.94117647 -2.         -5.        ]
```

Перевіримо розв'язок $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-4.4118, 6.9412, -2, -5)$, підставивши його у початкове рівняння:

$$\begin{aligned} 11 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 &= 7 \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 &= 12 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 - 8 \cdot x_4 &= 22 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 &= -19 \end{aligned}$$

Підставляємо значення $x_1 = -4.4118$, $x_2 = 6.9412$, $x_3 = -2$, $x_4 = -5$:

$$\begin{aligned} 11 \cdot (-4.4118) + 8 \cdot 6.9412 + 0 \cdot (-2) + 0 \cdot (-5) &= 7 \quad (7 = 7) \\ 2 \cdot (-4.4118) + 3 \cdot 6.9412 + 0 \cdot (-2) + 0 \cdot (-5) &= 12 \quad (12 = 12) \\ 0 \cdot (-4.4118) + 0 \cdot 6.9412 + 9 \cdot (-2) - 8 \cdot (-5) &= 22 \quad (22 = 22) \\ 0 \cdot (-4.4118) + 0 \cdot 6.9412 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-5) &= -19 \quad (-19 = -19) \end{aligned}$$

Розв'язок коректний.

5.3 Метод Зейделя

Обчислимо матрицю ту ж що й в методі Гауса. Матриця з діагональною перевагою.

Знайдемо розв'язок з точністю $\epsilon = 10^{-5}$
Як критерій зупинки використовується норма $max(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|) < \epsilon$

```
Select algorighm:
1. Gauss
2. Siedel
3. Thomas
 > 2
[[14  0  2  8  5]
 [ 0 30 -3 -9  9]
 [ 3 -4 12  2 -6]
 [-6  7 -2 33 26]]
tol : 1e-5
Iteration  |                       x_new                       |    Norm
------------------------------------------------------------------------------------------
1          | [ 0.357143  0.300000 -0.500000  0.787879]         | 0.7878787878787878
2          | [-0.021645  0.486364 -0.620599  0.758874]         | 0.3787878787878788
3          | [ 0.012157  0.465602 -0.458947  0.643163]         | 0.16165223665223666
4          | [ 0.055185  0.447054 -0.455032  0.663510]         | 0.04302752322232844
5          | [ 0.042999  0.453550 -0.475363  0.675505]         | 0.020330739887016946
6          | [ 0.039049  0.455115 -0.472151  0.670679]         | 0.004825624429864783
7          | [ 0.041348  0.453989 -0.469837  0.669824]         | 0.0023135206826420673
8          | [ 0.041506  0.453963 -0.470645  0.670621]         | 0.0008075376353549601
9          | [ 0.041166  0.454122 -0.470825  0.670606]         | 0.0003401096899538908
10         | [ 0.041200  0.454099 -0.470685  0.670500]         | 0.00014028101542107319
11         | [ 0.041241  0.454081 -0.470684  0.670519]         | 4.0756013396654744e-05
12         | [ 0.041230  0.454087 -0.470703  0.670531]         | 1.9404467286487925e-05
13         | [ 0.041226  0.454089 -0.470700  0.670526]         | 4.523114450649679e-06

Збіжність досягнута після 13 ітерацій.
seidel:  [ 0.04122582  0.45408887 -0.4707      0.67052604]
```

Перевіримо розв'язок $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0.041225818712442, 0.454088871042851, -0.47069999648$
підставивиши у початкове рівняння:

$$\begin{aligned} 14 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4 &= 5 \\ 0 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 - 9 \cdot x_4 &= 9 \\ 3 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 &= -6 \\ -6 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 + 33 \cdot x_4 &= 26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14 \cdot 0.0412 + 0 \cdot 0.4541 + 2 \cdot (-0.4707) + 8 \cdot 0.6705 &= 5 \quad (4.999969752769497 = 5) \\ 0 \cdot 0.0412 + 30 \cdot 0.4541 - 3 \cdot (-0.4707) - 9 \cdot 0.6705 &= 9 \quad (9.000031801502402 = 9) \\ 3 \cdot 0.0412 - 4 \cdot 0.4541 + 12 \cdot (-0.4707) + 2 \cdot 0.6705 &= -6 \quad (-6.0000259148798705 = -6) \\ -6 \cdot 0.0412 + 7 \cdot 0.4541 - 2 \cdot (-0.4707) + 33 \cdot 0.6705 &= 26 \quad (26.000026348497876 = 26) \end{aligned}$$

Отже, розв'язок задовольняє початковим умовам.

6 Висновок

У даній лабораторній роботі були досліджені три методи розв'язку систем лінійних рівнянь: метод Гаусса, метод Томаса та метод Зейделя. Кожен з цих методів був реалізований на Python, і їх ефективність була перевірена на конкретних прикладах.

1. Метод Гаусса є одним з найпоширеніших методів для розв'язку систем рівнянь, оскільки він підходить для широкого спектра систем. Основна перевага цього методу полягає в його універсальності, однак для великих систем він може бути менш ефективним через складність обчислень.

2. Метод Томаса (або алгоритм прогонки) виявився найбільш ефективним для тридіагональних матриць. Він показав себе як швидкий та економічний у використанні обчислювальних ресурсів метод, коли система має специфічну тридіагональну структуру.

3. Метод Зейделя є ітераційним методом, який забезпечує розв'язок за допомогою послідовних наближень. Його основною перевагою є можливість роботи з великими системами, але конвергенція залежить від властивостей матриці. Цей метод може бути ефективним, коли матриця має властивість діагональної переважності або інші спеціальні умови.

Під час виконання лабораторної роботи було проведено аналіз збіжності ітераційного методу Зейделя, і продемонстровано, що метод може забезпечити високу точність результатів за відносно невелику кількість ітерацій за певних умов. Також метод Томаса продемонстрував свою ефективність для систем із тридіагональною структурою, дозволяючи отримати розв'язок з мінімальними витратами на обчислення.

Загалом, лабораторна робота дозволила глибше ознайомитися з різними чисельними методами, їх перевагами та недоліками. Отримані знання та навички можуть бути застосовані в інших задачах лінійної алгебри та обчислювальної математики, особливо у випадках великих або спеціальних систем рівнянь.