

Київський національний університет імені Тараса  
Шевченка  
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

## ЗВІТ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ №2

З дисципліни “Чисельні методи”

Тема: Розв’язування системи лінійних алгебраїчних  
рівнянь

Виконав студент 3-го курсу  
групи ТТІ-31  
Рісенгін Владислав

Київ-2024

# 1 Постановка задачі

Придумати систему яка складається з 3 нелінійних рівнянь. І вектором правої частини  $\vec{f} = (0, 0, 0)$ .

Розв'язати її методом простої ітерації, і модифікованим методом Ньютона

# 2 Вступ

Метою цієї лабораторної роботи є вивчення методів розв'язування системи нелінійних алгебраїчних рівнянь, які дають можливість вирішення багатьох наукових та інженерних задач.

У процесі виконання роботи будуть досліджені та реалізовані методи простої ітерації, модифікований метод Ньютона.

# 3 Деталі реалізації

Лабораторна робота виконана використовуючи мову програмування Python, а також бібліотеку numpy.

## 4 Теоретичний опис методів

### Метод простої ітерації

Метод ґрунтується на зведенні системи нелінійних рівнянь до вигляду  $\bar{x} = \bar{\Phi}(\bar{x})$ , де  $\bar{\Phi}(\bar{x}) = \bar{x} - C^{-1}\bar{F}(\bar{x})$ , де  $C$  – невироджена матриця. Початкове наближення обирається довільне. Ітераційний процес має вигляд:

$$\bar{x}^{k+1} = \bar{\Phi}(\bar{x}^k). \quad (24)$$

**Достатня умова збіжності.** Нехай відображення  $\bar{\Phi}(\bar{x})$  визначено і неперервно диференційоване в деякій області  $G$  і є стискаючим з коефіцієнтом  $q$ ;  $\bar{x}^0 \in G$ ;  $\|\bar{\Phi}'(\bar{x}^0)\| \leq q$ ,  $0 < q < 1$ , де

$$\Phi'(\bar{x}) = \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} -$$

матриця Якобі, тоді ітераційний процес (24) збігається, при

чому швидкість збіжності лінійна:

$$\|\bar{x}^k - \bar{x}^*\| \leq \frac{q^k}{1-q} \|\bar{x}^1 - \bar{x}^0\|.$$

Умова припинення:  $\|\bar{x}^{k+1} - \bar{x}^k\| \leq \varepsilon$ .

## Модифікований метод Ньютона

Ітераційний процес модифікованого методу Ньютона має вигляд:

$$\bar{x}^{k+1} = \bar{x}^k - A_0^{-1} \bar{F}(\bar{x}^k).$$

Обирається початкове наближення  $x^0$ , для якого обчислюється матриця Якобі:  $A_0 = \bar{F}'(\bar{x}_0)$ .

Умова припинення методу:  $\|\bar{x}^{k+1} - \bar{x}^k\| \leq \varepsilon$ .

## 5 Результати роботи програми

Для обох методів будемо шукати розв'язок з точністю  $\epsilon < 10^{-6}$

Як критерій зупинки використовується норма  $\max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) < \epsilon$

### 5.1 Метод простої ітерації

Iteration	x_new	Norm
0	[0 0 0]	-
1	[ 0.333333 -0.200000 0.000000]	0.333333333
2	[ 0.267110 -0.188991 -0.077778]	0.077777778
3	[ 0.297671 -0.191698 -0.065085]	0.030561143
4	[ 0.292241 -0.190357 -0.070076]	0.005430095
5	[ 0.294460 -0.190538 -0.068941]	0.002218911
6	[ 0.293995 -0.190441 -0.069311]	0.000465066
7	[ 0.294159 -0.190458 -0.069219]	0.000164057
8	[ 0.294121 -0.190451 -0.069247]	0.000038556
9	[ 0.294133 -0.190452 -0.069239]	0.000012384
10	[ 0.294130 -0.190452 -0.069242]	0.000003121
11	[ 0.294131 -0.190452 -0.069241]	0.000000948

Збіжність досягнута після 11 ітерацій. Остаточний розв'язок:

$$x = [0.29413083, -0.19045207, -0.06924108]$$

Перевірка результату:

$$f(x) = [7.47620013e - 07, -1.93551788e - 07, 6.78223201e - 07]$$

### 5.2 Модифікований метод Ньютона

Iteration	x_new	Norm
0	[0 0 0]	-
1	[ 0.283333 -0.200000 -0.050000]	0.283333333
2	[ 0.293009 -0.191526 -0.067951]	0.017950890
3	[ 0.294027 -0.190552 -0.069102]	0.001150762
4	[ 0.294120 -0.190462 -0.069228]	0.000126747
5	[ 0.294130 -0.190453 -0.069240]	0.000011542
6	[ 0.294131 -0.190452 -0.069241]	0.000001154
7	[ 0.294131 -0.190452 -0.069241]	0.000000110

Збіжність досягнута після 7 ітерацій. Остаточний розв'язок:

$$x = [0.29413063, -0.19045205, -0.06924121]$$

Перевірка результату:

$$f(x) = [-6.40065623e - 09, -4.05407964e - 08, 5.12418141e - 08]$$

## 6 Висновок

У результаті роботи обох методів було досягнуто розв’язку з необхідною точністю  $\epsilon < 10^{-6}$ .

Метод простої ітерації виявився менш ефективним, потребуючи 11 ітерацій для досягнення збіжності.

Остаточний розв’язок:  $x = [0.29413083, -0.19045207, -0.06924108]$  пройшов перевірку, показавши значення функцій, близькі до нуля, що свідчить про правильність розв’язку.

З іншого боку, модифікований метод Ньютона виявився значно швидшим, досягнувши збіжності вже за 7 ітерацій.

Остаточний розв’язок:  $x = [0.29413063, -0.19045205, -0.06924121]$  також продемонстрував малі значення функцій у цій точці, підтверджуючи його коректність.

Отже, можна стверджувати, що модифікований метод Ньютона є більш ефективним у даному випадку, забезпечуючи швидшу збіжність і високу точність розв’язку в порівнянні з методом простої ітерації.

Це підкреслює важливість вибору відповідних чисельних методів для розв’язання нелінійних систем рівнянь, залежно від їхніх властивостей та вимог до точності.