**Київський національний університет імені Тараса Шевченка**
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

# ЗВІТ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ №4

**З дисципліни "Чисельні методи"**

**Тема: Інтерполяційні методи**

Виконав студент 3-го курсу
групи ТТП-31
Рісенгін Владислав

Київ-2024

# 1 Постановка задачі

Реалізувати алгоритми інтерполяції з вашого варіанту для табличної функції, отриманої з вашої аналітичної функції. Для вашої аналітичної функції на проміжку обрати не менше 15 точок, за якими побудувати табличну функцію. У звіті навести всі можливі графіки.

Варіант 1. А) Метод Ньютона. Б) Задача оберненої інтерполяції (розв'язати рівняння для таблично заданої функції, у якості самостійно обрати якесь число з внутрішності області значень вашої аналітичної функції на проміжку, яке при цьому не міститься в таблиці). tg(x), x in [-0.5, 0.5]

# 2 Вступ

Інтерполяція є ключовим методом у чисельних методах для наближення значень функцій у невідомих точках на основі відомих даних.

У цій лабораторній роботі розглядаються два підходи: метод Ньютона, який використовує поліноми на основі розділених різниць, і обернена інтерполяція.

Мета роботи — реалізувати ці методи для функції $tan(x)$ та проаналізувати результати через графіки та числові значення, підтверджуючи ефективність обраних алгоритмів.

# 3 Деталі реалізації

Лабораторна робота виконана використовуючи мову програмування Python, а також бібліотеку numpy і pandas.

# 4 Теоретичний опис методів

## 4.1 Метод Ньютона

***Розділеною різницею першого порядку*** називається величина:

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i};$$

***другого порядку***:

$$f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_i, x_{i+1}) - f(x_{i-1}, x_i)}{x_{i+1} - x_{i-1}};$$

***(k+1) порядку***:

$$f(x_i, ..., x_{i+k+1}) = \frac{f(x_{i+1}, ..., x_{i+k+1}) - f(x_i, ..., x_{i+k})}{x_{i+k+1} - x_i}.$$

***Таблиця розділених ріниць*** має вигляд:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f(x_0)$ | $f(x_0; x_1)$ | $f(x_0; x_1; x_2)$ | $\cdots$ | $f(x_0; x_1; \ldots; x_n)$ |
| $x_1$ | $f(x_1)$ | $f(x_1; x_2)$ | $f(x_1; x_2; x_3)$ | $\cdots$ | |
| $x_2$ | $f(x_2)$ | $f(x_2; x_3)$ | $f(x_1; x_2; x_3)$ | | |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $f(x_{n-1}; x_n)$ | | | |
| $x_n$ | $f(x_n)$ | | | | |

На підставі цієї таблиці, використовучи перший її рядок, можемо записати ***інтерполянт Ньютона вперед***:

$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$
$+ ... + f(x_0, x_1, ..., x_n)(x - x_0)(x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_{n-1}),$

чи скориставшись останнім рядком, дістанемо ***інтерполяційну формулу Ньютона назад***:

$$P_n(x) = f(x_n) + f(x_{n-1}; x_n)(x - x_n) + \cdots$$
$$\cdots + f(x_0; x_1; \ldots; x_n)(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_1).$$

Обирають ту чи іншу формули Ньютона, в залежності від того, де знаходиться точка $x$ (в якій потрібно обчислити значення функції). Якщо ближче до точки $x_0$, то інтерполяційну формулу Ньютона вперед. Якщо ближче до $x_n$, то інтерполяційну формулу Ньютона назад.

Для практичного застосування найчастише використовують інтерполяційні поліноми Ньютона, оскільки для його обчислення можна застосовувати схему Горнера.

За точністю зручно слідкувати таким чином: якщо доданки $f(x_o; x_1; \ldots; x_k)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})$ в інтерполяційній формулі спадають достатньо швидко, то можна очікувати на гарну точність.

Вузли інтерполяції називаються ***рівновіддаленими***, якщо $x_i - x_{i-1} = h = const$, $x_i = x_0 + ih$, $i = \overline{0, n}$.

Нехай $f(x_i) = y_i$. Величина $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ називається ***скінченою різницею першого порядку***.

Величина $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ називається ***скінченою різницею другого порядку***.

Величина $\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$ називається ***скінченою різницею $k$-го порядку***.

***Таблиця скінчених різниць***:

$$\begin{array}{lllllll}
y_0 & \Delta y_0 & \Delta^2 y_0 & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta^n y_0 \\
y_1 & \Delta y_1 & \Delta^2 y_1 & \cdots & \cdots & \Delta^{n-1} y_1 & \\
y_2 & \Delta y_2 & \Delta^2 y_2 & \cdots & \Delta^{n-2} y_{n-2} & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\
\cdots & \Delta y_{n-1} & & & & & \\
y_n & & & & & &
\end{array}$$

Має місце рівність: $\Delta^k y_i = k! h^k f(x_i; \ldots; x_k)$.

Покладемо $x = x_0 + th$, $t = \dfrac{x - x_0}{h}$. Тоді ***інтерполяційні формули Ньютона для рівновіддалених вузлів*** набувають вигляду:

$$P_n(t) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1) \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t-1) \cdots (t-n+1),$$

$$P_n(t) = y_0 + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} t(t+1) \cdots +$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t+1) \cdots (t+n-1).$$

## 4.2 Обернена інтерполяція

Нехай функція $y = f(x) \in C[a,b]$, що задана таблично $(x_i, y_i)$, $i = \overline{0,n}$, монотонна. Для знаходження $x^*$ застосовуємо такий алгоритм:

Будуємо за таблицею $(x_i, y_i)$, $i = \overline{0,n}$ таку таблицю: $(y_i, x_i)$, $i = \overline{0,n}$. На підставі останньої таблиці інтерполянт набуває вигляду:

$$L_n(y) = \sum_{i=0}^{n} x_i \frac{\omega_{n+1}(y)}{(y - y_i)\omega'_{n+1}(y_i)},$$

де $\omega_{n+1}(y) = (y - y_0)(y - y_1)\cdots(y - y_n)$ та $L(y^*) \approx x^*$. Залишковий член в цьому випадку утворюється із залишкового члена формули Ньютона, якщо в останньому поміняти місцями $x$ та $y$, а похідну $f'(x)$ замінити на похідну від оберненої функції. Похибка інтерполяції має вигляд:

$$|x - x^*| \leqslant \frac{\widetilde{M}_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(y^*)|; \quad \widetilde{M}_{n+1} = \max_y \left| \frac{d^{n+1}}{dy^{n+1}} x(y) \right|.$$

*Зауваження.* За допомогою інтерполяції можна знаходити корені нелінійних рівнянь, для цього знаходять $x^*$ при $y^* = 0$.

# 5 Результати роботи програми

Лабораторна робота реалізує інтерполяційні методи для табличної функції, отриманої з аналітичної функції $\tan(x)$ на проміжку $[-0.5, 0.5]$. Для цього було обрано 30 рівномірно розподілених точок на вказаному проміжку.

## 5.1 Таблиця розділених різниць

Під час реалізації методу Ньютона було сформовано таблицю розділених різниць, представлена нижче:

| **i** | $x$ | $f(x_0,\ldots,x_0)$ | $f(x_0,\ldots,x_1)$ | $f(x_0,\ldots,x_2)$ | $f(x_0,\ldots,x_3)$ | ... | $f(x_0,\ldots,x_{29})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -0.500000 | -0.546302 | 1.274935 | -0.629790 | 0.696756 | ... | 78.002403 |
| 1 | -0.465517 | -0.502339 | 1.231501 | -0.557712 | 0.628951 | ... | 0.000000 |
| 2 | -0.431034 | -0.459874 | 1.193038 | -0.492648 | 0.571533 | ... | 0.000000 |
| 3 | -0.396552 | -0.418734 | 1.159062 | -0.433524 | 0.522926 | ... | 0.000000 |
| 4 | -0.362069 | -0.378767 | 1.129164 | -0.379428 | 0.481860 | ... | 0.000000 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 29 | 0.500000 | 0.546302 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | ... | 0.000000 |

Табл. 1: Таблиця розділених різниць для функції $\tan(x)$

*Поліном :*

$$1.2749 * x^1 + -0.6298 * x^2 + 0.6968 * x^3 + -0.4916 * x^4 + 0.4368 * x^5 + -0.3200 * x^6 + 0.2554 * x^7 + -0.1834 * x^8 + 0.1363 * x^9 + -0.0943 * x^{10} + 0.0661 * x^{11} + -0.0439 * x^{12} + 0.0291 * x^{13} + -0.0179 * x^{14} + 0.0094 * x^{15} + 0.0007 * x^{16} + -0.0194 * x^{17} + 0.0628 * x^{18} + -0.1646 * x^{19} + 0.3880 * x^{20} + -0.8354 * x^{21} + 1.6345 * x^{22} + -2.8578 * x^{23} + 4.3016 * x^{24} + -5.0420 * x^{25} + 2.7506 * x^{26} + 7.0514 * x^{27} + -31.2570 * x^{28} + 78.0024 * x^{29}$$

## 5.2 Обернена інтерполяція

Для оберненої інтерполяції було вибрано значення $y = 0.18$. Розв'язок рівняння дає:

*Значення $x$ для $y = 0.18$:* 0.17809283896009326

Перевірка:

$$f(0.17809283896009326) = 0.17999989751251377$$

# 6 Висновок

У результаті виконання лабораторної роботи було реалізовано інтерполяційні методи, зокрема метод Ньютона та обернена інтерполяція,
для функції $tan(x)$ на проміжку $[-0.5, 0.5]$.

З отриманих результатів видно, що метод Ньютона достатньо точний.

У процесі оберненої інтерполяції вдалося знайти значення $x$ для заданого $y = 0.18$. Загалом, результати роботи свідчать про ефективність використаних алгоритмів для інтерполяції функцій.