

Київський національний університет імені Тараса  
Шевченка  
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

ЗВІТ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ №1  
З дисципліни “Чисельні методи”  
Тема: Розв’язування нелінійних рівнянь


Виконав студент 3-го курсу  
групи ТТІ-31  
Рісенгін Владислав

Київ-2024

# 1 Постановка задачі

Варіант № 7.

Знайти розв'язок рівняння  $x^4 + x^3 - 6x^2 + 20x - 16 = 0$  методами простої ітерації та релаксації.



plot.png

Рис. 1: Графік рівняння

## 2 Вступ

Метою цієї лабораторної роботи є вивчення методів розв'язування нелінійних рівнянь, які дають можливість вирішення багатьох наукових та інженерних задач. У процесі виконання роботи будуть досліджені та реалізовані метод простої ітерації та метод релаксації для знаходження коренів нелінійних рівнянь.

## 3 Методи які застосовувались у ході розв'язання

Мова програмування: Python

$$f(x) = x^4 + x^3 + -6x^2 + 20x - 16 = 0$$

$$\phi(x) = x + (x^4 + x^3 + -6x^2 + 20x - 16) * \psi(x) = 0$$

$$\psi(x) = \frac{1}{x-24}$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + -12x + 20$$

## 4 Задача

Знайти найменший додатний корінь нелінійного рівняння

$$x^4 + x^3 + -6x^2 + 20x - 16 = 0$$

методом простої ітерації та методом релаксації з точністю  $\epsilon = 10^{-4}$ .

Знайти апіорну та апостеріорну оцінку кількості кроків.

Початковий проміжок та початкове наближення обрати однакове для обох методів (якщо) це можливо. Порівняти результати методів між собою.

### 4.1 Метод простої ітерації

На проміжку  $[0; 1.4]$   $f(x)$  монотонно зростає, а також має різні знаки на кінцях.  $f'(x)$  на цьому ж проміжку є додатньою

Оберемо проміжок  $[a; b] = [0; 1.4]$

Знайдемо  $x_0 = (a_0 + b_0)/2$ , де  $a_0 = a, b_0 = b$

$$x_0 = (0 + 1.4)/2 = 0.7$$

$$\sigma = 0.7$$

Підберемо таку функцію  $\psi(x)$  щоб модуль похідної від функції  $\phi(x) = x + f(x) * \psi(x)$  був  $< 1$  на проміжку  $[a; b]$

$$\psi(x) = \frac{1}{x-24}$$

Обчислимо  $\phi(x)$  за формулою:

$$\phi(x) = x + (x^4 + x^3 + -6x^2 + 20x - 16) * \psi(x) = 0$$

Для визначення  $q$  знайдемо критичні точки  $\phi'(x) = 0$  на  $[0; 1.4] - 0.73011$ ,  
 $\phi''(0.73011) \approx -1.011$ , отже це точка локального максимуму.  
 $\phi(0.73011) \approx 0.39$

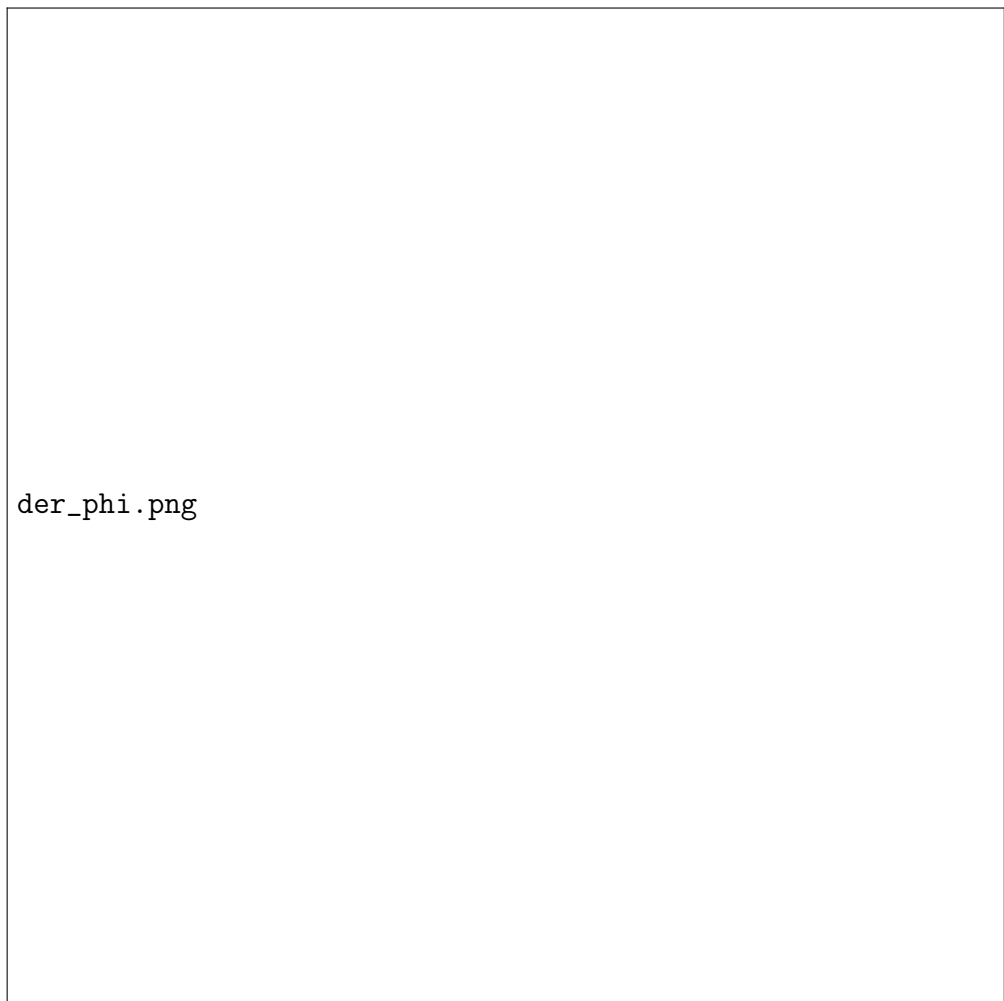


Рис. 2:  $\phi'(x)$

Також перевіримо графічно див рис. ??  
 $q = 0.4$

Перевіримо формулу (12)

$$|\phi(x_0) - x_0| \leq (1 - q)\sigma$$

$$\phi(x_0) = 0.886991, x_0 = 0.7, (1 - 0.4) * 0.7 = 0.225 \Rightarrow 0.186991 \leq 0.42$$

Знайдемо апріорну оцінку:

$$n \leq \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{\phi(x_0) - x_0}{(1-q)*\epsilon}\right)}{\ln(1/q)} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{\ln(0.886991 - 0.7)}{\frac{(1-0.4)*10^{-4}}{\ln(1/0.4)}} \right\rceil + 1 = 9$$

Апостеріорна оцінка обчислюється за наступною формулою:

$$|x_n - x_*| \leq \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}|.$$

## 4.2 Метод релаксації

На проміжку  $[0; 1.4]$   $f(x)$  монотонно зростає, а також має різні знаки на кінцях.  $f'(x)$  на цьому ж проміжку є додатньою


Обчисливши першу похідну і прирівнявши до нуля, отримаємо дві критичні точки 0.78 і  $-1.28$ .

Якщо перевірити за другою похідною - це будуть локальний мінімум, і локальний максимум відповідно. Отже мінімум обчислимо за наступною формулою :

$$m_1 = \min |f'(x)| = |f'(0.78)| \approx 14.364$$

А максимум за  $f'(a)$  і  $f'(b)$  адже функція зростає на  $(0.78; 1.4)$  і спадає на  $[0; 0.78)$  (через знак похідної):

$$M_1 = \max |f'(x)| = |f'(0)| = 20$$



der\_f.png

Рис. 3: Похідна функції  $f$

Також перевіримо графічно: див рис. ??

$$\tau_{opt} = \frac{2}{M_1 + m_1} = \frac{2}{34} = 0.0059$$

Умова збіжності  $-2 < \tau f'(x) < 0$  виконується.

Додаткові обчислення:

$$q = \frac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1} = \frac{20 - 14}{20 + 14} = 0.176$$

$$z_0 = \frac{0 + 1.4}{2} = 0.7$$

Знайдемо апріорну оцінку:

$$n \leq \left[ \frac{\ln(|z_0|/\epsilon)}{\ln(1/q)} \right] + 1 \leq \left[ \frac{8.8536}{1.734} \right] + 1 = 6$$

Апостеріорна оцінка обчислюється за наступною формулою:

$$|z_n| \leq q^n * |z_0|$$

## 5 Результати роботи програми

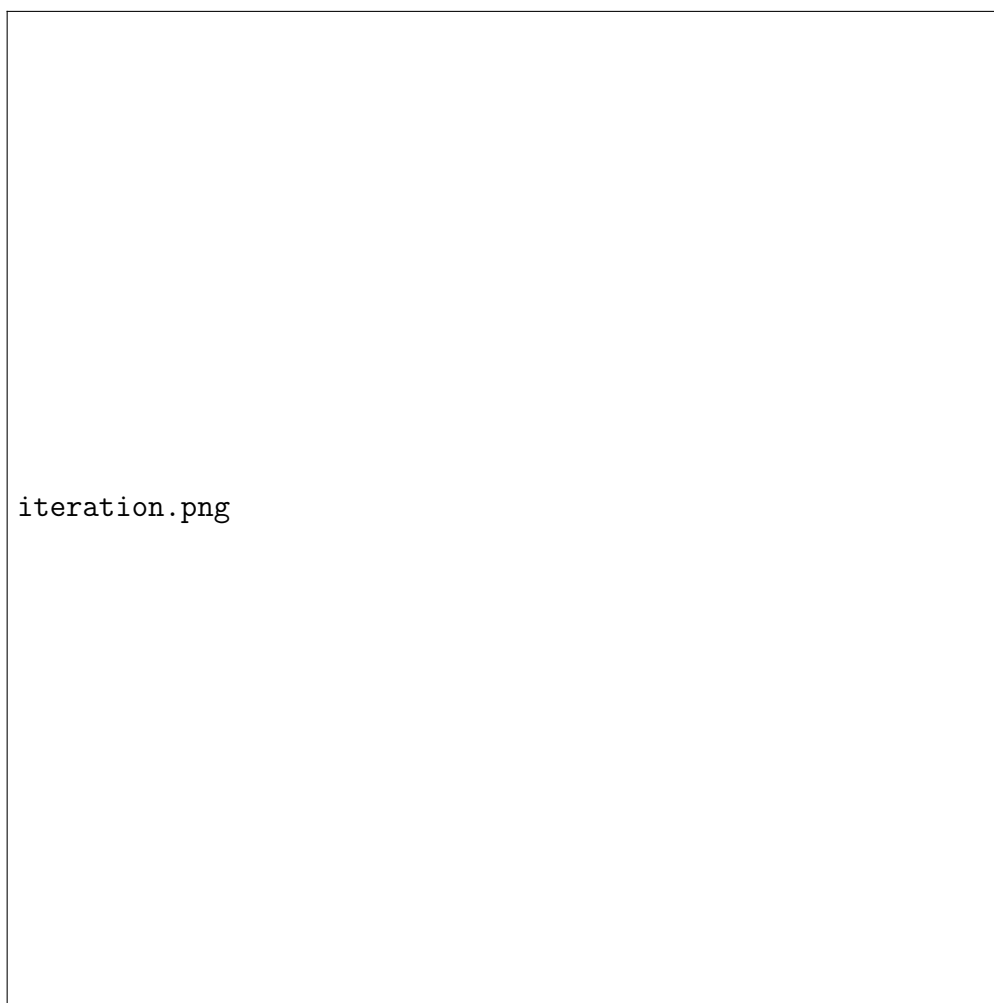


Рис. 4: таблиця результатів для методу простої ітерації





Рис. 5: Таблиця результатів для методу релаксації

## 6 Висновок

Ми отримали наближений корінь нелінійного рівняння двома різними способами:

Методом простої ітерації:  $x^* = 0.9999740300057031$

Методом релаксації:  $x^* = 0.9999989452870753$

Проте могли зупинитись після 8 кроку для методу простої ітерації так як точність вже досягається,  
для методу релаксації точність досягається після 6 кроку - як і за апіорною оцінкою.

Отже, у даному випадку метод релаксації досягнув набагато кращої точності навіть при меншій кількості кроків.

З іншої ж сторони різниця не така вже й велика, адже алгоритм на 9 та 6 кроків - це те що може бути швидко обраховане навіть вручну.

Обидва методи відпрацювали чудово.

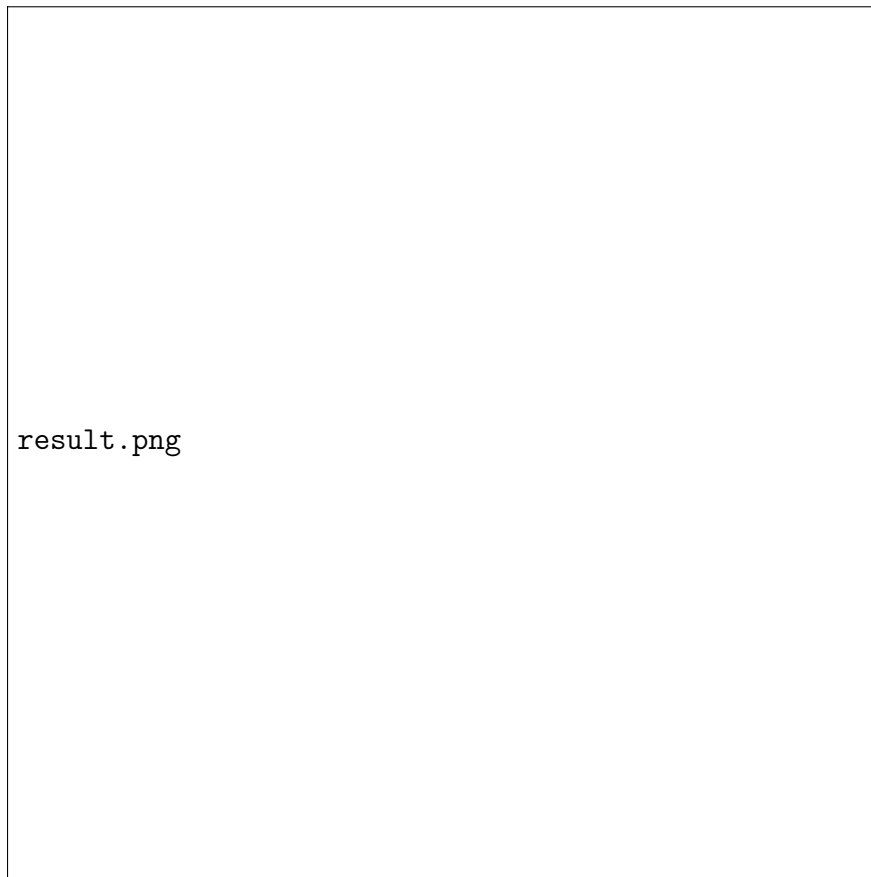


Рис. 6: Таблиця порівняння

## 7 Вихідний код програми

Посилання на [GitHub](#)