Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

ЗВІТ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ №3

З дисципліни "Чисельні методи"

Тема: Розв'язування системи нелінійних алгебраїчних рівнянь

Виконав студент 3-го курсу
групи ТТП-31
Рісенгін Владислав

Київ-2024

1 Постановка задачі

Придумати систему яка складається з 3 нелінійних рівнянь. І вектором правої частини $\vec{f} = (0, 0, 0)$.

Розв'язати її методом простої ітерації, і модифікованим методом Ньютона

2 Вступ

Метою цієї лабораторної роботи є вивчення методів розв'язування системи нелінійних алгебраїчних рівнянь, які дають можливість вирішення багатьох наукових та інженерних задач.

У процесі виконання роботи будуть досліджені та реалізовані методи простої ітерації, модифікований метод Нютона.

3 Деталі реалізації

Лабораторна робота виконана використовуючи мову програмування Python, а також бібліотеку numpy.

4 Теоретичний опис методів

Метод простої ітерації

Метод грунтується на зведенні системи нелінійних рівнянь до вигляду $\overline{x} = \overline{\Phi}(\overline{x})$, де $\overline{\Phi}(\overline{x}) = \overline{x} - C^{-1}\overline{F}(\overline{x})$, де C – невироджена матриця. Початкове наближення обирається довільне. Ітераційний процес має вигляд:

$$\overline{x}^{k+1} = \overline{\Phi}(\overline{x}^k). \tag{24}$$

Достатня умова збіжності. Нехай відображення $\overline{\Phi}(\overline{x})$ визначено і неперервно диференційоване в деякій області G і є стискаючим з коефіцієнтом q; $\overline{x}^0 \in G$; $||\overline{\Phi}'(\overline{x}^0)|| \leqslant q$, $0 < q < 1$, де

$$\Phi'(\overline{x}) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} -$$

матриця Якобі, тоді ітераційний процес (24) збігається, при

чому швидкість збіжності лінійна:

$$||\overline{x}^k - \overline{x}^*|| \leqslant \frac{q^k}{1-q}||\overline{x}^1 - \overline{x}^0||.$$

Умова припинення: $||\overline{x}^{k+1} - \overline{x}^k|| \leqslant \varepsilon$.

Модифікований метод Ньютона

Ітераційний процес модифікованого методу Ньютона має вигляд:

$$\overline{x}^{k+1} = \overline{x}^k - A_0^{-1}\overline{F}(\overline{x}^k).$$

Обирається початкове наближення x^0, для якого обчислюється матриця Якобі: $A_0 = \overline{F'}(\overline{x_0})$.

Умова припинення методу: $||\overline{x}^{k+1} - \overline{x}^k|| \leqslant \varepsilon$.

5 Результати роботи програми

Для обох методів будемо шукати розв'язок з точністю $\epsilon < 10^{-6}$
Як критерій зупинки використовується норма $max(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|) < \epsilon$
Система для розв'язання:

$$\begin{cases} 3x_1 - \sin(x_2) - \frac{1}{e^{x_3}} = 0 \\ 5x_2 + \cos(x_1) - x_3^2 = 0 \\ 4x_3 + x_1^2 - x_2 = 0 \end{cases}$$

5.1 Метод простої ітерації

```
Iteration  |                  x_new                    |    Norm
-----------------------------------------------------------------------
0          | [0 0 0]                                   | -
1          | [ 0.333333 -0.200000  0.000000]           | 0.333333333
2          | [ 0.267110 -0.188991 -0.077778]           | 0.077777778
3          | [ 0.297671 -0.191698 -0.065085]           | 0.030561143
4          | [ 0.292241 -0.190357 -0.070076]           | 0.005430095
5          | [ 0.294460 -0.190538 -0.068941]           | 0.002218911
6          | [ 0.293995 -0.190441 -0.069311]           | 0.000465066
7          | [ 0.294159 -0.190458 -0.069219]           | 0.000164057
8          | [ 0.294121 -0.190451 -0.069247]           | 0.000038556
9          | [ 0.294133 -0.190452 -0.069239]           | 0.000012384
10         | [ 0.294130 -0.190452 -0.069242]           | 0.000003121
11         | [ 0.294131 -0.190452 -0.069241]           | 0.000000948
```

Збіжність досягнута після 11 ітерацій. Остаточний розв'язок:

$$x = [0.29413083, -0.19045207, -0.06924108]$$

Перевірка результату:

$$f(\mathrm{x}) = [7.47620013e - 07, -1.93551788e - 07, 6.78223201e - 07]$$

5.2 Модифікований метод Ньютона

```
Iteration  |                  x_new                    |    Norm
-----------------------------------------------------------------------
0          | [0 0 0]                                   | -
1          | [ 0.283333 -0.200000 -0.050000]           | 0.283333333
2          | [ 0.293009 -0.191526 -0.067951]           | 0.017950890
3          | [ 0.294027 -0.190552 -0.069102]           | 0.001150762
4          | [ 0.294120 -0.190462 -0.069228]           | 0.000126747
5          | [ 0.294130 -0.190453 -0.069240]           | 0.000011542
6          | [ 0.294131 -0.190452 -0.069241]           | 0.000001154
7          | [ 0.294131 -0.190452 -0.069241]           | 0.000000110
```

Збіжність досягнута після 7 ітерацій. Остаточний розв'язок:

$$x = [0.29413063, -0.19045205, -0.06924121]$$

Перевірка результату:

$$f(\mathrm{x}) = [-6.40065623e - 09, -4.05407964e - 08, 5.12418141e - 08]$$

6 Висновок

У результаті роботи обох методів було досягнуто розв'язку з необхідною точністю $\epsilon < 10^{-6}$.

Метод простої ітерації виявився менш ефективним, потребуючи 11 ітерацій для досягнення збіжності.
Остаточний розв'язок: $x = [0.29413083, -0.19045207, -0.06924108]$ пройшов перевірку, показавши значення функцій, близькі до нуля, що свідчить про правильність розв'язку.

З іншого боку, модифікований метод Ньютона виявився значно швидшим, досягнувши збіжності вже за 7 ітерацій.
Остаточний розв'язок: $x = [0.29413063, -0.19045205, -0.06924121]$ також продемонстрував малі значення функцій у цій точці, підтверджуючи його коректність.

Отже, можна стверджувати, що модифікований метод Ньютона є більш ефективним у даному випадку, забезпечуючи швидшу збіжність і високу точність розв'язку в порівнянні з методом простої ітерації.

Це підкреслює важливість вибору відповідних чисельних методів для розв'язання нелінійних систем рівнянь, залежно від їхніх властивостей та вимог до точності.