Bài tập về nhà môn Numerical Linear Algebra - Đợt 6

Nguyễn Trung Đức – 21110269

Ngày 18 tháng 12 năm 2023

20.1 Let $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ be nonsingular. Show that A has an LU factorization if and only if for each k with $1 \leqslant k \leqslant m$, the upper-left $k \times k$ block $A_{1:k,1:k}$ is nonsingular. (Hint: The row operations of Gaussian elimination leave the determinants $\det(A_{1:k,1:k})$ unchanged.) Prove that this LU factorization is unique.

<u>Giải</u>

1. Với phần chứng minh A có một LU factorization khi và chỉ khi với mỗi k $(1 \leqslant k \leqslant m)$, phần ma trận $A_{1:k,1:k}$ phía trên bên trái của ma trận A cũng là nonsingular, ta đi chứng minh:

    - Chiều thuận: $(\Rightarrow)$
      Ta có $A = LU$, với L, U lần lượt là ma trận tam giác dưới và ma trận tam giác trên.
      $\Rightarrow A_{1:k,1:k} = L_{1:k,1:k}U_{1:k,1:k}$
      Ta có: $\det(A) = \det(L)\det(U) \Rightarrow \det(A_{1:k,1:k}) = \det(L_{1:k,1:k})\det(U_{1:k,1:k})$.
      Vì A là nonsingular $\Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \det(L) \neq 0 \\ \det(U) \neq 0 \end{cases}$
      $\Rightarrow$ Trên đường chéo chính của L và U không có phần tử 0, vì nếu có thì $\det(L) = 0$ hay $\det(U) = 0$.
      $\Rightarrow$ Trên đường chéo chính của $L_{1:k,1:k}$ và $U_{1:k,1:k}$ không có phần tử 0.
      Mà $\det(L_{1:k,1:k})\det(U_{1:k,1:k}) = \det(A_{1:k,1:k})$.
      $\Rightarrow \det(A_{1:k,1:k}) \neq 0 \Rightarrow A_{1:k,1:k}$ là nonsingular.
      Vậy nếu A có một LU factorization thì với mỗi k $(1 \leqslant k \leqslant m)$, phần ma trận $A_{1:k,1:k}$ phía trên bên trái của ma trận A cũng là nonsingular.
    - Chiều nghịch: $(\Leftarrow)$
      Với mỗi $1 \leqslant k \leqslant m$, ta có $A_{1:k,1:k}$ là nonsingular.
      Ta sẽ thực hiện Gaussian elimination trên $A_{1:k,1:k}$, việc thực hiện Gaussian elimination sẽ không làm thay đổi định thức của $A_{1:k,1:k}$ và $\det(A_{1:k,1:k}) \neq 0$ tại mỗi bước biến đổi.
      Sau khi thực hiện Gaussian elimination cho $A_{1:k,1:k}$, ta được ma trận tam giác trên $U_{1:k,1:k}$, và những phép biến đổi có thể được viết dưới dạng một ma trận tam giác dưới $\tilde{L}_{1:k,1:k}$.
      Vì $A_{1:k,1:k}$ là nonsingular nên $\tilde{L}_{1:k,1:k}$, $U_{1:k,1:k}$ cũng là nonsingular.
      Ta tính $L_{1:k,1:k} = (\tilde{L}_{1:k,1:k})^{-1}$, do đó ta được $A_{1:k,1:k} = L_{1:k,1:k}U_{1:k,1:k}$ (LU factorization).
      Vậy với mỗi k $(1 \leqslant k \leqslant m)$, phần ma trận $A_{1:k,1:k}$ phía trên bên trái của ma trận A là nonsingular thì A có một LU factorization.

2. Với phần chứng minh LU factorization này là duy nhất:

    Giả sử tồn tại hai LU factorization khác nhau của A: $\begin{cases} A = L_1U_1 \\ A = L_2U_2 \end{cases}$, với các phần tử trên đường chéo chính của L_1, L_2 đều bằng 1.
    Vì A là nonsingular, nên

    $$\det(A) = \det(L_1U_1) = \det(L_1)\det(U_1) = \det(L_2U_2) = \det(L_2)\det(U_2) \neq 0$$

    $\Rightarrow L_1, L_2, U_1, U_2$ cũng là nonsingular.
    Ta có:

    $$\begin{aligned} L_1U_1 &= L_2U_2 \\ \Leftrightarrow L_2^{-1}L_1 &= U_2U_1^{-1} \end{aligned}$$

Với nghịch đảo của ma trận tam giác dưới cũng là ma trận tam giác dưới, và phép nhân của hai ma trận tam giác dưới cũng là ma trận tam giác dưới (tương tự cho ma trận tam giác trên), ta có $L_2^{-1}L_1$ là ma trận tam giác dưới và $U_2U_1^{-1}$ là ma trận tam giác trên.

Vì chỉ có ma trận đường chéo mới vừa là ma trận tam giác trên, vừa là ma trận tam giác dưới. Và các phần tử trên đường chéo chính của L_1, L_2 đều bằng 1, nên:

$$L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1} = I$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_1 = L_2 \\ U_2 = U_1 \end{cases}$$

Vậy LU factorization này là duy nhất.