Bài tập về nhà môn Numerical Linear Algebra - Đợt 1

Nguyễn Trung Đức – 21110269

Ngày 13 tháng 10 năm 2023

2.1: Show that if a matrix A is both triangular and unitary, then it is diagonal.

Giải

Không mất tính tổng quát, giả sử A là ma trận tam giác trên. Do đó, A^{-1} là ma trận tam giác trên, và A^* là ma trận tam giác dưới. Vì A là ma trận unitary nên ta có:

$$A^*A = AA^* = I$$

Hay $A^* = A^{-1}$. Mà A^* là ma trận tam giác dưới, A^{-1} là ma trận tam giác trên. Nên A^* và A^{-1} là ma trận đường chéo (vừa là ma trận tam giác trên, vừa là ma trận tam giác dưới).

2.2: The Pythagorean theorem asserts that for a set of n orthogonal vectors $\{x_i\}$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

(a) Prove this in the case $n = 2$ by an explicit computation of $\|x_1 + x_2\|^2$.

(b) Show that this computation also establishes the general case, by induction.

Giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
\|x_1 + x_2\|^2 &= (x_1 + x_2)^*(x_1 + x_2) \\
&= x_1^*(x_1 + x_2) + x_2^*(x_1 + x_2) \\
&= x_1^*x_1 + x_1^*x_2 + x_2^*x_1 + x_2^*x_2 \\
&= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \quad \left(x_1^*x_2 = x_2^*x_1 = 0 \text{ vì } \{x_{i,i=\overline{1,n}}\} \text{ là các vector trực giao}\right)
\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

b) Với $n = 1$, ta có $\|x_1\|^2 = \|x_1\|^2$ (đúng)

Với $n = 2$, ta có $\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$ (câu a)

Giả sử định lý Pythagorean đúng với mọi n. Với $n + 1$, ta có:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{n+1} x_i \right\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1} \right\|^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1} \right)^* \left(\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1} \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^* \sum_{i=1}^{n} x_i + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^* x_{n+1} + (x_{n+1})^* \sum_{i=1}^{n} x_i + (x_{n+1})^* x_{n+1} \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 \quad \left(\text{vì } \{x_{i,i=\overline{1,n+1}}\} \text{ là các vector trực giao} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \|x_i\|^2
\end{aligned}$$

Vậy theo quy nạp toán học, ta có $\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$.

2.3: Let $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ be hermitian. An eigenvector of A is a nonzero vector $x \in \mathbb{C}^m$ such that $Ax = \lambda x$ for some $\lambda \in \mathbb{C}$, the corresponding eigenvalue.

(a) Prove that all eigenvalues of A are real.

(b) Prove that if x and y are eigenvectors corresponding to distinct eigenvalues, then x and y are orthogonal.

<u>Giải</u>

Ta có A là ma trận Hermitian: $A = A^*$

a) Ta cần chứng minh tất cả eigenvalues của A là số thực, hay: $\lambda = \lambda^*$
Với mọi eigenvectors $x \in \mathbb{C}^m$ của A, và eigenvalues $\lambda \in \mathbb{C}$ tương ứng, ta có:

$$\begin{aligned}
& Ax = \lambda x \\
\Leftrightarrow\quad & x^*Ax = x^*\lambda x \\
\Leftrightarrow\quad & x^*A^*x = x^*\lambda x \quad (A = A^*) \\
\Leftrightarrow\quad & (Ax)^*x = x^*\lambda x \\
\Leftrightarrow\quad & (\lambda x)^*x = x^*\lambda x \\
\Leftrightarrow\quad & x^*\lambda^*x = x^*\lambda x \\
\Rightarrow\quad & \lambda = \lambda^*
\end{aligned}$$

Vậy mọi eigenvalues của A là số thực.

b) Với eigenvalue a, b khác nhau tương ứng với eigenvector x, y, ta có:

$$Ax = ax, \ \ Ay = by$$

Để x và y trực giao, ta cần: $x^*y = 0$
Ta có:

$$\begin{aligned}
& Ax = ax \\
\Leftrightarrow\quad & (Ax)^* = (ax)^* \\
\Leftrightarrow\quad & x^*A^* = x^*a \quad (a = a^* \text{ do câu a)} \\
\Leftrightarrow\quad & x^*A^*y = x^*ay \\
\Leftrightarrow\quad & x^*Ay = x^*ay \quad (A = A^*) \\
\Leftrightarrow\quad & x^*by = x^*ay \\
\Leftrightarrow\quad & (b-a)(x^*y) = 0
\end{aligned}$$

Mà a và b khác nhau theo giả thuyết, nên $x^*y = 0$.
Vậy ta có điều phải chứng minh.