Bài tập về nhà môn Numerical Linear Algebra - Đợt 7

Nguyễn Trung Đức – 21110269

Ngày 29 tháng 12 năm 2023

21.1 Let A be the 4×4 matrix (20.3) considered in this lecture and the previous one.

(a) Determine $\det(A)$ from (20.5).

(b) Determine $\det(A)$ from (21.3).

(c) Describe how Gaussian elimination with partial pivoting can be used to find the determinant of a general square matrix.

<u>Giải</u>

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

(a) Ta có:

$$A = LU \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ta có L, U là lần lượt là ma trận tam giác dưới và ma trận tam giác trên, nên định thức của chúng là tích của các phần tử nằm trên đường chéo chính của nó: $\begin{cases} \det(L) = 1.1.1.1 = 1 \\ \det(U) = 2.1.2.2 = 8 \end{cases}$

Vậy $\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U) = 1.8 = 8$

(b) Ta có:

$$PA = LU \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2/7 & 1 & 0 \\ 1/4 & -3/7 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & 7/4 & 9/4 & 17/4 \\ 0 & 0 & -6/7 & -2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Ta có L, U là lần lượt là ma trận tam giác dưới và ma trận tam giác trên, nên định thức của chúng là tích của các phần tử nằm trên đường chéo chính của nó: $\begin{cases} \det(L) = 1.1.1.1 = 1 \\ \det(U) = 8.\frac{7}{4}.\frac{-6}{7}.\frac{2}{3} = -8 \end{cases}$

Lại có $\det(P) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.1.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.1.(-1) = -1$

Vậy $\det(PA) = \det(P)\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U) \Rightarrow \det(A) = \dfrac{\det(L)\det(U)}{\det(P)} = \dfrac{-8}{-1} = 8$

(c) Với partial pivoting, phép hoán đổi các dòng của ma trận có thể được nghịch đảo lại ($\det(P) \neq 0$) và ta có:

$$\begin{aligned} PA &= LU \\ \det(PA) &= \det(LU) \\ \det(P)\det(A) &= \det(L)\det(U) \\ \det(A) &= \frac{\det(L)\det(U)}{\det(P)} \end{aligned}$$

Mà $\det(P) = \pm 1$, vì khi đổi 2 dòng với nhau thì chỉ làm thay đổi dấu của định thức, và $\det(L) = 1$ do các phần tử trên đường chéo chính bằng 1, nên ta có:

$$\begin{cases} \det(A) = \det(U) & \text{(số lần pivoting là chẵn)} \\ \det(A) = -\det(U) & \text{(số lần pivoting là lẻ)} \end{cases}$$

24.1 For each of the following statements, prove that it is true or give an example to show it is false. Throughout, $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ unless otherwise indicated, and "ew" stands for eigenvalue. (This comes from the German "Eigenwert." The corresponding abbreviation for eigenvector is "ev", from "Eigenvektor.")

(a) If λ is an ew of A and $\mu \in \mathbb{C}$, then $\lambda - \mu$ is an ew of $A - \mu I$.

(b) If A is real and λ is an ew of A, then so is $-\lambda$.

(c) If A is real and λ is an ew of A, then so is $\overline{\lambda}$.

(d) If λ is an ew of A and A is nonsingular, then λ^{-1} is an ew of A^{-1}.

(e) If all the ew's of A are zero, then $A = 0$.

(f) If A is hermitian and λ is an ew of A, then $|\lambda|$ is a singular value of A.

(g) If A is diagonalizable and all its ew's are equal, then A is diagonal.

<u>Giải</u>

Với λ là eigenvalue của A thì ta có: $Ax = \lambda x \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

(a) Đúng, với $\lambda - \mu$ là eigenvalue của $A - \mu I$ thì ta có:

$$\det\big((A - \mu I) - (\lambda - \mu)I\big) = \det(A - \mu I - \lambda I + \mu I) = \det(A - \lambda I) = 0$$

(b) Sai, ví dụ với $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)^2$ Vậy $\lambda = 1$ là một eigenvalue của A, chứ không phải -1

(c) Đúng, với λ là eigenvalue của A thì ta có $Ax = \lambda x \Leftrightarrow \overline{Ax} = \overline{\lambda x}$. Vì $A \in \mathbb{R}$ nên $\overline{A} = A$, và do đó ta có $A\overline{x} = \overline{\lambda}\overline{x}$
Vậy $\overline{\lambda}$ cũng là một eigenvalue của A

(d) Đúng, với λ^{-1} là eigenvalue của A^{-1}, ta có: $\det(A^{-1} - \lambda^{-1} I) = \det\left(\dfrac{A^{-1}\lambda - I}{\lambda}\right)$

Nhân với $\det(A)$, ta có: $\det(A)\det\left(\dfrac{A^{-1}\lambda - I}{\lambda}\right) = \det\left(\dfrac{I\lambda - A}{\lambda}\right) = \dfrac{1}{\lambda^m}\det(A - \lambda I) = 0$

Vì A nonsingular nên ta có: $\det\left(\dfrac{A^{-1}\lambda - I}{\lambda}\right) = \dfrac{0}{\det(A)} = 0$. Vậy $\det(A^{-1} - \lambda^{-1} I) = 0$

(e) Sai, Ví dụ với $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, thì $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$. Vậy A có các eigenvalue $\lambda = 0$ nhưng $A \neq 0$

(f) Đúng, vì A là Hermitian nên A unitarily diagonalizable, tức tồn tại ma trận unitary Q sao cho A có một eigenvalue decomposition cũng như là một SVD:

$$A = Q\Lambda Q^* = Q\,\mathrm{sign}(\Lambda)|\Lambda|Q^*$$

Với các singular values tương đương với các phần tử đường chéo của $|\Lambda|$: $|\lambda_i|$ (các eigenvalues của A)

(g) Sai, ví dụ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, ta thấy A chéo hoá được, ta lại có các eigenvalues của A bằng nhau ($\lambda = 2$), nhưng A không phải là ma trận đường chéo