Bài tập về nhà môn Numerical Linear Algebra - Đợt 4

Nguyễn Trung Đức – 21110269

Ngày 10 tháng 11 năm 2023

Theorem 5.8: For any v with $0 \leqslant v \leqslant r$, define:

$$A_v = \sum_{i=1}^{v} \sigma_i u_i v_i^*$$

If $v = p = \min\{m, n\}$, define $\sigma_{v+1} = 0$. Then

$$\|A - A_v\|_2 = \inf_{\substack{B \in \mathbb{C}^{m\times n} \\ \operatorname{rank}(B) \leqslant v}} \|A - B\|_2 = \sigma_{v+1}$$

Prove Theorem 5.8

Giải

Ta có $\|A\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^* \right\|_2 = \sigma_1$

$$\Rightarrow \|A - A_v\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^* - \sum_{i=1}^{v} \sigma_i u_i v_i^* \right\|_2 = \left\| \sum_{i=v+1}^{r} \sigma_i u_i v_i^* \right\|_2 = \sigma_{v+1}$$

Tiếp theo, giả sử có B bất kỳ với $\operatorname{rank}(B) \leqslant v$ sao cho $\|A - B\|_2 < \|A - A_v\|_2 = \sigma_{v+1}$. Khi đó, có một không gian con $W \in \mathbb{C}^n$ có $(n - v)$ chiều sao cho $w \in W \Rightarrow Bw = 0$. Do đó, với bất kỳ $w \in W$, ta có $Aw = (A - B)w$ và

$$\|Aw\|_2 = \big\|(A - B)w\big\|_2 \leqslant \|A - B\|_2 \|w\|_2 < \sigma_{v+1} \|w\|_2$$

Do đó, W là không gian con $(n - v)$ chiều với $\|Aw\|_2 < \sigma_{v+1}\|w\|_2$.

Nhưng có một không gian con $(v + 1)$ chiều với $\|Aw\|_2 \geqslant \sigma_{v+1}\|w\|_2$, cụ thể là không gian sinh bởi $v + 1$ vector suy biến phải đầu tiên của A. Vì tổng các chiều của các không gian này vượt quá n, nên phải có một vector khác 0 nằm trong cả hai, và nó mâu thuẫn.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Theorem 6.1: A projector P is an orthogonal projector if and only if $P = P^*$
Prove Theorem 6.1

Giải

Ta chứng minh chiều thuận ($\Rightarrow$), nếu $P = P^*$ thì P là một orthogonal projector

Để P là một orthogonal projector thì ta cần phải có $S_1 \perp S_2$ hay $\operatorname{range}(P) \perp \operatorname{null}(P)$

Với mọi $x \in \mathbb{C}^n$, ta có: $\begin{cases} \operatorname{null}(P) = \{Px = 0\} \\ \operatorname{range}(P) = \{Px\} \end{cases}$

Mà $\operatorname{range}(P) = \operatorname{null}(I - P) \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{null}(P) = \{Px = 0\} \\ \operatorname{null}(I - P) = \{(I - P)x = 0\} \end{cases}$

Với P là một projector và $P = P^*$, ta có:

$$(Px)^* \big((I - P)x\big) = x^* P^* (I - P)x = x^* P (I - P)x = x^* (P - P^2)x = x^*(P - P)x = 0$$

Vậy $\operatorname{null}(P) \perp \operatorname{null}(I - P) = \operatorname{range}(P)$ hay P là một orthogonal projector.

Tiếp theo, ta chứng minh chiều nghịch ($\Leftarrow$), nếu P là orthogonal projector thì $P = P^*$:

Giả sử P chiếu lên S_1 dọc theo S_2, với $S_1 \perp S_2$ và S_1 có số chiều là n. Khi đó, SVD của P có thể được xây dựng như sau. Cho $\{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{C}^m$, với $\{q_1, \ldots, q_n\}$ là một cơ sở của S_1 và $\{q_{n+1}, \ldots, q_m\}$ là một cơ sở của S_2. Với $j \leqslant n$, ta có $Pq_j = q_j$, và với $j > n$, ta có $Pq_j = 0$. Cho Q là ma trận Unitary mà cột thứ j là q_j. Khi đó, ta có

$$PQ = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} q_1 & \cdots & q_n & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right],$$

để cho

$$Q^*PQ = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} = \Sigma,$$

một ma trận đường chéo với 1 nằm ở n phần tử đầu tiên và 0 nằm ở những nơi khác. Khi đó, ta đã xây dựng một SVD của P: $P = Q\Sigma Q^*$.

Từ đây ta thấy P là ma trận Hermitian, vì:

$$P^* = (Q\Sigma Q^*)^* = Q\Sigma^* Q^* = Q\Sigma Q^* = P$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.