BÀI TẬP THỰC HÀNH TUẦN 10
MÔN: PHÂN TÍCH THUẬT TOÁN

Đề bài (Knapsack problem) Cho một tập hợp A gồm có n phần tử

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, a_i \in \mathbb{R}(a_i > 0)$$

Với một số thực dương S, viết chương trình tìm một tập con $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}$ của A sao cho

$$a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k} = S \quad (i_j \neq i_l, \forall j, l \in \{1, 2, \ldots, k\})$$

- Input: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, S$.
- Output: $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$.

Hint: Sử dụng phương pháp chia để trị hoặc quy hoạch động

Test:

- $n = 50, 100, 150, \ldots, 950, 1000$.
- Tạo ngẫu nhiên $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 500\}$.
- $S = 200$.
- Với mỗi n, tính thời gian trung bình để tìm một tập con có các phần tử đôi một khác nhau và có tổng bằng S. Giả sử thời gian trung bình là t

HƯỚNG DẪN

1. Chia để trị: Ý tưởng là chia đôi tập A thì ta sẽ có 3 trường hợp

   - TH1: Các phần tử đôi một khác nhau có tổng bằng S nằm hoàn toàn ở nửa bên trái.
   - TH2: Các phần tử đôi một khác nhau có tổng bằng S nằm hoàn toàn ở nửa bên phải.
   - TH3: Các phần tử đôi một khác nhau có tổng bằng S nằm rải rác ở nửa bên trái và nửa bên phải.

2. Quy hoạch động:

   Bài toán: Cho $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ của n item, mỗi item a_i có trọng số w_i, giá trị v_i và 1 sức chứa của knapsack là W. Ta muốn xác định tập con $T \subseteq A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ sao cho

$$max \Sigma_{i \in T} v_i,$$

$$\Sigma_{i \in T} w_i \leqslant W$$

   Giả sử lời giải tối ưu cho A và W là 1 tập con $T \subseteq A$, trong đó a_i là item được đánh số lớn nhất trong trong một lời giải tối ưu $T = \{a_1, \ldots, a_i\}$. Khi đó, $T^{'} = T - \{a_i\}$ là một lời giải tối ưu cho các item $\{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$ và sức chứa của Knapsack là $W - w_k$. Giá trị của lời giải T là giá trị của lời giải bài toán con $T^{'}$ cộng với giá trị v_i.

   Giá trị $V[i, j]$ biểu diễn giá trị của lời giải tối ưu cho các item $\{a_1, \ldots, a_i\}$ và trọng số lớn nhất j $(0 \leqslant j \leqslant W)$.

   Khi đó, ta có 3 trường hợp để xét việc tính $V[i, j]$ với các giá trị được cho của i và j:

- **Trường hợp 1:** thêm item a_i tới Knapsack có sức chứa j. Trong trường hợp này, lời giải tối ưu là v_i cộng với lời giải tối ưu cho $i-1$ item với trọng số Knapsack nhỏ hơn $j - w_i$.
- **Trường hợp 2:** Không thêm item thứ i nên trong trường hợp này, nó là lời giải bài toán con của $i-1$ item và có cùng trọng số. Giá trị $V[i,j] = V[i-1,j]$.
- **Trường hợp 3:** Nếu $j - w_i < 0$ (hay $j < w_i$) thì item thứ i không thể được thêm vào và $V[i,j] = V[i-1,j]$.

Xây dựng bảng $V[0\ldots n, 0\ldots W]$. Với $1 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant W$, $V[i,j]$ sẽ lưu trữ tổng giá trị lớn nhất của tập con $\{1,\ldots,i\}$ bất kỳ có tổng trọng số tối đa là j.

Khởi tạo:

- $V[0,j] = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant W.$
- $V[i,0] = 0, \quad 0 \leqslant i \leqslant n.$

Giá trị $V[i,j]$ được tính dựa vào đoạn code sau:

$$if(j - w_i) < 0)$$

$$V[i,j] = V[i-1,j]$$

$$else\{$$

$$V[i,j] = max(V[i-1,j], v_i + V[i-1, j-w_i])$$

$$\}$$

V[i,j]	j=0	1	2	...	W
i=0	0	0	0	0	0
1	0				
2	0				
⋮	0				
n	0				

Thuật toán cho bài toán Knapsack như sau:

Thuật toán 1 Thuật toán quy hoạch động cho bài toán Knapsack

```
for i = 1 to n do
    V[i, 0] = 0
end for
for j = 1 to W do
    V[0, j] = 0
end for
for i = 1 to n do
    for j = 1 to W do
        if j − w_i < 0 then
            V[i, j] = V[i − 1, j]
        else
            V[i, j] = max(V[i − 1, j], v_i + V[i − 1, j − w_i])
        end if
    end for
end for
Return   V[n, W]
```

Ví dụ: Xét $W = 5$, có 4 item, item 1 có $w_1 = 2$ và $v_1 = 3$, item 2 có $w_2 = 3$ và $v_2 = 4$, item 3 có $w_3 = 4$ và $v_3 = 5$, item 4 có $w_4 = 5$ và $v_4 = 6$.

Đầu tiên, ta sẽ điền $V[i, 0] = 0$ và $V[0, j] = 0$ vào dòng đầu tiên và cột đầu tiên của bảng.

V[i,j]	j=0	1	2	3	4	5
i=0	0	0	0	0	0	0
1	0					
2	0					
3	0					
4	0					

Ta tính dòng $i = 1$ trong bảng:

- Tính $V[1, 1]$: ta có $w_1 = 2$, $v_1 = 3$, $i = 1$, $j = 1$

$$j - w_1 = 1 - 2 = -1 < 0 \Rightarrow V[1, 1] = V[0, 1] = 0$$

- Tính $V[1, 2]$: ta có $w_1 = 2$, $v_1 = 3$, $i = 1$, $j = 2$

$$j - w_1 = 2 - 2 = 0 \Rightarrow V[1, 2] = max(V[0, 2], 3 + V[0, 0]) = max(0, 3 + 0) = 3$$

- Tính $V[1, 3]$: ta có $w_1 = 2$, $v_1 = 3$, $i = 1$, $j = 3$

$$j - w_1 = 3 - 2 = 1 \Rightarrow V[1, 3] = max(V[0, 3], 3 + V[0, 1]) = max(0, 3 + 0) = 3$$

- Tính $V[1, 4]$: ta có $w_1 = 2$, $v_1 = 3$, $i = 1$, $j = 4$

$$j - w_1 = 4 - 2 = 2 \Rightarrow V[1, 4] = max(V[0, 4], 3 + V[0, 2]) = max(0, 3 + 0) = 3$$

- Tính $V[1, 5]$: ta có $w_1 = 2$, $v_1 = 3$, $i = 1$, $j = 5$

$$j - w_1 = 5 - 2 = 3 \Rightarrow V[1, 5] = max(V[0, 5], 3 + V[0, 3]) = max(0, 3 + 0) = 3$$

V[i,j]	j=0	1	2	3	4	5
i=0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	3	3	3	3
2	0					
3	0					
4	0					

Ta tính dòng $i = 2$ trong bảng:

- Tính $V[2,1]$: ta có $w_2 = 3$, $v_2 = 4$, $i = 2$, $j = 1$

$$j - w_2 = 1 - 3 = -2 < 0 \Rightarrow V[2,1] = V[1,1] = 0$$

- Tính $V[2,2]$: ta có $w_2 = 3$, $v_2 = 4$, $i = 2$, $j = 2$

$$j - w_2 = 2 - 3 = -1 < 0 \Rightarrow V[2,2] = V[1,2] = 3$$

- Tính $V[2,3]$: ta có $w_2 = 3$, $v_2 = 4$, $i = 2$, $j = 3$

$$j - w_2 = 3 - 3 = 0 \Rightarrow V[2,3] = max(V[1,3], 4 + V[1,0]) = max(3,4) = 4$$

- Tính $V[2,4]$: ta có $w_2 = 3$, $v_2 = 4$, $i = 2$, $j = 4$

$$j - w_2 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow V[2,4] = max(V[1,4], 4 + V[1,1]) = max(3,4) = 4$$

- Tính $V[2,5]$: ta có $w_2 = 3$, $v_2 = 4$, $i = 2$, $j = 5$

$$j - w_2 = 5 - 3 = 2 \Rightarrow V[2,5] = max(V[1,5], 4 + V[1,2]) = max(3, 4 + 3) = 7$$

V[i,j]	j=0	1	2	3	4	5
i=0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	3	3	3	3
2	0	0	3	4	4	7
3	0					
4	0					

Ta tính dòng $i = 3$ trong bảng:

- Tính $V[3,1]$: ta có $w_3 = 4$, $v_3 = 5$, $i = 3$, $j = 1$

$$j - w_3 = 1 - 4 = -3 < 0 \Rightarrow V[3,1] = V[2,1] = 0$$

- Tính $V[3,2]$: ta có $w_3 = 4$, $v_3 = 5$, $i = 3$, $j = 2$

$$j - w_3 = 2 - 4 = -2 < 0 \Rightarrow V[3,2] = V[2,2] = 3$$

- Tính $V[3,3]$: ta có $w_3 = 4$, $v_3 = 5$, $i = 3$, $j = 3$

$$j - w_3 = 3 - 4 = -1 \Rightarrow V[3,3] = V[2,3] = 4$$

- Tính $V[3,4]$: ta có $w_3 = 4$, $v_3 = 5$, $i = 3$, $j = 4$

$$j - w_3 = 4 - 4 = 0 \Rightarrow V[3,4] = max(V[2,4], 5 + V[2,0]) = max(4,5) = 5$$

- Tính $V[3,5]$: ta có $w_3 = 4$, $v_3 = 5$, $i = 3$, $j = 5$

$$j - w_3 = 5 - 4 = 1 \Rightarrow V[3,5] = max(V[2,5], 4 + V[2,1]) = max(7,5) = 7$$

V[i,j]	j=0	1	2	3	4	5
i=0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	3	3	3	3
2	0	0	3	4	4	7
3	0	0	3	4	5	7
4	0					

Ta tính dòng $i = 4$ trong bảng:

- Tính $V[4,1]$: ta có $w_4 = 5$, $v_4 = 6$, $i = 4$, $j = 1$

$$j - w_4 = 1 - 5 = -4 < 0 \Rightarrow V[4,1] = V[3,1] = 0$$

- Tính $V[4,2]$: ta có $w_4 = 5$, $v_4 = 6$, $i = 4$, $j = 2$

$$j - w_4 = 2 - 5 = -3 < 0 \Rightarrow V[4,2] = V[3,2] = 3$$

- Tính $V[4,3]$: ta có $w_4 = 5$, $v_4 = 6$, $i = 4$, $j = 3$

$$j - w_3 = 3 - 5 = -2 \Rightarrow V[4,3] = V[3,3] = 4$$

- Tính $V[4,4]$: ta có $w_4 = 5$, $v_4 = 6$, $i = 4$, $j = 4$

$$j - w_3 = 4 - 5 = -1 \Rightarrow V[4,4] = V[3,4] = 5$$

- Tính $V[4,5]$: ta có $w_4 = 5$, $v_4 = 6$, $i = 4$, $j = 5$

$$j - w_3 = 5 - 5 = 0 \Rightarrow V[4,5] = max(V[3,5], 6 + V[3,0]) = max(7,6) = 7$$

V[i,j]	j=0	1	2	3	4	5
i=0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	3	3	3	3
2	0	0	3	4	4	7
3	0	0	3	4	5	7
4	0	0	3	4	5	7

Tìm lời giải của bài toán:

$i = n, \quad j = W$

$while \quad i, k > 0$

$\quad if \quad V[i,j] \neq V[i-1,j] \quad then$

Đánh dấu item thứ i như trong knapsack

$i = i - 1, \quad j = j - w_i$

$\quad else$

$i = i - 1$

}

Tìm các item:

- Ta có $i = 4$, $j = 5$, $w_i = 5$, $V[i,j] = V[i-1,j] = 7 \Rightarrow i = i - 1 = 4 - 1 = 3$

V[i,j]	j=0	1	2	3	4	5
i=0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	3	3	3	3
2	0	0	3	4	4	7
3	0	0	3	4	5	7
4	0	0	3	4	5	7

- $i = 3,\ j = 5,\ w_i = 4,\ V[i,j] = V[i-1,j] = 7 \Rightarrow i = i - 1 = 3 - 1 = 2$

V[i,j]	j=0	1	2	3	4	5
i=0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	3	3	3	3
2	0	0	3	4	4	7
3	0	0	3	4	5	7
4	0	0	3	4	5	7

- $i = 2,\ j = 5, w_i = 3,\ V[i,j] = 7 \neq V[i-1,j] = 3 \Rightarrow i = i - 1 = 2 - 1 = 1, j = j - w_i = 5 - 3 = 2$ và đánh dấu $i = 2$.

V[i,j]	j=0	1	2	3	4	5
i=0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	3	3	3	3
2	0	0	3	4	4	7
3	0	0	3	4	5	7
4	0	0	3	4	5	7

- $i = 1,\ j = 2,\ w_i = 2,\ V[i,j] = 3 \neq V[i-1,j] = 0 \Rightarrow i = i - 1 = 1 - 1 = 0, j = j - w_i = 2 - 2 = 0$ và đánh dấu $i = 1$.

V[i,j]	j=0	1	2	3	4	5
i=0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	3	3	3	3
2	0	0	3	4	4	7
3	0	0	3	4	5	7
4	0	0	3	4	5	7

- $i = 0$, $j = 0 \Rightarrow$ dừng vòng lặp while

V[i,j]	j=0	1	2	3	4	5
i=0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	3	3	3	3
2	0	0	3	4	4	7
3	0	0	3	4	5	7
4	0	0	3	4	5	7

V[i,j]	j=0	1	2	3	4	5
i=0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	3	3	3	3
2	0	0	3	4	4	7
3	0	0	3	4	5	7
4	0	0	3	4	5	7

Vậy lời giải tối ưu của bài toán knapsack chứa $\{1, 2\}$.

LƯU Ý:

- 1 file report trình bày lại toàn bộ quá trình làm bài thực hành (bắt buộc).
- Bài làm giống nhau trừ 50% trên tổng số điểm của tuần đó.