Bài tập về nhà môn Numerical Linear Algebra - Đợt 5

Nguyễn Trung Đức – 21110269

Ngày 14 tháng 11 năm 2023

6.1 If P is an orthogonal projector, then $I - 2P$ is unitary. Prove this algebraically, and give a geometric interpretation.

Giải

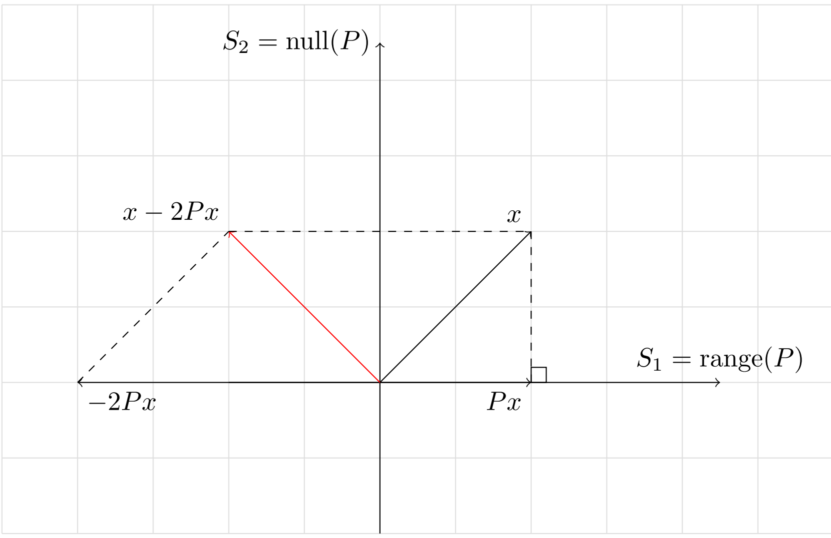
Ta có P là một orthogonal projector: $\Rightarrow \begin{cases} P = P^* \\ P = P^2 \end{cases}$

Xét:

$$(I - 2P)^*(I - 2P) = I - 2P - 2P^* + 4P^2 = I - 4P + 4P = I$$

Vậy $I - 2P$ là Unitary

Geometric interpretation:



Với $(I - 2P)x = x - 2Px$

Qua đây ta có thể thấy được rằng $I - 2P$ là ma trận Unitary.

6.4 Consider the matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Answer the following questions by hand calculation.

(a) What is the orthogonal projector P on to range(A), and what is the image under P of the vector $(1, 2, 3)^*$?

(b) Same questions for B

Giải

(a) Ta có cơ sở trực chuẩn của range(A) thông qua thuật toán Gram-Schmidt:

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Theo công thức (6.6) trong sách, ta có:

$$P = \hat{Q}\hat{Q}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Vậy P là một projector với $P = P^* \Rightarrow P$ là một orthogonal projector

Vậy ta có $P(1,2,3)^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

(b) Tương tự với B, ta có cơ sở trực chuẩn của range(B) thông qua thuật toán Gram-Schmidt:

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Theo công thức (6.6) trong sách, ta có:

$$P = \hat{Q}\hat{Q}^* = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/6 & -1/3 & 5/6 \end{bmatrix}$$

Vậy P là một projector với $P = P^* \Rightarrow P$ là một orthogonal projector

Vậy ta có $P(1,2,3)^* = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/6 & -1/3 & 5/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Theorem 7.1 Every $A \in \mathbb{C}^{m\times n} (m \geqslant n)$ has a full QR factorization, hence also a reduced QR factorization.

Giải

Giả sử A có hạng đầy đủ và ta chỉ muốn phân tích QR được giảm. Trong trường hợp này, ta sử dụng thuật toán Gram-Schmidt. Quá trình này sinh ra các cột trực chuẩn của $\hat{Q}$ và các phần tử của $\hat{R}$ sao cho $A = \hat{Q}\hat{R}$. Thất bại chỉ xảy ra khi tại một vài bước bất kì, $v_j = 0$ và do đó nó không thể được trực chuẩn hóa để tạo ra q_j. Tuy nhiên, điều này sẽ kéo theo $a_j \in \langle q_1, \dots, q_{j-1}\rangle = \langle a_1, \dots, a_{j-1}\rangle$, mâu thuẫn với giả thuyết A có hạng đầy đủ.

Giả sử A không có hạng đầy đủ. Khi đó tại một hoặc nhiều bước thứ j, ta có thể có

$$v_j = a_j - (q_1^* a_j)q_1 - (q_2^* a_j)q_2 - \cdots - (q_{j-1}^* a_j)q_{j-1}$$

cũng cho ra $v_j = 0$ giống ở trên. Bây giờ, ta chọn một q_j tùy ý để là vector được chuẩn hóa bất kì trực giao với $\langle q_1, \dots, q_{j-1}\rangle$, và khi đó tiếp tục quá trình Gram-Schmidt.

Cuối cùng, phân tích QR đầy đủ của một ma trận $m \times n$ với $m > n$ có thể được xây dựng bằng việc đưa ra các vector trực chuẩn tùy ý với cùng ý tưởng như ở trên. Khi quá trình Gram-Schmidt qua bước thứ n, ta tiếp tục thêm vào $m - n$ bước, đưa ra các vector q_j tại mỗi bước. ■