Bài tập ôn tập
Nhập môn Số học Thuật toán

Ngày 30 tháng 3 năm 2024

I Biểu diễn số nguyên

Bài 1. *Chuyển đổi số n sang cơ số b trong các trường hợp sau*

a) $n = (7482)_{10}, b = 6$.

b) $n = (98156)_{10}, b = 8$.

c) $n = (101011101)_2, b = 10$.

d) $n = (AB6C7D)_{16}$ *và* $b = 10$ *hoặc* $b = 2$.

e) $n = (9A0B)_{16}, b = 5$.

II Tính chia hết, Số nguyên tố, Ước chung lớn nhất

Bài 2. *Chứng minh rằng*

a) $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n \vdots 24$ *với* $n \in \mathbb{Z}$.

b) $n^5 - 5n^3 + 4n \vdots 120$ *với* $n \in \mathbb{Z}$.

c) $n(n+2)(n+4) \vdots 48$ *với n chẵn.*

Bài 3. *Có phải với mọi số tự nhiên n ta luôn có:*

a) $3^{6n} - 2^{6n} \vdots 35$,

b) $16^n - 15n - 1 \vdots 225$

hay không?

Bài 4. *Cho* $a, b \in \mathbb{Z}, (a, b) = 1$. *Có phải* $(a + b, a^2 + 2ab) = 1$ *hay không?*

Bài 5. *Tìm n sao cho* $2^n - 1 \vdots 7$.

Bài 6. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k:*

a) $(3k+2, 5k+3) = 1$

b) $(8k+3, 5k+2) = 1.$

c) $(k+1, k^2-k+1) = 1$ *hoặc* 3.

Bài 7. *Tìm số nguyên tố p sao cho* $2p+1$ *là một lập phương.*

Bài 8. *Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 . Chứng minh rằng :* $p^2 - 1 \vdots 24$.

Bài 9. *Tìm số nguyên tố p sao cho* $p+2, p+4$ *cũng là số nguyên tố .*

Bài 10. *Tìm số nguyên tố p sao cho* $p+6, p+8$ *cũng là số nguyên tố .*

Bài 11. *Chứng minh rằng :* $2^n - 1 \in \mathcal{P} \Longrightarrow n \in \mathcal{P}$.

Bài 12. *Chứng minh rằng :* $2^n + 1 \in \mathcal{P} \Longrightarrow n = 0$ *hoặc* $n = 2^k$.

Bài 13. *Chứng minh rằng* $n! \vdots (a!b!...c!)$ *với* $n = a + b + \ldots + c$ *và* $a, b, \ldots, c$ *là các số tự nhiên khác 0.*

Bài 14. *Trong dãy số tự nhiên các số nguyên tố được phân bố một cách "thưa dần" : trong 100 số tự nhiên đầu tiên có 25 số nguyên tố , 100 số tiếp theo có 21 số nguyên tố , 100 số tiếp theo nữa chỉ còn có 16 số nguyên tố .... Tuy nhiên mỗi số tự nhiên n lớn tùy ý , ta có thể tìm được một dãy n số tự nhiên liên tiếp mà trong đó không có số nguyên tố nào, hãy chứng minh điều này.*

Bài 15. *Tìm ước chung lớn nhất bằng thuật toán Euclide cho các cặp số nguyên sau:*

a) $(15, 35)$

b) $(120, 180)$

c) $(115, 75)$

Bài 16. *Tìm ước chung lớn nhất và hệ số Bezout tương ứng cho mỗi cặp số nguyên sau*

a) $(105, 300)$

b) $(45, 75)$

c) $(102, 222)$

Bài 17. *Giải các phương trình Diophantine sau:*

a) $21x + 7y = 343$

b) $2x + 13y = 31$

c) $2x + 14y = 17$

d) $6x + 15y + 10z = 53$

e) $8x + 14y + 5z = 11$

f) *Phoebe mua áo sơ mi lớn với giá 18 đô la một chiếc và áo sơ mi nhỏ với giá 11 đô la mỗi chiếc. Những chiếc áo sơ mi có giá tổng cộng là 1188 USD. Tổng số áo nhỏ nhất cô ấy có thể mua được là bao nhiêu?*

III Đồng dư và một bài đồng dư đặc biệt

Bài 18. *Chứng minh rằng:*

a) $100a + 10b + c \equiv 0 \pmod{21} \Longleftrightarrow a - 2b + 4c \pmod{21}$

b) $\forall a \in \mathbb{Z}, \forall m, n \in \mathbb{N}^* : a^{8520m+1} + a^{8520n+1} \equiv 0 \pmod{143} \Longleftrightarrow a \equiv 0 \pmod{143}$

c) $\forall a \in \mathbb{Z}, \forall m, n \in \mathbb{N}^* : a^{48m+1} + a^{48n+1} \equiv 0 \pmod{35} \Longleftrightarrow a \equiv 0 \pmod{35}$

d) $\forall a, b \in \mathbb{Z}, \forall m, n \in \mathbb{N}^* : a^{4m+1} + b^{4n+1} \equiv 0 \pmod{5} \Longleftrightarrow a + b \equiv 0 \pmod{5}$

Bài 19. *Tính giá trị của hàm ϕ của các số tự nhiên sau:*

$$35, 65, 845, 1225, 4280$$

Bài 20. *Chứng minh rằng:*

a) $1890^{1930} + 1945^{1975} + 1 \vdots 7$

b) $2^{1999} - 23 \vdots 35$

c) $p, q \in \mathcal{P}, (p, q) = 1 \Longrightarrow p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$

d) $(p!)^2 - p^2 \vdots p^3$

e) *Nếu p là số nguyên tố lớn hơn 7 thì* $3^p - 2^p - 1 \vdots 42p$.

f) $333^{555^{777}} + 777^{555^{333}} \vdots 10$

Bài 21. *Có tồn tại số tự nhiên n sao cho* $9^n + 1$ *chia hết cho 100?*

Bài 22. *Tìm dư trong các phép chia sau:*

a) *Chia* 2^{1000} *cho 25*

b) Chia $5^{70} + 7^{50}$ *cho 12*

c) Chia $(10!)^{10!}.10^{10^{10}}$ *cho 11*

Bài 23. *Giải phương trình, hệ phương trình đồng dư sau*

a) $3x \equiv 4 \pmod 7$

b) $5x \equiv 2 \pmod{11}$

c) $6x \equiv 27 \pmod{33}$

d) $121x \equiv 833 \pmod{1001}$

Bài 24. *Giải các phương trình đồng dư sau bằng định lý thặng dư Trung Hoa:*

a) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 4 \\ x \equiv 2 \pmod 7 \\ x \equiv 9 \pmod{11} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x \equiv 2 \pmod{12} \\ 5x \equiv 2 \pmod 8 \\ 7x \equiv 3 \pmod{11} \end{cases}$

Bài 25. *Bài toán dân gian:*

Nguyên Tiêu gió mát trăng trong
Phố phường nhộn nhịp đèn chong sáng lòa
Một mình dạo đếm đèn hoa
Dăm trăm đốm sáng biết là ai hay
Kết năm chẵn số đèn này
Bảy đèn kết một còn hai ngọn thừa
Chín đèn thời bốn ngọn dư
Đèn bao nhiêu ngọn mà ngơ ngẫn lòng?.

Bài 26. *Với giá trị nào của a thì hệ phương trình sau có nghiệm*

1. $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 3 \\ x \equiv 1 \pmod 4 \\ x \equiv 11 \pmod 7 \\ x \equiv a \pmod{84} \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x \equiv a \pmod 3 \\ 3x \equiv 4 \pmod{10} \end{cases}$

Bài 27. *Chuyện dân gian: (Hàn Tín điểm binh)*

Ngày xưa, Hàn Tín (một danh tướng của Hán Cao Tổ Lưu Bang) điểm binh theo cách cho lính sắp thành hàng ba, hàng năm, hàng bảy rồi ghi chép các số lính lẻ tương ứng sẽ suy ra được số lính bằng cách sau đây: "Nhân lẻ hàng ba cho 70, lẻ hàng năm cho 21 và lẻ hàng bảy cho 15 rồi cộng các kết quả ấy lại. Thêm vào đó một bội số thích hợp của 105 sẽ ra số lính". Cách làm của Hàn Tín là đúng?

Bài 28. *Giải các hệ phương trình đồng dư tuyến tính sau:*

a) $\begin{cases} x + y \equiv 1 \pmod 7 \\ x + z \equiv 2 \pmod 7 \\ y + z \equiv 3 \pmod 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y + 3z \equiv 1 \pmod 7 \\ x + 2y + 5z \equiv 1 \pmod 7 \\ x + 4y + 6z \equiv 3 \pmod 7 \end{cases}$

IV Thặng dư bậc hai

Bài 29. *Các phương trình sau có nghiệm hay không?*

a) $x^2 \equiv -1231 \pmod{107}$

b) $4x^2 + 6x + 3 \equiv 0 \pmod p$*, với* $p \in \mathcal{P}$

c) $3x^2 + 2x \equiv 31 \pmod{907}$

d) $x^4 \equiv 6 \pmod{69}$

Bài 30. *Cho* p *là số nguyên tố lớn hơn 2,* $k \in \mathbb{N}$ *và* $(p, k) = 1$*. Tính*

$$S = \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{x(k-x)}{p} \right)$$

trong đó ngoặc ngoài cùng của mỗi số hạng của tổng S *là kí hiệu Legendre.*