Một số vấn đề trong trò chơi bài bạc

Trần Đức Anh [*]
Nguyễn Hoàng Khang [†]
Nguyễn Hoàng Ngọc Hà [‡]

Head mentor:
Nguyễn Mạnh Linh [§]
Mentors:
Phạm Khoa Bằng [¶]
Đỗ Xuân Anh [‖]

Hà Nội, Ngày 31 tháng 7 năm 2019

Tóm tắt nội dung

Việc nghiên cứu những vấn đề trong trò chơi bài bạc như chiến lược chơi tối ưu, kì vọng thời gian chơi, xác suất vỡ nợ, ... là một vấn đề nghiên cứu thú vị trong nội hàm lí thuyết trò chơi. Những kết quả của các nghiên cứu này có nhiều ứng dụng trong thực tiễn, cụ thể như ở việc quản lí các trò chơi cá cược, sòng bạc hay mua bán chứng khoán. Báo cáo của chúng tôi sẽ trình bày một số kết quả mà chúng tôi đã nghiên cứu về trò chơi bài bạc trong vòng hai tuần tại trại hè Toán và Khoa học MaSSP 2019.

[*]Trường THPT Chuyên Hà Nội-Amsterdam (Hà Nội)
[†]Trường THPT Chuyên Lê Qúy Đôn (Khánh Hòa)
[‡]Trường THPT Chuyên Nguyễn Chí Thanh (Đắk Nông)
[§]Trường Đại học Sư phạm Paris (Pháp)
[¶]Trường Đại học Khoa học Tự nhiên (Hà Nội)
[‖]Trường Đại học Khoa học Tự nhiên (Hà Nội)

Lời cảm ơn

Thời gian được học tập và nghiên cứu tại Trại hè Toán và Khoa học MaSSP 2019 là khoảng thời gian vô cùng ý nghĩa với chúng tôi. Kết quả ngày hôm nay chúng tôi đạt được một phần là nhờ có sự quan tâm hỗ trợ của nhiều cá nhân và các đoàn thể.

Trước hết, chúng tôi xin gửi lời cảm ơn đến ban tổ chức trại hè Toán và Khoa học MaSSP 2019, trường Đại học Khoa học và Công nghệ Hà Nội cũng như các đơn vị tài trợ đã chia sẻ cho chúng tôi những cơ hội quý báu để tiếp cận với khoa học đồng thời đã tạo điều kiện tốt nhất cho chúng tôi về cơ sở vật chất và tinh thần, giúp cho chúng tôi có thể tập trung tối đa vào thực hiện và nghiên cứu đề tài.

Với lòng biết ơn chân thành nhất, chúng tôi xin gửi lời cảm ơn đến các anh chị Mentor và Head mentor môn Toán đã nhiệt tình chỉ dạy, dẫn dắt và giúp đỡ chúng tôi từ những bước đầu tiên trong việc nghiên cứu đề tài cũng như giúp chúng tôi hoàn thiện những kĩ năng và phẩm chất cần thiết để có thể hoàn thành đề tài. Một lần nữa, chúng tôi xin gửi đến anh chị những lời tri ân sâu sắc nhất.

Bên cạnh đó, chúng tôi cũng xin cảm ơn những sự góp ý, giúp đỡ từ các bạn trại sinh môn Toán nói riêng và các môn học khác nói chung tại trại hè Toán và Khoa học MaSSP 2019 đã giúp chúng tôi hoàn thiện đề tài.

Chúng tôi chọn đề tài này vì thấy được ứng dụng của lí thuyết Xác suất trong việc tìm hiểu cũng như chứng minh các vấn đề của trò chơi may rủi cũng có thể (phần nào đó) kiểm soát được. Trong quá trình làm việc, do thời gian gấp rút cũng như trình độ của nhóm tác giả có hạn, vì vậy tuy đã rất cố gắng nhưng sai sót là rất khó tránh khỏi. Chúng tôi rất mong nhận được sự thông cảm, góp ý và chia sẻ từ phía bạn đọc để nhóm có thể hoàn thiện đề tài tốt hơn.

Việt Nam, ngày 31 tháng 07 năm 2019.
Nhóm tác giả.

Mục lục

1 Giới thiệu về trò chơi bài bạc và chiến lược Kelly

1.1 Trò chơi với nhiều cửa đặt

Giả sử bạn là một người vô lương tâm với nhiều bạn bè vô cùng giàu có. Bạn lừa được những người bạn này vào trò chơi tung xu đểu của bạn, và xác suất đồng xu lật để bạn thắng lớn hơn 50%. Trong trò chơi đấy, nếu bạn cẩn thận, bạn cũng sẽ suy nghĩ về lượng tiền cá mỗi lượt của bản thân. Nếu bạn cá toàn bộ số tiền hiện tại trong mỗi lượt, gần như chắc chắn sẽ có một lượt nào đấy mà bạn sẽ phá sản. Nhưng nếu mỗi lượt, bạn chỉ cá một lượng tiền nhỏ và cố định, thì thời gian sẽ không cho phép bạn có lượng tiền mong muốn trước khi trò chơi kết thúc. Vậy bạn phải làm gì để thuận lợi nhất? Trong đề tài này, ta sẽ xét bài toán trên nhưng đặt trong những trường hợp tổng quát hơn. Gọi X là một biến ngẫu nhiên lấy các giá trị trong tập hợp $I = \{1, 2, .., s\}$ với phân bố $\mathbb{P}(X = i) = p_i$. Xét ζ là tập hợp các tập con A_j của I, với $\zeta = \{A_1, A_2, .., A_r\}$ và $(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = I$, cùng với các giá trị dương đi kèm $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_r)$. Người chơi sẽ đặt cược các khoản $B_1, B_2, .., B_r$ vào các sự kiện $\{X \in A_j\}$ và nếu sự kiện $\{X = i\}$ xảy ra, người chơi nhận lại lượng tiền $\sum_{j:i\in A_j} B_j\omega_j$. Ta cũng giả sử mình cho toàn bộ số tiền vào cược, bởi lượng tiền còn dư thừa khi cá sẽ tương tự như cho thêm tập con $A_1 = I$, với giá trị dương đi kèm $\omega_1 = 1$. Gọi S_n là lượng tiền sau n lượt chơi; khi đó trò chơi được gọi là thuận lời khi tồn tại một chiến lượt cược sao cho $S_n \to +\infty$ với xác suất hầu chắc chắn khi $\to +\infty$. Trong phần tiếp theo, ta sẽ tìm hiểu điều kiện cần và đủ để trò chơi là thuận lợi.

1.2 Trò chơi tung xu và chiến lược all-in, chiến lược Kelly

Ta gọi các biến ngẫu nhiên là i.i.d. (independent and identically distributed) nếu các biến ngẫu nhiên ấy là độc lập với nhau và phân bố của các biến ngẫu nhiên ấy là như nhau. Ta xét một trò chơi tung xu, mỗi lần tung xu người chơi có xác suất thắng p và xác suất thua $q = 1 - p$. Trò chơi có tỉ lệ cược là a ăn 1. Ta định nghĩa dãy biến cố ngẫu nhiên (Y_n)

$$Y_n = \begin{cases} a & \text{với } \mathbb{P}(Y_n = a) = p \\ -1 & \text{với } \mathbb{P}(Y_n = -1) = q \end{cases}$$

Đặt lượng tiền chúng ta đang có ở thời điểm sau khi tung đồng xu thứ n là S_n, vì trò chơi tung xu này có xác suất thắng và tỉ lệ cược cho mỗi lần chơi là như nhau nên ta có thể giả sử rằng một chiến lược chơi tối ưu nhất sẽ là một chiến thuật chơi mà người chơi cược một phần trăm cố định nào đấy của số tiền mình đang có vào mỗi lượt chơi. Với nhận định như thế, ta gọi số tiền ta đặt cược vào trò chơi ở mỗi lượt chơi là fS_n $(f \in (0, 1))$ ta đi tính kì vọng của số tiền nhận được sau khi chơi trò chơi tung xu ấy sau mỗi lần chơi. Ta có

$$S_n = S_{n-1} + Y_n f S_{n-1}$$

Từ đó ta suy ra

$$\mathbb{E}(S_n | S_{n-1}, S_n, ..., S_1) = S_{n-1} + \mathbb{E}Y_n f S_{n-1} = S_{n-1}[1 + f(pa - q)]$$

Nếu $pa - q$ là một số lớn hơn 0, ta dễ thấy $\mathbb{E}S_n$ đạt giá trị lớn nhất khi $f = 1$, tức người chơi đặt toàn bộ tiền của mình vào mỗi lần đánh cược tiếp theo. Chiến thuật này có tên là chiến thuật *all-in*. Nếu thực hiện thành công chiến thuật này, ta thấy lượng tiền mà người chơi có được tăng rất nhanh sau mỗi lần chơi, cụ thể sau n lần chơi, người chơi đã thắng được $S_n = a^n S_0$. Tuy nhiên, ta có thể thấy rằng *all-in* không phải là một chiến thuật an toàn vì khi ta liên tục chơi với chiến thuật này, xác suất của ta vỡ nợ sẽ là

$$\mathbb{P}(\text{vỡ nợ}) = \lim_{n\to\infty}(1 - \mathbb{P}(Y_n = a)^n) = \lim_{n\to\infty}(1 - p^n) = 1$$

hay xác suất vỡ nợ của ta là 1, việc vỡ nợ là hầu chắc chắn. Ta sẽ thử đi tìm một cách tối ưu hóa lợi nhuận an toàn hơn chiến thuật *all-in*. Với mỗi n cố định, ta ký hiệu W là số lần ta chơi thắng và L là số lần ta chơi thua ($W + L = n$), định nghĩa hàm:

$$g_n(f) := \frac{1}{n}\log\frac{S_n}{S_0} = \frac{W}{n}\log(1 + af) + \frac{L}{n}\log(1 - f)$$

là trung bình tốc độ tăng của hàm mũ sau n lượt chơi. Người chơi chiến thuật Kelly sẽ cố gắng tối đa hóa giá trị kì vọng của hàm này (tức tối đa hóa kì vọng của độ tăng theo hàm mũ số tiền ta có được sau mỗi lượt chơi). Kì vọng của hàm này bằng

$$G(f) = \mathbb{E}g_n(f) = \mathbb{E}\left[\frac{W}{n}\log(1 + af) + \frac{L}{n}\log(1 - f)\right] = p\log(1 + af) + q\log(1 - f)$$

Ta nhận thấy rằng $g_n(f) = \frac{1}{n}\log\frac{S_n}{S_0}$ nên với mỗi n cố định, khi ta tối đa hóa hàm $G(f)$, ta cũng đang tối đa hóa $\mathbb{E}(\log S_n)$. Một điểm dừng của hàm $G(f)$ có thể được tìm bằng cách lấy đạo hàm bậc 1 của nó theo f và cho đạo hàm ấy bằng 0, khi ấy ta được

$$\begin{aligned} G'(f) &= \frac{pa}{1 + af} + \frac{-q}{1 - f} = 0 \\ &= \frac{(ap - q) - f(ap + aq)}{(1 + af)(1 - f)} = 0 \end{aligned}$$

Từ đó, ta có điểm dừng của hàm tại

$$f = f^* = \frac{ap - 1}{ap + aq} = \frac{ap + p - 1}{a}$$

Nhận thấy $f^* \notin \{1; \frac{-1}{a}\}$ nên $G'(f)$ xác định tại f^* và $G'(f^*) = 0$. Ta lại thấy rằng đạo hàm bậc 2 của $G(f)$ là

$$G''(f) = -\frac{a^2 p}{(1 + af)^2} - \frac{q}{(1 - f)^2} < 0$$

nên f^* là một điểm cực đại, và vì $G(0) = 0$ và $\lim_{f\to 1^-} G(f) = -\infty$ nên giá trị lớn nhất $G(f)$ đạt được chính tại f^*. Đây chính là nội dung của tiêu chuẩn Kelly trong trường hợp trò chơi cá cược đơn giản với 2 người chơi mà tỉ lệ thắng/thua cuộc đã được biết trước. Cụ thể, trong trường hợp này, tiêu chuẩn Kelly cho chúng ta biết rằng chúng ta nên cược với một số tiền cược ở mỗi lượt chơi để đạt hiệu quả tốt nhất bằng.

$$f^* = \frac{ap + p - 1}{a}$$

Khi nói đến *hiệu quả tốt nhất* ở đây, ta đang nói đến tốt nhất theo nghĩa: Chiến lược Kelly sẽ giúp người chơi gia tăng lượng tiền của người chơi nhiều hơn và nhanh hơn gần chắc chắn so với bất kì một chiến lược chơi nào khác căn bản so với nó khi số lượt chơi lớn. Dưới ngôn ngữ toán học, điều này được mô tả bởi:
Nếu ta kí hiệu S_n^* là số tiền người chơi theo chiến lược Kelly có được sau n lần chơi, S_n là số tiền người chơi theo một chiến lược bất kì khác căn bản với chiến lược Kelly có được sau n lượt chơi thì:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n^*}{S_n} > M\right) = 1$$

Cùng với đó, nếu ta kí hiệu T_A^* là lượt đầu tiên thỏa mãn $S_{T_A^*}^* \geqslant A$ và T_A là lượt đầu tiên thỏa mãn $S_{T_A} \geqslant A$ thì:

$$\lim_{A\to+\infty} \mathbb{P}(T_A^* - T_A \leqslant -k) = 1$$

Những nhận định này sẽ được chúng tôi chứng minh ở mục [2.5] khi ta bàn về sự tối ưu của chiến lược Kelly.

2 Một số định lý về xác suất và sự tối ưu của chiến lược Kelly

2.1 Bất đẳng thức Markov và bất đẳng thức Tchebyshev

Bổ đề 1 (Bất đẳng thức Markov)**.** *Nếu X là một biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị không âm và $t > 0$ thì*

$$\mathbb{P}(X \geqslant t) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{t}. \tag{2.1.1}$$

Chứng minh. Giả sử X nhận được các giá trị $0 \leqslant x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_{j-1} \leqslant t < ... < x_n$. Khi đó

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i) \\ &\geqslant \sum_{i=j}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i) \\ &\geqslant \sum_{i=j}^{n} t\mathbb{P}(X = x_i) \\ &= t\mathbb{P}(X \geqslant t).\end{aligned}$$

Bằng phép đổi vế đơn giản, ta có điều phải chứng minh. □

Từ kết quả trên, một dạng phát biểu khác của định lý được viết như sau

Mở rộng 2. Cho X là một biến ngẫu nhiên bất kì, thì với mọi $t > 0$:

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant t) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X|)}{t}. \tag{2.1.2}$$

Mở rộng 3. Bằng cách thay t bởi $t\mathbb{E}(X)$, ta có

$$\mathbb{P}(X \geqslant t\mathbb{E}(X)) \leqslant \frac{1}{t}. \tag{2.1.3}$$

Nhận định này có lẽ sẽ dễ hiểu hơn các dạng nêu ở trên, bởi vì nó tương đương với phát biểu sau: Xác suất một biến ngẫu nhiên X lớn hơn hoặc bằng t lần kì vọng của nó tối đa là $\frac{1}{t}$.

Bổ đề 4. *Bất đẳng thức Tchebyshev: Giả sử Y là một biến ngẫu nhiên sao cho $\mathbb{E}(X) = \upsilon$ thì với $\varepsilon > 0$, ta có bất đẳng thức sau:*

$$\mathbb{P}(|X - \upsilon| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}. \tag{2.1.4}$$

Chứng minh. Từ mở rộng (1) của bất đẳng thức Markov, ta xét $Y = (X - \upsilon)^2$ và $t = \varepsilon^2$. Áp dụng công thức $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X - \upsilon)^2 = \mathrm{Var}(X)$, đồng thời chú ý điều kiện $|X - \upsilon| \geqslant t$ và $(X - \upsilon)^2 \geqslant t^2$ là tương đương, ta thấy

$$\mathbb{P}(|Y| \geqslant t) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|Y|)}{t}$$

$$\text{hay } \mathbb{P}((X - \upsilon)^2 \geqslant \varepsilon^2) \leqslant \frac{\mathbb{E}((X - \upsilon)^2)}{\varepsilon^2}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}((X - \upsilon) \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}((X - \upsilon)^2)}{\varepsilon^2}$$

và chứng minh hoàn tất. □

Nhận xét 5. Nhìn lại qua ngôn ngữ thông thường, ta có thể coi bất đẳng thức Tchebyshev là chứng minh cho nhận định: Xác suất của sự chênh lệch ít nhất là s so với kì vọng có giá trị tối đa là phương sai của số đó chia cho bình phương s.

Mở rộng 6. Thế $\varepsilon \mapsto \varepsilon\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$, ta nhận kết quả đẹp hơn như sau:

$$\mathbb{P}(|X - \upsilon| \geqslant \varepsilon\sqrt{\mathrm{Var}(X)}) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \tag{2.1.5}$$

2.2 Luật số lớn yếu

Sau khi đề cập đến hai bất đẳng thức ở mục trên, ta có thể bắt đầu một trong những kết quả quan trọng nhất của đề tài: Luật số lớn yếu. Chứng minh của định lý này có nhiều dạng khác nhau, nhưng ta sẽ giải quyết qua ứng dụng của bất đẳng thức Tchebyshev.

Bổ đề 7. *Luật số lớn yếu: Ta có $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ là môt dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân bố, trong đó với mỗi biến $X_i (i = \overline{1, n})$ ta có $\mathbb{E}(X_i) = \upsilon$ và $Var(X_i) = \omega^2$. Đặt $\widetilde{X} = \frac{\sum_1^n X_i}{n}$. Luật số lớn yếu khẳng định rằng với mọi ε >0*

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|\widetilde{X} - \upsilon| > \varepsilon) = 0. \tag{2.2.1}$$

Chứng minh. Do $X_1, X_2, .., X_n$ độc lập cùng phân bố, ta biến đổi như sau

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\widetilde{X}) &= \mathrm{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + ... + X_n) \\
&= \frac{1}{n^2}(\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + ... + \mathrm{Var}(X_n)) \\
&= \frac{1}{n^2}(n\omega^2) \\
&= \frac{\omega^2}{n}
\end{aligned}$$

Đến đây, ta áp dụng trực tiếp bất đẳng thức Chebyshev với $X = \widetilde{X}$ và s $= \varepsilon$ để có

$$\mathbb{P}(|\widetilde{X} - \upsilon| > \varepsilon) \leqslant \frac{\omega^2}{n\varepsilon^2}$$

nên ta dễ thấy $\mathbb{P}(|\widetilde{X} - \upsilon| > \varepsilon) \to 0$ khi $n \to +\infty$.

□

Nhận xét 8. Một tên gọi khác của Luật số lớn yếu là Định lý Khintchine.

2.3 Luật số lớn mạnh

Bổ đề 9. *Luật số lớn mạnh: Cho $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ là môt dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân bố có vô hạn biến, trong đó với mỗi biến $X_i (i = \overline{1, n})$, có $\mathbb{E}(X_i) = \upsilon$ và $Var(X_i) = \omega^2$. Gọi $\widetilde{X} = \dfrac{\sum_1^n X_i}{n}$. Luật số lớn mạnh khẳng định rằng*

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to+\infty} \widetilde{X} = \upsilon) = 1. \tag{2.3.1}$$

Chứng mình của luật số lớn mạnh quá phức tạp so với khuôn khổ của bài viết này, tuy nhiên vẫn có một số điều đáng lưu ý:

Nhận xét 10. Chứng minh cho luật số lớn yếu và mạnh cho biến ngẫu nhiên nhận các giá trị liên tục tương tự cho cách chứng minh cho trường hợp giá trị rời rạc

Nhận xét 11. Sau khi đã đề cập đến hai định lý trên, một câu hỏi quan trọng là "Định lý số lớn yếu khác biệt so với định lý số lớn mạnh như thế nào?".
Ta có thể giải thích như sau: Luật số lớn mạnh được coi là một phiên bản "mạnh" hơn so với luật số lớn yếu bởi nó tương đương với kết quả sau:

$$\lim_{n\to+\infty} |\widetilde{X} - \upsilon| = 0 \tag{2.3.2}$$

xảy ra với xác suất bằng 1 (hầu chắc chắn), trong khi luật số lớn yếu tương đương với:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|\widetilde{X} - \upsilon| < \varepsilon) = 1$$

Luật số lớn yếu cho ta thấy khi n đủ lớn thì $|\widetilde{X} - \upsilon| < \varepsilon$ xảy ra với xác suất ngày càng tiến tới 1. Tuy nhiên, luật này không hề chứng được sự tồn tại của N_0 sao cho $\forall n \geqslant N_0$ thì $\widetilde{X} - \upsilon < \varepsilon$ tại vì chỉ nhắc đến xác suất tiến tới 1 mà thôi (có thể tồn tại vô số n thoả mãn điều trên). Trong khi đó, theo luật số lớn mạnh thì $\widetilde{X}$ hội tụ hầu chắc chắn tới υ và luôn tồn tại một số N_0 để $\forall n > N_0$, để bất đẳng thức $\widetilde{X} - \upsilon \geqslant \varepsilon$ không xảy ra.
Hơn nữa, từ luật số lớn mạnh ta có thể suy ra luật số lớn yếu: Thật vậy, khi $n \to +\infty$ thì $\widetilde{X} - \upsilon < \varepsilon$ luôn đúng từ một thời điểm nào đó trở ra. Nói cách khác, xác suất bất đẳng thức $\widetilde{X} - \upsilon < \varepsilon$ xảy ra tiến tới giá trị 0 (hữu hạn/vô hạn), và ta dễ dàng có khẳng định của luật số lớn yếu. Tuy nhiên, điều ngược lại (luật số lớn mạnh được chứng minh từ luật số lớn yếu) lại không khả thi.
Vẻ đẹp của luật số lớn mạnh thể hiện rõ hơn qua mở rộng Kolmogorov, khi có thể áp dụng được cho những điều kiện biến kém chặt hơn.

Mở rộng 12. *Luật số lớn của Kolmogorov.* Cho $X_1, X_2, .., X_n, ...$ là dãy biến ngẫu nhiên dộc lập vô hạn biến với $|\mathbb{E}(X_n)| < +\infty$ với mọi n $\geqslant 1$. Luật số lớn vẫn xảy ra khi một trong hai điều kiện sau được thoả mãn:

(1) Mọi biến ngẫu nhiên trong dãy đều có cùng phân bố.

(2) $\forall n, \mathrm{Var}(X_n) < \infty$ và $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{Var}(X_n)}{n^2} < +\infty$.

2.4 Trò chơi với kỳ vọng âm hoặc dương

Luật số lớn mà đã đề cập có rất nhiều ứng dụng. Trong mục này ta sẽ tìm hiểu kĩ hơn về một ứng dụng cụ thể: trò chơi tung xu 2 người với các điều kiện sau:

(a) $\mathbb{P}(\text{thắng}) = p$, $\mathbb{P}(\text{thua}) = 1 - p$

(b) Giá trị nhận được từ mỗi lượt chơi khi thắng là a, khi thua là b (b âm)

(c) Các lượt chơi độc lập và cùng phân bố

Kí hiệu $X_1, X_2, .., X_n$ là dãy biến ngẫu nhiên biểu thị sự thay đổi về lượng tiền trong lượt chơi thứ $1, 2, .., n$,, với $\mathbb{E}(X_i) = ap + b(1-p)$ là giá trị kì vọng tại lượt chơi thứ i, thì trò chơi kỳ vọng âm là trò chơi có $\mathbb{E}(X_i) < 0$, và trò chơi kỳ vọng dương là trò chơi có $\mathbb{E}(X_i) > 0$. Ta có mệnh đề sau:

Bổ đề 13. *Trong trò chơi kì vọng âm, người chơi nếu chơi vô số lượt thì sẽ lỗ lượng tiền là vô tận và trong trò chơi kì vọng dương, người sẽ lãi lượng tiền là vô tận (với xác suất tiến tới 1).*

Chứng minh. Gọi S_0 là số tiền người chơi có ban đầu, S_n là số tiền người chơi có sau n lượt chơi.
Vì $X_1, X_2, .., X_n$ là dãy biến ngẫu nhiên biểu thị sự thay đổi về lượng tiền trong lượt chơi thứ $1, 2, .., n$
$\Rightarrow S_n - S_0 = X_1 + X_2 + ... + X_n$
Ta xét luật số lớn yếu với $X_1, X_2, ..., X_n$ là dãy vô hạn biến ngẫu nhiên được định nghĩa trong đề bài, mọi $\varepsilon > 0$, và $\widetilde{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} \Rightarrow \mathbb{E}(\widetilde{X}) = \mathbb{E}(X_i) = \upsilon$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|\widetilde{X} - \mathbb{E}(\widetilde{X})| > \varepsilon) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|\widetilde{X} - \mathbb{E}(\widetilde{X})| \leqslant \varepsilon) = 1$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \mathbb{E}(\widetilde{X})\right| \leqslant \varepsilon\right) = 1$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n - S_0}{n} - \mathbb{E}(\widetilde{X})\right| \leqslant \varepsilon\right) = 1$$
$$\Leftrightarrow n(\mathbb{E}(\widetilde{X}) - \varepsilon) \leqslant S_n - S_0 \leqslant n(\mathbb{E}(\widetilde{X}) + \varepsilon) \text{ (với xác suất hội tụ tới 1)}$$

Nếu $\mathbb{E}(\widetilde{X}) > 0$, ta chọn $\varepsilon < \mathbb{E}(\widetilde{X})$ (do ε là số dương bất kì lớn hơn 0). Vì $n \to +\infty$ ta dễ thấy $S_n - S_0 \to +\infty$ và người chơi lãi $+\infty$ sau vô số lượt.
Ngược lại, nếu $\mathbb{E}(\widetilde{X}) < 0$, ta chọn $\varepsilon < |\mathbb{E}(\widetilde{X})|$, thì $\mathbb{E}(\widetilde{X}) + \varepsilon < 0$ và $S_n - S_0 \to -\infty$ khi $n \to \infty$. Hai khẳng định trên cũng tương đương với phát biểu mệnh đề, và ta có điều phải chứng minh. □

Mở rộng 14. Trong bài toán trên, ta có thể áp dụng tương tự luật số lớn mạnh để đạt được kết quả đẹp hơn như sau
$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to+\infty} \widetilde{X}_n = \mathbb{E}(\widetilde{X}_n)\right) = 1.$$

Nhận xét 15. Từ mở rộng của bài toán trên, ta có thể suy ra được một người không nên chơi trò chơi với kỳ vọng âm bởi khi chơi vô số lượt sẽ lỗ lượng tiền là $-\infty$
Ngược lại, khẳng định: khi chơi với kỳ vọng dương $\mathbb{E}(X_i) > 0$ sẽ lãi vô cùng lại không áp dụng được, trừ khi người đó bắt đầu với lượng tiền vô tận $S_0 = +\infty$ (do bài toán chưa đề cập đến khả năng người đó hết tiền trước khi hết $+\infty$ lượt chơi)

Nhận xét 16. Một điểm nên nhớ trong mệnh đề trên là kết quả không được áp dụng cho trò cá cược trong đó người chơi có quyền nâng/ giảm lượng tiền cá cược (nhận ka khi thắng mất kb khi thua, trong đó k là số dương do người chơi tự chọn giá trị). Bởi khi đó, ta sẽ mất đi tính "cùng phân bố" giữa các biến ngẫu nhiên - điều kiện cần trong phát biểu của luật số lớn yếu.
Tuy nhiên, ta vẫn có thể khái quát bài toán cho trường hợp người chơi có quyền quyết định qua cách sử dụng *Luật số lớn của Kolmogorov.* Nhưng do chứng minh của mở rộng này nằm ngoài khuôn khổ bài viết, ta sẽ không trình bày ở đây.

2.5 Sự tối ưu của chiến lược Kelly

Ở mục đầu tiên, ta đã chứng minh Kelly là chiến lược tốt nhất giúp $\mathbb{E}(\log(S_n^*))$ đạt giá trị lớn nhất với mọi lượt chơi và hiểu được căn cứ toán học của chiến thuật. Tuy nhiên, đây vẫn chưa phải là chứng minh vững chắc cho sức mạnh của Kelly trong những trường hợp thực tế, và chỉ xét đến kì vọng của tốc độ tăng trưởng của lượng tiền. Vì vậy, ở mục này ta sẽ chứng tỏ vì sao Kelly lại chiến thuật tối ưu - về giá trị lẫn thời gian - qua sự so sánh với các chiến lược khác.

Định nghĩa 17. Cho $(f_n^*)_{n\geqslant 1}$ là một chiến lược sao cho $\mathbb{E}(\log(S_n^*))$ đạt giá trị lớn nhất với mọi n. Chiến lược $(f_n)_{n\geqslant 1}$ được gọi là khác biệt căn bản với $(f_n^*)_{n\geqslant 1}$ nếu kì vọng của log S_n^* - logS_n tăng nhanh hơn độ lệch chuẩn. Nói cách khác, nếu $(f_n)_{n\geqslant 1}$ khác biệt căn bản với $(f_n^*)_{n\geqslant 1}$ thì

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left(\log\frac{S_n^*}{S_n}\right)}{\sqrt{\operatorname{Var}\left(\log\frac{S_n^*}{S_n}\right)}} = +\infty \tag{2.5.1}$$

Định lý 18. *Với mọi $M \geqslant 1$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n^*}{S_n} \geqslant M\right) = 1$$

Chứng minh. Ta sử dụng bổ đề sau: Từ định nghĩa của $(f_n^*)_{n\geqslant 1}$ và $(f_n)_{n\geqslant 1}$ ta có: $\mathbb{E}\left(\log\frac{S_n^*}{S_n}\right) \to +\infty$.
Xét biến đổi:

$$\begin{aligned}
\frac{S_n^*}{S_n} \leqslant M &\Rightarrow \log\frac{S_n^*}{S_n} \leqslant \log(M)\\
&\Rightarrow \log\frac{S_n^*}{S_n} - \mathbb{E}\left(\log\frac{S_n^*}{S_n}\right) \leqslant \log(M) - \mathbb{E}\left(\log\frac{S_n^*}{S_n}\right)\\
&\Rightarrow \log\frac{S_n^*}{S_n} - \mathbb{E}\left(\log\frac{S_n^*}{S_n}\right) \leqslant \log(M) - \mathbb{E}\left(\log\frac{S_n^*}{S_n}\right) < 0\\
&\text{(chọn n để } \mathbb{E}\left(\log\frac{S_n^*}{S_n}\right) \to +\infty)\\
&\Rightarrow \left|\log\frac{S_n^*}{S_n} - \mathbb{E}\left(\log\frac{S_n^*}{S_n}\right)\right| \geqslant \mathbb{E}\left(\log\frac{S_n^*}{S_n}\right) - \log(M)\\
&\Rightarrow \frac{\sqrt{\operatorname{Var}\left(\log\frac{S_n^*}{S_n}\right)}}{\mathbb{E}\left(\log\frac{S_n^*}{S_n}\right) - \log(M)} \geqslant 1
\end{aligned}$$

Vì nếu $\frac{S_n^*}{S_n} \leqslant M$ thì $\frac{\sqrt{\operatorname{Var}\left(\log\frac{S_n^*}{S_n}\right)}}{\mathbb{E}\left(\log\frac{S_n^*}{S_n}\right) - \log(M)} \geqslant 1$ nên ta suy ra được rằng

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n^*}{S_n} \leqslant M\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{\operatorname{Var}\left(\log\frac{S_n^*}{S_n}\right)}}{\mathbb{E}\left(\log\frac{S_n^*}{S_n}\right) - \log(M)} \geqslant 1\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n^*}{S_n} \leqslant M\right) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{\operatorname{Var}\left(\log\frac{S_n^*}{S_n}\right)}}{\mathbb{E}\left(\log\frac{S_n^*}{S_n}\right) - \log(M)} \geqslant 1\right)$$

Hơn nữa

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left(\log\dfrac{S_n^*}{S_n}\right)}{\sqrt{\operatorname{Var}\left(\log\dfrac{S_n^*}{S_n}\right)}} = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{\operatorname{Var}\left(\log\dfrac{S_n^*}{S_n}\right)}}{\mathbb{E}\left(\log\dfrac{S_n^*}{S_n}\right)} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{\operatorname{Var}\left(\log\dfrac{S_n^*}{S_n}\right)}}{\mathbb{E}\left(\log\dfrac{S_n^*}{S_n}\right) - \log(M)} = 0$$

(bởi M nhỏ vô cùng so với $\dfrac{S_n^*}{S_n}$)

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{\operatorname{Var}\left(\log\dfrac{S_n^*}{S_n}\right)}}{\mathbb{E}\left(\log\dfrac{S_n^*}{S_n}\right) - \log(M)} \geqslant 1\right) = 0$$

Sử dụng 2 kết quả trên, ta được:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n^*}{S_n} \leqslant M\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n^*}{S_n} > M\right) = 1$$

□

Nhận xét: Từ bài toán trên, ta thấy sự tối ưu của chiến lược Kelly về mặt giá trị. Trong cùng khoảng thời giân chơi kéo dài, xác suất để người theo Kelly nhận lượng tiền gấp nhiều lần người theo chiến thuật khác gần như chắc chắn. Tuy nhiên, nếu như người chơi muốn có lượng tiền nhất định (coi là A tiền) xong rồi trong thời gian ngắn nhất, thì liệu Kelly có tối ưu không? Ta xét kết quả tiếp theo.

Định lý 19. *Gọi A là số tiền mong đạt được của người chơi, T_A là lượt đầu tiên thoả mãn $S_{T_A} \geqslant A$, và T_A^* là lượt đầu tiên thoả mãn $S^*_{T_A^*} \geqslant A$. Với mọi $k \in \mathbb{N}$,*

$$\lim_{A\to+\infty} \mathbb{P}(T_A^* - T_A \leqslant -k) = 1 \tag{2.5.2}$$

Chứng minh. Do S_n^* đang xét theo chiến lược Kelly, gọi a là lượng tiền nhận nếu thắng với giá trị cá là $1, f$ là hằng số Kelly của mỗi lượt chơi (mỗi lượt người chơi cá số tiền fS_{n-1}) thì ta dễ thấy $S_n \leqslant (fa{+}1)S_{n-1} \Rightarrow S_{n+k} \leqslant (fa{+}1)^k S_n$. Quay lại với yêu cầu chứng minh, ta xét chuỗi quan hệ suy ra như sau: $T_A^* - T_A > -k \Rightarrow S^*_{T_A - k} < A$ (bởi $S^*_{T_A^*}$ là giá trị đầu tiên lớn hơn A) $\Rightarrow S^*_{T_A}. < A(1+a)^k \leq S_{T_A}(1+a)^k$ (theo bất đẳng thức $S_{n+k} \leqslant (fa+1)^k S_n$ và định nghĩa S_{T_A}) $\Rightarrow \dfrac{S^*_{T_A}}{S_{T_A}} \leqslant (fa+1)^k$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(T_A^* - T_A > -k) \leqslant \mathbb{P}\left(\frac{S_n^*}{S_n} \leqslant (fa+1)^k\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{A\to+\infty} \mathbb{P}(T_A^* - T_A > -k) \leqslant \lim_{A\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_{T_A}^*}{S_{T_A}} \leqslant (fa+1)^k\right)$$

(do $A \to +\infty$ thì $T_A \to +\infty$)

$$\Rightarrow \lim_{A\to+\infty} \mathbb{P}(T_A^* - T_A > -k) = 0$$

(do từ kết quả định lý 3 có $\lim_{T_A\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_{T_A}^*}{S_{T_A}} \leqslant (fa+1)^k\right) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{A\to+\infty} \mathbb{P}(T_A^* - T_A \leqslant -k) = 1 - \lim_{A\to+\infty} \mathbb{P}(T_A^* - T_A > -k) = 1$$

□

Nhận xét 20. Từ định lý trên, ta có thể thấy rằng Kelly cũng là chiến lược nhanh nhất để đạt được số tiền mong muốn khi số tiền đó lớn hơn rất nhiều so với lượng tiền xuất phát của người chơi.

3 Lý thuyết bước đi ngẫu nhiên

3.1 Bước đi ngẫu nhiên trong Toán học là gì?

Bước đi ngẫu nhiên trong Toán học là một quá trình di chuyển được hình tượng hóa như nhiều bước đi ngẫu nhiên trong một không gian Toán học, vị trí của bước đi tiếp theo phụ thuộc vào vị trí của bước đi phía trước. Lý thuyết về chuỗi bước đi ngẫu nhiên có nhiều ứng dụng trong di truyền học, kĩ thuật vật liệu, vật lí phân tử, kinh tế học,..

Định nghĩa 21. Dãy các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, X_3, X_4, ...$ độc lập và cùng phân bố trên các trục số nguyên $\mathbb{Z}^d$ được gọi là các bước của một bước đi ngẫu nhiên, các biến này có phân bố như sau: $\forall i \in n : \mathbb{P}(X_i = e) = \frac{1}{2d}$ nếu $e \in Z^d$ và $\|e\| = 1$ và $\mathbb{P}(X_i = e) = 0$ nếu $\|e\| \neq 1$. Khi xác suất bước đi ngẫu nhiên theo $2d$ hướng là như nhau thì bước đi ngẫu nhiên được gọi là *đơn (simple)*.

Định nghĩa 22. $S_0 = 0 \in \mathbb{Z}^d$ và $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ với $n \in \mathbb{N}$ được gọi là vị trí của bước đi ngẫu nhiên.

Nhận xét 23. Như vậy, bước đi ngẫu nhiên bắt đầu từ vị trí ban đầu là $S_0 = 0$, trải qua các bước ngẫu nhiên X_i và đạt đến vị trí S_n tại thời điểm n. Bởi tính độc lập của các quá trình di chuyển, dãy S_n ($n \in \mathbb{N}$) được gọi là một quá trình Markov trong không gian $\mathbb{Z}^d$, vị trí kế tiếp chỉ phụ thuộc vào vị trí ở thời điểm hiện tại.

Tiếp theo ta sẽ xét tính hồi quy và lang thang trong các bước đi ngẫu nhiên.

3.2 Định lý Polýa về tính *hồi quy* và *lang thang* của bước đi ngẫu nhiên

Định nghĩa 24. Gọi F là xác suất người thực hiện bước đi ngẫu nhiên trở về vị trí cũ S_0 .

- Nếu $F = 1$ thì bước đi ngẫu nhiên gọi là ***hồi quy***.
- Nếu $F < 1$ thì bước đi ngẫu nhiên gọi là ***lang thang***.

Trong quá trình *hồi quy*, dễ dàng nhận ra bước đi không chỉ quay về vị trí S_0 đúng một lần mà quay về vị trí cũ vô số lần. Ngược lại đối với bước đi *hồi quy*, bước đi *lang thang* có thể không bao giờ trở về vị trí S_0 với xác suất dương là $1-F$. Trong những trường hợp sau, số lần quay về vị trí ban đầu S_0 có thể được biểu diễn dưới dạng đồ thị chứa tham số F là $1-F$ Như vậy, số lần kì vọng bước đi *lang thang* quay về vị trí ban đầu là $\dfrac{1}{1-F}-1=\dfrac{F}{1-F}$.

Định lý 25 (***Polýa***). *Bước đi ngẫu nhiên với $d=1,2$ thì hồi quy còn bước đi ngẫu nhiên với $d\geqslant 3$ thì lang thang.*

Để chứng minh định lí này, đầu tiên ta phát biểu một bổ đề sau.

Bổ đề 26. *Trạng thái $S_0=0$ là lang thang khi và chỉ khi*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}_n(0)<\infty$$

Chứng minh. Với $t\in\mathbb{N}$, định nghĩa $I_t=1$ nếu $S_t=0$, ngược lại $I_t=0$. Chú ý rằng $N=\sum_{t=1}^{\infty}I_t$ là số lần S_0 quay trở về vị trí ban đầu. Ta có được giá trị kì vọng số lần quay về vị trí ban đầu như sau.
Ta có

$$\mathbb{E}[N]=\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{\infty}\mathbb{I}_t\right]=\sum_{t=1}^{\infty}\mathbb{E}[I_t]=\sum_{t=1}^{\infty}\mathbb{P}(S_t=0)=\sum_{t=1}^{\infty}\mathbb{P}_t(0)=0.$$

Quay trở lại với cách tính giá trị kì vọng của N ta có

$$E[N]=\sum_{k=1}^{\infty}[k\mathbb{P}(N=k)=\sum_{k=1}^{\infty}[k\mathbb{P}(N\geq k)-k\mathbb{P}(N\geq k+1)]=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(n\geq k)\ =\sum_{k=1}^{\infty}F^k.$$

Do đó

$$\sum_{t=1}^{\infty}\mathbb{P}_t(0)=\mathbb{E}[N]=\sum_{k=1}^{\infty}F^k.$$

Điều này đúng với $F<1$ và sai khi $F=1$. □

Dựa vào định lí này, ta tiếp tục chứng minh định lí Polýa.

Chứng minh. (Polýa)
(*) $d=1$
Ta tưởng tượng rằng mạng nguyên là một đường thẳng với 2 hướng là phải, trái. Ta có: $\mathbb{P}_{2n+1}=0$,

$$\mathbb{P}_{2n}(0)=\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{(2n)!}{n!(2n-n)!}\frac{1}{2^{2n}}.$$

Tiếp theo, nhờ sử dụng công thức xấp xỉ Stirling:

Bổ đề 27.

$$n!\sim n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

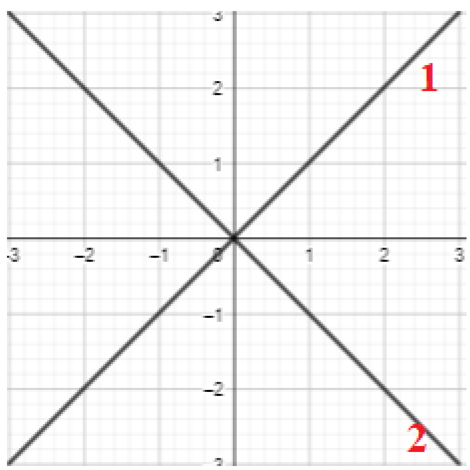
Nên ta có
$$\mathbb{P}_{2n}(0) \sim \frac{2^{2n} n^{2n} e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{n^{2n} e^{-2n} 2\pi n 2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \text{ với } n \to \infty.$$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$ không hội tụ do $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ khi $n \to \infty$ nên $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{2n}(0)$ cũng không hội tụ và tiến về $+\infty$ khi $n \to \infty$. Mặt khác, tổng vô hạn trở thành :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{2n}(0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}[1 + o(1)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}[1 + o(1)] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &> \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Vậy bước đi ngẫu nhiên với $d = 1$ là hồi quy.

(**) $d = 2$



Đối với lưới nguyên hai chiều ta định nghĩa bước đi ngẫu nhiên là bước đi trên hai mạng một chiều như hình dưới đây. Đặt S_n là vị trí tại mạng hai chiều, định nghĩa với mọi n vị trí của bước đi ngẫu nhiên trên mỗi trục 1, 2 lần lượt là S_n^1 và S_n^2. Trình tự các bước của bước đi ngẫu nhiên là khác biệt tại 2 địa điểm khác nhau, và từ vị trí mỗi bước X_i có thể lấy ra các giá trị Đông, Tây, Nam, Bắc.Bảng dưới đây cho ta thấy sự tương quan giữa X_i, X_i^1, X_i^2.

	N	E	S	W
S_n^1	1	1	-1	-1
S_n^2	1	-1	-1	-1

Từ đây ta thấy sự phân bố các giá trị của X_1 và X_2 giống với sự phân bố các giá trị của X_1. Do đó với

$d = 2$ ta có thể viết như sau.

$$\mathbb{P}_{2n}(0) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \mathbb{P}(S_{2n}^1 = 0) = \mathbb{P}(S_{2n}^2 = 0) \sim (\frac{1}{\sqrt{\pi n}})^2 \sim \frac{1}{\pi n}$$

Do $S_{2n+1} = 0$ nên giá trị của tổng chạy đến n trở thành:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{2n}(0) = \frac{1}{\pi}(1 + o(1)) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Vậy bước đi ngẫu nhiên đơn giản với $d = 2$ là *hồi quy*. □

Với các lưới nguyên bậc cao hơn, ta chứng minh được rằng bước đi ngẫu nhiên đơn giản ở cái trường hợp này là những quá trình *lang thang*, để chứng minh điều này, chúng ta sẽ cần sử dụng nhiều kiến thức nằm ngoài khuôn khổ và vì mục đích của tài liệu này nên chúng tôi không tiện trình bày ở đây. Bạn đọc muốn tìm hiểu có thể tham khảo các tài liệu ở cuối bài viết.

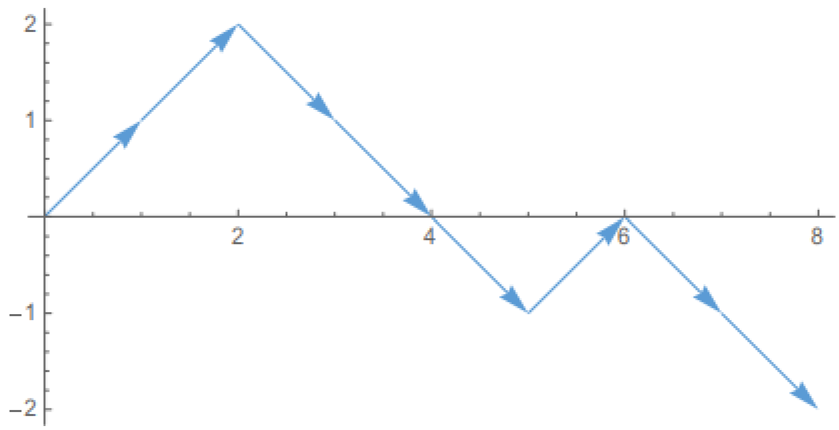
3.3 Áp dụng lý thuyết bước đi ngẫu nhiên vào trò chơi tung xu

Trong tài liệu sau đây, chúng tôi sẽ quan tâm đến bước đi ngẫu nhiên trên mạng 1 chiều với $d = 1$. Cụ thể hơn, những ứng dụng của bước đi ngẫu nhiên trên mạng 1 chiều sẽ được áp dụng vào trò chơi tung xu cùng với bài toán *sự phá sản của con bạc* được đề cập lần đầu tiên từ khoảng thế kỉ XVII qua bức thư của Blaise Pascal gửi Pierre Ferma. Sau đó, đã có nhiều nhà nghiên cứu tìm hiểu về vấn đề này và mô hình hóa nó qua lí thuyết bước đi ngẫu nhiên trên mạng 1 chiều, qua đó có thể thấy số tiền ban đầu của một con bạc sẽ có lúc quay trở về ban đầu nếu bước đi ngẫu nhiên là hồi quy hoặc sẽ bị phá sản nếu bước đi ngẫu nhiên là lang thang.
Bài toán định nghĩa rằng bắt đầu với n đồng, chúng ta thực hiện các ván cá cược khi tung đồng xu giữa 2 người chơi, qua mỗi ván, con bạc thắng 1 đồng với xác suất là p, và thua 1 đồng với xác suất $q = 1-p$. Khi đó gọi $\{X_n\}$ là dãy hữu hạn các biến ngẫu nhiên với xác suất $P(X_t = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_t = -1) = q = 1 - p$ và $S_t = \sum_{k=1}^{t} X_k$ với t biểu thị cho thời gian tại giá trị S_t.
Với mỗi ván cược nếu con bạc A thắng con bạc B với xác xuất p, con bạc B thắng con bạc A với xác suất q. Khi đó nếu $S_t > 0$ thì ta gọi A thắng B và $S_t < 0$ thì B thắng A. Nếu $p > \frac{1}{2}$ thì ta nói trò chơi thuận lợi cho A và bất lợi cho B. Ngược lại nếu $p < \frac{1}{2}$ thì ta nói trò chơi thuận lợi cho B, bất lợi cho A. Nếu $p = \frac{1}{2}$ thì ta nói trò chơi công bằng cho cả hai. $\mathbb{E}X_t$ là giá trị kì vọng của X tại điểm t. Ta có $\mathbb{E}X_t = p - q$.

Hệ quả 28. *Gọi $\mathbb{D}X_t$ là độ lệch chuẩn của dãy X_t. Nếu $p = \frac{1}{2}$ thì $\mathbb{E}X_t = 0$, thì $\mathbb{D}X_t$ đạt giá trị lớn nhất tại $p = \frac{1}{2}$ khi mà bước đi đạt mức ngẫu nhiên nhất và đạt giá trị nhỏ nhất tại $p = 0$ hoặc $p = 1$ khi giá trị X_n đã được quy định.*

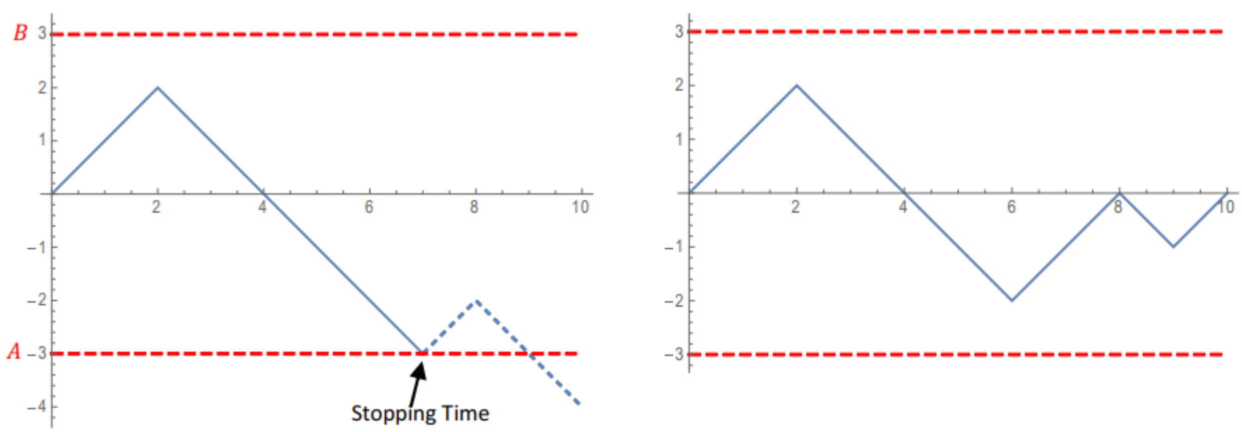
Gọi biểu đồ sau là quỹ đạo của một người chơi, mỗi đoạn đi lên là biểu thị cho một lần thắng, mỗi đoạn đi xuống biểu thị cho 1 lần thua. Chú ý rằng bước đi ngẫu nhiên 1 chiều là các bước đi chuyển trên 1 và chỉ 1 đường thẳng. Qũy đạo là một cách miêu tả trực quan cho vị trí của bước đi ngẫu nhiên tại thời điểm t.

Chúng ta quy ước rằng vị trí quỹ đạo thời gian thực của trò chơi (thời gian từ lúc bắt đầu cho đến khi có 1 người phá sản) nằm trong đoạn $[A, B]$ với $A \leqslant 0 \leqslant B$. Trò chơi sẽ dừng lại khi quỹ đạo đạt tới mốc A



Hình 1: Nguồn : [9]

hoặc B. Sự hạn chế trong đoạn $[A, B]$ có ý nghĩa thực tế đối với ván chơi vì cả hai con bạc ban đầu đều đặt một số tiền hữu hạn. Người chơi A sẵn sàng chi ra số tiền $|A|$ để chiến thắng và tương tự với người chơi B.



Hình 2: Nguồn : [9]

Gọi $\tau_n(w)$ là hàm số chỉ thời điểm trò chơi dừng lại (khi một trong hai người phá sản) với ω là một bước đi ngẫu nhiên

Ta có $\tau_n(w) = \begin{cases} \min\{0 \leqslant t \leqslant n\} & \text{(Đồ thị đường quỹ đạo chạm vào mốc A hoặc B trước hoặc tại thời điểm n.)} \\ n & \text{(Đồ thị đường quỹ đạo không bao giờ chạm vào mốc A và mốc B)} \end{cases}$

Chúng ta tiếp tục mở rộng khái niệm qua nhiều trường hợp bằng cách chọn vị trí bắt đầu của bước đi ngẫu nhiên là tại vị trí x. Khi đó $S_t^x = S_t + x$. Định nghĩa về thời điểm dừng lại của trò chơi vẫn không thay đổi, tuy nhiên ta thay đổi kí hiệu là τ_x^t. Đồng thời gọi Ω_n^x là tập các bước đi ngẫu nhiên tới thời điểm n bắt đầu tại vị trí x,ta định nghĩa các tập hợp sau:

$$\alpha_n^x := \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant n} \{\omega \in \Omega_n^x : \tau_n^x = t, S_t^x = A\}, \beta_n^x := \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant n} \{\omega \in \Omega_n^x : \tau_n^x = t, S_t^x = B\}$$

Nói cách khác, α_n^x biểu thị cho tập bước đi ngẫu nhiên mà con bạc A phá sản và tương tự với β_n^x . Cùng với đó ta cũng sẽ có $\mathbb{A}_n^x = \mathbb{P}(\alpha_n^x)$ là xác suất A phá sản và tương tự với $\mathbb{B}_n^x$ Tiếp tục trong phần này, chúng ta sẽ đi tìm hiểu về một số vấn đề dưới đây.

3.3.1 Xác suất một con bạc phá sản trước hay sau thời điểm n

Trước tiên ta xét kết quả sau qua một số biến đổi đơn giản:

$$B_n^x = pB_{n-1}^{x+1} + qB_{n-1}^{x-1}$$

Chứng minh.

$$\begin{aligned}
B_n^x &= \mathbb{P}(B_n^x|S_1^x = x+1)\mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(B_n^x|S_1^x = x-1)\mathbb{P}(X_1 = -1) \\
&= p\mathbb{P}(B_n^x|S_1^x = x+1) + q\mathbb{P}(B_n^x|S_1^x = x-1) \\
&= p\mathbb{P}(B_n^x|\omega_n^{x,x+1}) + q\mathbb{P}(B_n|\omega_n^{x,x-1}) \\
&= p\mathbb{P}(B_{n-1}^{x+1}) + q\mathbb{P}(B_{n-1}^{x-1})
\end{aligned}$$

với $\omega_n^{x,x+1}$ là tập hợp các bước đi ngẫu nhiên tới thời điểm n mà bắt đầu tại $x, x+1$.

□

Ta đặt

$$\mathbb{B}_n^x = \lim_{n\to\infty} B_n^x$$

Khi đó

$$\lim_{n\to\infty} B_n^x = \lim_{n\to\infty} pB_{n-1}^{x+1} + \lim_{n\to\infty} qB_{n-1}^{x-1} \Longleftrightarrow \mathbb{B}_x = p\mathbb{B}_{x+1} + q\mathbb{B}_{x-1}$$

Với $p \neq \frac{1}{2}$, sử dụng phương trình sai phân bậc hai 1 ẩn với dãy số $\{\mathbb{B}_x\}$ sau:

$$\mathbb{B}_x = p\mathbb{B}_{x+1} + q\mathbb{B}_{x-1}, \mathbb{B}_B = 1, \mathbb{B}_A = 0$$

Từ đó suy ra công thức tổng quát của $\mathbb{B}_x$ hay :

$$\mathbb{B}(x) = \frac{\left(\dfrac{q}{p}\right)^x - \left(\dfrac{q}{p}\right)^A}{\left(\dfrac{q}{p}\right)^B - \left(\dfrac{q}{p}\right)^A}$$

Đối với $p = q = \dfrac{1}{2}$, ta sử dụng một kết quả sau:

$$\textit{Với } r \in \mathbb{R} \textit{ thì } \frac{(1+x)^r-1}{rx} \to 1 \textit{ khi } x \to 0$$

Suy ra với $p = q = \dfrac{1}{2}$ thì $\mathbb{B}(x) = \dfrac{x-A}{B-A}$.

Hệ quả 29. $\lim\limits_{\frac{p}{q}\to 1} \mathbb{B}(x) = \dfrac{x-A}{B-A}$

Tương tự với $\mathbb{P}(a_n^x) = \mathbb{A}_n^x$ ta cũng có

$$\lim_{\frac{p}{q}\to 1} = \frac{B-x}{B-A}$$

Định lý 30. *Với mọi xác suất $p, q \in [0,1]$ ta có $\mathbb{A}(x) + \mathbb{B}(x) = 1$. Điều này tương đương với việc nếu một người chơi sẽ phá sản trong một thời gian nhất định với xác suất bằng 1 thì xác suất trò chơi kéo dài mãi mãi bằng 0.*

3.3.2 Đồ thị quỹ đạo bước đi đối xứng và không đối xứng

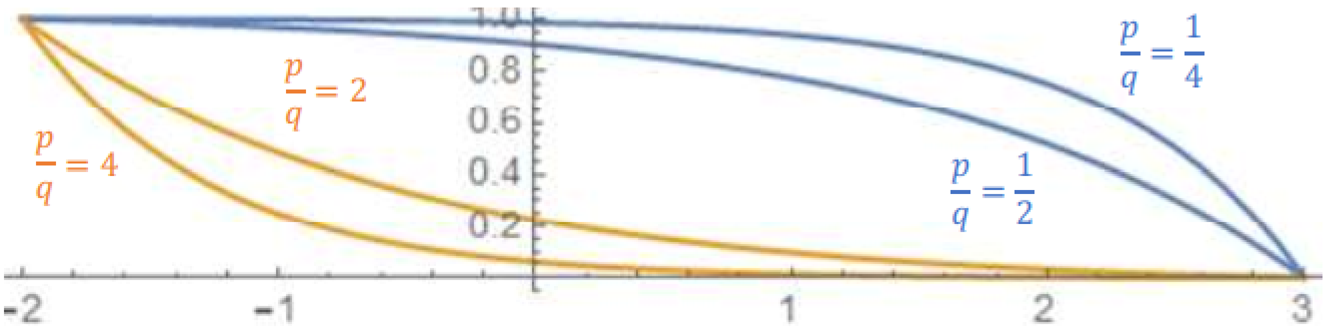
Định nghĩa 31. a) Bước đi đối xứng là bước đi có $p = q = \dfrac{1}{2}$.
b) Bước đi không đối xứng là bước đi có $p \neq q$.

Hệ quả 32. *Đầu tiên, xét một bước đi ngẫu nhiên đối xứng, do $\mathbb{A}_x = \dfrac{B-x}{B-A}$ do đó với giá trị của bước đi ngẫu nhiên càng tiến dần về A thì xác suất phá sản của A càng cao, đồ thị hàm số tăng tuyến tính. Đối với bước đi ngẫu nhiên không đối xứng, xác suất phá sản phụ thuộc vào giá trị của p. Vì $\mathbb{A}(x) = \dfrac{\left(\frac{p}{q}\right)^B - \left(\frac{p}{q}\right)^x}{\left(\frac{p}{q}\right)^B - \left(\frac{p}{q}\right)^A}$ nên vẫn đúng nếu như ta nói giá trị bước đi ngẫu nhiên càng tiến dần về A thì xác suất phá sản của A càng cao hơn. Lấy một ví dụ, nếu ta cho $B = 3, A = -2, \dfrac{p}{q} = 2, \dfrac{1}{4}$, như vậy ta có đồ thị đối với $a(x)$ như sau.*

Đồ thị trên cho ta thấy đồ thị xác suất phá sản của A giảm cũng như không tuyến tính khi vị trí bước đi ngẫu nhiên càng xa dần A. Điều này có nghĩa là, với mỗi x bất động, xác suất A phá sản giảm với tỉ số $r = \dfrac{p}{q}$.
Từ đây, ta lại xuất hiện thêm một kết quả nữa.

Hệ quả 33.

1. *Một trò chơi không thuận lợi cho A thì sau khi nhân đôi tài sản ban đầu của hai người, trò chơi càng không có lợi cho A.*



Hình 3: Nguồn : [9]

2. *Nếu A chơi một trò chơi thuận lợi thì sau khi nhân đôi tài sản ban đầu của hai người, trò chơi càng có lợi cho A.*

Chứng minh. Với trường hợp không thuận lợi cho A ta có

$$\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{2B}-\left(\frac{q}{p}\right)^{2x}}{(\frac{q}{p})^{2B}-\left(\frac{q}{p}\right)^{2A}}=\mathbb{A}_{\frac{p^2}{q^2}}(x)>\mathbb{A}(x), \left(\frac{q}{p}\right)^{2x}-\left(\frac{q}{p}\right)^{x}>0.$$

$$\implies \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{2B}-\left(\frac{q}{p}\right)^{x}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{2B}-\left(\frac{q}{p}\right)^{2A}}=\mathbb{A}_{\frac{p^2}{q^2}}(x)+\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{2x}-\left(\frac{q}{p}\right)^{x}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{2B}-\left(\frac{q}{p}\right)^{2A}}>\mathbb{A}(x).$$

Tương tự với trường hợp không thuận lợi ta cũng có

$$\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{2B}-\left(\frac{q}{p}\right)^{x}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{2B}-\left(\frac{q}{p}\right)^{2A}}<\mathbb{A}(x).$$

□

3.3.3 Giá trị kì vọng thời gian dừng trò chơi

Trước hết, ta có phương trình sau đây

$$\mathbb{E}\tau_n^x=\mathbb{E}_{n-1}^{x+1}+q\mathbb{E}_{n-1}^{x-1}+1.$$

Tiếp tục đặt $\tau(x)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\tau_n^x$.
Tương tự như cách tính $\mathbb{A}(x)$, ta cũng có

$$\tau(x)=\begin{cases}\frac{1}{p-q}(B.\mathbb{B}(x)+A.\mathbb{A}(x)-x) & \text{với } p \text{ khác } q\ .\\ (B-x)(x-A) & \text{với } q=p=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Hệ quả 34. *Nếu $A = B$ và $x = 0$ chúng ta sẽ có thời gian trung bình trò chơi dừng lại sẽ là $\tau(x) = A^2$. Ví dụ, một trò chơi mà ban đầu 2 con bạc đều có 10 đồng thì trung bình sẽ cần khoảng 100 ván chơi để có một con bạc phá sản hay trò chơi dừng lại.*

Tiếp theo, chúng ta phát biểu không chứng minh 2 bổ đề sau:

Bổ đề 35. $\mathbb{E}X_1\mathbb{E}\tau_n = (p-q)\mathbb{E}\tau_n = \mathbb{E}\tau_n$ *và nếu* $p = q = \dfrac{1}{2}$ *thì ta có* $\mathbb{E}S_{\tau_n} = 0$.

Hệ quả 36. *Nếu* $p \leq q$ *thì* $\mathbb{E}\tau_n = \dfrac{\mathbb{E}S_{\tau_n}}{p-q} \leq \max\{\dfrac{|A|}{p-q}, \dfrac{B}{p-q}\}$ *với mọi n, suy ra* $\tau(0) = \lim\limits_{n\to\infty} \tau_n$ *hoàn toàn có giá trị hữu hạn.*

Bổ đề 37. $\mathbb{D}X_1\mathbb{B}\tau_n = \mathbb{E}[S_{\tau_n} - \tau_n\mathbb{E}X_1]^2$ *và nếu* $p = q = \dfrac{1}{2}$ *chúng ta sẽ có* $\mathbb{E}S^2_{\tau_n} = \mathbb{E}\tau_n$.

Định lý 38. *Kết quả trên chỉ ra rằng $\tau(0)$ là hữu hạn, nhờ đó ta cũng có $\tau(x)$ là hữu hạn với x bất kì vì cấu hình của trò chơi có thể điều chỉnh phù hợp. Như vậy ta có thể kết luận rằng thời gian trung bình trò chơi dừng lại là hữu hạn trong bước đi ngẫu nhiên.*

4 Nghịch lý Proebsting và nghịch lý St.Petersburg

4.1 Nghịch lý Proebsting

Nghịch lý Probesting là một ví dụ thú vị dường như cho thấy rằng việc một người cá cược áp dụng tiêu chuẩn Kelly liên tục trong việc chọn số tiền đặt cược của mình có thể tự đặt mình vào rủi ro không đáng có và có thể dẫn đến sự phá sản của người này. Tìm hiểu về nghịch lý giúp cho ta hiểu hơn về hạn chế của tiêu chuẩn Kelly.

4.1.1 Giới thiệu nghịch lý

Trước hết, ta nhắc lại số tiền mà một người cá cược theo chiến lược Kelly sẽ cá trong mỗi lần cá tỉ lệ với:

$$f^* = \frac{ap + p - 1}{a}$$

Nếu người này chơi một trò chơi tung xu với tỉ lệ thắng 50/50, công thức trên sẽ trở thành

$$f^* = \frac{a - 1}{2a}$$

Xét trường hợp nếu người chơi đó đang chơi với tỉ lệ cược 2 ăn 1, tiêu chuẩn Kelly nói rằng người này nên đặt cược 25% số tiền họ đang có vào trò chơi, còn nếu người này chơi một trò chơi tung xu với tỉ lệ thắng 50/50 và tỉ lệ cược 5 ăn 1, tiêu chuẩn Kelly nói rằng người này nên đặt cược 40% số tiền họ đang có.

Bây giờ, giả sử một người đã cá 25% ở một cửa 2 ăn 1 thì nhà cái mở thêm một cửa 5 ăn 1. Anh ta bây giờ cần phải tối đa hóa hàm:

$$H(f^*) = 0.5\log(1 + 0.25 \times 2 + 5f^*) + 0.5\log(1 - 0.25 - f^*)$$

vì nếu anh ta thắng, anh ta sẽ có 1.5 số tiền ban đầu và nếu anh ta thua, anh ta sẽ có 0.75 số tiền ban đầu. Đạo hàm hàm H theo biến f^* và cho đạo hàm ấy bằng 0, ta được

$$\begin{aligned} H'(f^*) &= 5\left(\frac{0.5}{1.5+5f^*}\right) - \frac{0.5}{0.75-f^*} = 0 \\ &= \frac{5(0.75-f^*)-(1.5+5f^*)}{(1.5+5f^*)(0.75-f^*)} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f^* = 0.225$$

Ta cũng có đạo hàm bậc hai của hàm H theo f^* là

$$H''(f^*) = 0.5\left(-\frac{25}{(1.5+5f^*)^2} - \frac{1}{(0.75-f^*)^2}\right) < 0$$

Vì $H'' < 0$ nên f^* là một điểm cực đại, và vì $H(0) \geqslant 0$ và $\lim_{f^* \to 1^-} H(f^*) = -\infty$ nên giá trị lớn nhất của $H(f^*)$ đạt được chính tại $f^* = 0.225$. Vậy theo Kelly, ta nên cá thêm 22.5% số tiền mà người chơi đang có. Nghịch lí xuất hiện ở đây nằm ở việc tổng số tiền mà người ấy cá theo Kelly là $0.25 + 0.225 = 0.475$ số tiền người ấy đang có, cao hơn lượng tiền mà người ấy sẽ cá nếu nhà cái mở cửa 5 ăn 1 từ đầu (là 0.4 số tiền đang có). Việc cược nhiều tiền hơn khi phải chơi với tỉ lệ cược thấp hơn rõ ràng đi ngược lại với mục đích tối đa hóa lợi nhuận của chúng ta.

4.1.2 Tổng quát hóa

Tổng quát hơn, trong một trò chơi có xác suất thắng bằng 50%, người cá cược đã đặt cược một lượng tiền f_1 theo Kelly ở cửa có tỉ lệ cược a và sau đó được mời đặt cược ở cửa có tỉ lệ cược b thì bây giờ, hàm mà người đó phải tối đa hóa sẽ là:

$$K(f^*) = \log(1 + af_1 + bf^*) + \log(1 - f_1 - f^*)$$

Ta lại thử cho đạo hàm hàm này bằng 0, khi đó:

$$K'(f^*) = \frac{b}{1+af_1+bf^*} - \frac{1}{1-f_1-f^*} = 0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow b\left(1 - \frac{a-1}{2a} - f^*\right) - \left(1 + a\frac{a-1}{2a} + bf^*\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4abf^* = ab + b - a^2 - a \\ &\Leftrightarrow f^* = \frac{(b-a)(a+1)}{4ab} \end{aligned}$$

Lập luận tương tự như tại ví dụ cụ thể mà ta đã bàn tới ở phần giới thiệu nghịch lý, ta sẽ thấy rằng hàm $K(f^*)$ đạt giá trị lớn nhất chính tại $f^* = \frac{(b-a)(a+1)}{4ab}$. Ta thấy rõ nghịch lí ở việc với $b > a > 1$, tổng số tiền mà ta đặt cược sẽ là

$$f_1 + f^* = \frac{a-1}{2a} + \frac{(b-a)(a+1)}{4ab} = \frac{3ab - b - a^2 - a}{4ab} > \frac{2ab-2a}{4ba} = f_2$$

Tức ta đã đặt cược nhiều tiền hơn khi một phần của trò chơi cá cược có tỉ lệ cược thấp và đặt cược ít tiền hơn khi trò chơi có tỉ lệ cược cao. Ví dụ này dường như cho ta thấy đặt cược theo chiến thuật Kelly dẫn ta đến việc cược một số tiền không phải là tối ưu vào trò chơi.
Edward O. Thorp cũng đã nhận thấy rằng, nếu nhà cái liên tục đưa ra các cửa cược với tỉ lệ 2 ăn 1, 4 ăn 1, 8 ăn 1, 16 ăn 1,... thì người chơi theo Kelly sẽ liên tục cá các lượng tiền bằng $\frac{3^{k-1}}{4^k}$ lượng tiền người chơi có. Ta sẽ chứng minh điều này bằng nguyên lí quy nạp. Thật vậy, ở lần mở cửa cược đầu tiên, theo Kelly người chơi nên cược $\frac{1}{4} = \frac{3^0}{4^1}$ số tiền mà người ấy có (vì đây là cửa 2 ăn 1).
Giả sử người chơi đã đặt cược $\frac{3^{i-1}}{4^i}$ lượng tiền người chơi có vào các cửa có tỉ lệ cược 2^i ăn $1, \forall i \leqslant n (n \in \mathbb{Z}^+)$ thì khi nhà cái mở cửa có tỉ lệ cược 2^{n+1} ăn 1, lượng tiền mà người chơi theo Kelly sẽ cá thêm sẽ chính là giá trị giúp làm tối ưu hóa hàm

$$\begin{aligned}
H_{n+1}(f^*) &= \log\left(1 + \sum_{i=1}^{n} 2^i \frac{3^{i-1}}{4^i} + 2^{n+1} f^*\right) + \log\left(1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{3^{i-1}}{4^i} - f^*\right) \\
&= \log\left(1 + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^i + 2^{n+1} f^*\right) + \log\left(1 - \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^i - f^*\right) \\
&= \log\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2^{n+1} f^*\right) + \log\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n - f^*\right)
\end{aligned}$$

Đạo hàm hàm $H_{n+1}(f^*)$ và cho đạo hàm này bằng 0, ta được

$$H'_{n+1}(f^*) = \frac{2^{n+1}}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2^{n+1} f^*} - \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n - f^*} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 2^{n+1}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n - f^*\right) - \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2^{n+1} f^*\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow f^* = \frac{3^n}{2^{2n+2}} \\
&\Leftrightarrow f^* = \frac{3^n}{4^{n+1}}
\end{aligned}$$

Dễ chứng minh hàm $H_{n+1}(f^*)$ đạt giá trị lớn nhất chính tại $f^* = \frac{3^n}{4^{n+1}}$ nên lượng tiền mà người chơi theo Kelly đặt cược thêm ở lần cược này bằng $\frac{3^n}{4^{n+1}}$ lượng tiền anh ta có. Theo nguyên lí quy nạp, ta có điều cần chứng minh là đúng.
Nếu như vậy thì sau vô số lần nhà cái mở cửa cược mới, số tiền mà người chơi theo chiến lược Kelly cược sẽ bằng

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}}{4^k} = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{4^k} = 4\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 1$$

Nói cách khác, người chơi đã đặt cược toàn bộ số tiền mình có vào một lần thảy duy nhất, điều này dẫn đến hệ quả người chơi theo chiến thuật Kelly có thể mất trắng số vốn của mình với xác suất 50% chỉ trong một lượt chơi.

4.1.3 Giải quyết nghịch lý

Nghịch lý này thực sự không tồn tại. Một điều quan trọng ta cần phải nhớ khi sử dụng tiêu chuẩn Kelly đó là nó được dùng để tối đa hóa tốc độ tăng trưởng lượng tiền ta đang có khi đứng trước một lựa chọn cược có tỉ lệ thắng và tỉ lệ cược cho trước và không đổi. Trong các trường hợp trên, tỉ lệ cược của trò chơi đã thay đổi, dẫn đến việc áp dụng tiêu chuẩn Kelly từng lần chơi một như thế sẽ không cho ta một cách cược tối ưu nhất. Một người cá cược dùng chiến lược dựa theo tiêu chuẩn Kelly nếu biết trước các đại lượng này có thể thay đổi sẽ có thể tạo ra những hàm phức tạp hơn có dạng 'giống' hàm Kelly để tính toán lượng tiền đặt cược sao cho phù hợp.

Ví dụ như, giả sử người cá cược được mời cược tiền ở một trò chơi 50/50 và có tỉ lệ cược 2 ăn 1, anh biết rằng có một khả năng 50% nhà cái sẽ mở thêm cửa 5 ăn 1 trong thời gian tới, khi đó hàm mà anh cần tối ưu hóa sẽ là:

$$0.25\log(1+2f_1)+0.25\log(1-f_1)+0.25\log(1+2f_1+5f_2)+0.25\log(1-f_1-f_2)$$

Hàm này đạt giá trị lớn nhất khi $f_1 = 0$ và $f_2 = 0.4$. Nói cách khác, người cá cược nên đặt cược 0 đồng ở cửa thứ nhất và chờ tới khi cửa thứ 2 mở, sau đó người ấy nên cược 0.4 số tiền mình đang có vào cửa số 2. Tóm lại, ta có thể rút ra được kết luận từ việc xem xét nghịch lý Proebsting rằng nếu người cá cược không có đầy đủ thông tin hoặc thông tin sai lệch về những sự kiện trong tương lai, anh ta sẽ có thể đặt cược những lượng tiền không phải tối ưu hoặc thậm chí có thể bị phá sản. Tiêu chuẩn Kelly cho ta một cách đặt cược tốt nhất và an toàn nhất với tốc độ tăng trưởng cao và rủi ro phá sản thấp, miễn là người cá cược nắm được các khả năng có thể xảy ra và xác suất xảy ra của chúng.

4.2 Nghịch lý St.Petersburg

Tiêu chuẩn Kelly cung cấp cho ta một chiến thuật tốt trong việc tối đa hóa hàm log của kì vọng số tiền nhận được. Tuy nhiên ta cần chú ý rằng kì vọng không phải là thước đo duy nhất và người cá cược không nên dùng nó làm thước đo duy nhất để đánh giá và chọn các chiến thuật chơi. Nghịch lý St. Petersburg cho ta một ví dụ cụ thể về vấn đề này.

4.2.1 Giới thiệu nghịch lí

Ta đặt trường hợp một casino cho phép người chơi chơi một trò chơi tung xu với tỉ lệ thắng 50%. Trò chơi bắt đầu với việc casino đặt 2\$ làm tiền thưởng cho người chơi. Mỗi lần thảy đồng xu ra mặt ngửa, casino sẽ đặt thêm một lượng tiền bằng 2 lần tổng lượng tiền đã được đặt trước đó. Lần đầu tiên đồng xu thảy ra mặt úp, trò chơi kết thúc và người chơi nhận được toàn bộ số tiền đã được đặt cho đến lúc ấy. Vậy, sau k lần thảy ra mặt ngửa liên tiếp, người chơi sẽ nhận được số tiền bằng 2^{k+1}\$. Nếu một người được mời tham gia trò chơi này, anh ta nên trả nhiều nhất là bao nhiêu tiền để tham gia nó?

Ta có thể biểu thị các kết quả mà trò chơi có thể có được dưới dạng bảng như sau. Ta thử tính kì vọng số tiền nhận được của trò chơi này. Vì xác suất đồng xu thảy ra mặt ngửa liên tiếp k lần rồi thảy ra mặt úp ở lần thứ $k+1$ là 2^{k+1} nên kì vọng số tiền nhận được sẽ là:

$$\mathbb{E} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} 2^i = \sum_{i=1}^{+\infty} 1 = +\infty$$

Như vậy ta có thể thấy giá trị kì vọng của số tiền nhận được khi chơi trò chơi này là lớn vô cùng, vậy nếu chỉ dùng giá trị kì vọng làm tiêu chuẩn đánh giá thì người chơi có thể bỏ ra số tiền lớn bao nhiêu cũng được để tham gia trò chơi. Tuy nhiên, từ góc nhìn thực tế, chẳng có ai sẽ bỏ ra quá nhiều tiền để chơi trò chơi này. Thật vậy, ta có thể thấy rằng xác suất để ta thắng được một lượng tiền càng lớn thì càng nhpr Điều nghịch lí ở đây nằm ở chỗ tuy trò chơi có giá trị kì vọng của số tiền nhận được là lớn vô cùng, không ai sẽ muốn bỏ ra số tiền quá lớn để chơi nó.

4.2.2 Giải quyết nghịch lí

Có nhiều hướng tiếp cận để giải quyết nghịch lí này, ở đây chúng tôi sẽ nêu hướng tiếp cận cổ điển sử dụng một hàm tiện ích (utility function), có kì vọng kí hiệu là $\mathbb{E}(U)$, được đề xuất ra bởi Daniel Bernoulli vào năm 1738. Ông lí luận rằng khi đánh giá một thứ gì đó, giá trị của thứ đó không quan trọng, điều quan trọng là giá trị tương đối của nó đối với chủ sở hữu của nó. Với lí luận đó, thay vì tính kì vọng số tiền nhận được, ta sẽ tính kì vọng độ tăng của số tiền người chơi sau mỗi lượt chơi. Xét một người chơi ban đầu có số tiền w, ở lượt thảy ra mặt ngửa thứ k liên tiếp, người ấy sẽ mong nhận được một số tiền, số tiền ấy có sự tương đối (tính theo hàm log) đối với số tiền ông đang có là: $\log(w+2^{k+1}) - \log(w+2^k)$. Khi đó:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(U) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} (\log(w+2^k) - \log(w+2^{k-1})) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} (\log(2w+2^k) - \log(w+2^{k-1})) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \log(2) \\
&= \log(2)
\end{aligned}$$

Ở đây, ta thấy tổng $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} (\log(w+2^k) - \log(w+2^{k-1}))$ vừa tăng khi $n \to \infty$ (vì nó là tổng của dãy vô số số thực dương) vừa bị chặn (bởi $\log(2)$ nên $\mathbb{E}(U)$ hội tụ tới một điểm. Nếu tính toán cụ thể, nếu người chơi là một nhà triệu phú ($w = \$1000000$) thì số tiền ông nên trả sẽ vào khoảng \$20.88, còn nếu người chơi là một người chỉ có \$1000 thì số tiền anh ta nên trả sẽ vào khoảng \$10.95. Nghịch lí đã được giải quyết, người chơi không còn nên trả bất cứ giá nào để được tham gia chơi nữa.

Ta có thể thấy cách giải quyết này không phải là hoàn hảo, vì nếu ta thay đổi điều kiện trò chơi sao cho số tiền thưởng sau mỗi lần thảy ra mặt ngửa tăng nhanh đủ lớn, ta sẽ dễ dàng gặp lại vấn đề $\mathbb{E}(U) = \infty$. Tổng quát hơn, với bất kì một hàm đánh giá nào không bị chặn trên, ta sẽ có thể thay đổi điều kiện trò chơi để một biến thể của nghịch lí St. Petersburg sẽ xuất hiện, và người chơi lại muốn tham gia trò chơi bằng bất cứ giá nào.

Từ đó, ta thấy rằng không nên chỉ dựa vào giá trị kì vọng của số tiền nhận được để đánh giá một chiến lược chơi hay một trò chơi. Một cách lí giải đơn giản cho việc này là: trên lí thuyết, ta có thể có một số vốn ban đầu lớn vô cùng và ta sẽ có thể chơi vô số trò chơi liên tục, điều này theo luật số lớn sẽ dẫn ta tiến tới việc thu được lợi nhuận lớn vô cùng (Vì $\mathbb{E} = +\infty$). Tuy nhiên, trong thực tế, ở mọi trường hợp, ta chỉ có thể có một số vốn hữu hạn và chơi hữu hạn lần chơi. Việc chỉ dựa trên kì vọng số tiền nhận được trên lí thuyết để quyết định có chơi hay không ở đây vì thế là một sai lầm mà ta cần phải tránh.

5 Kết luận

Trong vòng hai tuần tại trại hè Toán và khoa học MaSSP 2019, sử dụng các kiến thức giải tích và xác suất, chúng tôi đã nghiên cứu một số khía cạnh trong một trò chơi bài bạc và đưa ra được một số kết quả có ý nghĩa. Chúng tôi đã nêu định nghĩa và đưa ra được phân bố của chiến lược All-in, nêu được cơ sở của chiến lược Kelly và đưa ra công thức của lượng tiền cược theo chiến lược Kelly trong trò chơi với một cửa đặt. Chúng tôi cũng đã chứng minh được sự tối ưu của chiến lược Kelly so với những chiến lược khác căn bản khác theo hai khía cạnh: sự tối ưu theo lợi nhuận nhận được và sự tối ưu theo thời gian đạt được một lượng tiền cho trước. Thông qua việc tìm hiểu về lí thuyết bước đi ngẫu nhiên, chúng tôi cũng đã chứng minh và đưa ra được một số kết quả liên quan trong một trò chơi tung đồng xu hai người chơi với lượng vốn ban đầu hữu hạn. Cuối cùng, chúng tôi trình bày nội dung và giải quyết hai nghịch lý, đó là nghịch lý Proebsting và nghịch lý St.Petersburg nhằm làm phần nào thể hiện được sự sai khác có thể có giữa kết quả nghiên cứu lí thuyết và thực tiễn trò chơi, từ đó đưa được kết luận rằng người chơi trò chơi bài bạc không nên dùng giá trị kì vọng của một trò chơi hay một chiến thuật làm thước đo duy nhất để đánh giá trò chơi hay chiến thuật ấy.

Tài liệu

[1] Eduardo Zambrano. *A Solution to Proebsting's Paradox, or "How to Skim a Bettor if You Must"*

[2] Edward O. Thorp. *The Kelly Criterion in Blackjack, Sports, Betting, and the Stock Market.* Handbook of Asset and Liability Management, 10.1016/B978-044453248-0.50015-0

[3] Edward O. Thorp. *Understanding the Kelly Criterion.* The Kelly Capital Growth Investment: Theory and Practice, 2011, chapter 36, pp 509-523. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

[4] Jane Hung. *Betting with the Kelly Criterion*

[5] Wikipedia: *Proebsting's Paradox.*
https://en.wikipedia.org/wiki/Proebsting%27s_paradox

[6] Wikipedia: *St. Petersburg paradox.*
https://en.wikipedia.org/wiki/St._Petersburg_paradox

[7] Tom Lewis. *The Markov and Chebyshev Inequalities*

[8] Kelly Sedor. *The law of large numbers and its applications*

[9] Anonymous authors. *Simple Random Walk* https://bom.to/WFABK

[10] Timo Leenman. *Simple Random Walk, 2008*